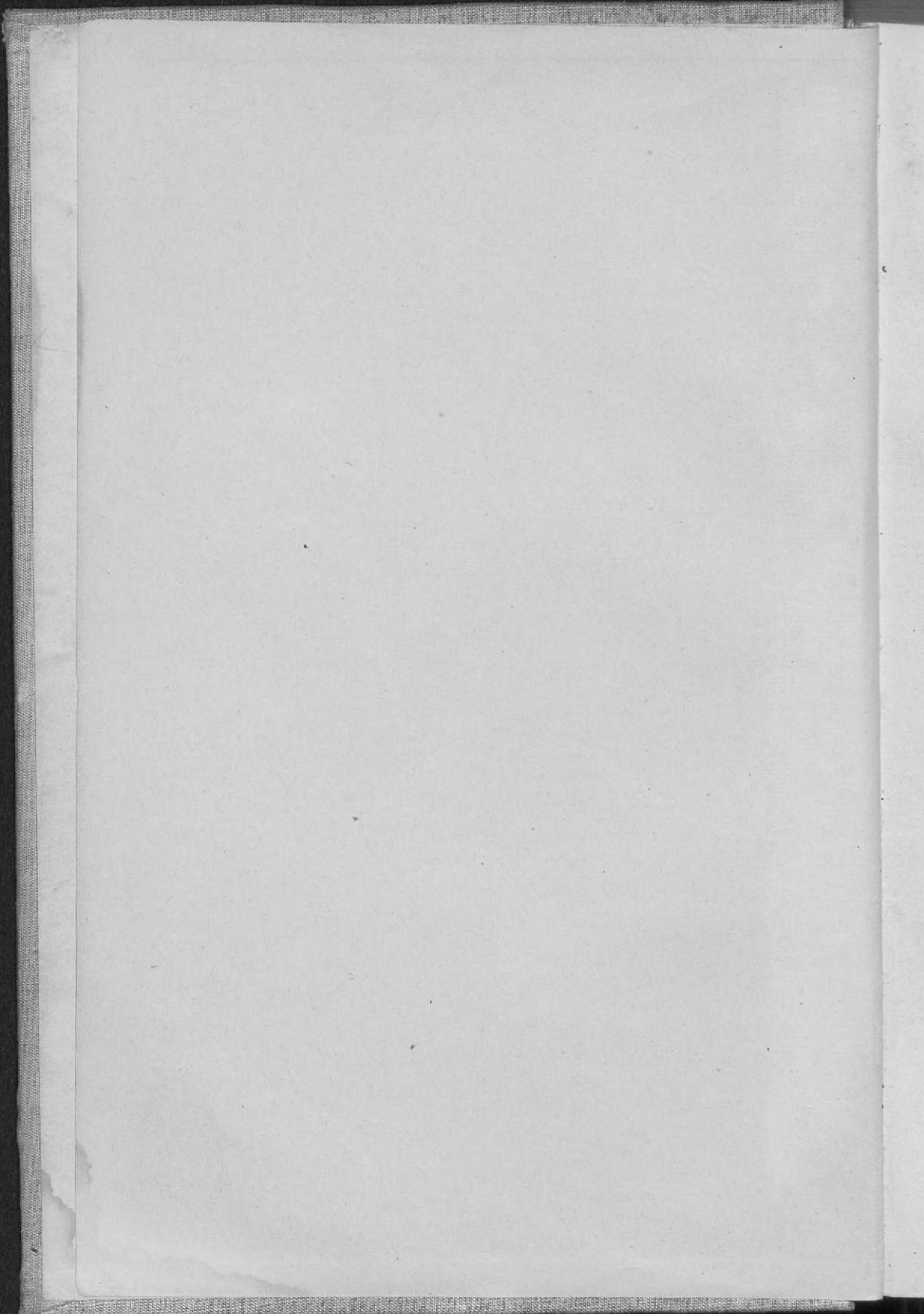


KELLER.  
BERECHNUNG  
DER  
TRIEBWERKE.

12.06.

III A 11<sup>3</sup>

1760 T 60



TRIEBWERKE.



1. Band  
Der Technische  
Bau in Süddeutschland

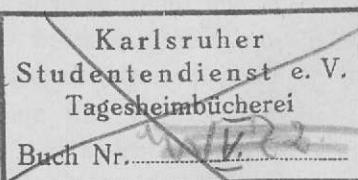
T 60

BERECHNUNG UND KONSTRUKTION  
DER  
**TRIEBWERKE,**  
EINE  
**KONSTRUKTIONSLEHRE**  
FÜR DEN  
**MASCHINENBAU**  
VON

Dr. KARL KELLER,  
Grossherzoglich-Badischer Hofrat und Professor des Maschinenbaues an der technischen  
Hochschule in Karlsruhe.

Dritte bedeutend vermehrte Auflage.

Mit 450 Textfiguren.



MÜNCHEN.  
VERLAG VON FRIEDRICH BASSERMANN.  
1898.

III A 11<sup>3</sup>

Alle Rechte vorbehalten.



## Vorwort zur ersten Auflage.

---

Veranlassung zur Bearbeitung vorliegenden Werkes war für mich das Bedürfnis, ein Handbuch zu besitzen, welches, dem Gange meines Unterrichtes sich anpassend, die Elemente des Maschinenbaues und der Maschinenlehre behandelte. Ein meinen Intentionen entsprechendes Werk sollte nicht bloss Konstruktionsregeln und Zeichnungsvorlagen geben, sondern auch, und wohl in erster Reihe, eine mathematische Entwicklung der Haupt-Konstruktions-Grundsätze enthalten. In letzterer Hinsicht mussten die ausserordentlich wertvollen Publikationen, welche in jüngster Zeit auf dem Gebiete der theoretischen und angewandten Mechanik erschienen sind, unbedingt mit berücksichtigt werden.

Bald aber, nachdem ich die Bearbeitung der hiermit gestellten Aufgabe unternommen, zeigte es sich, dass das begonnene Werk jene Grenzen weit überschreiten würde, welche durch den zunächst im Interesse meiner diesjährigen Schüler einzuhaltenden Zeitpunkt der Herausgabe gesteckt waren. Um aber dennoch ein in sich abgeschlossenes Ganzes darbieten zu können, wurde der Inhalt des nun vorliegenden Teiles meiner Konstruktionslehre auf die „*Triebwerke*“ beschränkt, und umfasst derselbe demnach: theoretische Betrachtungen über die rotierende Bewegung, ihre Fortpflanzung und Übertragung sowie Berechnung und Konstruktion der hieher gehörigen Maschinenteile. Die Behandlung der Kurbelmechanismen, oder die Verbindung der rotierenden mit der geradlinigen Bewegung musste für einen zweiten Teil vorbehalten bleiben.

Der praktische Teil des Buches stützt sich bei Bestimmung der Abmessungen zunächst auf bekannte, oder als bekannt vorauszusetzende Resultate der Festigkeitslehre, zeigt aber auch als Vorbilder gute ausgeführte Konstruktionen. Für die Behandlung der in den Text aufgenommenen Holzschnittfiguren wurde als Hauptgrundsatz festgehalten, dass dieselben Skizzen sein sollten, der Art etwa, wie sie der Lehrer während des Vortrages an die Tafel aufzuzeichnen im stande ist, und sorgfältig vermieden, denselben den Charakter von schattierten Bildern zu geben.

Wenn somit dieses Werk auch zunächst für den Schulgebrauch bestimmt ist, so wird doch auch mancher ausübende Maschinentechniker in demselben brauchbare Winke für seine Konstruktionen finden, und ausserdem vielleicht, was mir persönlich, als Verfasser, die grösste Befriedigung gewähren würde, eine Anregung empfangen, sich darbietende Probleme mit Hilfe der in diesem Buche enthaltenen Anleitungen rechnend, das heisst mehr wissenschaftlich zu verfolgen.

*Karlsruhe, Januar 1874.*

**Der Verfasser.**

## Vorwort zur zweiten Auflage.

---

Indem ich das vorliegende Werk als zweite Auflage meiner „Triebwerke“ meinen Fachgenossen übergebe, glaube ich vor allem auf diejenigen Punkte hinweisen zu sollen, in welchen dasselbe wesentliche Verschiedenheit gegen die frühere Auflage zeigt.

Zunächst musste behufs Einführung des Millimeters anstatt des Centimeters als Massseinheit eine allgemeine Umrechnung der Formeln stattfinden. Ich habe hiedurch einem Bedürfnisse der Praxis zu entsprechen geglaubt, trotzdem ich mir die Vorteile nicht verhehlte, welche die Beibehaltung des Centimeters als Massseinheit geboten haben würde. Ich nenne darunter vor allem die Übereinstimmung der spezifischen Belastungen mit dem Atmosphärendruck und die, nach meiner Meinung wenigstens, leichter vorstellbaren grösseren Werte der spezifischen Belastungen und Spannungsintensitäten in Kilogrammen per Quadratcentimeter.

Wesentliche Änderungen zeigen sich des weiteren in der allgemeinen, allerdings nur ganz kurzen Behandlung der Differential- oder epicyklischen Räderwerke.

Bei den Riementrieben musste natürlich auf neuere Ausführungen Rücksicht genommen werden, doch glaubte ich von der allgemeinen Annahme der „amerikanischen“ Berechnungsweise absehen zu müssen. Dagegen wurde die Konstruktion schmiedeiserner Scheiben mitberücksichtigt.

Bei den Seiltrieben wurde zunächst die Bestimmung der Seilkurve als Kettenlinie beibehalten, da nur unter dieser Annahme für einen sehr schrägen Trieb, wie er bei Hanf-

seiltransmissionen oft vorkommt, die Einsenkungen richtig bestimmt werden können. Für ganz oder nahezu horizontalen Trieb dagegen mag wohl die Annahme der Parabel statt der Kettenlinie genügen, und habe ich daher auch hiefür, sowie auch für die Bestimmung der Lage der Leitrollen beim polygonalen Seiltrieb sehr einfache Formeln gegeben.

In den beiden Kapiteln über die Transmissionen mit Seilen und Ketten wurde in kurzem auch auf die Benützung dieser Zugorgane bei Hebezeugen Bezug genommen.

Der vierte Abschnitt ist neu hinzugekommen und entspricht dies einer in der Vorrede zur ersten Auflage gemachten Zusage. Gerade in diesem Abschnitte, bei den Kurbelgetrieben, war es besonders schwierig, den Stoff abzugrenzen, um einerseits von den gebräuchlichsten Getriebsanordnungen keine wegzulassen, andererseits aber auch den Umfang des Werkes nicht über ein passendes Mass zu vergrössern. In dieser Beziehung leitete mich zum Teil das Bestreben, dem Werke seinen Charakter zu wahren, nach welchem es kein Lehrbuch der Kinematik oder theoretischen Mechanik sein sollte, und demgemäß nicht bloss mancher theoretisch interessante Mechanismus, sondern auch manche für den konstruktiven und praktischen Maschinenbau nicht direkt verwertbare theoretische Untersuchung weggelassen werden musste. Das Werk sollte eine *Konstruktionslehre für die gebräuchlichsten Triebwerksanlagen* (das »working« oder »driving gear« des englischen Maschinenbaues) sein. Beibehalten wurde aber für die Textfiguren der ausgesprochene Charakter der Handskizzen mit sorgfältiger Vermeidung aller unwesentlichen Details.

Dass das Werk so manches enthält, was in einer oder der anderen Fachschrift schon zu finden ist, ist wohl selbstverständlich, ich vertraue aber, dass Fachmänner darin neben dem Bekannten auch manches Neue und mir Eigentümliche finden werden.

*Karlsruhe, März 1881.*

**Der Verfasser.**

## Vorrede zur dritten Auflage.

Als die Notwendigkeit der Veranstaltung einer neuen Auflage meiner Triebwerke an mich herantrat, stand für mich vor allem das fest, dass dem Buche, ohngeachtet so mancher, ja vieler aufzunehmender Änderungen, Ergänzungen und auch Verbesserungen, im wesentlichen sein Charakter gewahrt bleiben solle; jenes Eigentümliche in Anordnung und Behandlung des Stoffes, welches trotz, oder vielleicht wegen des verhältnismässig geringen Umfanges des Werkes bei immerhin thunlichst erschöpfender Bewältigung des vorliegenden Gegenstandes, dem Buche nicht allein bei meinen Schülern, sondern auch in weiteren Kreisen der Praxis eine erfreuliche Beliebtheit zu erringen vermochte.

Es entspricht meiner Erfahrung bei der unmittelbaren persönlichen Unterrichtserteilung im Maschinenkonstruieren, dass der Studierende den meisten und dauernden Gewinn hat, wenn ihm möglichst selten fertige Zeichnungen zum mehr oder weniger peinlichen Nachzeichnen vorgelegt werden, wobei die Vorlage nur geometrisch zu vergrössern oder zu verkleinern ist, sondern wenn er das Konstruieren insbesondere von Maschinen-elementen sozusagen synthetisch zu betreiben hat. So z. B. soll der Schüler nicht ein in Modell oder Musterzeichnung vorliegendes Hänglager kopieren oder höchstens auf einen anderen Wellendurchmesser umzeichnen, sondern er muss ein solches Lager aus verschiedenen ihm vorgeschriebenen Konstruktionstypen für Lagerschale, Deckelkonstruktion, Tragkörper, Befestigungsart u. s. w. zu kombinieren lernen. Wie es somit für mich in meinem Konstruktionsunterrichte Grundsatz ist, eigentliche Zeichnungsvorlagen thunlichst zu vermeiden, so habe ich auch die in der vorhergehenden zweiten und in der ersten Auflage noch eingereihten Zeichnungstafeln weggelassen, und deren Inhalt, so weit es nötig und wünschenswert erschien, dem Texte eingefügt. Um aber bei der hiedurch veranlassten Vermehrung von Text und Textfiguren den Umfang des Buches nicht erheblich gegen denjenigen der II. Auflage zu ver-

mehren, musste der Stoff in anderer Hinsicht gekürzt werden. Solche Kürzung trat insbesondere in den Abschnitten über Bestimmung der theoretischen Radgrundformen und über Zahnrädertheorie ein, während an vielen anderen Stellen weitläufigere Rechnungen weggelassen, und nach dem Ansatz der betreffenden Gleichungen einfach die Schlussresultate angegeben wurden. Es war dies in einzelnen Abschnitten umso mehr nötig, als an anderen Orten wiederum naturgemäße Erweiterungen eintreten mussten; hieher gehören die Abschnitte betreffend die Stufen- und Pfeilräder, die Schraubenräder, die Hanfseiltransmissionen, den Kreissciltrieb u. a.

Was die Regeln zur Bestimmung von Detailabmessungen betrifft, so war es mein Bestreben, die Aufstellung von sogenannten Konstruktionsrezepten (Kalenderregeln) thunlichst zu vermeiden; wo es einigermassen anging, wurde der Rechnungsansatz gezeigt, aus welchem sich auf Grundlage von Festigkeitsrechnungen mindestens die nicht zu unterschreitenden Grenzwerte für die Abmessungen finden lassen. An einzelnen Stellen andererseits war es allerdings nicht zu umgehen, dem angehenden Konstrukteur mit einer einfachen, nach der Methode der Verhältniszahlen gebildeten Formel bei der Bestimmung von Detail-Abmessungen beizustehen.

Endlich glaubte ich auch noch, besonders zufolge mehrfacher an mich ergangener Anregung aus der Praxis und aus den Kreisen meiner Schüler, die bekannten Zahlentabellen, wenn auch in möglichst reduziertem Umfange in einem Anhange mit aufnehmen zu sollen.

So übergebe ich denn meine „Triebwerke“ in dritter Auflage meinen Fachgenossen und den Studierenden des Maschinenwesens in der Hoffnung, dass erstere auch in dieser neuen Bearbeitung manches für sie Brauchbares, ja Wertvolle finden, von letzteren aber manche mit Hilfe dieses Buches und durch eigenen Fleiss sich zu tüchtigen Vertretern unseres Berufsfaches, der Maschinentechnik, ausbilden mögen, und aus dem in diesem Buche Gebotenen Anregung schöpfen werden zu weiterem selbständigen Arbeiten.

*Karlsruhe, im August 1898.*

**Der Verfasser.**

# Inhalt

---

## Erster Abschnitt.

Die rotierende Bewegung, ihre Darstellung und  
Übertragung durch Axen und Wellen.

### I. Einleitung.

§		Seite
1.	Rotierende Bewegung eines Punktes . . . . .	3
2.	Rotierende Bewegung mehrerer Punkte . . . . .	4
3.	Gleichzeitige Rotationen um zwei oder mehrere Axen . . . . .	5

### II. Drehungssachsen und deren Lagerung.

4.	Vorbemerkungen . . . . .	10
5.	Tragzapfen . . . . .	10
6.	Stützzapfen . . . . .	16
7.	Inanspruchnahme von Axen und Wellen . . . . .	19
8.	Tragachsen . . . . .	21
9.	Torsionswellen . . . . .	24
10.	Verwandlung der Querschnittsformen . . . . .	28
11.	Lagerung von Zapfen, Axen und Wellen . . . . .	33
12.	Reibung an den Lagerstellen im Allgemeinen . . . . .	42
13.	Reibung bei Stützzapfen . . . . .	44
14.	Reibung bei Tragzapfen . . . . .	47

### III. Wellenkupplungen.

15.	Feste Kupplungen für Wellen, deren geometrische Axen zusammenfallen . . . . .	52
16.	Feste Kupplung für Wellen, deren geometrische Axen parallel laufen . . . . .	60
17.	Feste Kupplung für Wellen, deren geometrische Axen sich schneiden . . . . .	62
18.	Auslösbare Kupplungen . . . . .	71

## Zweiter Abschnitt.

### Verbindung zweier rotierender Bewegungen durch Räder in unmittelbarer Berührung.

#### IV. Theorie der Zahnradtransmission.

	Seite
§ 19. Bestimmung der Radgrundformen . . . . .	87
20. Zahnkonstruktionskreise und Grundbedingung für jede Verzahnung . . . . .	96
21. Gleichungen der Zahnkurven . . . . .	103
22. Konstruktion der Zahnkurven. Allgemeine Bedingung . . . . .	106
23. Bestimmung der Zahnkurve eines Rades nach derjenigen des anderen Rades . . . . .	108
24. Bestimmung der Zahnkurven beider Räder aus der Eingriffslinie . . . . .	113
25. Arbeitsverlust beim Räderbetrieb . . . . .	129

#### V. Konstruktive Ausführung der Zahnräder.

26. Bestimmung der Zahn-Abmessungen . . . . .	135
27. Zylindrische Räder mit geraden Zahnmittellinien . . . . .	145
28. Konische Räder mit geraden Zahnmittellinien . . . . .	154
29. Zylindrische und konische Stufenräder . . . . .	159
30. Hyperbolische Räder mit geraden Zahnmittellinien . . . . .	163
31. Zylindrische und konische Räder mit gekrümmten Zahnmittel- linien . . . . .	170
32. Hyperbolische Schraubenräder für gekreuzte Axen . . . . .	175
33. Zylindrische Räder mit unrundem Querschnitt . . . . .	188
34. Zusammengesetzte Rädervorgelege . . . . .	200

#### VI. Reibungsräder.

35. Allgemeine Anordnungen und Berechnungen für den Reibungs- betrieb . . . . .	208
36. Arbeitsverlust bei Reibungsrädern . . . . .	213
37. Konstruktive Ausführung der Reibungsräder . . . . .	216

## Dritter Abschnitt.

### Verbindung zweier rotierender Bewegungen durch Räder in mittelbarer Verbindung.

#### VII. Riementransmission.

38. Allgemeine Berechnung der Spannungen in einem um zwei Rollen gelegten biegsamen Faden . . . . .	223
39. Berechnung der Abmessungen von Lederriemen . . . . .	227
40. Konstruktive Ausführung der Riemenscheiben . . . . .	231

## XIII

§	Seite
41. Spannrolle . . . . .	244
42. Verschiedene Rollenanordnungen . . . . .	248
43. Arbeitsverluste bei Riementransmissionen . . . . .	253
44. Bewegungsübertragung mit veränderlichem Geschwindigkeitsverhältnisse . . . . .	257

### VIII. Seiltransmission.

45. Die Kettenlinie als Seilkurve . . . . .	264
46. Genäherte Bestimmung der Seilkurve als Parabel . . . . .	271
47. Berechnung der Zugspannungen im Seile . . . . .	279
48. Inanspruchnahme eines Drahtseiles . . . . .	283
49. Konstruktionsdetails für Drahtseiltransmissionen . . . . .	288
50. Zwischenstationen, Trag- und Leitrollen . . . . .	300
51. Hanf- und Baumwollenseile als Transmissionsorgane . . . . .	306
52. Konstruktions-Verhältnisse für Hanfseiltransmissionen . . . . .	314
53. Der Kreisseiltrrieb . . . . .	321
54. Anwendung der Seile bei Hebezeugen . . . . .	330
55. Widerstände bei Seiltrrieben . . . . .	340

### IX. Kettentransmissionen.

56. Die Gelenkkette . . . . .	343
57. Diverse Gliederketten . . . . .	352
58. Anwendung der Ketten bei Hebezeugen . . . . .	356
59. Widerstände bei Kettentrieben . . . . .	361

### X. Bewegungsumkehrungen.

60. Allgemeine Anordnung von Vorrichtungen für Abstellung und Umkehrung der drehenden Bewegung . . . . .	364
--	-----

## Vierter Abschnitt.

### Verbindung zweier rotierender Bewegungen durch starre Stangen.

### XI. Theoretische Betrachtungen.

61. Allgemeine Bewegungsverhältnisse . . . . .	373
62. Bewegung eines Stangenpunktes nach vorgeschriebener Richtung	379
63. Angenäherte Geradführung eines Stangenpunktes . . . . .	384

### XII. Das einfache Kurbelgetriebe.

64. Bewegungsverhältnisse . . . . .	387
65. Kräfte . . . . .	392
66. Widerstände und Arbeitsverluste . . . . .	402

## XIV

§		Seite
67.	Inanspruchnahme und Berechnung der Hauptdimensionen der Stirnkurbel	405
68.	Detailkonstruktion der Stirnkurbel	411
69.	Hauptdimensionen einer nur auf Zug beanspruchten Verbindungsstange	415
70.	Hauptdimensionen einer wechselweise auf Zug und Druck in Anspruch genommenen Stange	419
71.	Detailkonstruktion der Triebstangenköpfe	429
72.	Inanspruchnahme und Berechnung der Hauptdimensionen des Kreuzkopfes, seiner Gerafführung und der Kolbenstange	441
73.	Detailkonstruktion des Kreuzkopfes	449

## XIII. Wellenkröpfung und Exzenter.

74.	Allgemeine Anordnung und Widerstände	456
75.	Konstruktive Ausführung der Exzenter scheiben	460
76.	Konstruktion der Exzenter ringe	463
77.	Berechnung der Kurbelkröpfungen oder Krummaxen	466

## XIV. Kurbelgetriebe mit Schleifenbewegung.

78.	Bewegungsgesetz und Widerstände für die Kurbelschleife	471
79.	Hauptdimensionen und konstruktive Ausführung der Kurbelschleife	476
80.	Bewegungsgesetz und Widerstände für das Kurbelgetriebe mit schwingender Schleife	483
81.	Konstruktive Ausführung der schwingenden Kurbelschleife	489

## XV. Kurbelgetriebe mit Schwinge.

82.	Allgemeine Anordnung	490
83.	Schwingen mit massiven und homogenen Tragwandungen	493
84.	Schwingen mit genieteten Blechtragwänden	496
85.	Hauptdimensionen schwingender Hebel von durchbrochener (Fachwerk-) Konstruktion	505
86.	Schwingen in Form von Winkelhebeln	510
87.	Konstruktive Details für Schwingen	513

## XVI. Anhang. Mathematische Tafeln.

	Trigonometrische Tafel	519
	Potenzen- und Kreis-Tafel	520
	Vierstellige Logarithmen-Tafeln	522
	Winkelgeschwindigkeit aus Umdrehungszahl	524

## Erster Abschnitt.

Die rotierende Bewegung,  
ihre Darstellung und Übertragung durch Axen und Wellen.

---

## I. EINLEITUNG.

---

### § 1. Rotierende Bewegung eines Punktes.

Die ununterbrochene Folge der Lagen, welche ein Punkt während seiner Bewegung einnimmt, bildet seine Bahn; sie ist geradlinig oder krumm.

Es gibt zwei Bewegungen, welche man als einfache Bewegungen bezeichnet, weil man auf sie alle andern zurückführen kann, die Translation oder geradlinige Bewegung und die Rotation oder drehende Bewegung.

Ein bewegter Punkt hat eine einfache rotierende Bewegung, wenn in jeder seiner Lagen seine Entfernung von einer geraden Linie konstant bleibt; die letztere heisst Rotationsaxe und ist wie jede gerade Linie durch 2 beliebige Punkte in ihr gegeben. Die Bahn des beweglichen Punktes ist eine Kreislinie, deren Halbmesser  $r$  die kürzeste Entfernung des erstern von jener Geraden, d. h. die Länge der Senkrechten auf die letztere ist; die Ebene dieser Kreisbahn steht daher senkrecht auf der Rotationsaxe, und der Mittelpunkt derselben ist der Durchschnittspunkt jener Ebene mit der Rotationsaxe. Die Radien, Fahrstrahlen, an 2 vom Punkte  $p$  zu Anfang und Ende des Zeitintervallus  $dt$  innegehabten Stellungen schliessen einen Winkel  $d\varphi$  ein, den Drehungswinkel, und der von dem bewegten Punkte in dieser Zeit auf seiner Kreisbahn zurückgelegte Weg ist  $ds = r d\varphi$ . Als Mass der Geschwindigkeit wird der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg betrachtet

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt}.$$

Die Geschwindigkeit, welche bei dieser Stellungsänderung des Fahrstrahles ein Punkt desselben in der Entfernung = 1 von

der Rotationsaxe annimmt, heisst Winkelgeschwindigkeit, bezeichnet durch

$$w = \frac{d \varphi}{d t},$$

daher ist

$$v = r w,$$

d. h. die lineare Geschwindigkeit des rotierenden Punktes ist gleich dem Produkte aus seiner Winkelgeschwindigkeit und seiner Entfernung von der Drehungssaxe. Als Zeiteinheit wird hiebei in der Regel die Sekunde angenommen.

Ist  $w$ , also auch  $\frac{d \varphi}{d t}$ , für eine gewisse Zeit konstant, so

gilt auch

$$s = r \varphi,$$

und bei einer ganzen Umdrehung wird für  $\varphi = 2 \pi$

$s = 2 r \pi \dots$  der Weg eines rotierenden Punktes entsprechend einer ganzen Umdrehung,

$s = 2 r \pi n \dots$  der Weg eines rotierenden Punktes entsprechend  $n$  ganzen Umdrehungen. Wenn  $n$  die Anzahl der Umdrehungen in der Minute bezeichnet, so ist

$s = 2 r \pi n \dots$  der Weg eines rotierenden Punktes in einer Minute,

$s = \frac{2 r \pi n}{60} \dots$  der Weg eines rotierenden Punktes in einer Sekunde oder dessen lineare Geschwindigkeit  $= v$ .

Es gilt daher

$$v = r w = \frac{2 r \pi n}{60}.$$

## § 2. Rotierende Bewegung mehrerer Punkte.

Für 2 rotierende Punkte  $p_1$  und  $p_2$  ergibt sich

$$v_1 = \frac{2 r_1 \pi n_1}{60} = r_1 \frac{d \varphi_1}{d t} = r_1 w_1,$$

$$v_2 = \frac{2 r_2 \pi n_2}{60} = r_2 \frac{d \varphi_2}{d t} = r_2 w_2,$$

und hieraus

$$\frac{r_1 n_1}{r_2 n_2} = \frac{r_1 d\varphi_1}{r_2 d\varphi_2} = \frac{r_1 w_1}{r_2 w_2} \text{ oder } \frac{n_1}{n_2} = \frac{w_1}{w_2}.$$

Sind 2 Punkte in konstanter Entfernung  $E$  von einander, und sind für beide auch ihre Abstände  $r_1$  und  $r_2$  von der gleichen Rotationsaxe konstant, so ist durch dieselben eine um die gleiche Axe rotierende gerade Linie gegeben, deren sämtliche Punkte an der Rotation in der Weise teilnehmen, dass Alle wie  $p_1$  und  $p_2$  zu gleicher Zeit eine ganze oder zu gleicher Zeit  $n$  Umdrehungen vollenden, so dass

$$n_1 = n_2,$$

und daher auch

$$w_1 = w_2 \quad \text{wird.}$$

Durch einen dritten mit den beiden ersten nicht in gerader Linie liegenden Punkt ist eine rotierende Ebene und damit ein ganzes rotierendes System gegeben, für dessen sämtliche Punkte gilt:

$$\begin{aligned} n_1 &= n_2 = n_3 = \dots \\ w_1 &= w_2 = w_3 = \dots \end{aligned}$$

In einer Entfernung  $r = 0$  ist die Bewegungsgeschwindigkeit  $= v_0 = r d\varphi = 0$ , d. h. hier findet keine Bewegung, also Ruhe statt. Zwei solche Punkte eines rotierenden Systemes, welche in Ruhe sind, bestimmen durch die Richtung ihrer Verbindungs- linie die Rotationsaxe.

### § 3. Gleichzeitige Rotationen um zwei oder mehrere Axen.

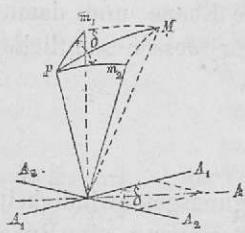
Die rotierende Bewegung eines Punktes und eines Systemes kann auch eine Resultante aus mehreren gleichzeitig auftretenden komponenten Rotationen, und zwar können die letztern sein:

- 1) Rotationen um die gleiche Axe,
- 2) Rotationen um parallele Axen,
- 3) Rotationen um sich schneidende Axen,
- 4) Rotationen um gekreuzte Axen.

Wir betrachten den allgemeineren (3.) Fall zuerst, aus welchem dann der 2. und 1. als Specialität folgt; die hiefür erhaltenen Resultate dienen sodann zur Behandlung des 4. Falles.

Angenommen werde ein unveränderliches System, welches vermöge irgend einer Ursache eine Rotation um die Axe  $A_1$  mit einer Winkelgeschwindigkeit  $w_1$  und eine solche um die Axe  $A_2$  mit einer Winkelgeschwindigkeit  $w_2$  habe; beide Axen schneiden sich im Punkte  $O$  unter dem Winkel  $\delta$ . Von dem Systeme fassen wir einen Punkt  $p$  ins Auge, der von beiden Axen, mithin vom Durchschnittspunkt  $O$  beider Axen um  $r = 1$  abstehe, und der also, wenn diese Entfernung konstant bleiben soll, in jeder Lage nur in einer Kugeloberfläche gefunden werden kann, welche mit dem Radius  $r = 1$  um den Punkt  $O$  gezogen wird.

Fig. 1.



Vermöge der Einzel-Rotationen ist der auf dieser Kugeloberfläche zurückgelegte Bogen  $\varphi_1 = p m_1$ , bezüglich  $\varphi_2 = p m_2$  und es möge bei dem gleichzeitigen Eintragen beider Rotationen der bewegliche Punkt an eine andere Stelle  $M$  der Kugeloberfläche gelangen, welche mit den beiden Punkten  $p$  und  $m_1$  ein sphärisches Dreieck bildet.

Geschehen die Rotationen nur in der unendlich kleinen Zeit  $d t$ , und sind die auf der Kugeloberfläche zurückgelegten Bogen ebenfalls unendlich klein:  $p m_1 = d \varphi_1$ ,

$$p m_2 = d \varphi_2,$$

$$p M = d \Phi,$$

so geht endlich die Kugeloberfläche in das Element der Tangentialebene über, und aus dem sphärischen Dreieck  $p m_1 M$  wird ein ebenes, für welches gilt

$$(d \Phi)^2 = (d \varphi_1)^2 + (d \varphi_2)^2 + 2 d \varphi_1 d \varphi_2 \cos \delta;$$

hieraus ergibt sich

$$W^2 = w_1^2 + w_2^2 + 2 w_1 w_2 \cos \delta \dots \dots \quad 1)$$

als Winkelgeschwindigkeit der resultierenden Rotation.

Die resultierende Axe  $A$  und die Richtung der resultierenden Rotation stehen jedenfalls senkrecht zu einander, und wenn letztere mit den komponenten Rotationen in *einer* Ebene liegt, so liegt auch die Axe der resultierenden Rotation mit den Axen der komponenten Rotationen in *einer* Ebene. Sie teilt dann den Winkel der letzteren genau in demselben Verhältnis, in welchem die Richtung der resultierenden Rotation den Winkel der beiden komponenten Rotationen teilt, und lässt sich daher der Satz aussprechen:

*Zwei unendlich kleine gleichzeitige Rotationen um 2 sich schneidende Axe sind gleich einer dritten um eine durch den gleichen Schnittpunkt gehende Axe, und findet man die Grösse der resultierenden Rotationsgeschwindigkeit, sowie die Lage von deren Axe durch die Diagonale des Parallelogrammes, dessen Seiten die ursprünglichen Axe sind, auf welchen Längen abgetragen werden, welche den ursprünglichen Winkelgeschwindigkeiten gleich oder proportional sind.*

Ein Spezialfall ist gegeben, wenn die beiden ursprünglichen Rotationen um parallele Axe geschehen, d. h. wenn für  $\delta = 0$  auch  $\cos \delta = 1$  ist, und ergibt sich dann

$$W^2 = w_1^2 + w_2^2 + 2 w_1 w_2 = (w_1 + w_2)^2, \quad \dots \quad (2)$$

$$W = w_1 + w_2.$$

Die resultierende Rotation findet in diesem Falle statt in einer Ebene senkrecht zur Ebene der beiden parallelen Axe, um eine resultierende Axe, welche ebenfalls in der Ebene der beiden ursprünglichen parallelen Axe liegt, und in Entfernung  $a_1$  und  $a_2$  von denselben, welche gegeben sind durch

$$a_1 w_1 = a_2 w_2,$$

d. h. es wird in Folge jeder der beiden Rotationen jeder Systempunkt eine gewisse lineare Geschwindigkeit haben, und wird jedenfalls irgend eine Stelle zu finden sein, an welcher die durch die ursprünglichen Rotationen veranlassten linearen Geschwindigkeiten gleich und entgegengesetzt gerichtet sind, an welcher daher absolute Ruhe eintritt; an dieser Stelle in der Entfernung  $a_1$  von der Axe  $A_1$  und in der Entfernung  $a_2$  von der Axe  $A_2$  wird wegen der sich hier findenden Ruhe der Systempunkte die resultierende Axe sein.

Heissen wir  $E = a_1 + a_2$  die Entfernung der beiden ursprünglichen Axen, so folgt nun

$$\left. \begin{aligned} E &= a_1 \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} \right), \\ &= a_1 \left( 1 + \frac{w_1}{w_2} \right) = a_1 (1 + i), \\ a_1 &= \frac{E}{1 + i}, \\ a_2 &= a_1 \frac{a_2}{a_1} = \frac{E}{1 + i} \cdot \frac{w_1}{w_2} = \frac{E}{1 + i} i. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 3)$$

Sind die Rotationen entgegengesetzt gerichtet, so ändert sich ein Zeichen, etwa dasjenige von  $w_2$ , und ergibt sich  $W = w_1 - w_2$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &= -\frac{w_1}{w_2} = -i, \\ E = (a_1 + a_2) &= a_1 \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} \right) = a_1 (1 - i), \\ a_1 &= \frac{E}{1 - i}, \\ a_2 &= -\frac{E i}{1 - i}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 4)$$

Geschehen die beiden Rotationen um parallele Axen mit gleichen Winkelgeschwindigkeiten, d. h. ist

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= w_2 \\ i &= 1, \end{aligned} \right.$$

so folgt bei gleichgerichteten Rotationen  $W = 2w_1 = 2w_2$

$$\left. \begin{aligned} \text{und} \quad a_1 &= \frac{E}{1 + i} = \frac{E}{2}, \\ a_2 &= \frac{E}{2}, \quad \cdot \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 5)$$

und bei entgegengesetzten Rotationsrichtungen, wenn  $i$  sein Zeichen ändert,

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{E}{1 - i} = \infty, \\ a_2 &= -\frac{E i}{1 - i} = -\infty, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 6)$$

d. h. im letzteren Falle wird die Bewegung eine Rotation mit einer Winkelgeschwindigkeit  $W = w_1 - w_2 = 0$  um eine im

Abstände  $= \infty$  liegende Axe; die lineare Geschwindigkeit dieser resultierenden geradlinigen Bewegung würde sich demnach ausdrücken durch  $v = 0 \cdot \infty$ .

Diese Geschwindigkeit muss aber, linear gedacht, gleich der resultierenden, d. h. der algebraischen Summe aus den beiden linearen komponenten Geschwindigkeiten sein, d. h.

$$\begin{aligned} v = 0 \cdot \infty &= a_1 w_1 + a_2 w_2 = w_1 (a_1 + a_2), \\ &= w_1 \left\{ \frac{E}{1-i} - \frac{E i}{1-i} \right\} = E w \quad \dots \dots \dots 7) \end{aligned}$$

Finden die beiden ursprünglichen Rotationen endlich statt um Axen, welche zusammenfallen, d. h. um die gleiche Axe statt, so wird die Entfernung  $E = 0$  sein, und daher wird auch  $a_1$  und  $a_2 = 0$ , d. h. die resultierende Axe fällt mit der ursprünglichen Axe zusammen, die Rotationsgeschwindigkeit ist aber

$$W = w_1 \pm w_2,$$

je nachdem die komponenten Rotationen nach gleichem oder entgegengesetztem Sinne vor sich gehen; ist endlich  $w_1 = w_2$ , so wird im ersten Falle  $W = 2 w_1 = 2 w_2$ ,

im zweiten Falle  $W = 0$ .

Geschieht die eine Rotation, etwa diejenige mit der Winkelgeschwindigkeit  $w_2$ , um eine unendlich fern liegende Axe  $A_2 \# A_1$ , so wird  $a_2 = \infty$  und  $w_2 = 0$ , und die Bewegung irgend eines an dieser Rotation teilnehmenden Punktes geschieht mit der Geschwindigkeit  $a_2 w_2 = v_2$  in gerader Linie. Dann wird  $W = w_1$  und bestimmt sich die Axe der resultierenden Rotation durch

$$a_1 w_1 = a_2 w_2,$$

$$\text{woraus} \quad a_1 = \frac{a_2 w_2}{w_1} = \frac{v_2}{w_1} \quad \dots \dots \dots 8)$$

d. h. eine mit der Rotation  $w_1$  gleichzeitig auftretende geradlinige Bewegung (Translation) mit der Geschwindigkeit  $v_2$  bewirkt eine Verlegung der Rotationsaxe  $A_1$  um eine Strecke  $a_1$ ,

gegeben durch das Verhältnis  $\frac{v_2}{w_1}$ . Umgekehrt kann jede Rotationsaxe verlegt werden, wenn man dem System noch eine geradlinige Bewegung erteilt mit der Geschwindigkeit  $v_2$ , welche gegeben ist durch die Gleichung

$$v_2 = a_1 w_1.$$

*Rotationen um gekreuzte Axen* werden behandelt bei Bestimmung der allgemeinsten Radformen, wozu die Lösung dieser Aufgabe nötig sein wird.

## II. DREHUNGSAXEN UND DEREN LAGERUNG.

### § 4. Vorbemerkungen.

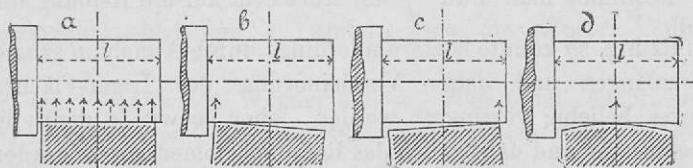
Die geometrischen Rotationsachsen sind verkörpert in Axen und Wellen, von welchen die Ersteren hauptsächlich auf Biegung, die Letzteren hauptsächlich auf Torsion in Anspruch genommen sind, während jedoch meistenteils ein gleichzeitiges Biegungs- und Verdrehungsmoment auf dieselben einwirkt, so dass eine zutreffende Unterscheidung zwischen diesen beiden Benennungen oft nicht getroffen werden kann. Beide aber, Axen und Wellen, müssen an einzelnen Stellen derart gestützt werden, dass sie nur eine reine drehende Bewegung, aber keinerlei Verschiebung, weder in der Richtung der Rotationsaxe, noch in irgend einer anderen Richtung, annehmen können, d. h. sie müssen in sogenannten Lagern liegen. Die Teile, welche zunächst mit den Lagern in Berührung stehen, heissen entweder Zapfen oder Axen- und Wellen-Hälse, je nachdem diese Teile sich am Ende oder an irgend einer andern Stelle der Axe oder Welle befinden. Zapfen, sowie Wellen- und Axenhälse äussern jedenfalls einen gewissen Druck auf ihre Unterlage und werden infolge dessen bei ihrer rotierenden Bewegung dort Reibung und Abnutzung veranlassen; bei solchen ist mithin neben der Festigkeit auch die Verhütung von Abnutzung und Warmlaufen in betracht zu ziehen. Bei anderen Zapfen, welche nicht beständig rotieren, sondern nur eine gewisse beschränkte Drehbarkeit der damit verbundenen Maschinenteile bezuwecken, sind die Rücksichten auf Festigkeit allein oder doch vor allem massgebend.

### § 5. Tragzapfen.

Sieht man von zufälligen Einwirkungen ab, so sind die Endzapfen an Axen und Wellen zunächst auf Biegung in An-

spruch genommen, wobei als die biegende Kraft die Reaktion  $P$  des Lagers angesehen werden muss, welche bei zylindrischer

Fig. 2.



Form des Zapfens entweder als gleichförmig (Fig. 2 a) über die ganze Länge des Zapfens verteilt, oder lokal am Ende (Fig. 2, b und c) oder in der Mitte konzentriert (Fig. 2 d) angenommen werden kann. Unter diesen Annahmen scheint diejenige (Fig. 2 d) die für die Zapfenberechnung geeignete zu sein, welche auch die Ergebnisse der Versuche von Beauchamp Tower\*) berücksichtigt.

Somit ergibt sich, wenn

$l$  und  $d$  Länge und Durchmesser des Zapfens,

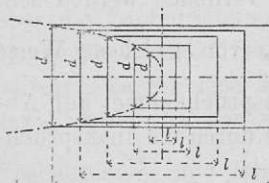
$k$  die zulässige Materialbeanspruchung bedeutet, für die Stelle der Maximalinanspruchnahme, das innere Zapfenende,

$$P \frac{1}{2} l = \frac{\pi}{32} d^3 k, \quad (9)$$

$$d^3 = \frac{16}{\pi k} l P \quad \dots \dots \dots \quad (9)$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi k} \frac{l}{d} P} \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

Fig. 3



Die theoretische Form des Zapfens, wenn derselbe als ein Träger gleicher Festigkeit hergestellt werden soll, ist im Längsschnitt diejenige einer kubischen Parabel, mit welcher der berechnete Querschnitt, das innere Ende des Zapfens jederzeit zusammenfallen muss. Der in zylindrischer Form hergestellte Zapfen

\*) The Eng. vol. 58. p. 484. Hiernach ist die Pressung in der Mitte der Lagerlänge am grössten, nimmt gegen das Zapfenende nach beiden Seiten hin erheblich ab und wird am Ende selbst = 0.

ist mithin kein Träger gleicher Festigkeit, und mit einem solchen nur an seinem Endquerschnitt zusammenfallend. (Fig. 3.)

Bestimmt man nun  $\frac{l}{d}$  mit Rücksicht auf die Reibung und

Abnützung, so könnte letztere allerdings durch Annahme grosser Zapfenlängen und daher Verkleinerung des Lager-Flächen-  
druckes beliebig verringert werden, aber es würde dann der Durchmesser und daher auch das Reibungsmoment gross werden,  
während andererseits durch Verringerung der Länge des Zapfens  
dessen Durchmesser und Reibungsmoment beliebig klein er-  
halten werden könnte, nur würde damit Flächendruck und  
Abnützung sich steigern. Die Praxis hat den richtigen Mittel-  
weg gefunden, indem sie dem Flächendruck eine gewisse Grösse  
nicht zu überschreiten gestattet, welche von der Schnelligkeit  
der Bewegung abhängig ist. Es wird zunächst für eine ge-  
wisse Zahl  $n$  der Umdrehungen per Minute das Verhältnis  
schmiedeiserner Zapfen, welche in Rotguss- oder Weissguss-  
Lagern laufen, festgestellt, und zwar etwa nachfolgender Tabelle  
entsprechend, für

$n <$	60	120	180	240	300	360	420	...
-------	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$\frac{l}{d} =$	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	...
-----------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Für Zapfen mit ganz geringer Tourenzahl, mithin bei ganz  
langsamer rotierender oder schwingender Bewegung, darf bei  
geringerer Rücksicht auf Abnützung auch  $\frac{l}{d}$  kleiner bis  $= 1$ ,

für Zapfen, welche gar nicht rotieren, durch welche einer Kon-  
struktion nur eine gewisse Gelenkigkeit verliehen werden soll,

$\frac{l}{d}$  noch kleiner bis  $= \frac{1}{3}$  gesetzt werden, von welchem Werte

an die Spannungsintensität durch Inanspruchnahme auf Ab-  
scheerung bedeutender wird als diejenige durch die Inanspruch-  
nahme auf Biegung.

Für andere Materialien, insbesondere für Gusstahl, erhält  
man passende Längen-Verhältnisse  $\frac{l}{d}$  unter der Annahme, dass  
die Längen der Zapfen aus diesen Materialien gleich werden

sollen mit den Längen gleichbelasteter schmiedeiserner Zapfen. Da, bei gleicher Belastung und gleicher Länge, gemäss Gl. 9, die Durchmesser sich verhalten wie umgekehrt die  $\sqrt[3]{V}$  aus den Festigkeitskoeffizienten  $k$ , ändern sich die Werte  $\frac{l}{d}$  direkt

wie die  $\sqrt[3]{V}$  aus den Werten von  $k$ . Man erhält daher, wenn die zulässige Spannungsintensität angenommen wird

für Schmiedeisen  $k = 4$  kg/qmm

für Gusstahl  $k = 8$  » »

für dieses Längenverhältnis bei Gusstahl  $\sqrt[3]{\frac{8}{4}} = 1,26$  des für Schmiedeeisenzapfen geltenden Wertes.

Es bestimmt sich nun auch der Flächendruck unter der Voraussetzung *gleichmässiger Druckverteilung für neue Zapfen* mit

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{P}{F} = \frac{P}{l d} = \frac{P}{d^2} \frac{d}{l}, \\ p &= \frac{k \pi}{16} \left( \frac{d}{l} \right)^2 \\ \left( \frac{l}{d} \right)^2 &= \frac{\pi k}{16 p} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad 11)$$

und wird demnach dieser Flächendruck für Stahlzapfen im direkten Verhältnis der  $\sqrt[3]{V}$  aus den Festigkeitskoeffizienten  $k$  grösser resultieren als für Schmiedeeisenzapfen.

Während die Annahme gleichmässiger Druckverteilung über die Zapfenreibungsfläche wie über deren Projektion nur bei neuen Zapfen \*) zulässig ist, ergibt sich bei alten, eingelaufenen Zapfen eine Erhöhung der spezifischen Pressung für das Element in der vertikalen Mittelebene des Zapfens im Verhältnis  $\frac{4}{\pi}$ , und folgt hieraus für die Maximalpressung  $p_m$

$$\left( \frac{l}{d} \right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{k}{p_m} \quad \dots \dots \dots \quad 12)$$

\*) Siehe § 13 und 14.

Mit Einrechnung der für die betreffenden Materialien geltigen Festigkeitskoeffizienten erhalten wir aus Formel 10 und 11 nachstehende Tabelle, worin  $d$  und  $l$  in Millimeter ausgedrückt sind:

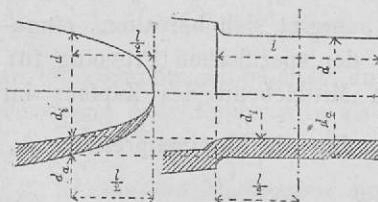
Schmiedeisen.	$n$	<			60	120	180	240	300	360	420
		$\frac{l}{d}$	0,5	0,75	1	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	2,0
		$\frac{d}{VP}$	0,80	0,98	1,13	1,33	1,38	1,43	1,47	1,51	1,56
		$p$	3,13	1,39	0,78	0,40	0,35	0,31	0,27	0,24	0,22
Gusstahl.	$n$	$\frac{l}{d}$	0,63	0,95	1,26	1,76	1,89	2,02	2,14	2,27	2,39
		$\frac{d}{VP}$	0,63	0,78	0,90	1,06	1,10	1,13	1,17	1,20	1,24
		$p$	3,95	1,75	0,99	0,50	0,44	0,39	0,34	0,31	0,27
											0,25

Bei Anwendung von Zapfen aus gehärtetem Stahl, welche auf vorzüglich bearbeiteten und geölten Rotgusslagern laufen, kann der Flächendruck auch bis  $1\frac{1}{2}$  mal, bei Benützung von gehärteten Stahllagern sogar bis 2 mal so gross angenommen werden.

Für Zapfen, bei welchen Druckwechsel stattfindet, und daher das Schmiermaterial fortwährend von einer Stelle zur andern gefördert wird, können grössere Flächendrucke angewandt werden, als für solche, welche stets gegen dieselbe Stelle ihres Lagers gepresst werden.

Für Gusseisenzapfen, bei welchen wohl selten Umdrehungs-

Fig. 4.



zahlen  $n > 120$  zu finden sind, nimmt man durchgehends

den Wert  $\frac{l}{d} = 1\frac{1}{3}$  an und wird dann hiefür mit

$$k = 2 \text{ kg/qmm}$$

$$d = 1,8 \sqrt{P} \dots 13)$$

$$p = 0,22 \text{ kg/qmm.}$$

Mit Rücksicht auf möglichst homogenes Material werden Guss-eisenzapfen häufig hohl gemacht, und bestimmt sich der Durch-

messer solcher hohler Zapfen aus der Bedingung der Gleichwertigkeit der beiden Querschnitte in Hinsicht auf Biegungsfestigkeit unter Beibehaltung der für massive gusseiserne Zapfen geltenden Länge (Fig. 4) durch

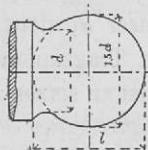
$$\frac{\pi}{32} d^3 = \frac{\pi}{32} \left( \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} \right),$$

worin  $d_a$  den äusseren,  $d_i$  den inneren Durchmesser des hohlen Zapfens bezeichnet. Hieraus ergibt sich

$$d^3 = d_a^3 \left( 1 - \left[ \frac{d_i}{d_a} \right]^4 \right) \dots \dots \dots \quad (14)$$

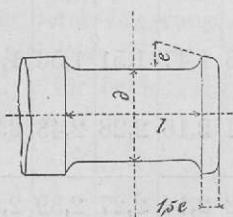
Zusammengehörige Werte gibt die Tabelle § 10, 2.

Fig. 5.



Ein kugelförmig gestalteter gusseiserner oder schmiedeiserner Zapfen (Fig. 5) muss an seiner meist angestrengten Stelle den nach obiger Formel gerechneten Durchmesser erhalten, und daher der Kugeldurchmesser auf  $1,5 d$  gegriffen werden. Ein derartiger Kugelzapfen gestattet innerhalb gewisser Grenzen ein Schwanken der geometrischen Rotationsaxe und findet sich daher auch bei solchen Anordnungen, bei welchen eine zuverlässige Lagerung entweder von Anfang an nicht möglich ist, oder dieselbe im Lauf der Zeit verloren gehen kann, oder endlich, wenn die Lage des Zapfens vermöge der gesamten Anordnung eine veränderliche sein muss.

Fig. 6.



Um den Zapfen die Möglichkeit zu bemecken, sich in anderer als rotierender Weise, vor allem nach ihrer Längenrichtung zu bewegen, erhalten dieselben entweder auf beiden oder nur auf einer Seite einen Anlauf (Bund, Schulter (Fig. 6), welcher den in der Richtung

der Rotationsaxe wirkenden Druck auf das Lager zu übertragen hat und dessen Höhe

$$e = 4 \text{ mm} + 0,06 d \dots \dots \dots \quad (15)$$

und dessen Breite  $= 1,5 e$  beträgt.

Der Übergang zwischen Zapfen und Anlauf wird unter sorgfältiger Vermeidung scharfer einspringender Ecken durch Abrundungen, manchmal sehr gestreckte Kurven vermittelt.

## § 6. Stützzapfen.

Wenn aber ein bedeutender Druck in der Richtung der Rotationsaxe wirkt und das angewandte Zapfenlager in erster Linie als Stützlager zu wirken hat, so genügen die kleinen Auflagerungen von der Breite  $e$  nicht mehr, indem diese selbst, oder die entsprechende Stützfläche des Lagers einer raschen Abnützung unterliegen würde. Die Grösse der nötigen Auflagefläche bestimmt man zunächst unter der Bedingung, dass der Flächendruck (bei gleichmässiger Druckverteilung) für eine kreisförmige stützende Auflage vom Durchmesser  $d_1$  nicht grösser sein soll als für einen gleich belasteten Tragzapfen vom Durchmesser  $= d$  und der Länge  $= l$ . Mithin ist zu setzen:

$$\left(\frac{d_1}{d}\right) = \sqrt{\frac{4l}{\pi d}}, \quad \dots \quad (16)$$

und rechnet sich hieraus folgende Tabelle:

	$n$	$\wedge$		60	120	180	240	300	360	420	
Schmiedeisen.	$\frac{l}{d}$	0,5	0,75	1,00	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
	$\frac{d_1}{d}$	0,80	0,98	1,13	1,33	1,38	1,43	1,47	1,51	1,56	1,60
	$\frac{d_1}{V\bar{P}}$	0,64	0,95	1,27	1,77	1,90	2,04	2,16	2,28	2,43	2,56
	$\frac{l}{d}$										
Gussstahl.	$\frac{d_1}{d}$	0,63	0,95	1,26	1,76	1,89	2,02	2,14	2,27	2,39	2,52
	$\frac{d_1}{V\bar{P}}$	0,90	1,10	1,27	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80
	$\frac{l}{d}$										
	$\frac{d_1}{V\bar{P}}$	0,57	0,85	1,13	1,59	1,70	1,81	1,93	2,04	2,15	2,27

Die nötige Breite einer Ring-Auflage erhält man unter der Bedingung gleicher Abnützung bei kreisförmiger und bei ringförmiger Stützfläche. Diese Abnützung ist jederzeit direkt proportional dem Flächendruck  $p$ , dem Reibungskoeffizient  $\mu$  und der Geschwindigkeit  $v$ , also ausgedrückt durch

$$\mathfrak{A} = \alpha p v \mu.$$

Nun bestimmt sich Flächendruck und Geschwindigkeit bei eingelaufenen Stützzapfen\*) für einen Punkt im Abstand  $y$  von der Axe bei kreisförmiger Auflage vom Halbmesser  $r_1$  durch:

$$p_1 = \frac{P}{2 \pi y r_1},$$

$$v_1 = 2 y \pi \frac{n}{60},$$

bei ringförmiger Auflage von der radialen Breite  $b$  durch:

$$p_2 = \frac{P}{2 \pi y b},$$

$$v_2 = 2 y \pi \frac{n}{60}.$$

Die Bedingung gleichgrosser Abnützung ergibt daher unter der Annahme gleichen Materials für beide Stützzapfen, wie für deren Lagerung, d. h. mit gleichen Werten von  $\alpha$  und  $\mu$  für beide Fälle die Gleichung

$$r_1 = b \dots 17)$$

Mit Rücksicht auf Abnützung ist die Ringbreite somit unabhängig von ihrer Ent-

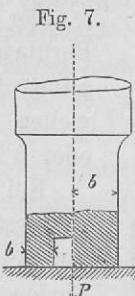


Fig. 7.

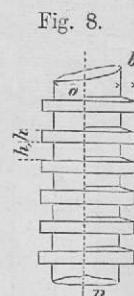
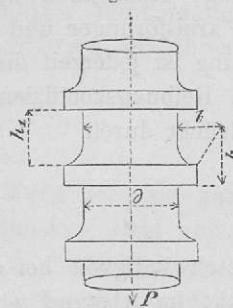


Fig. 8.

\*) Siehe § 13.

Keller, *Triebwerke*.

Fig. 9.



fernung von der Rotationsaxe, und ist daher als die Breite  $b$  ebensowohl anzusehen der Halbmesser eines kreisförmig, wie die Differenz der beiden Halbmesser eines ringförmig aufruhenden (Fig. 7), wie auch endlich die Ringbreite eines aus mehreren Ringen oder Bunden bestehenden Kamm- oder Ringzapfens (Fig. 8 und 9), für welche wir daher erhalten bei Schmiedeisen

für $n \leq$	60	120	180	240	300	360	420
$\frac{b}{\sqrt{P}}$	0,89	0,95	1,04	1,08	1,14	1,21	1,28

Hiebei kann die Anzahl der Ringauflagen lokalen Verhältnissen entsprechend angenommen oder nach der Formel

$\mathfrak{A} = 4 + 0,01 d$  für Schraubenschiffwellen, oder  
 $8 + 0,01 d$  für Turbinen- und Transmis-

sionswellen bestimmt werden, woraus dann der Druck auf jeden einzelnen Ring und dessen Breite folgt. Jedenfalls aber

sollte dabei die Breite einer Ringauflage nicht auf weniger als das Doppelte der mit

$$e = 4 \text{ mm} + 0,06 d$$

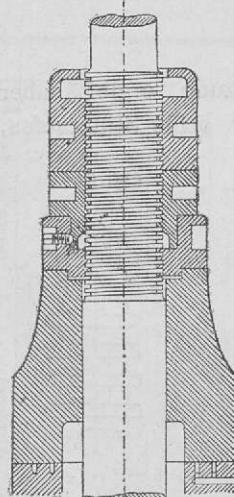
berechneten Bundhöhe bemessen werden, mithin auf

$$b = 8 \text{ mm} + 0,12 d. \dots 18)$$

Der spezifische Druck zwischen den Berührungsflächen des Kammzapfens und seines Lagers soll bei Schraubenschiffwellen den Betrag von 0,05 kg/qmm oder 5 Atm. nicht überschreiten.

Bei stets beaufsichtigten, durch eingepresstes Öl stets sorgfältig geschmierten Ringlagern oder Scheibenlagern von Turbinenwellen, auch bei den mit solchen Wellen verbundenen Glockenzapfen (Fig. 10) ist ein Flächendruck bis zu

Fig. 10.



025 kg/qmm oder 25 Atmosphären gestattet, und muss dann, ebenso hoch die Pressung des zwischen die Lagerflächen geleiteten Öles sein.

Die Ringe einer mit Drucklager versehenen Welle sind auf Abscheerung in Anspruch genommen, und genügt mit Rücksicht hierauf eine Dicke derselben (axial gemessen) gerechnet nach der Formel

$$P = \mathfrak{A} \cdot d \cdot \pi \cdot h \cdot k, \dots \dots \dots \quad 19)$$

wobei die zulässige Abscheerungsspannung unter Voraussetzung gleichmässiger Verteilung derselben über die ganze Anhaftungsfläche der Ringe zu 1 kg/qmm angenommen werden kann. Es soll aber die Dicke der Ringe  $h$ , sowie die lichte Entfernung  $h_1$  zweier benachbarter Ringe jedenfalls nicht geringer als  $b$  sein, weil ausserdem zur Fortleitung der etwa entstehenden Erwärmung nicht genügender Materialquerschnitt vorhanden wäre.

### § 7. Inanspruchnahme von Axen und Wellen.

Zur Bestimmung der Stärke von Axen und Wellen benützt man wegen der meistenteils gleichzeitig sowohl auf Biegung als auch Verdrehung stattfindenden Inanspruchnahme derselben die Formel

$$M_e = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_d^2}, \dots \dots \quad 20)$$

welche aus einem Moment ( $M_b$ ) auf Biegung und einem solchen ( $M_d$ ) auf Verdrehung das entsprechende ideelle biegende Moment  $M_e$  findet lässt, durch welches eine ebenso grosse Maximal-Gesamtspannung veranlasst würde, als thatsächlich durch das gleichzeitige Auftreten von  $M_b$  und  $M_d$  entsteht.

Man findet dann dem kombinierten Momente  $M_e$  entsprechend den notwendigen Durchmesser der massiv runden Axe oder Welle aus der Gleichung

$$M_e = Wk,$$

worin zu setzen  $W = \frac{\pi}{32} d^3 = 0,1 d^3$ ,

$$\text{und hieraus } d = \sqrt[3]{\frac{M_e}{0,1k}} \quad \dots \dots \dots \quad 21)$$

Die Formel für  $M_e$  gestattet eine Vereinfachung, wenn man sich der Poncelet'schen Näherungsformel bedient,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \alpha x + \beta y,$$

und die Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  nach der Berechnung von Poncelet einsetzt. Es ergeben sich hieraus folgende zusammengehörige Werte:

$\frac{M_d}{M_b}$	$M_c$	$\frac{M_b}{M_a}$	$M_c$
$= 1$	$1,26 M_b = 0,63(M_b + M_a)$	$= 1$	$1,26 M_a = 0,63(M_b + M_a)$
$< 1$	$0,975 M_b + 0,249 M_a$	$< 1$	$0,600 M_a + 0,624 M_b$
$< \frac{1}{2}$	$0,991 \rightarrow + 0,145 \rightarrow$	$< \frac{1}{2}$	$0,616 \rightarrow + 0,520 \rightarrow$
$< \frac{1}{4}$	$0,998 \rightarrow + 0,077 \rightarrow$	$< \frac{1}{4}$	$0,623 \rightarrow + 0,451 \rightarrow$
$< \frac{1}{8}$	$0,999 \rightarrow + 0,039 \rightarrow$	$< \frac{1}{8}$	$0,624 \rightarrow + 0,414 \rightarrow$
$= 0$	$1,000 \rightarrow$	$= 0$	$0,625 \rightarrow$

Meistentils genügt es, mit demjenigen Grad von Genauigkeit, welcher den nur mit Durchschnittswerten anzunehmenden Festigkeitskoeffizienten entspricht, zu setzen für

$$\left. \begin{array}{l} M_b > M_d \quad \dots \quad M_c = M_b + \frac{1}{4} M_d, \\ M_b < M_d \quad \dots \quad M_c = \frac{5}{8} (M_b + M_d), \\ M_b = M_d \quad \dots \quad M_c = 1\frac{1}{4} M_b = 1\frac{1}{4} M_d, \\ M_b = 0 \quad \dots \quad M_c = \frac{5}{8} M_d, \\ M_b = 0,7 M_d \quad \dots \quad M_c = M_d. \end{array} \right\} \quad \dots \quad 22)$$

Wir behandeln im Folgenden 1. solche Axen und Wellen, bei welchen das Torsionsmoment = 0 oder verschwindend klein ist (*Tragaxen*), 2. solche, bei welchen ein Biegmomment allerdings vorhanden ist, welche aber zunächst die Aufgabe haben, verdrehende Kräfte fortzuleiten. (*Torsionswellen*.)

### § 8. Tragaxen.

Diese sind zu berechnen als belastete, auf mindestens 2 Unterstützungen aufliegende Träger. Sie sind dabei entweder als *frei aufliegend* oder als *fest eingespannt* zu betrachten. Das erstere ist jederzeit anzunehmen, sobald die Axe nur an zwei Unterstützungsstellen, und zwar in gewöhnlichen Lagern ruht. Als eingespannt dagegen ist eine Axe anzusehen an jeder Stelle, wo dieselbe in einem nicht nachgiebigen Zapfenlager von verhältnismässig grosser Länge liegt, oder durch zwei nahe an einander angebrachte, gewöhnliche Zapfenlager festgehalten ist.

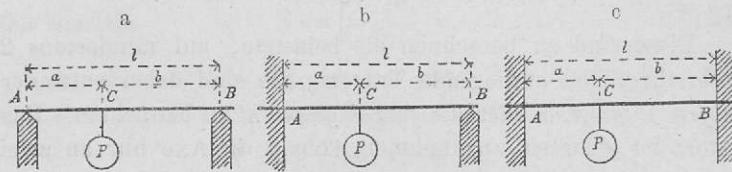
Finden sich die Unterstützungsstellen einer Axe an ihren äussersten Enden, so sind daselbst Zapfen und Zapfenlager anzubringen und die ersteren zu berechnen in bezug auf die an diesen Stellen sich ergebenden Auflager-Reaktionen nach den in § 5 entwickelten Formeln.

An allen anderen Stellen, d. h. zwischen den äussersten Unterstützungsstellen, auf welchen die Axe frei aufliegt, sowie an denjenigen Unterstützungsstellen, an welchen eine Axe als fest eingespannt zu betrachten ist, an allen Axen- und Wellenhälsen, sind die Abmessungen zu berechnen nach Massgabe der hier wirkenden biegenden oder verdrehenden Momente, vorerst aber jederzeit für massiven runden Querschnitt nach den Formeln des § 7.

Da sehr oft nicht mit Sicherheit festzustellen ist, ob eine Axe an einer Stelle als frei aufliegend oder als eingespannt zu betrachten sei, ist es der Sicherheit halber zu empfehlen, jedem Querschnitte jene Abmessung zu geben, welche unter den verschiedenen möglichen Annahmen der grössten Beanspruchung des betr. Querschnittes entspricht.

Die Berechnung einer durch eine einzige Kraft belasteten Tragaxe kann sonach auf Grundlage einer der Anordnungen in Fig. 11 a, b und c erfolgen, und zwar ergeben sich, wenn mit *A* und *B* die an den Stellen *A* und *B* geltenden Auflagerreaktionen, mit *(A)*, *(B)* und *(C)* die an den gleichbenannten Stellen wirkenden biegenden Momente bezeichnet werden:

Fig. 11.



a) Bei beiderseits freier Auflage (Fig. 11 a)

$$\left. \begin{aligned} A &= P \frac{b}{l} & (A) &= 0 \\ B &= P \frac{a}{l} & (B) &= 0 \\ &&& (C) = P \frac{a b}{l} \end{aligned} \right\} \quad 23)$$

b) Bei einerseits eingespannter Auflage (Fig. 11 b)

$$\left. \begin{aligned} A &= P \frac{3 a^2 b + 6 a b^2 + 2 b^3}{2 l^3} & (A) &= - P \frac{a b}{l} \cdot \frac{a + 2 b}{2 l} \\ B &= P \frac{2 a^3 + 3 a^2 b}{2 l^3} & (B) &= 0 \\ &&& (C) = P \frac{a b}{l} \cdot \frac{2a+3b}{2 l} \cdot \frac{a}{l} \end{aligned} \right\} \quad 24)$$

c) Bei beiderseits eingespannter Auflage (Fig. 11 c)

$$\left. \begin{aligned} A &= P \frac{3 a b^2 + b^3}{l^3} & (A) &= - P \frac{a b}{l} \cdot \frac{b}{l} \\ B &= P \frac{3 a^2 b + a^3}{l^3} & (B) &= - P \frac{a b}{l} \cdot \frac{a}{l} \\ &&& (C) = P \frac{a b}{l} \cdot \frac{2ab}{l^2} \end{aligned} \right\} \quad 25)$$

Für alle andern Querschnitte an dem Trägerstück im Abstande  $x$  von  $A$  zwischen  $A$  und  $C$  wird das biegende Moment  $(X) = A \cdot x + (A)$ , und für die Querschnitte zwischen  $B$  und  $C$  im Abstande  $x$  von  $B$

$$(X) = B x + (B) \quad 26)$$

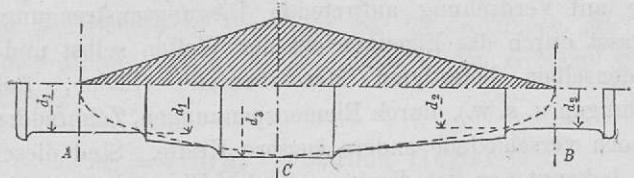
Ist nicht eine lokal wirkende Belastung, sondern sind beliebig viele Belastungsstellen vorhanden, so gelten dieselben Gleichungen für den Anteil jeder Belastung an den Auflager-

drucken und an den biegenden Momenten, d. h. Auflagerdruck sowohl wie biegende Momente sind durch eine Summe analog gebildeter Ausdrücke zu berechnen.

Trägt man die so erhaltenen Werte für die Momente als Ordinaten in passendem Maßstabe auf und verbindet die somit erhaltenen Punkte, so erhält man die Momentenfläche und jeder Ordinate dieser Momentenfläche entsprechend den zugehörigen Durchmesser der vorläufig als massiv gedachten Axe nach der Formel

$$d = \sqrt[3]{\frac{M}{0,1 \cdot k}} \quad \dots \dots \dots \quad 27)$$

Fig. 12.



Ist die sonach erhaltene theoretische Form eines Trägers gleicher Festigkeit (Fig. 12) konstruktiv durchzubilden, so muss sie an den Lagerstellen Zapfen erhalten und an der Belastungsstelle einen zylindrischen Axenkopf, dessen Länge durch die Abmessung des darauf zu befestigenden Maschinenteils (Hebel, Rad oder dergl.) gegeben ist. Für die Verbindungsstücke zwischen Zapfen und Axenkopf ist als Regel festzuhalten, dass die gewählte Begrenzung die theoretische Form nirgend unterschneiden darf.

Die in Figur 12 in ihrer Momentenfläche, ihrer theoretischen Form und ihrer konstruktiven Ausführung dargestellte Axe entspricht der Anordnung in Figur 11 a. — Das innere Zapfenende muss jederzeit in bezug auf seine Stärke mit dem an der gleichen Stelle geltenden Durchmesser der kubischen Parabel übereinstimmen.

Sollen Tragaxen in anderen als runden Formen ausgeführt werden, so sind die zunächst bestimmten kreisförmigen in andere in bezug auf Biegung gleichwertige Querschnitte zu übertragen, was nach den in § 10 folgenden Regeln und Tabellen geschieht.

Fig. 13.

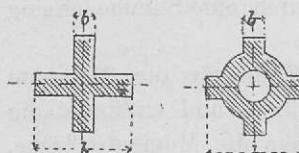


Fig. 14.

Die hiebei benützten Querschnittsformen sind: das Rechteck und speziell das Quadrat für Schmiedeisen, der hohle runde Querschnitt für Gusseisen, seltener für Schmiedeisen, ferner der kreuzförmige (Fig. 13) und der sternförmige (Fig. 14) für Gusseisen ausschliesslich.

### § 9. Torsionswellen.

Die bei Torsionswellen gleichzeitig mit der Inanspruchnahme auf Verdrehung auftretende Biegungsanstrengung ist veranlasst durch das Eigengewicht der Wellen selbst und der auf denselben befestigten Maschinenteile (Räder, Rollen, Kupplungen u. s. w.), durch Riemenspannungen, Zahnraddrucke und noch verschiedene andere äussere Kräfte. Sind dieselben genau bekannt, so ist damit auch der Wert des durch sie veranlassten biegenden Momentes zu bestimmen. Sind jene äusseren belastenden Kräfte nicht gegeben, so muss behufs der Berechnung für jene biegenden Momente schätzungsweise ein Wert angenommen werden, um darnach das kombinierte Moment und aus diesem den Durchmesser der Welle bestimmen zu können.

Kann z. B., wie es bei Kurbelwellen oft der Fall ist, das biegende Moment ungefähr  $\frac{7}{10}$  des verdrehenden gesetzt werden, so resultiert für das kombinierte Moment (siehe Gl. 22)

Bei Transmissionswellen ist das biegende Moment oft grösser als  $\frac{7}{10}$  des verdrehenden, insbesondere kann bei leichten Decken- vorgelegten  $M_b$  bis  $3 M_d$  werden. Würden überhaupt solche leichtere Wellen für geringere Werte von  $M_a$  lediglich in bezug auf dieses letztere Moment berechnet, so würden sich für dieselben geringere Stärken ergeben, als sie zweckmässig

auszuführen sind, wie denn auch Transmissionswellen mit geringeren Stärken als 35 mm in der Regel nicht vorkommen.

Nimmt man für Wellen im Allgemeinen an  $M_b = 0,7 M_a$  und somit  $M_b = M_a$ , sowie für Schmiedeisen  $k = 4 \text{ kg/qmm}$ , so folgt der Durchmesser einer Welle aus  $M_a = \frac{\pi}{32} d^3 k$

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_a}{0,1 k}} = 1,36 \sqrt[3]{M_a} \quad \dots \dots \dots \quad 29)$$

In der Regel ist für Transmissionswellen nicht direkt das verdrehende Moment  $M_a$ , sondern der sogenannte Effektsquotient  $\frac{N}{n}$ , das Verhältnis der Pferdestärken, welche durch eine Welle zu übertragen sind und der Umdrehungen der Welle in einer Minute, bekannt. Zwischen diesen Grössen gilt die Beziehung

$$M_a = 716197 \frac{N}{n} = \text{rund } 716200 \frac{N}{n} \quad \dots \dots \quad 30)$$

Mit diesem Werte erhält Gleichung (29) die Form

$$d = 1,36 \sqrt[3]{716200} \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = 122 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \dots \dots \quad 31)$$

Für Gusseisen kann der Werth  $k = 2$  gesetzt werden, und ergeben sich dann für die Berechnung gusseiserner Wellen die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} d &= 1,7 \sqrt[3]{M_a} \\ &= 153 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \quad 32)$$

Die vielfach benützte Formel

$$d = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad \dots \dots \quad 33)$$

liefert für leichte Transmissionswellen von Schmiedeisen ganz passende Resultate, nämlich grössere Werte als obige Formel 31).

so lange  $\frac{N}{n} < 1$  ist. Die Ableitung dieser Formel aus einem gestatteten Verdrehungswinkel von  $1^\circ$  auf 400 Meter Wellenlänge ist aber der Praxis nicht geläufig; geeigneter ist die Ableitung der gleichen Formel unter Annahme eines bei geringen zu übertragenden Kräften im Verhältnis grösseren Sicherheitsgrades und sonach kleinerer zulässiger Spannungsintensität, etwa gegeben durch

$$k = \frac{d}{30} \dots \dots \dots \quad 34)$$

Mit diesem Werte wird aus der Gleichung 29)

$$M_d = Wk = \frac{\pi}{32} d^3 \cdot \frac{d}{30} = \frac{d^4}{327},$$

und hieraus

$$\left. \begin{aligned} d &= 4,18 \sqrt[4]{M_d} \\ \text{sowie} \\ &= 122 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \end{aligned} \right\}$$

Die auch in der Praxis sich findende Verstärkung der Wellen für geringere Werte von  $M_d$  ist begründet durch das Bestreben, bei Transmissionswellen die elastischen Durchbiegungen, und das hieraus folgende Schwingen und Schleudern der Wellen zu vermeiden, und bei Antriebaxen von Arbeitsmaschinen jedes, auch das geringste Vibrieren, Zittern derselben zu beseitigen. Der desfallsige Zuschlag kann etwa bestimmt werden nach der Formel

$$\Delta = 15^{\text{mm}} - 15 \frac{N}{n} \dots \dots \dots \quad 35)$$

gültig bis zu einem Grenzwerte  $\frac{N}{n} = 1$ , und bewegt sich der selbe innerhalb der Grenzen 0 und  $15^{\text{mm}}$ .

Die Annahme  $M_b = 0,7 M_d$  gestattet auch, für eine Welle die derselben zu gebende Anzahl und Entfernung der Unterstützungsstellen zu bestimmen. Denkt man sich die Welle nur durch

ihre Eigengewicht  $G$ , gleichmässig über ihre Länge verteilt, belastet, und an ihren Unterstützungsstellen frei aufliegend, so ist das hiedurch entstehende biegende Moment

$$= M_b = G \cdot \frac{1}{8} L = \frac{d^2 \pi}{4} L \gamma \cdot \frac{L}{8} = \frac{\pi}{32} L^2 \gamma d^2,$$

welches der Annahme gemäss den Wert  $0,7 M_d$  nicht überschreiten soll. Setzt man (Gl. 27)  $M_e = M_d = \frac{\pi}{32} d^3 k$  so wird

$$\frac{\pi}{32} L^2 \gamma d^2 \gtrsim 0,7 \frac{\pi}{32} d^3 k,$$

und hieraus mit  $k = 4$ , sowie  $\gamma = 0,0000078 \text{ kg/cm}^3$

$$L \gtrsim 600 \sqrt{d} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (36)$$

Nimmt man die Entfernung der Lager geringer an, so kann die Belastung der Axe grösser angenommen werden, also z. B. nicht allein durch das Eigengewicht der Transmissionswelle, sondern auch durch die Gewichte darauf befestigter Maschinen- teile. Einem 4 mal so grossen biegenden Momenten würde eine halb so grosse Entfernung der Stützen entsprechen, etwa nach der Formel

$$L \gtrsim 300 \sqrt{d} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (37)$$

Sind für die Endzapfen der Torsionswellen die Auflagerreaktionen nicht bekannt, so dass dieselben nicht nach Massgabe ihrer Inanspruchnahme berechnet werden können, so kann man denselben eine Stärke = 0,7 bis 0,8 von dem Durchmesser des nächstgelegenen Stückes der zugehörigen Torsionswelle geben.

Auch bei Torsionswellen finden sich außer dem massiven runden noch der rechteckige, speziell quadratische, der hohle ringförmige, der kreuzförmige und der sternförmige. Da im Vorstehenden die Inanspruchnahme der Torsionswellen auf ein ideales biegendes kombiniertes Moment zurückgeführt ist, so kann auch für solche Wellen die Verwandlung des zunächst

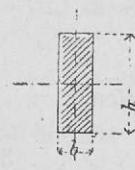
bestimmten kreisförmigen in einen andern gleichwertigen nach den Formeln und Tabellen des folgenden Paragraphen geschehen.

### § 10. Verwandlung der Querschnittsformen.

#### 1. Rechteck und Kreis-Querschnitt.

Hier ist unter der Bedingung gleicher Biegungsfestigkeit zu setzen

$$\text{Fig. 15.} \quad W_{\square} = W_{\circ} \quad \text{oder}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} b h^2 &= \frac{\pi}{32} d^3 \\ \frac{h}{d} &= \sqrt[3]{\frac{6\pi}{32}} \sqrt[3]{\frac{h}{b}} \quad \dots \dots \dots \quad 38) \end{aligned}$$


Die Resultate dieser Formel sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

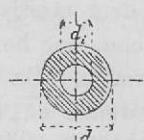
$\frac{h}{b} =$	5	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{h}{d} =$	1,433	1,330	1,209	1,056	0,838	0,665	0,581	0,528	0,490
$\frac{b}{d} =$	0,287	0,333	0,403	0,528	0,838	1,330	1,743	2,112	2,450

#### 2. Ringförmiger und Kreis-Querschnitt.

Hier ist unter Bedingung gleicher Biegungsfestigkeit zu setzen

Fig. 16.

$$W_{\odot} = W_{\circ}$$



$$\text{oder} \quad \frac{\pi}{32} \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} = \frac{\pi}{32} d^3,$$

woraus

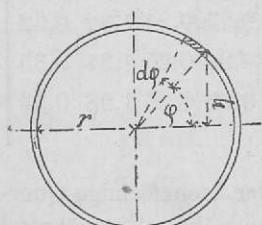
$$\frac{d}{d_a} = \sqrt[3]{1 - \left(\frac{d_i}{d_a}\right)^4} \quad \dots \dots \quad 39)$$

$\frac{d_i}{d_a}$	$\frac{d_a}{d}$	$\frac{d_i}{d}$	$\frac{\delta}{d}$	$\frac{d_i}{d_a}$	$\frac{d_a}{d}$	$\frac{d_i}{d}$	$\frac{\delta}{d}$	$\frac{d_i}{d_a}$	$\frac{d_a}{d}$	$\frac{d_i}{d}$	$\frac{\delta}{d}$
0,30	1,003	0,301	0,351	0,48	1,018	0,489	0,265	0,66	1,073	0,708	0,182
0,32	1,004	0,321	0,341	0,50	1,022	0,511	0,255	0,68	1,083	0,737	0,173
0,34	1,005	0,341	0,331	0,52	1,026	0,533	0,246	0,70	1,096	0,767	0,164
0,36	1,006	0,362	0,322	0,54	1,030	0,556	0,237	0,72	1,110	0,799	0,155
0,38	1,007	0,383	0,312	0,56	1,035	0,580	0,228	0,74	1,126	0,833	0,146
0,40	1,009	0,403	0,303	0,58	1,041	0,604	0,219	0,76	1,145	0,870	0,137
0,42	1,011	0,424	0,293	0,60	1,047	0,628	0,209	0,78	1,166	0,910	0,128
0,44	0,013	0,446	0,284	0,62	1,055	0,654	0,200	0,80	1,192	0,954	0,119
0,46	1,015	0,467	0,274	0,64	1,063	0,680	0,191				

Hierin bezeichnet  $\delta = \frac{d_a - d_i}{2}$  die Wandstärke des hohlen Querschnittes.

Es zeigt diese Tabelle, dass man, unbeschadet der Festigkeit einer als massiv berechneten Axe, dieselbe hohl gestalten dürfe ohne Vergrösserung ihres äusseren Durchmessers bis zu einem Höhlungsverhältnis  $\frac{d_i}{d_a} = 0,4$  oder bis zu einer Wandstärke  $\delta = 0,3 d$ .

Fig. 17.



Bei Berechnung einer schmiedeisenernen hohlen, aus Blech genieteten Axe kann für eine im Vergleich zum Durchmesser geringe Wandstärke  $\delta$  gesetzt werden für das Trägheitsmoment (Fig. 17).

$$\begin{aligned}
 I &= \sum (f \eta^2) = \int (r d \varphi \delta) (r \sin \varphi)^2 = \\
 &= r^3 \delta \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d \varphi = \frac{\pi}{8} d^3 \delta,
 \end{aligned}$$

und hieraus

$$W = \frac{I}{\frac{1}{2}d} = \frac{\pi}{4} d^2 \delta \dots \dots \dots \quad 40)$$

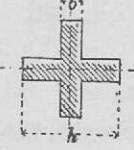
### 3. Kreuzförmiger und Kreis-Querschnitt.

Hier ist zu setzen:

$$W_+ = W_{\odot}$$

und findet sich zunächst aus Figur 18

Fig. 18.  $\frac{1}{6} h^3 \left\{ \left( \frac{b}{h} \right)^3 + \left( \frac{b}{h} \right) - \left( \frac{b}{h} \right)^4 \right\} = \frac{\pi}{32} d^3$



$$\left( \frac{d}{h} \right)^3 = \frac{32}{6\pi} \left\{ \left( \frac{b}{h} \right)^3 + \left( \frac{b}{h} \right) - \left( \frac{b}{h} \right)^4 \right\}$$

$$\frac{h}{d} = 0,838 \sqrt[3]{\frac{1}{\left( \frac{b}{h} \right)^3 + \left( \frac{b}{h} \right) - \left( \frac{b}{h} \right)^4}} \dots \dots \quad 41)$$

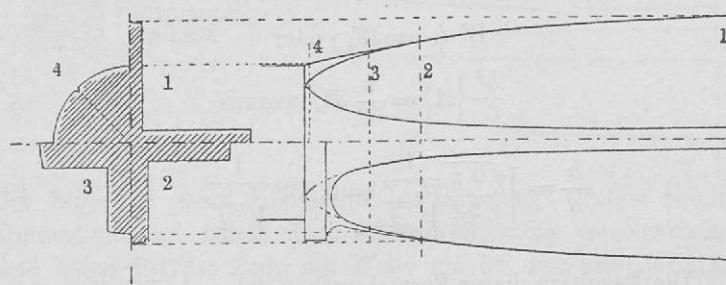
Es entwickelt sich hieraus folgende Tabelle:

$\frac{b}{h}$	$\frac{h}{d}$	$\frac{b}{d}$									
0,07	2,04	0,14	0,12	1,71	0,20	0,17	1,51	0,25	0,22	1,37	0,30
0,08	1,95	0,16	0,13	1,65	0,21	0,18	1,47	0,26	0,23	1,35	0,31
0,09	1,87	0,17	0,14	1,61	0,22	0,19	1,44	0,27	0,24	1,32	0,32
0,10	1,81	0,18	0,15	1,57	0,23	0,20	1,42	0,28	0,25	1,31	0,33
0,11	1,75	0,19	0,16	1,53	0,24	0,21	1,40	0,29	0,26	1,28	0,33

Hiebei ist aber vorausgesetzt, dass der kreuzförmige Querschnitt aus vollkommen rechteckigen Rippen bestehe, während in Wirklichkeit diese Rippen abgerundet sind. Der Einfluss dieser Abrundung macht sich geltend, wenn das Verhältnis

$\frac{b}{h} > \frac{1}{4}$  wird, und insbesondere kann gegen das Ende einer solchen kreuzförmigen Axe, wo ihre Kreuzform in die Kreisform übergeht (Fig. 19), die Wölbung nicht mehr vernach-

Fig. 19.



lässtigt werden. Für diese Übergangsstelle insbesondere gelten die Beziehungen

$$h = d$$

$$b = h \sin 45^\circ = 0,7 h = 0,7 d.$$

#### 4. Sternförmiger und Kreis-Querschnitt.

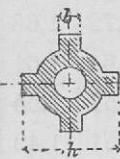
Fig. 20.

Der sternförmige Querschnitt (Fig. 20), welcher besonders für gusseiserne Wasserrad-Wellen Anwendung findet, setzt sich zusammen aus den 4 Rippen des kreuzförmigen Querschnittes und einem runden Kerne  $k$ , welcher noch dazu oft eine Höhlung vom Durchmesser  $k_1$  enthält.

Der Einfluss der letzteren auf die Festigkeit einer Welle ist verschwindend gering, und ist dieselbe daher auch bei der nachfolgenden Berechnung ausser Berücksichtigung geblieben.

Für einen solchen Querschnitt rechnet sich demnach

$$\begin{aligned} W \cdot \phi &= \frac{1}{\frac{1}{2} h} \left\{ \frac{\pi}{64} h^4 + \frac{1}{12} \left( b (h^3 - k^3) + b^3 (h - k) \right) \right\} \\ &= \frac{h^3}{6} \left\{ \frac{6\pi}{32} \left( \frac{k}{h} \right)^4 + \frac{b}{h} \left( 1 - \left( \frac{k}{h} \right)^3 \right) + \left( \frac{b}{h} \right)^3 \left( 1 - \frac{k}{h} \right) \right\} \\ &= \frac{h^3}{6} \{ A \}, \end{aligned}$$



während gleichzeitig

$$W_{\bigcirc} = \frac{\pi}{32} d_3.$$

Es ist mithin zu setzen

$$W_{\phi} = W_{\bigcirc} \text{ oder}$$

$$\frac{h^3}{6} \{A\} = \frac{\pi}{32} d^3, \text{ woraus}$$

$$\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{6\pi}{32} \frac{1}{V_A}} = 0,838 \frac{1}{V_A} \quad \dots \quad (42)$$

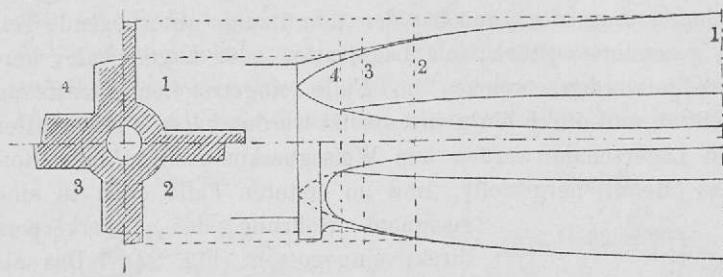
Die Resultate dieser Formel enthält folgende Tabelle, nämlich die Werte von  $\frac{h}{d}$  für bestimmte Werte von  $\frac{b}{h}$  und  $\frac{k}{h}$ .

$\frac{k}{h} =$	0	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{b}{h} = 0,08$	1,94	1,93	1,93	1,91	1,87	1,83	1,76
0,10	1,81	1,80	1,80	1,78	1,75	1,72	1,68
0,12	1,69	1,69	1,69	1,68	1,67	1,64	1,61
0,14	1,61	1,61	1,61	1,60	1,59	1,57	1,55
0,16	1,53	1,53	1,53	1,53	1,52	1,51	1,49

Aus dieser Tabelle ist auch ersichtlich, wie gering der Einfluss des Kernes  $k$  ist, und dass man daher umso mehr vollständig berechnet war, die Höhlung  $k_1$  des Kernes ganz ausser Berücksichtigung zu lassen.

Wie für den kreuzförmigen Querschnitt, so kann auch hier die Berechnung sowohl wie die Tabelle nur dann gelten, wenn die Höhe der Kreuzrippen im Verhältnis zu deren Dicke eine so grosse ist, dass deren äussere Abrundung (Wölbung) unberücksichtigt bleiben kann. Dies ist aber nicht mehr der Fall gegen das Ende einer Welle hin (Fig. 21), wo die Sternform in die Kreisform übergeht. Bei zunehmender Dicke  $b$

Fig. 21.



der Rippe ist gegen die Stelle des Übergangs in den runden Querschnitt der runde Kern schon vollständig verschwunden, und daher für das Ende der Welle wie bei dem kreuzförmigen Querschnitt zu setzen

$$h = d,$$

$$b = 0,7 h = 0,7 d.$$

Lässt man aber die Dicke  $b$  konstant sein, so muss mit abnehmenden Werten von  $h$  die Kernstärke  $k$  zunehmen. In diesem Falle ist aus der Tabelle den bekannten Werten  $\frac{b}{h}$  und  $\frac{h}{d}$  entsprechend derjenige von  $\frac{k}{h}$  zu suchen. Jedenfalls aber muss bei zunehmender Kernstärke am Ende der Welle, wo die Sternform in die Kreisform übergeht, gesetzt werden

$$k = h = d.$$

### § 11. Lagerung von Zapfen, Axen und Wellen.

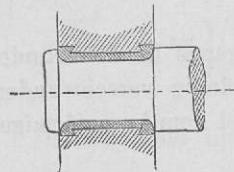
#### A. Traglager.

Die einfachste Form eines Traglagers ist die in Fig. 22 dargestellte. Es ist dies ein Guss- oder Schmiedestück mit einer Bohrung von der Grösse der aufzunehmenden Axe oder

Fig. 22. des zu lagernden Zapfens. Solche einfachste Lager können selbstverständlich nur für geringe Lagerdrucke, insbesondere nur für geringe Drehungsgeschwindigkeiten angewandt werden, da sie im Falle einer Abnutzung nicht wohl

reparierbar sein würden. Bei allen wichtigeren und kräftigern Anlagen muss der zunächst der Abnutzung unterliegende Teil als gesondertes Stück, als Lagerfutter oder Lagerschale, hergestellt werden, welches im Falle eingetretener Abnutzung entfernt und durch ein neues ersetzt werden kann. Lagerfutter und Lagerschale werden aus Weissgusskomposition oder Rotguss (Metall) hergestellt, und im ersten Falle auch in eine

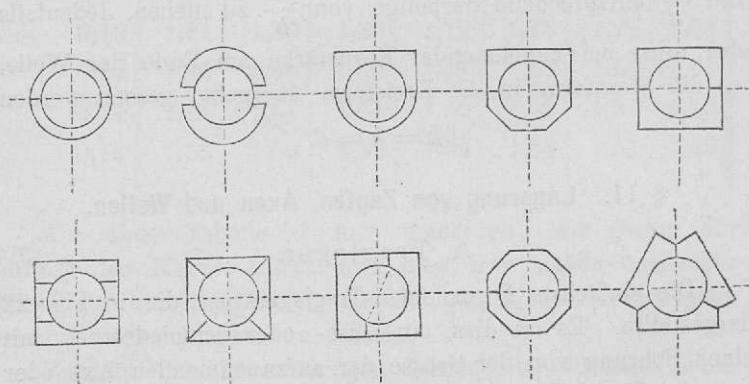
Fig. 23.



geeignete Bohrung des Lagerkörpers direkt eingegossen (Fig. 23). Das als Lagerschale hergestellte, nicht eingegossene, sondern in den Lagerkörper besonders eingelegte Lagerfutter kann in seiner Aussenform, verschiedenen Anforderungen und Lagersystemen ent-

sprechend, verschiedenartig durchgeführte Begrenzung erhalten, indem es eine Teilung erhält in 2, 3 oder 4 Teile durch Ebenen parallel zur Drehungsaxe, wobei vor allem zu beobachten ist, dass die hauptsächliche Druckrichtung nicht durch eine Schalenfuge gehen soll. (Fig. 24).

Fig. 24.



Die geringste Stärke der Lagerschale ist zu bilden nach der Formel

$$e \equiv 4 + 0,06 d, \quad \dots \quad (43)$$

wobei nach den Richtungen des hauptsächlichen Druckes eine Verstärkung angebracht werden kann.

Der Lagerkörper ist dabei nach einer Seite offen gebildet. Die hier gebildete Öffnung zum Einlegen der Schale wird durch einen Deckel geschlossen, welcher entweder einfach oben aufgelegt wird (Fig. 25 a und Fig. 26 a), oder auch in den Lagerkörper eingreift oder denselben übergreift (Fig. 25 b und 26 b).

Fig. 25.

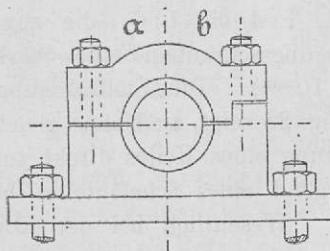
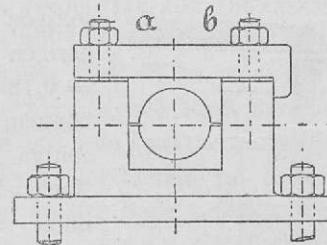
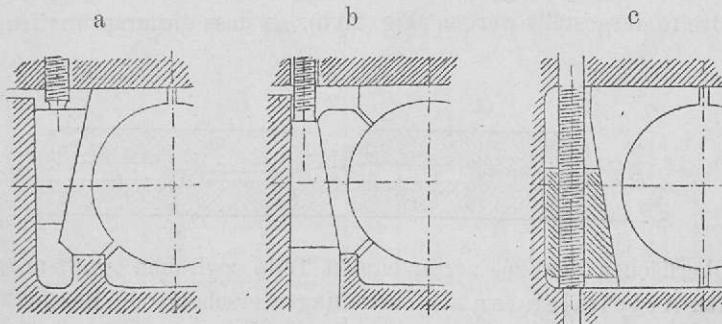


Fig. 26.



Das Nachziehen der Lagerschalen erfolgt am einfachsten und häufigsten durch Anziehen der Deckelschrauben, wenn die Richtung derselben mit der hauptsächlichen Druckrichtung übereinstimmt, und die Schalenfuge normal dazu liegt. Im anderen Falle erhalten die Lagerschalen Nachstellung durch Keile, welchen durch Schrauben die nötige Bewegung erteilt werden kann (Fig. 27). Die Anwendung solcher Nachstellung

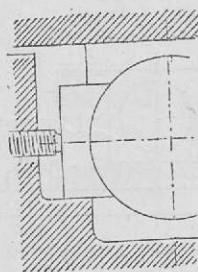
Fig. 27.



ist möglich bei jeder beliebigen Anordnung der Lagerfugen; bei den Anordnungen Fig. 27 a und b stützt sich die zur Keilstellung dienende Schraube gegen den Lagerdeckel, und ändert sich daher die Keil-Lage mit Nachzug der Lagerdeckel-

schrauben; bei Fig. 27 c stützt sich die zur Keilstellung dienende Schraube gegen den Grundkörper des Lagers, ist also von der Deckelstellung unabhängig. Alle nach dieser Richtung, d. h. nach Unabhängigkeit der Nachstellvorrichtung für die Schale von der Deckelstellung, abzielende Konstruktionen sind denjenigen der ersten Art vorzuziehen.

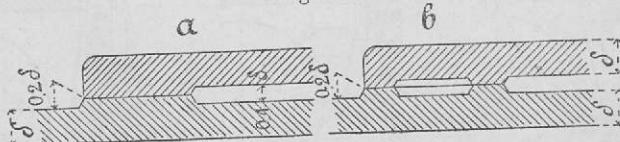
Fig. 28.



Die Keile erhalten dabei einen einseitigen Anzug 1:4 bis 1:6, die zugehörigen Bewegungsschrauben eine Stärke =  $0,12 (d + 10 \text{ mm})$ . Die Stellschrauben können, wie Fig. 28 zeigt, auch ohne gleichzeitige Benutzung eines Keiles direkt zum Nachziehen irgend eines Schalenteiles benutzt werden. Wesentlich bei der Konstruktion der einfachen Lager, wie auch der mehrere Lager zu einem Ganzen vereinigenden Lagerstühle oder Lagerböcke ist die Anwendung sogenannter Arbeitsleisten (Pass-Flächen); dabei werden die beiden miteinander zu verbindenden und gut zusammen zu passenden Teile nicht direkt miteinander in Berührung gebracht, sondern zu diesem Zwecke besondere erhabene Flächen hergestellt, welche entweder durch die ganze Ausdehnung der beiderseitigen Auflageflächen gehen (Fig. 29 a), oder nur durch gesonderte erhabene Leisten von geringerer Breite dargestellt werden (Fig. 29 b), so dass die ursprünglichen

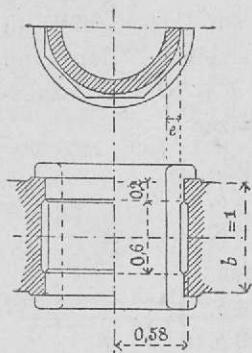
einzelnen Lagerstühle oder Lagerböcke ist die Anwendung sogenannter Arbeitsleisten (Pass-Flächen); dabei werden die beiden miteinander zu verbindenden und gut zusammen zu passenden Teile nicht direkt miteinander in Berührung gebracht, sondern zu diesem Zwecke besondere erhabene Flächen hergestellt, welche entweder durch die ganze Ausdehnung der beiderseitigen Auflageflächen gehen (Fig. 29 a), oder nur durch gesonderte erhabene Leisten von geringerer Breite dargestellt werden (Fig. 29 b), so dass die ursprünglichen

Fig. 29.



Oberflächen der zu verbindenden Teile zwischen und neben den Arbeitsleisten als Vertiefungen erscheinen. Bezeichnet man die Dicke zweier zu verbindender plattenförmiger Teile mit  $\delta$ , so kann die Höhe einer Arbeitsleiste mit  $\frac{1}{5} \delta$ , mithin der Hohlraum zwischen 2 sich berührenden Arbeitsleisten mit einer Tiefe von  $0,4 \delta$  hergestellt werden.

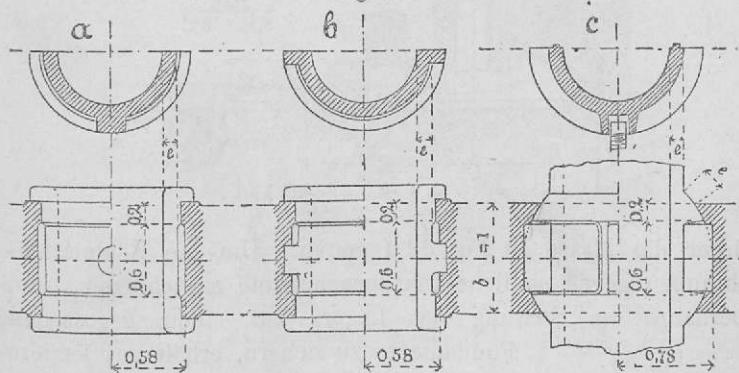
Fig. 30.



Nach diesem Konstruktionsgrundsatz erhält beispielsweise eine rund begrenzte Lagerschale, Arbeitsleisten, welche in Form eines regelmässigen Achteckes die Lagerschale überragen und selbstverständlich in einem ebenso achtseitig ausgearbeiteten Lagerkörper eingepasst werden (Fig. 30). Die aussen die Lagerbreite übergreifenden seitlichen Lappen erhalten an einer vorstehenden Arbeitsleiste ihre Berührungsfläche mit dem Lagerkörper. Die

Achteckform verhindert die Drehung der Schale im Lagerkörper. Werden die Arbeitsleisten an der Schale gleich wie diese selbst als Rotationskörper gebildet, so muss die Drehung der Schale durch andere Vorrichtungen, z. B. durch vorragende runde Zapfen (Fig. 31 a), oder durch seitlich vorragende Lappen (Fig. 31 b) verhindert werden. Bei der Lagerschale (Fig. 31 c) ist die Arbeitsleiste kugelförmig gebildet, und dadurch eine gewisse Anschmiegsamkeit der Lagerschale an die Welle gesichert. Die Drehung der Schale im Lager wird dabei durch einen zwischen zwei Rippen eingreifenden Schraubenbolzen verhindert.

Fig. 31.



Die in Fig. 30 und ff. eingeschriebenen Zahlen sind Verhältniszahlen und beziehen sich auf die Lagerbreite

$$b = d + 10 \text{ mm} \quad \dots \quad 44)$$

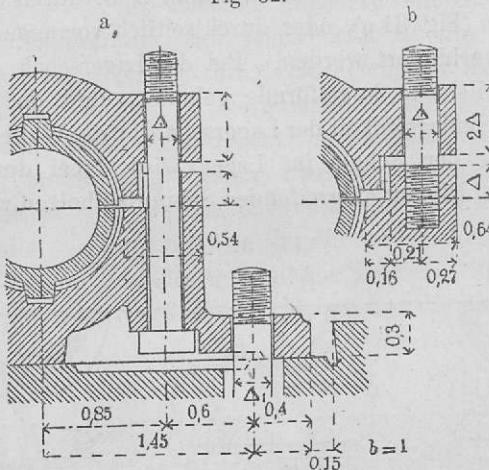
als Bezugseinheit.

Die Ausdehnung des Lagerkörpers ist wesentlich bedingt durch die Art der benützten Schrauben am Deckel und an der Sohlplatte, sowie durch die Stärke derselben. Man kann — ebenfalls auf die Lagerbreite  $= b = d + 10$  als Bezugs-einheit bezogen — die Stärke derselben setzen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für die Deckelschrauben} \\ \text{bei im ganzen 2 Stück } \Delta = 0,22 b, \\ \text{bei } " " 4 " = 0,18 b, \\ \text{für die Sohlplattenschrauben} \\ \text{bei im ganzen 2 Stück } \Delta_1 = 0,24 b, \\ \text{bei } " " 4 " = 0,20 b. \end{array} \right\} \quad 45)$$

Für Deckelschrauben in eingegossenen Löchern können die Masse in Fig. 32 a, für solche in gebohrten Löchern oder auch für Stiftschrauben mit eingeschnittenen Gewinden im Lager-

Fig. 32.



körper die Masse in Fig. 32 b gelten. Um die Sohlplattenschrauben gegen seitliche Inanspruchnahme zu schützen, und überhaupt die Stellung des Lagers auf einem gegossenen

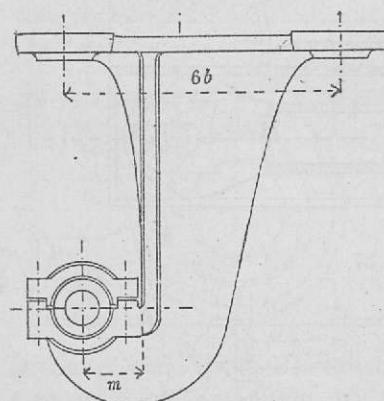
Fig. 33.



Fundamente zu sichern, erhält das letztere sogenannte Keilnasen (Fig. 33) zum Zweck des Einschlagens eines Keiles zwischen dieselben einer- und das Ende der Sohlplatte andererseits.

Sind Lager nicht auf horizontalen Unterlagen zu befestigen (Stehlager), sondern an vertikalen Wänden (Wand- oder Konsol-Lager) oder an darüber befindlichen horizontalen Flächen hängend (Hängelager) anzubringen, so kann die Tragkonstruktion für das Lager, welche an Stelle der beim Stehlager sich findenden Sohlplatte tritt, sich unmittelbar an den wie gewöhnlich konstruierten Lagerkopf anschliessen (Fig. 34).

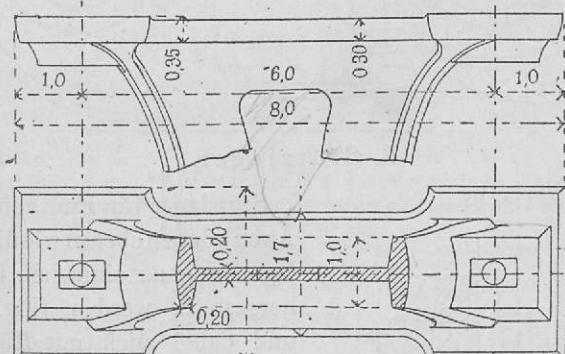
Fig. 34.



Die Tragkonstruktion ist entweder in Kreuzform (Fig. 34) oder in doppelt T-Form (Fig. 35) oder in Kastenform (Fig. 36) durchzuführen; auch können Kombinationen der genannten drei Formen gewählt werden. Um den Lagerbau durch Verkürzung der Länge  $m$  (des Abstandes der Axenmitte von der wahrscheinlichen Bruchstelle) fester zu machen, pflegt man die eine der beiden

Deckelschrauben zunächst der Tragkonstruktion bei Hängelagern durch einen Keil zu ersetzen (Fig. 37 a), oder auch noch die

Fig. 35.



zweite Deckelschraube wegzulassen und dieselbe durch eine

über dem Keile angebrachte Schraube zu ersetzen (Fig. 37 b), durch welche der Lagerdeckel gegen die Tragkonstruktion befestigt wird.

Fig. 36.

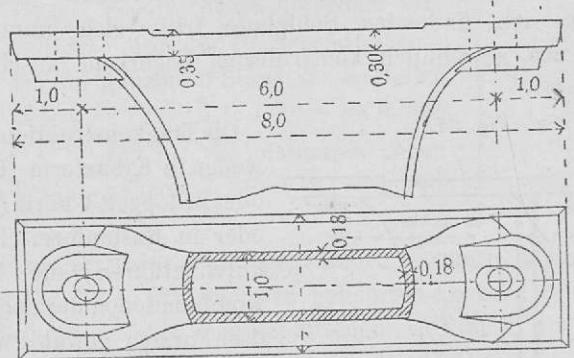
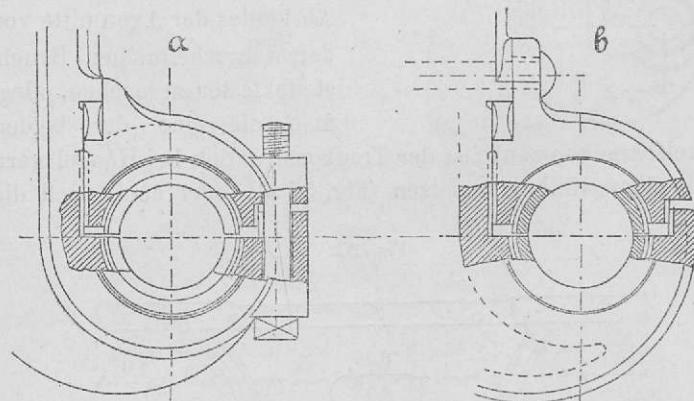
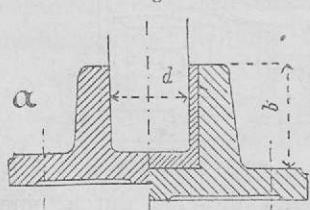


Fig. 37.



B. Stützlager.

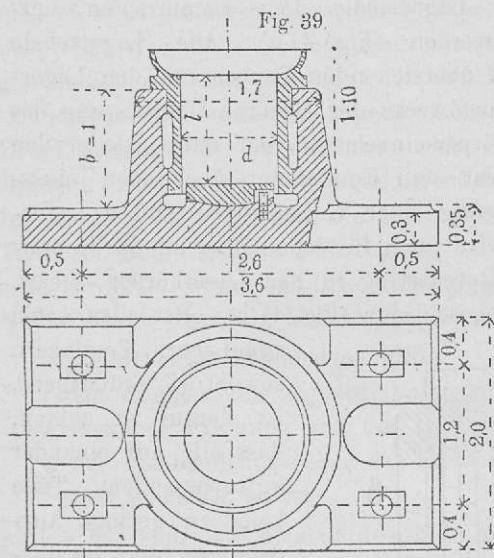
Fig. 38.



Stützlager für Endzapfen von Axen können ebenso wie die Traglager in ganz einfachen Formen hergestellt werden (Fig. 38 a), und dabei auch mit Rücksicht auf die Beseitigung etwaiger Abnutzung mit einem Lager-

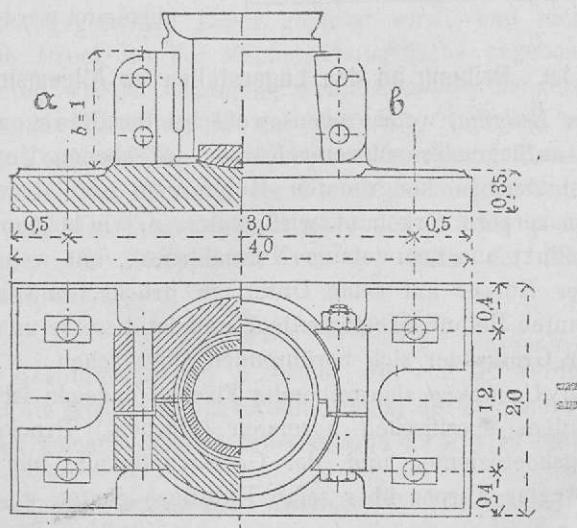
futter (Lagerschale) versehen werden (Fig. 38 b). Um die Spurfläche eines Lagers innerhalb gewisser Grenzen anschmiegsam

gegen die Reibungsfläche des Stützzapfens zu machen, wird oft die Bodenplatte der Schale von den Seiten derselben getrennt hergestellt, und der ersten eine gewölbte Auflage im Lagerkörper gegeben (Fig. 39). Ein in den letzteren eingelassener und in die Spurplatte der Schale eingreifender Zapfen benimmt ihr die Möglichkeit der



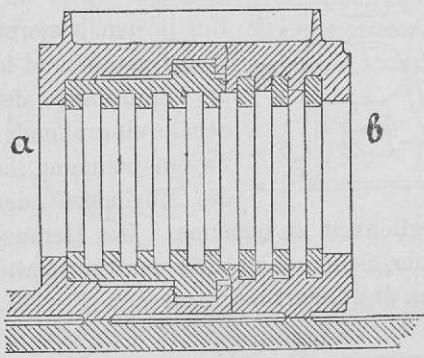
Drehung, ohne deren Beweglichkeit zu hemmen. Das Herausnehmen und Auswechseln der Seitenschale und der Spurplatte wird durch zweiteilige Form des Lagerkörpers erreicht (Fig. 40).

Fig. 40.



Stützlager für durchlaufende Wellen mit Kammzapfen sind wie Traglager zu bauen, nur muss die in demselben anzubringende Lagerschale dem Kammzapfen entsprechend gebildet werden (Fig. 41 a). Die Lagerschale greift dabei nicht mit überstehenden Lappen um den Lagerkörper, sondern ist zum Zwecke der sicheren Übertragung des Druckes in den Lagerkörper eingelassen, der selbst wieder den empfangenen Druck auf sein Fundament übertragen muss. An Stelle der Anbringung einer vollständigen ganzen Lagerschale mit Ringnuten wird auch für jeden Ring an der Kammwelle ein besonderer Rotgussring in den Lagerkörper, bezw. in den Lagerdeckel eingeschlagen (Fig. 41 b). Bei allen Arten

Fig. 41.



von Lagern, Traglagern sowohl wie Stützlagern, ist darauf zu achten, dass alle auf einander aufzupassenden Teile keine zu geringe Ausdehnung der Berührungsflächen haben, damit die an der Zapfenreibungsfäche entstehende Erwärmung leicht abgeleitet werden kann.

### s. 12. Reibung an den Lagerstellen im Allgemeinen.

Die *Reibung*, welche ebensowohl bei der Bewegung ebenflächig aufliegender schwerer Körper auf ebenen Unterlagen, wie bei den in kongruenten Hohlformen sich bewegenden Rotationskörpern vorkommt, wird gemessen, wie bekannt, durch das Produkt aus dem totalen Normaldrucke, mit welchem ein schwerer Körper auf seine Unterlage drückt, und aus dem sogenannten Reibungskoeffizienten, und ist dieselbe unabhängig von der Grösse der sich berührenden Oberflächen.

Die *Abnutzung* sich reibender Flächen dagegen ist proportional dem spezifischen normalen (Flächen-) Drucke, dem Reibungskoeffizienten und der Geschwindigkeit, mit welcher ein bewegter Körper über seine Unterlage gleitet.

Während somit bei ebenflächig sich berührenden Körpern die Bestimmung des Reibungswiderstandes einfach ist, so ist dies nicht in gleichem Masse der Fall bei rotierenden Körpern, bei welchen nicht, wie bei den erstern, ohne weiteres die gleichmässige Verteilung des Totaldruckes über die ganzen sich reibenden Oberflächen angenommen werden und auch die Druckrichtung mit der Richtung der Rotationsaxe übereinstimmen oder einen beliebigen Winkel damit bilden kann. Im ersten Falle heissen die gelagerten und sich reibenden Teile der Rotationsachsen *Stützzapfen*, im letzteren Falle, und zwar vor allem, wenn jene Druckrichtung gegen die Drehungsaxe einen Winkel von  $90^\circ$  bildet: *Tragzapfen*.\*)

Ist, für beide Zapfenarten gilt,

$f$  ein Element der Zapfenreibungsfäche,

$y$  dessen Entfernung von der Rotationsaxe,

$p$  der Flächendruck (über das Element  $f$  gleichmässig verteilt gedacht), so ist

$pf \mu y$  das statische Moment der Reibung am Elemente  $f$ , bezogen auf die Drehungsaxe des Zapfens, und wird somit das Reibungsmoment für die ganze Reibungsfläche

$$M = \sum pf \mu y \dots \dots \dots \quad 46)$$

Es wird aber wohl stets nur der Totaldruck  $P$ , mit welchem der Zapfen gegen sein Lager gepresst wird, und nicht der spezifische Druck an der Zapfenreibungsfäche gegeben sein, und erhalten wir den letzteren, wenn man den Totaldruck  $P$  betrachtet als die Summe der mit der Richtung von  $P$  parallelen Komponenten der einzelnen elementaren Pressungen  $pf$ . Schliesst die Richtung des Normal-Flächendruckes  $p$  mit der Richtung des Total-Zapfendruckes den Winkel  $\varphi$  ein, so ist  $pf \cos \varphi$  die Komponente von  $pf$  nach der Richtung von  $P$ , und daher

$$P = \sum pf \cos \varphi \dots \dots \dots \quad 47)$$

Zur Bestimmung von  $p$  sowohl wie von  $M$  werden mit bezug auf die Art der Druckverteilung über die Zapfenoberfläche Annahmen gemacht werden müssen, und zwar wird hiebei ein

\*) Nach Reye, Zivilingenieur, 1860, pg. 295 u. ff.

Unterschied gemacht zwischen neuen Zapfen und alten, eingelaufenen Zapfen; für erstere wird angenommen

$$p = \text{konstant} \dots \dots \dots \quad 48)$$

für letztere dagegen die Annahme gemacht, dass die Abnützung in der Richtung des Totaldruckes  $P$

Fig. 42.



derart vorwärts schreite, dass sich in dieser Richtung stets weitergehende, der Zapfenform kongruente Hohlformen erzeugen. Es ist dann die Abnützung, welche infolge des spezifischen Druckes  $p$  an irgend einer Stelle veranlasst wird  $= \alpha p y$ , d. h. proportional dem normalen Flächendruck und der Geschwindigkeit, wobei letztere auch proportional dem Abstand  $y$  von der Drehungsaxe gesetzt werden kann. Das Fortschreiten der Abnützung in der Richtung von  $P$  ist dann

$= \frac{\alpha p y}{\cos \varphi}$ , und da bei fortschreitender Abnützung die sich erzeugenden Hohlformen stets kongruent sein sollen (Fig. 42), so muss die Abnützung in der Richtung von  $P$  konstant und daher, weil auch  $\alpha$  eine Konstante ist, gesetzt werden

$$\frac{p y}{\cos \varphi} = C \dots \dots \dots \quad 49)$$

Mit Hilfe der drei Gleichungen 47, 48 und 49 kann sonach für jede beliebige Zapfenform, in neuem wie in altem eingelaufenen Zustande, die Verteilung des Druckes über die ganze Zapfenreibungsfäche, wie auch das Reibungsmoment bestimmt werden. Die Durchführung der bezüglichen Rechnungen möge jedoch im folgenden nur für die einfacheren Fälle, den konischen Zapfen und dessen Spezialfall, den zylindrischen Zapfen, gezeigt werden.

### § 13. Reibung bei Stützzapfen.

Für den konischen Stützzapfen lässt sich das Element  $f$  der Reibungsfäche darstellen durch zwei ebene, unendlich nahe aneinander senkrecht zur Axe ausgeführte Schnitte (Fig. 43). Das Element  $ds$  der Meridianlinie bildet mit der

Ebene der Kreisschnitte denselben Winkel, welchen die Richtung eines Flächendruckes  $p$  mit der Richtung des Totalzapfendruckes bildet, und zwar ist dieser Winkel  $\varphi$  für die ganze Reibungsfläche eines konischen Stützzapfens konstant. Es ist mithin das zwischen den beiden Kreisschnitten abgetrennte Oberflächenelement

$$f = 2y\pi ds = 2y\pi \frac{dy}{\cos \varphi},$$

daher

$$P = \sum p 2y\pi \frac{dy}{\cos \varphi} = \int p 2y\pi dy.$$

Setzt man hierin für neue Zapfen  $p = \text{konstant}$ , so wird aus Gleichung 47)

$$\text{I. } \dots \quad p = \frac{P}{\int_{r_2}^{r_1} 2y\pi dy} = \frac{P}{(r_1^2 - r_2^2)\pi},$$

und aus Gleichung 46)

$$\text{II. } M = \frac{P\mu}{(r_1^2 - r_2^2)\pi} \int_{r_2}^{r_1} 2y\pi \frac{dy}{\cos \varphi} y = \frac{2\mu P}{(r_1^2 - r_2^2)\cos \varphi} \int_{r_2}^{r_1} y^2 dy.$$

Für eingelaufene Zapfen wäre zu setzen gemäss Gleichung 49)

$$\frac{py}{\cos \varphi} = C, \text{ und daher } p = \frac{C \cos \varphi}{y},$$

sowie  $pf = 2C\pi dy$ .

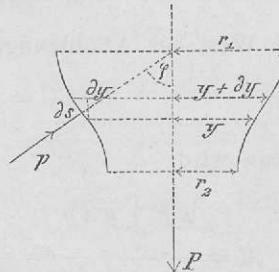
Es wird dann aus Gleichung 47)

$$\begin{aligned} P &= \int 2C\pi dy \cdot \cos \varphi = 2C\pi \cos \varphi \int dy, \\ &= 2py\pi \int_{r_2}^{r_1} dy, \end{aligned}$$

woraus endlich

$$\text{III. } \dots \quad p = \frac{P}{2y\pi \int_{r_2}^{r_1} dy} = \frac{P}{2y\pi(r_1 - r_2)}.$$

Fig. 43.



Ferner aus Gleichung 46)  $M = \Sigma \mu \cdot 2 C \pi y dy = 2 C \pi \mu \int_{r_2}^{r_1} y dy$ .

Der Wert der Abnutzungskonstanten folgt mit

$$C = \frac{P}{2 \pi \cos \varphi \int_{r_2}^{r_1} dy},$$

mithin wird

$$\text{IV. } M = \frac{\mu P \int_{r_2}^{r_1} y dy}{\cos \varphi \int_{r_2}^{r_1} dy} = \frac{\mu P (r_1^2 - r_2^2)}{2 \cos \varphi (r_1 - r_2)} = \frac{\mu P}{2 \cos \varphi} (r_1 + r_2).$$

#### A. Konischer Stützzapfen.

Die Gleichungen I bis IV ergeben nun für den vollständigen und den abgekürzten konischen, sowie für den zylindrischen Zapfen mit voller kreisförmiger und mit ringförmiger Auflage nachstehende Werte:

a. abgekürzter Konus:      b. vollständiger Konus:

$$\text{I. } p = \frac{P}{(r_1^2 - r_2^2) \pi}, \quad \text{II. } M = \frac{2}{3} \frac{\mu P}{\cos \varphi} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}, \quad \text{III. } p = \frac{P}{2 y \pi (r_1 - r_2)}, \quad \text{IV. } M = \frac{1}{2} \frac{\mu P}{\cos \varphi} (r_1 + r_2),$$

$$\text{I. } p = \frac{P}{(r_1^2 - r_2^2) \pi}, \quad \text{II. } M = \frac{2}{3} \frac{\mu P}{\cos \varphi} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}, \quad \text{III. } p = \frac{P}{2 y \pi (r_1 - r_2)}, \quad \text{IV. } M = \frac{1}{2} \frac{\mu P}{\cos \varphi} (r_1 + r_2),$$

$$\text{I. } p = \frac{P}{(r_1^2 - r_2^2) \pi}, \quad \text{II. } M = \frac{2}{3} \frac{\mu P}{\cos \varphi} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}, \quad \text{III. } p = \frac{P}{2 y \pi (r_1 - r_2)}, \quad \text{IV. } M = \frac{1}{2} \frac{\mu P}{\cos \varphi} (r_1 + r_2),$$

#### B. Zylindrischer Stützzapfen ( $\cos \varphi = 1$ ).

a. ringförmige Auflage:      b. vollständige Kreis-Auflage:

$$\text{I. } p = \frac{P}{(r_1^2 - r_2^2) \pi}, \quad \text{II. } M = \frac{2}{3} \mu P \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}, \quad \text{III. } p = \frac{P}{2 y \pi (r_1 - r_2)}, \quad \text{IV. } M = \frac{1}{2} \mu P (r_1 + r_2),$$

$$\text{I. } p = \frac{P}{(r_1^2 - r_2^2) \pi}, \quad \text{II. } M = \frac{2}{3} \mu P \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}, \quad \text{III. } p = \frac{P}{2 y \pi (r_1 - r_2)}, \quad \text{IV. } M = \frac{1}{2} \mu P (r_1 + r_2),$$

$$\text{I. } p = \frac{P}{(r_1^2 - r_2^2) \pi}, \quad \text{II. } M = \frac{2}{3} \mu P \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}, \quad \text{III. } p = \frac{P}{2 y \pi (r_1 - r_2)}, \quad \text{IV. } M = \frac{1}{2} \mu P (r_1 + r_2),$$

$$p_{\max} = \infty,$$

$$\text{I. } p = \frac{P}{(r_1^2 - r_2^2) \pi}, \quad \text{II. } M = \frac{2}{3} \mu P \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}, \quad \text{III. } p = \frac{P}{2 y \pi (r_1 - r_2)}, \quad \text{IV. } M = \frac{1}{2} \mu P (r_1 + r_2),$$

Die vorstehende Entwicklung zeigt, dass unter den eigentümlichen Annahmen der Druckverteilung:

$p = \text{konstant}$  für neue, und

$$\frac{p y}{\cos \varphi} = C \text{ für eingelaufene}$$

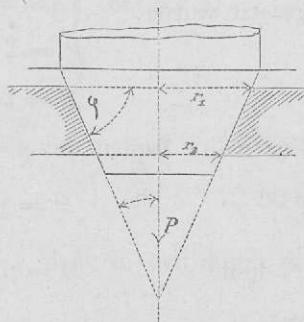
Zapfen, tatsächlich eine Verminderung des Reibungsmomentes durch den Vorgang des Einlaufens eines Stützzapfens stattfindet, und sich dieses Reibungsmoment beispielsweise bei zylindrischen Stützzapfen mit ebener Stützfläche von

$$\frac{2}{3} \mu P r_1 \text{ auf } \frac{1}{2} \mu P r_1$$

verringert, also auf  $\frac{3}{4}$  des anfänglichen Betrages.

Aus dem Vorstehenden würde bei eingelaufenen Zapfen in den Fällen  $A \cdot b$  und  $B \cdot b$  folgen, dass wohl nicht in der Mitte der Zapfen, wo  $p = \infty$ , dagegen auch die Geschwindigkeit  $= 0$  ist, ein Aufrauen stattfindet, dieses dagegen in der unmittelbaren Nähe des geometrischen Mittels zu vermuten sein wird, wo die Pressung  $p$  auch noch sehr bedeutend ist, und zudem eine relative Bewegung des Zapfens gegen die Unterlage mit der Geschwindigkeit  $v > o$  auftritt. Es wird deshalb insondere bei schwer belasteten Stützzapfen besser sein, die Auflage durch geringe Aussparung der Unterlage zu einer ringförmigen zu machen.

Fig. 44.



#### § 14. Reibung bei Tragzapfen.

Wir betrachten für diejenigen Zapfen, bei welchen die Druckrichtung mit der Rotationsaxe einen Winkel bildet, nur den Fall, in welchem dieser Winkel ein rechter ist, nämlich die Tragzapfen im gewöhnlichen Sinne, und unter diesen nur den zylindrischen.

Das in Gleichung 46 und 47 enthaltene Flächenelement  $f$  begrenzt man beim Tragzapfen durch 2 radiale Schnitte, zwischen

welchen ein Bogenelement  $ds = r d\varphi$  des Kreisschnittes eingeschlossen sei, und erhält dann  $f = lr d\varphi$  und an Stelle jener Gleichungen die nachstehenden, worin  $y = \text{konst.} = r$  gesetzt wurde:

$$P = \sum p r l \cos \varphi d \varphi \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (50)$$

Für neue Zapfen mit  $p = \text{konst.}$  ergibt sich hieraus

$$P = p \cdot r \cdot l \int \cos \varphi \, d\varphi \quad \dots \dots \dots \quad 50 \text{ a})$$

Nimmt man an, dass der Tragzapfen durch die Hälfte seines Umfanges im Lager läge, so sind die Grenzwerte für  $\varphi$ :

$\varphi = +\frac{\pi}{2}$  und  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  und wird sonach aus Gl. 50 a

$P = 2 \rho r l$ , woraus dann folgt

$$\text{I.} \quad p = \frac{P}{2rl}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Flächendruck auf der Zapfenreibungsfäche derselbe ist, wie wenn er auf die Projektion  $2rl$  dieser Reibungsfläche auf eine Ebene senkrecht zur Hauptzapfendruckrichtung bezogen würde.

Das Reibungsmoment ergibt sich in diesem Falle aus Gleichung 51 a.

$$\text{II. } M = \frac{P}{2 r l} r^2 l \mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2} P \mu r.$$

Für alte, eingelaufene Zapfen ergibt sich zunächst

$$\frac{p y}{\cos \varphi} = \frac{p r}{\cos \varphi} = C,$$

$$\text{woraus } p = \frac{C \cdot \cos \varphi}{r},$$

ferner hiemit aus Gleichung 50

$$P = \Sigma \left( \frac{C \cos \varphi}{r} r l \cos \varphi d\varphi \right) = C l \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi,$$

$$= \frac{p r}{\cos \varphi} l \cdot \frac{1}{2} \pi,$$

mit einem Maximalwert für  $\cos \varphi = 1$ , d. h. in der durch die Zapfenaxe gelegten Vertikalebene

$$p_{max} = \frac{2P}{\pi r l},$$

mithin  $\frac{4}{\pi}$  mal so gross als für neue Zapfen unter Voraussetzung gleichmässiger Druckverteilung. Endlich wird das Reibungsmoment

$$M = \Sigma \left( \frac{2 P \cos \varphi}{\pi r l} r^2 l \mu d\varphi \right) = \frac{2}{\pi} P r \mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi,$$

und endlich

Für die bei Tragzapfen nahezu ausschliesslich vorkommende zylindrische Form wird sehr oft auch die Formel benutzt

$$M = \mu_1 P R \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (52)$$

Es setzt diese Formel weder gleichförmige Druckverteilung, noch Erzeugung von kongruenten Abnutzungsf lächen, sondern eine durch Abnutzung sich ergebende Erweiterung der Lagerfläche voraus, infolge deren eine Berührung zwischen Zapfen und Lager nur mehr in einem Punkt erfolgt.  $\mu_1$  ist dabei der sogenannte Reibungskoeffizient für Zapfenreibung, während in den vorstehenden Berechnungen  $\mu$  der Koeffizient für gleitende Reibung ist.  $\mu_1$  wird auch stets mit Hilfe der

Formel  $M = \mu_1 P R$  durch Versuche bestimmt, und muss daher die Beziehung gelten

$$\text{für neue Zapfen } \mu_1 = \frac{\mu \pi}{2} = 1,57 \mu,$$

$$\text{für alte } \gg = \frac{4 \mu}{\pi} = 1,25 \mu,$$

$$\text{im Mittel } \gg = 1,41 \mu.$$

Dass tatsächlich bei neuen Zapfen die Druckverteilung eine gleichförmige, bei alten Zapfen aber in der Weise gegeben sei, dass sich durch die Abnutzung der Lager stets fortschreitende kongruente Lagerungsflächen ergeben, scheint nach den vorhergehend erhaltenen Resultaten allerdings wahrscheinlich, und lässt sich eine andere Annahme für neue Zapfen wohl nicht machen. Bei alten, eingelaufenen Zapfen scheint aber mitunter die Abnutzung nicht nach der erwähnten Weise vor sich zu gehen. Ausgelaufene Turbinenzapfen, welche mit ebener Begrenzung von Anfang an auf ebenen Lagerflächen liefen, zeigen mannigfaltige Deformierungen der Reibungsflächen.

Es mögen diese Änderungen herbeigeführt sein durch die nicht durchweg gleiche Härte und Glätte der Reibungsflächen und durch losgerissene Metallteile, möglicherweise aber trägt hiezu auch eine nicht an allen Stellen gleichmäßig eintretende Kompression bei, welche von der Verteilung des Flächendruckes abhängig ist.

Mitbezug auf die Erwärmung der Zapfen und Lager ist auch noch zu berücksichtigen, dass diejenigen Anordnungen sich vorteilhafter verhalten, bei welchen die an den Reibungsflächen entwickelte Wärme sich rasch über verhältnismässig grosse Massen verteilen kann, so dass in dieser Beziehung eine möglichst ausgedehnte Berührung zwischen Lagerfutter und umgebendem Lagerkörper wünschenswert ist.

Die Reibungsarbeit bestimmt sich auch durch das Produkt von Reibungsmoment und Winkelgeschwindigkeit, mithin durch

$$A = M \cdot \omega = M \frac{2 \pi n}{60} \dots \dots \dots \quad (53)$$

Diese Arbeit wird ganz oder zum Teil dazu verwendet, um den Zapfen und seine nächste Umgebung, die Lagerschale,

vielleicht auch noch den Lagerkörper zu erwärmen, und zwar entsprechen 424 Met. kg einer Wärmeeinheit. Die infolge der Reibungsarbeit erzeugte Gesamtwärme drückt sich mithin aus durch

$$W = \frac{A}{424} \varphi \quad \dots \dots \dots \quad 54)$$

Von dieser Wärmemenge wird ein Teil durch metallische Leitung, ein anderer durch das abfließende Schmiermaterial, ein dritter Teil durch die umgebende Luft abgeleitet, bei weitem aber der grösste Teil durch metallische Leitung, durch welche die an der Zapfenreibungsfläche  $F$  entwickelte Wärme zunächst in die Schale, dann in den Lagerkörper und so weiter geleitet wird. Wird dieser Teil der so abgeleiteten Wärme mit  $\varepsilon W$  bezeichnet, so kann gesetzt werden

Es folgt hieraus, dass zwischen der Zapfenreibungsfläche und der Reibungsarbeit ein Zusammenhang gilt, der sich ausdrückt durch

Diese Konstante kann durch Vergleichung aus geführter Zapfen bezw. ihres Wertes  $F$  und der für dieselben treffenden Reibungsarbeit  $A$  bestimmt werden, am sichersten unter der Annahme, dass sowohl die ganze Reibungsarbeit auf Wärmeerzeugung verwendet werde,  $\varphi = 1$ , als auch, dass die ganze erzeugte Wärme durch metallische Leitung abgeleitet werde,  $\xi = 1$ .

So wird z. B. für den Zapfen einer Eisenbahnaxé, welcher, mit 6000 kg belastet, 117 mm Durchmesser und 211 mm Länge erhält, für 300 Umdrehungen berechnet, unter Einrechnung

eines Reibungskoeffizienten  $\mu = \frac{1}{20}$

die Reibungsarbeit =

$$A = M \frac{2\pi n}{60} = \frac{4}{\pi} P_{\mu} r \frac{2\pi n}{60} = 702000 \text{ Sek. kg mm}$$

und die Leitungsfläche

$$F = \frac{1}{2} d \pi l = 38\ 824 \text{ qmm}$$

4

## III. WELLENKUPPLUNGEN.

## § 15. Feste Kupplungen für Wellen, deren geometrische Axen zusammenfallen.

Um zwei Wellen mit übereinstimmenden geometrischen Axen derart zu verbinden, dass sich dieselben wie *eine* ununterbrochene Welle verhalten, wird eine, nach spezieller Art der Kupplung verschiedene geformte ein- oder mehrteilige Hülse auf die beiden Wellenenden aufgezogen und mit diesen fest verbunden.

Die einfachste Form einer Kupplungshülse ist die eines zylindrischen Röhrenstückes (*Muffe*), welches bei geeigneter Wandstärke eine innere Bohrung genau nach dem Durchmesser der zu verbindenden Wellenenden besitzt (Fig. 45). Diese letzteren werden dann in einfachster Weise stumpf gestossen und mit der aufgezogenen Hülse durch *einen* Keil verbunden. Die Anstrengung dieser Hülse ist zunächst an der Stossstelle genau dieselbe, wie die Anstrengung der ununterbrochenen Welle, nämlich auf gleichzeitige Biegsungs- und Drehungsfestigkeit, welcher entsprechend auch die Wandstärke derselben bestimmt werden könnte. Die aus solcher Berechnung mit normalem Werte des Festigkeitskoeffizienten resultierende Stärke ist aber geringer als sie tatsächlich sich vorfindet, und zwar

wohl in erster Reihe mit Rücksicht auf ein mögliches Zersprengen

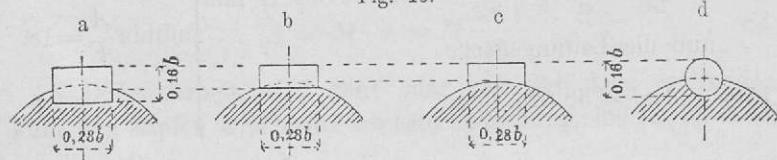
durch den gewaltsam eingetriebenen Keil. Mit Zugrundelegung der für die Lager gegebenen Bezugsgrösse  $b = d + 10\text{mm}$  gibt man einfachen zylindrischen gusseisernen Kupplungshülsen eine

$$\text{Hülsenstärke} = \delta = 0,4(d + 10\text{mm}),$$

$$\text{Hülsenlänge} = \lambda = 2,5(d + 10\text{mm}).$$

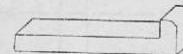
Die angewandten Keile können entweder in Keilnuten (Fig. 46 a) oder auf Keilbahnen (Fig. 46 b) oder bei geringen zu trans-

Fig. 46.



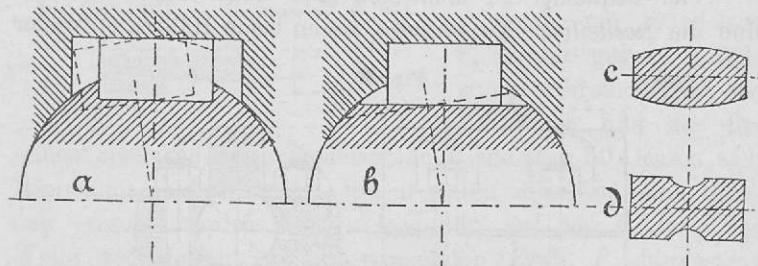
mittierenden Kräften rund (Fig. 46 c) aufsitzen. Der auf einer Seite aufzutragende Anzug des Keiles (Tangente des Steigungswinkels) wird etwa  $\frac{1}{100}$  gemacht. Die in Fig. 47 angegebene Keil-Nase erleichtert das Eintreiben und Wiederausziehen des Keiles, ist aber in Berücksichtigung möglichster Vermeidung von Unfällen besser wegzulassen.

Fig. 47.



Die Inanspruchnahme des Keiles ist zunächst eine solche auf Abscherung; es ist aber auch das Bestreben vorhanden, das Material des Keiles zu komprimieren, und zwar am meisten in Nähe der Längskanten. Eine solche Kompression tritt ein, wenn entweder der Keil sich in der reichlich breiten Keilnut der Hülse (Fig. 47 a) oder die reichlich weite Keilnut der Welle sich unter dem Keile

Fig. 47.



verdreht (Fig. 47 b), bzw. zu verdrehen strebt. Durch solche Verdrehung, welche in Fig. 47 a und b im Zerrbild dargestellt ist, erhält der Keil schliesslich gewölbte Breitenflächen (Fig. 47 c.) Man wird den Keil infolge dieses Verhaltens widerstandsfähiger machen, wenn der inbezug auf diese Kompression neutrale mittlere Streifen weggelassen wird (Fig. 47 d), indem man in der Mitte der Keilbreite durch dessen ganze Länge hindurch eine vertiefte Rinne herstellt.\*)

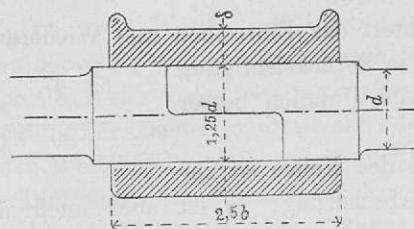
Die einfache Muffenkupplung hat den Nachteil, dass sie erst nach vollendeter Einlegung der Wellenstücke in die Lager mon-

\* Rinnenkeile, von Römmele in Freiburg.

tiert werden kann, und dass der Keil eine Keilnut oder Keilbahn von *doppelter Länge* erfordert. Werden die beiden Wellenenden

überblattet (Fig. 48), so muss jeder der beiden halbkreisförmigen Endquerschnitte für sich allein in bezug auf die Gesamtinanspruchnahme durch  $M_c$  ebenso grosse Sicherheit bieten, wie der übrige ganz-

Fig. 48.



zylindrische Teil der Welle. Es ist mithin zu setzen:

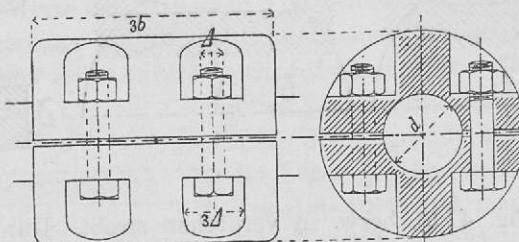
$$W_O = W_{\square},$$

oder

$$\frac{\pi}{32} d^3 = \frac{1}{2} \frac{\pi}{32} d_1^3, \text{ mithin } d_1 = 1.26 d \dots \dots \dots 57)$$

Viel bequemer zu montieren und daher auch beliebter sind die *zweiteiligen Kupplungen*, deren beide Hälften entweder

Fig. 49.



durch Längs- oder Querteilung hergestellt sind. Bei den Kupplungen mit Längsteilung (Schalenkupplungen) werden deren beide Hälften mit Schrauben (Fig. 49) oder durch aufgezogene schmiedeiserne Ringe (Fig. 50) gegenseitig und mit den Wellenenden verbunden. Die beiden halben Schalen werden unter Benützung einer dünnen Zwischenlage von Blech oder Papier genau auf den Durchmesser der Welle ausgedreht, und können daher nach Wegnahme der Zwischenlage durch die Schrauben oder Ringe so fest auf die Welle aufgepresst werden, dass eine weitere Verkeilung nicht mehr nötig wird.

Die Anzahl der Schrauben bestimmt sich nach dem Wellendurchmesser, indem man die dem Resultate der Formel

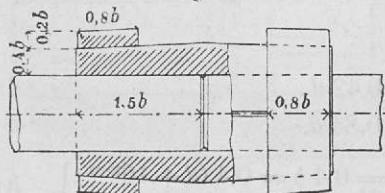
$$A = 3 + \frac{1}{50}d \quad \dots \dots \dots \quad (58)$$

nächstgelegene ganze und gerade Zahl nimmt und die Stärke bestimmt bei Benützung von im Ganzen

$$\left. \begin{array}{l} 2 \text{ Stk. } \Delta = 0,32(d+10) \text{ oder } 0,8 \delta \\ 4 \text{ " } \Delta = 0,28(d+10) \text{ " } 0,7 \delta \\ 6 \text{ " } \Delta = 0,24(d+10) \text{ " } 0,6 \delta \\ 8 \text{ " } \Delta = 0,16(d+10) \text{ " } 0,4 \delta \end{array} \right\} \dots \dots \dots 59)$$

Man setze dabei die Schrauben möglichst nahe, bis auf  $\frac{1}{2} \Delta$  an die Welle heran und nehme als Begrenzung der

Fig. 50.



selben ersetzenden schmiedeisernen Ringe (Fig. 50) lassen sich Minimalmasse bestimmen, indem durch dieselben eine Reibung erzeugt werden soll, welche der, auf den Umfang der Welle reduzierten, zu übertragenden Kraft  $P$  mindestens gleich ist.

Für die Welle war

$$d^3 = \frac{M_e}{0,1 \ k}, \text{ durchschnittlich } = \frac{M_a}{0,1 \ k},$$

folglich ist die Umfangskraft

$$P = \frac{M_d}{\frac{1}{2}d} = 0,2 \, d^2 \, k.$$

Ist der Druck jeder Kupplungsschale gegen die Welle  $= p$ , so ist die entsprechende Reibung auf jeder Seite  $= p \mu$ , und daher muss

$$2p \geq 0,2d^2k$$

Kupplung einen Zylinder, welcher die äussersten zu Schraubenkopf oder Mutter gehörigen Ecken umschliesst, um möglichste Sicherheit gegen Unfälle zu gewähren. Für die Schrauben und die die-

sein. Der Druck  $p$  äussert sich als eine Beanspruchung des beiderseitigen Ringquerschnittes oder der beiderseitigen Schrauben auf Zug.

Wenn die Breite eines Ringes mit  $\lambda_1$  und dessen Dicke mit  $\delta_1$ , sowie die zulässige Spannungsintensität mit  $k_1$  bezeichnet wird, so muss gesetzt werden:

$$2\lambda_1\delta_1 = \frac{p}{k_1},$$

daher 
$$2 \lambda_1 \delta_1 > \frac{0,2 d^2 k}{2 \mu k_1} \dots \dots \dots \quad (60)$$

In der Regel ist  $\lambda_1 = 2\delta_1$ .

und setzt man  $k_1 = k = 4$ ,

sowie  $\mu = \frac{1}{7}$ ,

$$\text{so wird} \quad \delta_1 \geq 0,42 d, \quad \lambda_1 \geq 0,84 d.$$

Setzt man statt dessen  $\delta_1 = 0,4 b = 0,4 (d + 10\text{mm})$  und  $\lambda_1 = 0,8 b = 0,8 (d + 10\text{mm})$ , so erhält man

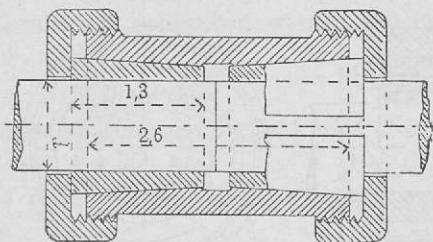
so werden die Abmessungen der aufgezogenen Ringe bei Kupplungen für Wellen bis zu 200 mm Durchmesser etwas kräftiger, als vorstehende Rechnung angibt.

Sollen diese Ringe gesichert sein gegen unbeabsichtigtes Abgleiten, so muss als Grenzwert für den Winkel der konischen Hülsenbegrenzung gegen die Axe der Reibungswinkel angenommen werden, dessen Tangente gleich dem Reibungskoeffizienten für die betreffenden Materialien zu setzen ist. In der Regel wird jene Tangente (das Schrägmass des Kegels)

nicht grösser als  $\frac{1}{20}$  gemacht.

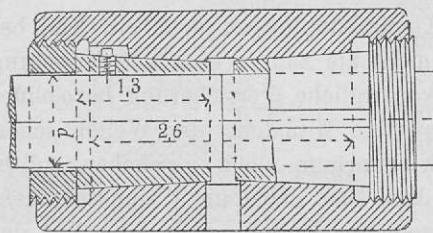
An Stelle der aussen aufgezogenen Ringe können auch ins Innere der Hülse eingepresste durchgeschnittene Ringe genommen werden; die Teilung der Ringe wird jedoch nicht vollständig durchgeführt, sondern nur durch die eine Seite derselben, und die andere Seite zusammenhängend gelassen.

Fig. 51.



die Welle lose aufgesteckte Schrauben geschehen (Fig. 52), (Butler'sche Kupplung) oder endlich können die auf den beiden

Fig. 52.



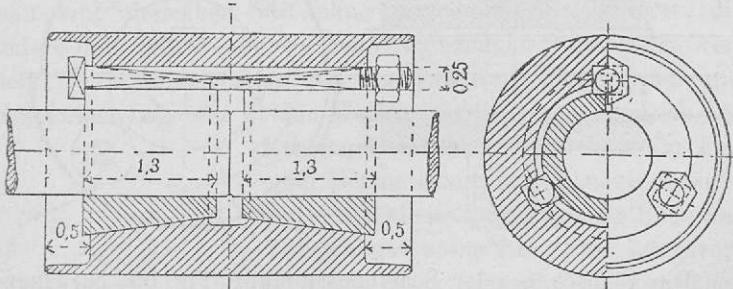
Wellenenden sitzenden konischen Klemmringe durch mehrere (3 Stück) besonders durchgesteckte Schrauben zusammengezogen und damit auf die Welle und in die äussere Kupplungshülse eingepresst

werden (Fig. 53, Sellers'sche Kupplung).

Das Einpressen solcher, äusserlich schwach konischer Ringe, wobei eine Federung derselben eintreten muss, kann durch äusserlich übergreifende Muttern (Fig. 51)\* oder durch innen eingreifende, auf

Verlegt man die Konizität, welche zum Zwecke des inneren Anschlusses der Klemmringe an die Wellen vorhanden

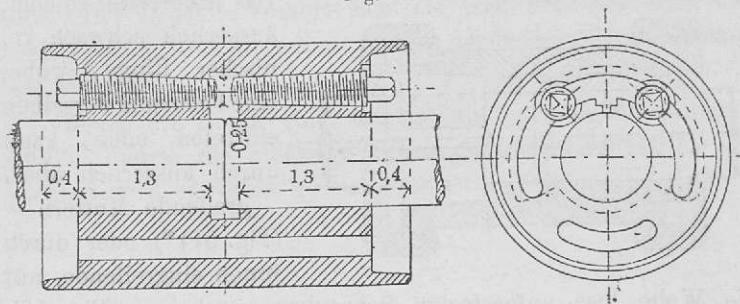
Fig. 53.



sein muss, in die Schrauben, so erhält man die Kupplung von Cresson; Fig. 54 zeigt dieselbe in der Form, wie sie von den

\*) Die in Fig. 51, 52 u. 53 eingeschriebenen Masse sind Verhältniszahlen, bezogen auf  $b = d + 10$  als Einheit.

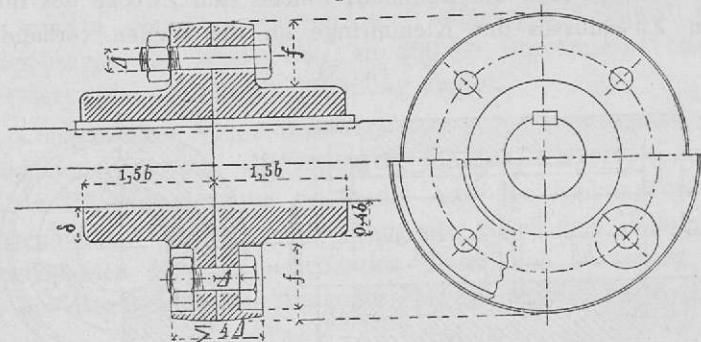
Fig. 54.



Ateliers Ducommun in Mühlhausen ausgeführt wird. Sie hat die ungünstige Eigenschaft, dass sie nicht selbstthätig die Wellen zentriert.

Wird bei allen den Klemmkupplungen noch ein Keil benutzt, so kann derselbe nicht als zum Wesen der Kupplung gehörig, sondern nur als vorsorgliche Versicherung bezeichnet werden, indem die gegenseitige Mitnahme der Wellen schon durch die Reibung der Klemmringe allein geschehen sollte. Der etwa benützte Keil darf aber dabei nicht eingeschlagen, sondern muss vor Aufsetzen der Kupplung in eine Nut der Welle eingelegt werden.

Fig. 55.



Die Flanschen- oder Scheibenkupplung (Fig. 55) hat Querteilung und erhält dabei jedes der zu kuppelnden Wellenenden eine Hülse mit Flansche, welche letzteren durch Schrauben vereinigt werden; diese Schrauben haben die Umfangskraft zu übertragen, sind daher transversal, auf Abscheerung, in Anspruch genommen, und könnten dem entsprechend durch

Rechnung bestimmt werden. Einfacher nimmt man für die Anzahl der Schrauben wieder die dem Resultat der Formel

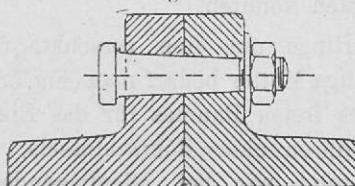
$$A = 3 + \frac{1}{50} d \quad \dots \dots \dots \quad (62)$$

nächstgelegene ganze Zahl, und die Schraubenstärke nach der Regel, wonach bei

4	Stück	Schrauben	die	Stärke	$\Delta = 0,36(d + 10)$	oder	0,9	$\delta$
5	"	"	"	"	$= 0,30(d + 10)$	"	0,75	$\delta$
6	"	"	"	"	$= 0,25(d + 10)$	"	0,6	$\delta$
8	"	"	"	"	$= 0,20(d + 10)$	"	0,5	$\delta$

Sollen solche Kupplungen gut funktionieren, so müssen

Fig. 56.

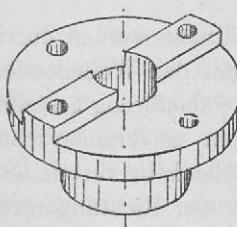


gut funktionieren, so müssen die Schrauben ohne jeden Spielraum in den Flanschen stecken; bei besonders wichtigen Verbindungen sogar mit konischem Schaft in konisch ausgebohrten Löchern eingeschliffen sein (Fig. 56).

Die beiden Keile sind für jede Kupplungsscheibe nur so lang wie die Hülsen, die Keilbahnen oder Keilmuten nur um Weniges länger.

Lässt man die Flanschen etwas ineinander greifen, indem man eine derselben mit einer konzentrischen Ringnut, die andere mit einem ebensolchen ringförmigen Vorsprunge verseht, so ist damit allerdings die Erhaltung der axialen und zentrischen Lage der beiden Wellen gesichert, aber zugleich der

Fig. 57.



Übelstand hervorgerufen, dass im Fall einer Demontierung eine Längsverschiebung des Wellenstranges um die Höhe des Vorsprunges nötig ist. Eine Längsverschiebung eines grösseren Wellenstranges wird nicht nötig, wenn der als Mitnehmer angewandte Vorsprung an der einen Kupplungsscheibe die Form einer Rippe hat (Fig. 57), welche in eine

Nut der anderen Kupplungsscheibe eingreift. Eine solche

Verschiebung ist überhaupt nur dann möglich, wenn die Wellen keine eingedrehten oder durch Bunde begrenzte Lagerstellen haben, welche wir aber ohnehin mit Rücksicht auf eine mögliche durch Temperaturänderungen bedingte Längenänderung, sowie auf einfachere Herstellung und Montierung verworfen. Die (Fig. 55, untere Hälfte) gezeichnete Anordnung entspricht der im Interesse der Sicherheit der Arbeiter zu

stellenden Anforderung, dass an Transmissionswellen keinerlei vorstehende Teile (Schrauben, Muttern oder Keilnasen etc) sich vorfinden, durch welche Kleider oder abgefallene Riemen etc. erfasst werden könnten.

Rings um eine versenkte 6-kantige Mutter bedarf man (Fig. 58) eines freien Raumes für das Einführen eines Rohrschlüssels, während wir bei offenliegenden Muttern (Fig. 59) für alle Arten Flanschen rings um eine beizusetzende Unterlagscheibe noch einen Raum von mindestens 5 mm nötig haben, wonach sich  $2(\Delta + 10\text{ mm}) = 2\Delta + 20\text{ mm}$  als die geringste Flanschenlänge ergiebt.

Fig. 58.

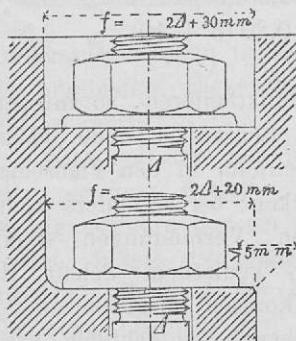
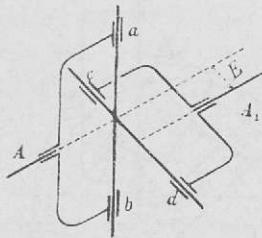


Fig. 59.

### § 16. Feste Kupplung für Wellen, deren geometrische Axen parallel laufen.

Parallel laufende Wellen können verbunden werden durch die Kupplung von *Oldham* (Fig. 60). Die mit den Wellenenden verbundenen Kupplungshülsen sind hiebei gabelförmig gestaltet und die Endpunkte der Gabeln durch ein unveränderliches Kreuzstück mit rechtwinklig stehenden Schenkeln verbunden. Die letztern können in den Gabelenden in der Richtung ihrer geometrischen Axen schleifen und wird durch diese Anordnung bei konstanter Winkelgeschwindigkeit der treibenden auch eine

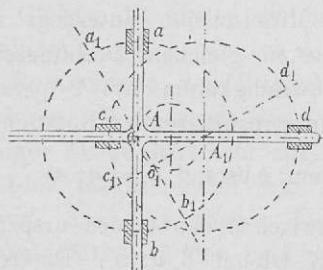
Fig. 60.



konstante Winkelgeschwindigkeit der getriebenen Axe vermittelt. Es seien Fig. 60 und 61)  $A$  und  $A_1$  die zu kuppelnden Axen,  $a$  und  $b$ , sowie  $c$  und  $d$  die Endpunkte der damit verbundenen Gabeln, deren Verbindungslien  $a b$  und  $c d$  mit den Mittellinien der durch die Gabelendpunkte geführten Kreuzarme übereinstimmen. Liegt

nun etwa in einer Anfangsstellung (Fig. 61) der eine Kreuzarm  $c d$  in der Ebene der beiden parallelen Axen und mithin der andere ( $a b$ ) senkrecht dazu, so wird bei einer Drehung der einen Axe auch die Stellung der Kreuzarme und somit auch der zweiten Axe ganz bestimmt sein; es muss dabei nämlich die Mittellinie des Kreuzarmes  $a b$  (jetzt  $a_1 b_1$ ) die Axenrichtung  $A$ , diejenige des Kreuzarmes  $c d$  (jetzt  $c_1 d_1$ ) die Axenrichtung  $A_1$  schnei-

Fig. 61.

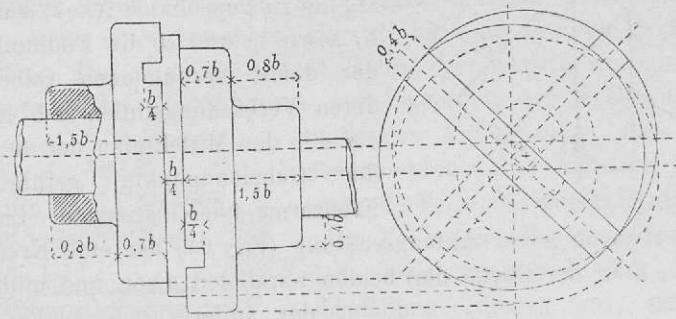


den. Weil nun in jeder Stellung  $a_1 b_1$  senkrecht zu  $c_1 d_1$  und die ganze Bewegung der Gabelendpunkte wie des Kreuzstückes in der gleichen Ebene (bei einzelnen Anordnungen wenigstens in zwei parallelen Ebenen) vor sich geht, so sind die Winkel  $a A a_1 = c A_1 c_1$ , d. h. die Drehungswinkel der beiden Axen einander gleich.

Bei der Ausführung solcher Kupplungen (Fig. 62) legt man die beiden Kreuzarme mit ihren Führungen in den zugehörigen Gabelenden in der Regel in zweierlei, jedoch parallele Ebenen, indem man statt der Gabeln runde Scheiben mit den Wellenenden verbindet und statt des Kreuzstückes eine gleichfalls runde Scheibe anordnet, diese mit, auf entgegengesetzten Seiten derselben liegenden, zu einander rechtwinkligen Rippen versieht und diese letzteren in entsprechen-

den Nuten der mit den Wellen verbundenen Scheiben schleifen lässt.

Fig. 62.

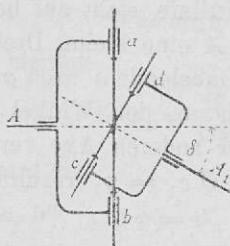


Das Kreuzstück oder die Mittelscheibe unterliegt zwei gleichzeitigen Rotationen, welche in gleichem Drehungssinne und mit gleichen Winkelgeschwindigkeiten um 2 parallele Achsen stattfinden, gleichwertig einer resultierenden Rotation um eine parallele Axe, welche in dem Abstand  $a = a_1 = \frac{E}{2}$  von den Achsen, d. h. in der Mitte zwischen den beiden ursprünglichen Drehungssachsen liegt. (§ 3. Gleich. 3 u. 5.) Die resultierende Rotationsgeschwindigkeit ist gleich der Summe der beiden Komponenten, hier gleich der doppelten Rotationsgeschwindigkeit um die Axe  $A$  oder  $A_1$ , mithin wird bei einer Umdrehung der Achse  $A$  oder  $A_1$  der Mittelpunkt des Zwischenstückes *zwei* ganze Umdrehungen vollenden.

### § 17. Feste Kupplung für Wellen, deren geometrische Achsen sich schneiden.

Für die Verbindung sich schneidender Achsen besitzen wir als einfachste Vorrichtung die Anordnung von *Cardanus* (das Universalgelenk, den *Hook'schen Schlüssel*) (Fig. 63). Dabei sind wieder die beiden Wellenenden mit Gabeln versehen und diese durch ein kreuzförmiges Mittelstück mit rechtwinklig zu einander stehenden Schenkeln verbunden, durch welches

Fig. 63.



sprünglichen Drehungssachsen geht, und deren Geschwindigkeit sich ausdrückt durch

$$W = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + 2 w_1 w_2 \cos \delta} \dots \dots \dots \quad (63)$$

wobei mit  $\delta$  der Winkel der beiden Axen bezeichnet wird. (§ 3 Gleichg. 1.) Sollen die beiden Geschwindigkeiten  $w_1$  und  $w_2$  einander gleich sein, so wird die Richtung der resultierenden Rotationsaxe den Winkel  $\delta$  der beiden Axen  $A$  und  $A_1$  halbieren. Weil ferner diese resultierende Rotation stets nur in einer Ebene senkrecht zur Ebene der beiden ursprünglichen und der resultierenden Axe vor sich gehen kann, so folgt daraus, dass die Ebene des Kreuzmittelstückes stets den Winkel  $180^\circ - \delta$  der beiden Drehungssachsen halbieren muss. Die resultierende Rotation wird dann die Geschwindigkeit

$$W = w \sqrt{2(1 + \cos \delta)} \dots \dots \dots \quad (64)$$

haben. Bei dem Universalgelenk gewöhnlicher Ausführung ist es nicht der Fall, dass die Ebene des Kreuzstückes stets den Winkel der beiden Axen halbiert; es kann daher, mit umgekehrtem Schlusse, die Bewegungsübertragung auch nicht derart sein, dass stets  $w_2 = w_1$ , ist und findet daher hier keine gleichförmige Bewegungsübertragung statt.

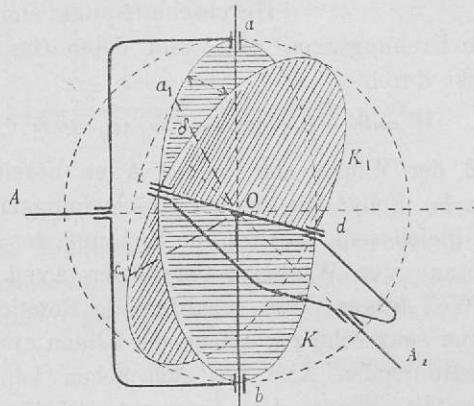
Der Zusammenhang zwischen den beiden Geschwindigkeiten ergibt sich auf folgende Weise (Fig. 64):

Sind  $A$  und  $A_1$  die beiden Drehungssachsen, im Punkte  $O$  sich schneidend,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  die Endzapfen des Kreuzstückes, welche in den Gabelenden  $a$  und  $b$ , sowie  $c$  und  $d$  drehbar, aber nicht verschiebbar gelagert sind, so beschreiben  $a$  und  $b$  den Kreis  $K$ , dessen Ebene senkrecht zur Axe  $A$  liegt,  $c$  und  $d$  den Kreis  $K_1$ , dessen Ebene senkrecht zur Axe  $A_1$  liegt.

die Bewegung von einer Gabel auf die andere übertragen wird. Dieses Mittelstück muss, da es an der Rotation beider Axen teilzunehmen gezwungen ist, als resultierende Bewegung eine Rotation annehmen um eine resultierende Axe, deren Richtung durch den Durchschnittspunkt der beiden ursprünglichen Drehungssachsen geht, und deren Geschwindigkeit sich ausdrückt durch

Die Ebenen der beiden Kreise schliessen den gleichen Winkel  $\delta$  ein, wie die Axen, und deren Schnittlinie steht auf beiden Axen senkrecht. Erhält nun die Axe  $A$  eine kleine Drehung um den Winkel  $\varphi$ , durch welche das Gabelende  $a$  nach  $a_1$  gelangt und der Kreuzschenkel  $Oa$  sich um den Winkel  $\varphi = aOa_1$  dreht, so wird für den mit der anderen Axe verbundenen Kreuzschenkel eine Drehung  $cOc_1 = \varphi_1$  resultieren,

Fig. 64.



und das Gabelende  $c$  die Lage  $c_1$  erhalten. Die beiden Kreuzschenkel bleiben stets senkrecht zu einander, daher ist  $aOc = a_1Oc_1 = 90^\circ$ , und bei gleicher Länge  $l$  derselben werden auch sämtliche Gabelenden und Kreuzschenkelzapfen in jeder Lage in der Oberfläche einer Kugel gefunden werden können, welche mit dem Halbmesser  $l$  um den Durchschnittspunkt  $O$  der beiden Axen als Mittelpunkt gezogen ist. Es bilden somit  $a_1cc_1$  ein sphärisches Dreieck, für welches gilt

$$\cos \widehat{a_1 o c_1} = \cos \widehat{a_1 o c} \cdot \cos \widehat{c o c_1} + \sin \widehat{a_1 o c} \cdot \sin \widehat{c o c_1} \cos a_1 c c_1.$$

Hierin ist nun

$$a_1 \circ c_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$a_1 \circ c = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

$$c \circ c_1 = \varphi_1,$$

$$a_1 c c_1 = \pi - \delta.$$

Es wird daher

$$0 = \sin \varphi \cos \varphi_1 - \cos \varphi \sin \varphi_1 \cos \delta,$$

und hieraus

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \delta}, \dots \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \delta \dots 65)$$

So wird bei

$$\begin{aligned} \varphi = 0^\circ & \dots \operatorname{tg} \varphi = 0 \dots \operatorname{tg} \varphi_1 = 0 \dots \varphi_1 = 0^\circ \dots \frac{w}{w_1} = \cos \delta \\ \Rightarrow 45^\circ & \Rightarrow 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos \delta} \Rightarrow > \varphi \dots \\ \Rightarrow 90^\circ & \Rightarrow \infty \Rightarrow \infty \Rightarrow = 90^\circ \Rightarrow = \frac{1}{\cos \delta} \\ \Rightarrow 135^\circ & \Rightarrow -1 \Rightarrow -\frac{1}{\cos \delta} \Rightarrow < \varphi \dots \\ \Rightarrow 180^\circ & \Rightarrow 0 \Rightarrow 0 \Rightarrow = 180^\circ \dots = \cos \delta. \end{aligned}$$

Es wird mithin bei gleichförmiger Drehung von  $A$  die Axe  $A_1$  durch die erste Hälfte des ersten Quadranten rascher gehen als  $A$ , dann langsamer, um zu gleicher Zeit mit  $A$  eine Viertelumdrehung zu vollenden; in der ersten Hälfte des zweiten Quadranten bleibt  $A_1$  immer weiter zurück, beschleunigt dann wieder seinen Lauf und vollendet gleichzeitig mit  $A$  seine halbe Umdrehung u. s. w.

Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten  $w$  und  $w_1$  für diese ungleichförmige Bewegungsübertragung ergibt sich mittelst der Gleichungen

$$w = \frac{d \varphi}{d t},$$

$$\text{und} \quad w_1 = \frac{d \varphi_1}{d t}.$$

Es wird mithin

$$\frac{w}{w_1} = \frac{\cos^2 \varphi \cos \delta}{\cos^2 \varphi_1} = \cos^2 \varphi \cos \delta (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1),$$

und hieraus nach einiger Umformung

$$= \frac{1 - \sin^2 \delta \cos^2 \varphi}{\cos \delta} \dots \dots \dots 66)$$

Der Maximalwert von  $\frac{w}{w_1}$  ergibt sich für

$$\cos^2 \varphi = 0 \dots \text{mit } \frac{w}{w_1} = \frac{1}{\cos \delta}, \dots \dots \dots \quad 67)$$

und ein Minimalwert für

$$\cos^2 \varphi = 1 \dots \text{mit } \frac{w}{w_1} = \cos \delta \dots \dots \dots \quad 68)$$

Dieses zwischen den Grenzen  $\cos \delta$  und  $\frac{1}{\cos \delta}$  schwankende

Verhältnis  $\frac{w}{w_1}$  wird gleich der Einheit für eine Drehung um den Winkel  $\varphi$ , gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \delta}{\cos \delta} = 1.$$

Dieses ergibt

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 - \cos \delta}{\sin^2 \delta},$$

und hieraus

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \cos \delta.$$

Es wird also auch nur in den Stellungen, welche dem eben bestimmten Werte von  $\varphi$  entsprechen, das Kreuzstück symmetrisch gegen die beiden Axen liegen, d. h. dessen Ebene den Winkel der beiden Axen halbieren. Der Winkel  $\varphi$  für die Drehung der treibenden Axe  $A$  ist, wie aus Fig. 64 hervorgeht, gerechnet von einer *Anfangsstellung aus, bei welcher die Ebene der zu  $A$  gehörigen Gabel  $a b$  senkrecht steht zu der Ebene, welche durch die beiden Axen zu legen ist, und die Drehung der getriebenen zweiten Axe  $A_1$  ist gerechnet für eine Anfangsstellung der zu  $A_1$  gehörigen Gabel in der Ebene der beiden Axen.*

Eine Kraftübertragung bei  $\delta > 90^\circ$  ist überhaupt nicht mehr möglich, weil für  $\delta = 90^\circ$  schon

$$\frac{w}{w_1} = \infty, \text{ und } \frac{w_1}{w} = 0 \quad \text{würde.}$$

Die Ungleichförmigkeit der Bewegung lässt sich beseitigen, wenn man zwischen zwei zu verbindende, sich schneidende oder auch sich kreuzende Wellen eine Zwischenwelle ein-

schaltet, welche mit jeder derselben durch ein Universalgelenk verbunden ist und gegen dieselben beiderseits gleiche Winkel bildet.

Sind die Drehungswinkel mit  $\varphi$  und  $\varphi_1$  für die erste und mit  $\psi$  und  $\psi_1$  für die zweite Kupplung bezeichnet, so muss natürlich gelten gemäss Gleichg. 65

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \delta, \\ \operatorname{tg} \psi &= \operatorname{tg} \psi_1 \cos \delta.\end{aligned}$$

Es kommt nun wesentlich auf die Stellung der Gabeln und die Lage der Axen an, ob die Bewegungsübertragung mit gleicher oder ungleicher Winkelgeschwindigkeit vor sich geht.

Zunächst werden zwischen den Geschwindigkeiten  $w$ ,  $w_1$  und  $w_2$  der drei Axen folgende Beziehungen aufgestellt werden können:

für die Uebertragung von der ersten auf die zweite Axe

$$\frac{w}{w_1} = \frac{\cos^2 \varphi \cos \delta}{\cos^2 \varphi_1},$$

und für die Uebertragung von der zweiten auf die dritte Axe

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\cos^2 \psi \cos \delta}{\cos^2 \psi_1},$$

woraus

$$\frac{w}{w_2} = \cos^2 \delta \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}.$$

Weil nun (Gleichg. 65)

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \delta},$$

und

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \psi_1 \cos \delta,$$

so wird

$$\frac{w}{w_2} = \frac{\cos^2 \delta + \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_1 \cos^2 \delta}.$$

Sollen nun die beiden Geschwindigkeiten, diejenige der ersten Axe,  $w$ , und der letzten Axe,  $w_2$ , gleich sein, so muss  $(\cos^2 \delta + \operatorname{tg}^2 \varphi)(1 + \operatorname{tg}^2 \psi_1) = (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)(1 + \operatorname{tg}^2 \psi_1 \cos^2 \delta)$ ,

sein, woraus sich die Bedingung ergibt

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \phi_1},$$

$$\phi_1 = 90^\circ \pm \varphi \dots \dots \dots \quad 69)$$

d. h. es muss für  $\varphi = 0^\circ \dots \phi_1 = 90^\circ$ ,

und daher auch gleichzeitig  $\varphi_1 = 0^\circ$  und  $\phi = 90^\circ$  sein.

Mithin werden die beiden Geschwindigkeiten  $w$  und  $w_2$  gleich sein, wenn bei der oben definierten Anfangsstellung des ersten Systemes das zweite um  $90^\circ$  gegen seine Anfangsstellung verdreht ist. Es muss also zu gleicher Zeit

Gabel 1 senkrecht zu der Ebene  $AA_1$ ,

» 2 . . . . . in » »  $AA_1$ ,

» 3 . . . . . in » »  $A_1 A_2$ ,

» 4 senkrecht zu » »  $A_1 A_2$

Fig. 65.

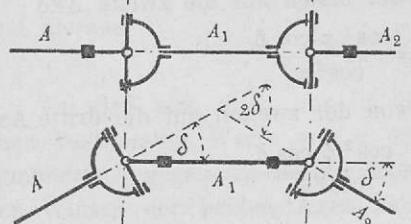
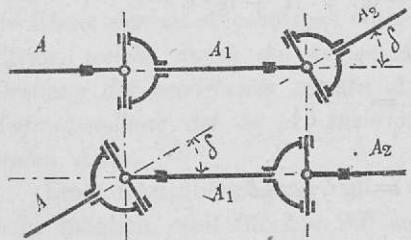


Fig. 66.

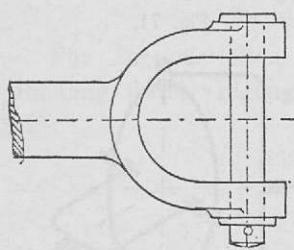


liegen. Ist die ganze Transmission in einer Ebene (Fig. 65), so werden die Gabeln 2 und 3 an der Hilfsaxe gleich liegen; bildet die Axe  $A_2$  gegen die Ebene  $AA_1$  einen Winkel  $\alpha$ , so muss auch die 3. Gabel gegen die 2. Gabel um ebensoviel gedreht werden, und werden z. B. bei  $\alpha = 90^\circ$  (Fig. 66) an der Hilfsaxe die beiden Gabeln im rechten Winkel gegen einander stehen.

In den Detailanordnungen müssen diese Universalgelenke, insoweit sie sich am häufigsten bei dem Betrieb landwirtschaftlicher Maschinen vorfinden, möglichst einfach konstruiert werden. Die Gabeln können mit den Wellen aus einem Stücke hergestellt werden (Fig. 67) oder, in Schmiedeisen oder Guss-

eisen hergestellt, besonders auf der Welle befestigt werden (Fig. 68). Das Kreuzstück kann einen durchlaufenden Bolzen

Fig. 67.



für beide Gabelteile der einen Welle erhalten; für die Gabelteile der andern Welle sind gesonderte Zapfen nötig, welche in dem (guss-eisernen) Kreuzstücke befestigt werden (Fig. 69). Lässt man die Mittellinien der beiden Kreuzgelenkzapfen sich nicht schneiden, sondern kreuzen, so ist es möglich,

auch für die Gabelenden durchlaufenden Bolzen zu benützen (Fig. 68), wodurch allerdings die oben durchgeführte Rechnung für das Bewegungsgesetz der getriebenen Welle nicht mehr ganz zutreffend bleibt.

Fig. 68.

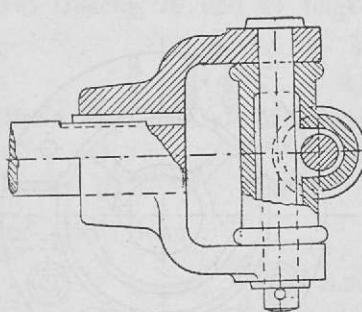
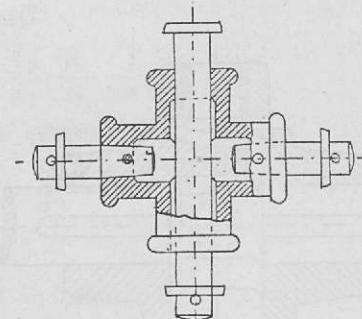


Fig. 69.



Bei besonders sorgfältiger Ausführung und zur Erreichung einer gewissen Reparaturfähigkeit werden wohl auch die Gabelenden mit besonderen Lagerformen versehen, und erhalten die Zapfen nachstellbare Lagerschalen in denselben.

Das Kreuzmittelstück muss nicht gerade als solches in vollständiger Kreuzform ausgeführt werden, sondern es genügt, die 4 Endzapfen desselben derart zu verbinden, dass ihre Mittellinien den unveränderlichen Winkel von  $90^\circ$  gegenseitig bilden. Das Gleiche lässt sich auch erreichen, indem man die 4 Zapfen durch einen die 2 Gabeln aussen umgebenden Ring verbindet (Fig. 70) oder diese ringförmige Verbindung zwischen

die beiden Gabeln verlegt, wobei dann die eine Gabel nach aussen, die andere nach innen gerichtete Zapfen erhält (Fig. 71). Eine der Anordnung von Fig. 70 entsprechende konstruktive

Fig. 70.

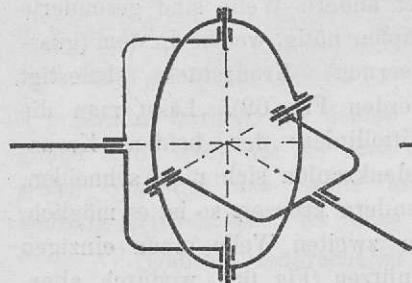
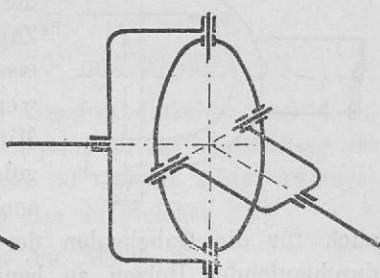
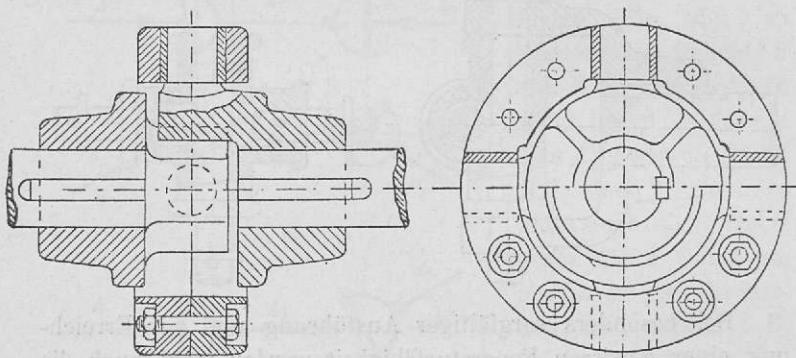


Fig. 71.



Durchführung des Eisenwerkes Wülfel vor Hannover zeigt Fig. 72. Hierbei ist, um die Gabeln mit den zugehörigen Zapfen in Schmiedeisen und aus einem Stück herstellen zu

Fig. 72.



können, der das Kreuzmittelstück darstellende, aussen umlaufende Ring aus 2 Teilen gebildet, welche durch 8 Schrauben verbunden sind.

Die Berechnung der Kreuzgelenkzapfen erfolgt nach Massgabe des von denselben auszuhaltenden Druckes, welcher für einen derselben einen Maximalwert erhält mit  $\frac{1}{2} \frac{P}{\cos \delta}$ , wobei

$$P = \frac{M_d}{R} \text{ die Umfangskraft bezeichnet.}$$

Für diesen Zapfen gilt dann, wenn  $d_1$  dessen Durchmesser und  $l_1$  dessen Länge bezeichnet,

$$\frac{1}{2} \frac{P}{\cos \delta} \cdot \frac{l_1}{2} = \frac{\pi}{32} d_1^3 k_1.$$

Für Torsionswellen mit gleichzeitiger biegender Beanspruchung durch Eigengewicht, Räder, Zahndruck etc. war (§ 9):

$$d^3 = \frac{M_d}{\frac{\pi}{32} k},$$

oder auch

$$d^2 = \frac{32}{\pi k} P \frac{R}{d} \dots \dots \dots \quad 70)$$

während für den Zapfen folgt

$$d_1^2 = \frac{8}{\pi k_1} \cdot \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{P}{\cos \delta} \dots \dots \dots \quad 71)$$

Aus Gleichg. 70 und 71 folgt nun

$$\left( \frac{d_1}{d} \right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{k}{k_1} \cdot \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{d}{R} \cdot \frac{1}{\cos \delta}.$$

Hierin kann man als Mittelwerte setzen

$$\frac{l_1}{d_1} = 1,2, \quad \frac{1}{\cos \delta} = 1,02, \quad \frac{R}{d} = 1,5, \quad \frac{k}{k_1} = 1,$$

und erhält dann

$$\frac{d_1}{d} = \sqrt{0,204} = 0,45,$$

wofür man passend setzen kann

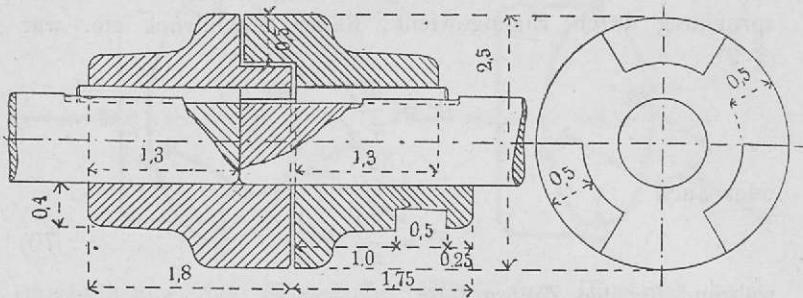
$$d_1 = 0,4(d + 10) \dots \dots \dots \quad 72$$

### § 18. Auslösbare Kupplungen.

Eine innerhalb gewisser enger Grenzen bewegliche Kupplung ist die (*Sharp'sche*) Klauenkupplung (Fig. 73), welche nicht bloss kleine Längenverschiebungen der Wellenenden, sondern auch geringe Richtungsänderungen der geometrischen Achsen gestattet; dieselbe hat Querteilung der Kupplungshülse,

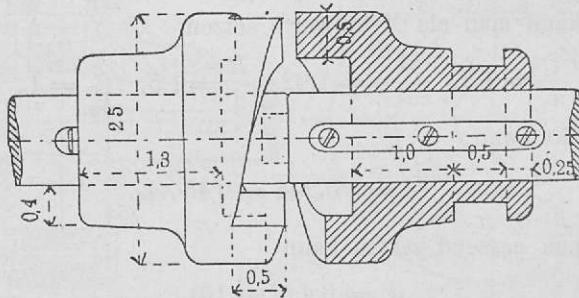
deren eine Hälfte mit 2 oder 3 Vorsprüngen in die entsprechenden Vertiefungen der anderen Hälfte eingreift. Wird die eine Hälfte nicht fest, sondern der Länge nach verschiebbar auf dem zugehörigen Wellenende angebracht, so eignet

Fig. 73.



sich diese Kupplung auch zur zeitweisen Abstellung und Einrückung der Bewegungsübertragung, nur erhält in diesem Falle die verschiebbare Kupplungshälfte eine verlängerte Hülse mit Ringnut, welche von einem Ausrückhebel gefasst werden

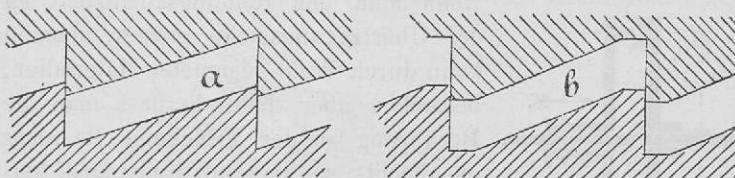
Fig. 74.



kann. Die Einrückung dieser Kupplung während des Ganges ist in der Form von Fig. 73 schwierig, dagegen sicherer zu erreichen, wenn die Zähne (Fig. 74) schräge geformt werden; man macht jedoch in diesem Falle eine grössere Anzahl von Mitnehmerzähnen, etwa auch zu bestimmen nach der Formel, welche für die Anzahl der Schrauben an der Flanschenkupplung (Gleichg. 62) aufgestellt wurde, jedenfalls deren nicht weniger als zwei. Für die Bildung der Zähne ist deren Aufzeichnung auf ihren äusseren und inneren zylindrischen Be-

grenzungsflächen und hiefür deren Abwickelung massgebend. Die einfachste Form der letzteren, die geradlinige, ergibt schraubenförmige Zähne (Fig. 75a), deren äusserste Spitzen schwach sind, und bei stossweisem Eingriff leicht brechen können. Eine Verstärkung der Zahnform zeigt Fig. 75 b.

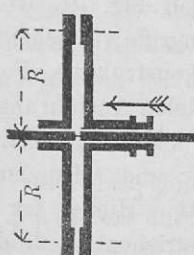
Fig. 75.



Da beim Einrücken der Klauen- und Zahnkupplung die treibende Welle fortdauernd in Bewegung bleibt, die getriebene aber wegen der den bezüglichen Massen zu erteilenden Beschleunigung nicht momentan die gleiche Bewegungsgeschwindigkeit annehmen kann, so ergeben sich hiebei, insbesondere bei Vorhandensein grösserer zu beschleunigender Massen heftige Stösse und Erschütterungen, welche von nachteiligem Einflusse auf Bestand und Dauerhaftigkeit von Wellen und Lagern sein müssen.

Bei weitem besser eignen sich zu diesem Zwecke jene Kupplungen, bei welchen die gegenseitige Mitnahme durch

Fig. 76.

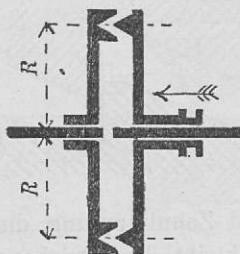


Reibung bewirkt wird. Solche Reibung kann erzeugt werden durch Zusammenpressen der ebenen Endflächen bei der Scheibenkupplung (Fig. 76). Ist der mittlere Halbmesser der Reibungsfläche  $= R$ , das von der Welle zu übertragende Drehmoment  $= M_d$ , die Kraft, mit welcher die beiden Reibungsflächen zusammengepresst werden  $= Q$ , so muss für die letztere die Beziehung gelten

Mit dem gleichen Drucke  $Q$  wird aber auch die Axe gegen ihr Lager und die Einrück-Vorrichtung gegen ihre

Führung gepresst, und da jene Reibung so lange wirken muss, als eine Bewegungsübertragung stattfinden soll, so wird auch den genannten anderen Stellen ebensolange eine schädliche Reibung auftreten, und hiedurch Arbeitsverlust und Abnützung veranlasst werden.

Fig. 77.



vergrössert wird und gesetzt werden kann

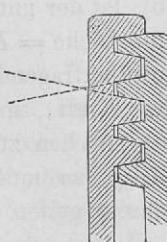
Die beiden letzten werden geringer, wenn man den Reibungskoeffizient an der Übertragungsstelle grösser nehmen kann durch Wahl geeigneter Materialien, besonders aber dadurch, dass man die Berührung an der Mitnehmestelle nicht ebenflächig, sondern mit Keileingriff herstellt (Fig. 77), durch welchen die Reibung annähernd im umgekehrten Verhältnis des sinus des halben Keilwinkels

$$Q \mu_1 = \frac{Q \mu}{\sin \frac{\delta}{2}} > \frac{M_d}{R} \dots \dots \dots \quad 74)$$

Fig. 78.



Fig. 79.



Da bekanntlich die Reibung unabhängig ist von der Grösse der sich berührenden Flächen, so kann ebensowohl die Anordnung von Fig. 78 gewählt werden, wobei die Anzahl der Keileingriffe vermindert, wie jene von Fig. 79, wobei die Anzahl der Keileingriffe vermehrt ist.

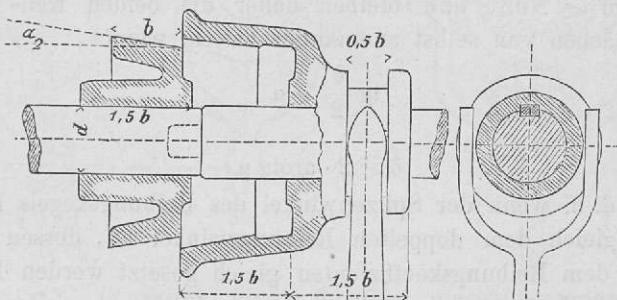
Die einfachste konstruktive Form unter den ungemein vielen Ausführungen dieser Kupplung mit keilförmigem Eingriffe der Reibungs- und Mitnehmeflächen zeigt Fig. 80. Hierbei ist es gleichgültig, ob die getriebene Welle den Hohl- oder den Voll-Konus erhält, nur muss jedenfalls, wie bei allen auslös-

baren Kupplungen, der verschiebbare Teil auf der getriebenen, also im ausgerückten Zustande ruhenden, Welle angebracht sein.

Für die Wahl der Grösse des Kegels sind manchmal die Grössen der mit denselben in Verbindung stehenden Räder u.s.w. massgebend, und schwankt die Grösse des mittleren Kegelhalbmessers zwischen  $R = 1 \frac{1}{2} d$  bis  $3 d$ .

Genauer, als durch obige Gleichung 74, lassen die Beziehungen zwischen den hiebei auftretenden Kräften sich auf

Fig. 80.



folgende Art bestimmen. Denkt man sich die beiden Kegeloberflächen nur mit 2 diametral gegenüberliegenden Seiten sich berührend, so wird der Vorgang bei der Pressung des einen Kegels gegen den andern identisch demjenigen sein, welcher bei dem Eindringen eines Keiles in einen festen Körper stattfindet. Wenn die Richtung des Einpressungsdruckes  $Q$  den Keilspitzenwinkel  $\delta$  halbiert, und der beiderseits gegen die Mitte der Keilseiten (hier Kegelerzeugenden) einwirkende normale Druck  $= N$  ist, so wird die zur Hervorbringung eines Normaldruckes  $N$  nötige Kraft

$$Q = 2 N \left( \sin \frac{\delta}{2} + \mu \cos \frac{\delta}{2} \right) \dots \dots \dots 75$$

Weil nun das Moment der dadurch entstehenden Reibung  $= 2 N \mu R$  dem durch die Welle zu übertragenden Momente  $M_a$  mindestens gleich, d. h.

$$2 N \mu R \geq M_a$$

sein muss, wobei  $R$  der mittlere Kegelhalbmaß ist, so folgt hieraus

$$Q \geq \frac{M_a}{R \mu} \left( \sin \frac{\delta}{2} + \mu \cos \frac{\delta}{2} \right) \dots \dots \dots 76$$

Sind die Reibungsflächen einmal gegen einander gepresst, so kann fortan der axiale Druck geringer werden, indem derselbe nunmehr nur gleich der Kraft  $Q'$  sein muss, welche den (statt eines Kegels betrachteten) Keil am Rückgehen hindern kann. Diese Kraft erhält man, wenn  $-\mu$  anstatt  $\mu$  gesetzt wird, und ergibt sich demnach

$$Q' = \frac{M_d}{R \mu} \left( \sin \frac{\delta}{2} - \mu \cos \frac{\delta}{2} \right). \dots \dots \dots \quad 77)$$

$Q'$  wird  $\leq$  Null, und bleiben daher die beiden Keil- oder Kegelflächen von selbst aneinander haften, wenn

$$\tan \frac{\delta}{2} \leq \mu$$

oder

$$\delta \leq 2 \cdot \arctg \mu$$

wird, d. h. wenn der Spitzenwinkel des Reibungskegels höchstens gleich dem doppelten Reibungswinkel ist, dessen Tangente dem Reibungskoeffizienten gleich gesetzt werden kann.

Die Kraft, welche nötig ist, um die Kegel wieder auseinander zu ziehen, erhält man mit

$$Q'' = \frac{M_d}{R \mu} \left( -\sin \frac{\delta}{2} + \mu \cos \frac{\delta}{2} \right). \dots \dots \dots \quad 78)$$

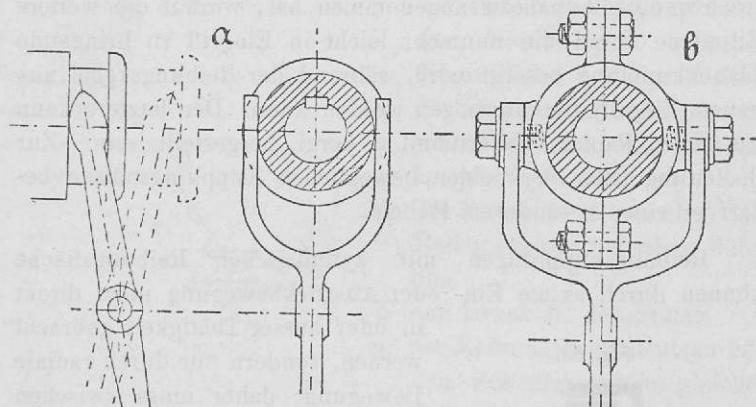
Sehr spitze Reibungskegel werden mit geringer Kraft genügend stark gegen einander gepresst, erfordern dagegen mehr Kraft, wenn die Kupplung wieder ausgerückt werden soll. Der Spitzenwinkel  $\delta$  wird zwischen  $10^\circ$  und  $20^\circ$  gemacht, was eine Seitenneigung von  $10\%$  bis  $18\%$  ergibt. Als Reibungskoeffizienten kann hier für Berührung von

Eisen und Eisen  $\mu = 0,15$  mithin  $\rho = 8^{1/2}^\circ$  oder  $\delta \leq 17^\circ$ ,  
 Eisen und Holzfaser  $\mu = 0,20$  „  $\rho = 11^{1/4}^\circ$  „  $\delta \leq 22^{1/2}^\circ$ ,  
 Eisen und Leder  $\mu = 0,25$  „  $\rho = 14^\circ$  „  $\delta \leq 28^\circ$ ,  
 gesetzt werden.

Die Ausrückhebel greifen in einfachster Anordnung direkt mit gabelförmigen Enden in die Ringnut ein (Fig. 81 a), wobei die (nach Evolventenkurven gebildeten) Gabelenden an den ebenen Wandungen der Nut schleifen. Die Bewegung der auszulösenden Kupplungshälften kann auch durch den Eingriff eines an der Auslösegabel befestigten Zapfens in die Ringnut

geschehen, wobei dieser Zapfen auch zur Minderung der Abnutzung passend mit einem metallenen Gleitklötzchen versehen wird (Fig. 81 c). Bei der Mitnahme der verschiebbaren Hülse

Fig. 81.

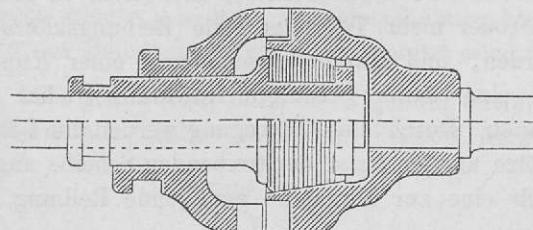


durch einen dieselbe umschliessenden Ring (Fig. 81 b) ist der der Verschiebung und der Bewegung des Ausrückhebels entsprechende Spielraum entweder am Ringe oder dem den-selben bewegenden Zapfen anzubringen.

Die Konstruktion der Ausrückhebel ist überhaupt örtlichen Verhältnissen entsprechend, und eine äussert vielseitige.

Fig. 82 zeigt in der *Klein'schen* Kupplung eine Kombination der Klauen- und Kegel-Reibungskupplung, welche zu-

Fig. 82.



nächst die Möglichkeit gewährt, eine allmähliche Mitnahme der getriebenen Welle herbeizuführen, indem zuvörderst der Reib-

ungskegel zum Eingriff gebracht wird. Diese Reibungskupplung, bei welcher ein schädlicher Seitendruck auf Axe und Lager nicht ganz zu vermeiden ist, soll aber nur so lange benutzt werden, bis die getriebene Welle ihre Normalgeschwindigkeit nahezu angenommen hat, worauf die weitere Mitnahme durch die nunmehr leicht in Eingriff zu bringende Klauenkupplung besorgt wird, während der Reibungskegel aus seinem Eingriff herausgezogen werden kann. Der letztere kann aus Holz, Papier, Hartgummi u. dergl. hergestellt sein. Zur Bedienung jeder der beiden beweglichen Kupplungshülsen bedarf es eines besonderen Hebels.

Reibungskupplungen mit zylindrischer Reibungsfläche können durch axiale Ein-

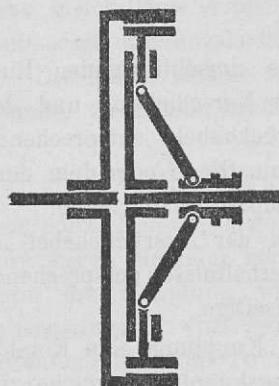
oder Ausrückbewegung nicht direkt in oder ausser Thätigkeit gebracht werden, sondern nur durch radiale Bewegung; daher muss zwischen der axialen Bewegung der Ausrückemuffe und der radalen Bewegung des die Reibungsmitnahme vermittelnden Teiles eine zwangsläufige Verbindung hergestellt werden.

Fig. 83 zeigt die schematische Darstellung einer solchen Kupplung. Die treibende Welle trägt eine Scheibe mit rechtwinklig umgebogenem, zylindrischem Rand, die

getriebene Welle eine ebene Scheibe, an welcher in geeigneter Weise zwei (oder mehr) T-förmige Teile (Reibungsklötzte) radial geführt werden, und durch Verschiebung einer Kupplungsmuffe und eine daran befestigte Kniestütze radial bewegt werden können. Durch diese Bewegung werden die T-förmigen Reibungsklötzte an den Rand der treibenden Scheibe angepresst und dadurch eine zur Mitnahme genügende Reibung hervorgerufen.

Die Berechnung für die hiebei auftretenden Kräfte erfolgt mit Hilfe von Fig. 84 auf nachstehende Weise, wobei an

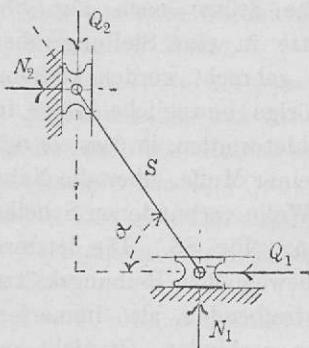
Fig. 83.



Stelle mehrerer die Reibungsmittelung vermittelnder Klötze nur ein einziger angenommen wird:

Ist

Fig. 84.



$Q_1$  die auf die Kupplungshülse wirkende Verschiebungskraft,  
 $N_1$  der Normaldruck zwischen dieser Hülse und der Welle,  
 $Q_2$  der auf den Reibungsklotz einwirkende, oder von demselben ausgeübte Radialdruck,  
 $N_2$  der Normaldruck zwischen dem Reibungsklotz und seiner Führung,  
 $S$  der Druck in der Stütze,  
 $\mu$  der Reibungskoeffizient (an beiden Führungen von gleicher Grösse angenommen),

so gilt

$$\begin{aligned} S \cos \alpha &= Q_1 - \mu N_1, \\ S \sin \alpha &= Q_2 + \mu N_2, \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (79)$$

während gleichzeitig

$$\begin{aligned} Q_1 &= N_2 + \mu N_1, \\ Q_2 &= N_1 - \mu N_2, \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (80)$$

Aus diesen Gleichungen folgt nach verschiedenen Umformungen

$$Q_2 = Q_1 \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} = Q_1 \operatorname{tg}(\alpha - \rho) \quad \dots \dots \quad (81)$$

worin auch wieder  $\mu = \operatorname{tg} \rho$ , d. h. der Reibungskoeffizient der Tangente des Reibungswinkels gleich gesetzt wird.

$Q_1$  wird gleich Null, oder die Kupplung bleibt ohne Fortdauer des axialen Hülsendruckes im Eingriff, wenn

$$\operatorname{tg}(\alpha - \rho) = \infty,$$

oder

$$\alpha = 90^\circ + \rho$$

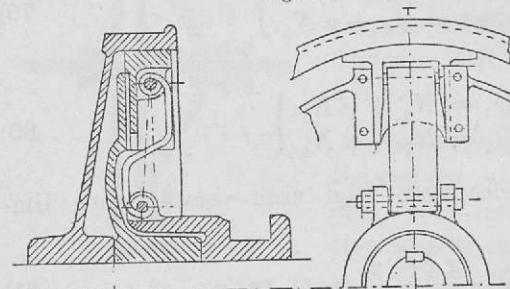
wird, d. h. wenn die Stütze über die Vertikalstellung hinausbewegt wird, was aber nur dann möglich ist, wenn die Stütze

Fig. 85.



aus elastischem Materiale, oder sonst auf andere Weise federnd gemacht wird. Die *Dohmen-Leblanc*-Kupplung, wie sie von der Berlin-Anhaltischen Maschinenbau-Aktien-Gesellschaft ausgeführt wird, hat eine solche elastische Stütze nach Fig. 85. Wenn die elastische Stütze in eine Stellung über die Vertikale hinaus soll gebracht werden können, so muss auch die zugehörige bewegliche Hülse in besonderer Weise ausgebildet werden, so dass sie mit einem erweiterten Teile, einer Muffe, über die Nabe der mit der getriebenen Welle verbundenen Scheibe heranbewegt werden kann. (Fig. 86.) Die letztere Scheibe, an welcher die beweglichen Reibungsklötzte geführt werden, mit der treibenden, also immerfort sich drehenden, Welle zu verbinden, ist nicht an-  
gängig, da die frei beweglichen Reibungsklötzte leicht durch Zentrifugalkraft nach aussen gezogen werden und so unbeabsichtigt die Einrückung der Kupplung bewirkt werden könnte.

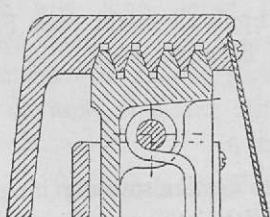
Fig. 86.



In solchen Fällen muss der Flieh-  
kraft der Gleit-  
kläuze durch Fe-  
dern oder durch  
die Flieh-  
kraft noch schwererer  
Gegengewichte  
entgegengewirkt  
werden.

Zur Erhöhung der Umfangsreibung der Reibungsklötzte

Fig. 87.



können endlich auch die letzteren mit nach aussen keilförmig verjüngten Rippen, in die Mitnahmescheibe eingreifen (Fig. 87). Die Anzahl der Keilrippen ist jedoch gleichgültig, da die Grösse der Berührungsfläche auf die Reibung ohne Einfluss ist.

Bezeichnet für alle durch Reibungsmittel betätigten Kupplungen

$P$  die als konstant gedachte Kupplungskraft oder Umfangskraft an der Mitnehmestelle im Abstande  $r$  von der Axe,

$c$  die konstante Geschwindigkeit der Mitnehmestelle auf der treibenden Welle,

$v$  die von  $v = 0$  bis  $v = c$  anwachsende Geschwindigkeit der Mitnehmestelle auf der getriebenen Welle,

$M$  die auf den Halbmesser  $r$  reduzierte, in Bewegung zu setzende Masse,

$t$  die Zeit der Einwirkung der Kupplungsteile bis zu einem bestimmten Augenblicke,

so ist

$dA = P \cdot c \cdot dt$  = die von der Kupplungskraft im Zeitelement  $dt$  verrichtete Arbeit,

$p = \frac{P}{M} = \frac{dv}{dt}$  die durch  $P$  hervorgebrachte Beschleunigung,

welche, wie  $P$  und  $M$ , ebenfalls konstant ist,

so wird mit Berücksichtigung dieser Werte die gesamte aufgewendete Arbeit

$$A = \int dA = \int P c \frac{M}{P} dv = c M \int_0^v dv = M c^2, \dots 82)$$

während gleichzeitig die schliesslich erzeugte lebendige Kraft ist

$$= \frac{1}{2} M c^2 \dots \dots \dots \dots \dots 83)$$

Es wird mithin von der aufgewendeten Arbeit nur die Hälfte nützlich werden, die andere  $A_r = \frac{1}{2} M c^2$  geht durch Gleiten verloren und wird in Wärme umgesetzt, welche mit

$$\mathfrak{W} = \frac{A_r}{424} \dots \dots \dots \dots \dots 84)$$

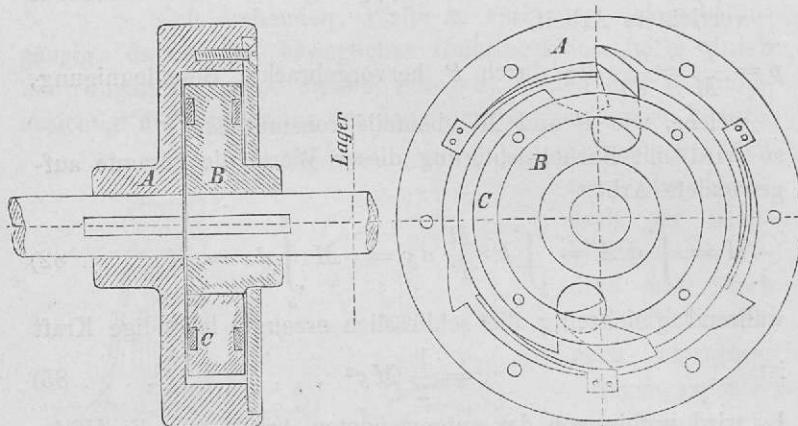
in Wärmeeinheiten ausgedrückt werden kann.

Ist bei Einrückung einer Reibungskupplung nicht bloss Beschleunigung von Massen, sondern auch noch Überwindung eines äusseren Arbeitswiderstandes  $Q$  zu erzielen, so muss die Kupplungskraft  $P$  zunächst mindestens gleich  $Q$  sein, ehe überhaupt eine Mitnahme beginnen kann. Wird aber  $P > Q$ , so

kann der Überschuss ( $P - Q$ ) zur Massenbeschleunigung verwendet werden, wobei wieder die Hälfte der eingeleiteten Arbeit verloren geht. Wird aber etwa  $P < Q$ , so kann eine Bewegung nicht beginnen und die ganze Arbeit der Kupplungskraft  $P$  ist als verloren zu betrachten, indem sie nur in Wärme umgesetzt wird.\*)

Eine eigentümliche Art von Kupplung bezweckt die Mitnahme der getriebenen Welle in der einen Richtung, während bei Bewegung in entgegengesetztem Sinne eine Bewegungsübertragung nicht stattfindet. Beinahe alle hieher gehörigen in sehr mannigfaltiger Weise konstruierten Kupplungen enthalten Sperrwerke; Fig. 88 zeigt die *Uhlhorn'sche Kupplung*,

Fig. 88.



angewandt zur Verbindung zweier, von zwei besonderen Kraftmaschinen bewegten Wellen. Die mit der einen Welle verbundene Kupplungsscheibe  $A$  besitzt an ihrem zylindrischen Rande nach innen gerichtete Lücken, welche zur Aufnahme der in der Kupplungsscheibe  $B$  der andern Welle gelagerten Sperrklinken dienen. Die Klinken greifen ein und nehmen die Scheibe  $A$  mit, wenn  $B$  sich rascher drehen würde als  $A$ , (Fig. 88 obere Hälfte), werden aber ausgelöst, sobald  $B$  sich

\*) Siehe hierüber *Ad. Ernst, „Ausrückbare Kupplungen“*. Berlin, J. Springer. 1890.

langsamer drehen würde als *A*. Stahlringe auf beiden Seiten der Scheibe *B* halten die Klinken in ihren Stützstellen fest, während an *A* befestigte Federn die Klinken in die Lücken von *A* einleiten.

Ausser zur Verbindung von zwei Kraftmaschinenwellen finden sich solche Klinkenkupplungen vielfach im landwirtschaftlichen Maschinenbau angewandt unter der Bedingung, dass die Verbindung zweier Wellen nur bei Antrieb im einen Sinne statthaben, bei Antrieb im entgegengesetzten Sinne aber ausgelöst werden soll.

---

**Zweiter Abschnitt.**

**Verbindung zweier rotierender Bewegungen  
durch Räder in unmittelbarer Berührung.**

---

## IV. THEORIE DER ZAHNRÄDERTRANSMISSION.

---

### § 19. Bestimmung der Radgrundformen.

Wenn die Übertragung der drehenden Bewegung zwischen 2 Axen durch Räder geschehen soll, so handelt es sich zunächst darum, mit den beiden Wellen derartig gestaltete Radformen zu verbinden, dass diese sich stets berühren, und dass durch gegenseitige Einwirkung derselben an der Berührungsstelle die gegenseitige Mitnahme erfolgt. Die Berührung zweier Radformen kann in einem Punkte, nach einer Linie, oder einer Fläche geschehen, auch ist die Art der gegenseitigen Mitnahme verschieden, und kann diese durch Reibung, oder bei Aufrauhung der Radoberflächen durch wechselseitiges Eingreifen von Erhöhungen und Vertiefungen stattfinden.

Die nächste zu lösende Aufgabe ist nun, die mit den beiden Drehungssachsen zu verbindenden Radgrundformen festzustellen. Beide Radformen sollen sich gleichzeitig bewegen; es wird deren gegenseitiges Verhalten beurteilt, indem man die relative Bewegung der einen gegen die andere bestimmt, und erhält unter der Bedingung der steten gegenseitigen Berührung, die mit der einen Axe zu verbindende Radform als einhüllende Fläche an sämtliche Positionen der anderen Radform, bei der relativen Bewegung der Letzteren gegen die Erstere.

Die relative Bewegung eines Rades gegen das andere ist allgemein eine Schraubenbewegung, resultierend aus einer Rotation um eine relative Momentanaxe und einer gleichzeitigen Translation in der Richtung derselben Axe.

Soll die Berührung zweier Radformen nach einer geraden Linie statthaben, so müssen jene so gebildet sein, dass stets andere und wieder andere auf den Radformen zu verzeichnende Linien nach und nach in die Lage der relativen Momentanaxe kommen, und diese relative Momentanaxe die Erzeugende der Radformen ist.

Es möge zur Erledigung dieser Aufgabe die Untersuchung für beide Axen und beide Radkörper zugleich parallel laufend durchgeführt werden.

Es seien mit

$$A_1, K_1 \text{ und } +\omega_1^*) \quad | \quad A_2, K_2 \text{ und } +\omega_2$$

die beiden im Raume sich kreuzenden Axen, die mit denselben verbundenen Radkörper und die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten bezeichnet,

$E$  sei der kürzeste Abstand und  $\delta$  der Winkel der beiden Axen gegeneinander,

und bestimmt sich nun die relative Bewegung des einen Radkörpers gegen den andern, indem durch Hinzufügung einer, beiden gemeinschaftlichen, Bewegung der eine zur Ruhe gebracht und in der entsprechenden kombinierten Bewegung des anderen seine relative Bewegung gegen den ersteren dargestellt wird. Es erhalte sonach der ganze Raum, in welchem die zu betrachtende Bewegungsübertragung stattfindet, eine Gesamtrotationsbewegung mit der Geschwindigkeit:

$$-\omega_1 \text{ um die Axe } A_1, \quad | \quad -\omega_2 \text{ um die Axe } A_2,$$

so kommt dadurch

$$K_1 \text{ zur Ruhe, } K_2 \quad | \quad K_2 \text{ zur Ruhe, } K_1$$

hat aber zwei Rotationsbewegungen, deren Zusammenwirkung nicht gestört wird, wenn noch zwei weitere hinzugefügt werden, und zwar mit gleichen, aber entgegengesetzten Winkelgeschwindigkeiten um dieselbe Axe; beide Körper besitzen

---

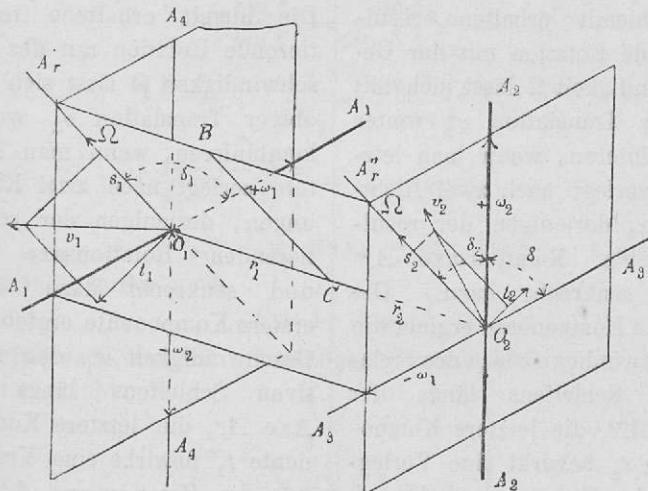
<sup>\*)</sup> Die Bezeichnungen  $\Omega$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  etc. treten hier und in den folgenden §§ an Stelle der in § 1 bis 3 sich findenden Bezeichnungen  $W$ ,  $w_1$ ,  $w_2$  etc.

sonach jetzt je vier Rotationsbewegungen mit nachstehenden Winkelgeschwindigkeiten, und zwar:

- |  |  |
|--|--|
| 1. $K_2 \dots + \omega_2$ um $A_2$ ,     | 1. $K_1 \dots + \omega_1$ um $A_1$ ,     |
| 2. $- \omega_1 \Rightarrow A_1$ ,        | 2. $- \omega_2 \Rightarrow A_2$ ,        |
| 3. $+ \omega_1 \Rightarrow A_3 \# A_1$ , | 3. $+ \omega_2 \Rightarrow A_4 \# A_2$ , |
| 4. $- \omega_1 \Rightarrow A_3 \# A_1$ . | 4. $- \omega_2 \Rightarrow A_4 \# A_2$ . |

Nun kombinieren sich, wie aus Fig. 89 zu ersehen, diese verschiedenen Rotationen, und zwar 2. und 3., als zwei gleiche in entgegengesetztem Sinne um parallele Axen, zu einer gerad-

Fig. 89.



linigen Verschiebung, Translation, senkrecht zur Ebene der beiden parallelen Axen mit einer Geschwindigkeit

$$v_2 = E \omega_1. \quad | \quad v_1 = E \omega_2.$$

Die beiden anderen Rotationen 1. und 4. ergeben eine resultierende, deren Winkelgeschwindigkeit und Richtung dargestellt ist in der Diagonale eines Parallelogramms, als dessen Seiten, auf den Richtungen der beiden sich schneidenden Achsen, Längen gleich den zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten abgetragen werden.\*). Um auch den Sinn der Drehung mit berücksichtigen zu können, werden die positiven Geschwindig-

\*) Siehe § 3.

keiten nach denjenigen Schenkeln der beiden Axen aufgetragen, mit denen der spitze Winkel  $\delta$  der beiden Axen gemessen wird.

Es wird mithin jetzt die resultierende Winkelgeschwindigkeit um die Axe  $A_r''$

$$\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos \delta},$$

und

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = i = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin(\delta + \delta_2)}.$$

Die hiemit erhaltene resultierende Rotation mit der Geschwindigkeit  $\Omega$  lässt sich mit obiger Translation  $v_2$  weiter kombinieren, wenn man letztere zerlegt nach zwei Richtungen, derjenigen der resultierenden Rotationsaxe  $A_r''$  und senkrecht dazu. Die erstere Komponente ergibt die Geschwindigkeit  $s_2$  des relativen Schleifens längs der Axe  $A_r''$ , die letztere Komponente  $t_2$  bewirkt eine Verlegung der Rotationsaxe  $A_r''$  um

$$r_2 = O_2 C,$$

gegeben durch die Gleichung

$$t_2 = r_2 \Omega.$$

Weil aber

$t_2 = v_2 \cos(\pi - [\delta + \delta_2])$ ,  
so wird

$$r_2 = \frac{-E \omega_1 \cos(\delta + \delta_2)}{\Omega},$$

sowie

$$s_2 = E \omega_1 \sin(\delta + \delta_2).$$

hieraus ist zunächst ersichtlich, dass  $s_2 = s_1$  ist;

Es wird mithin jetzt die resultierende Winkelgeschwindigkeit um die Axe  $A_r'$

$$\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos \delta},$$

und

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = i = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin(\delta + \delta_2)}.$$

Die hiemit erhaltene resultierende Rotation mit der Geschwindigkeit  $\Omega$  lässt sich mit obiger Translation  $v_1$  weiter kombinieren, wenn man letztere zerlegt nach zwei Richtungen, derjenigen der resultierenden Rotationsaxe  $A_r'$  und senkrecht dazu. Die erstere Komponente ergibt die Geschwindigkeit  $s_1$  des relativen Schleifens längs der Axe  $A_r'$ , die letztere Komponente  $t_1$  bewirkt eine Verlegung der Rotationsaxe  $A_r'$  um

$$r_1 = O_1 C,$$

gegeben durch die Gleichung

$$t_1 = r_1 \Omega.$$

Weil aber

$$t_1 = v_1 \cos \delta_2,$$

so wird

$$r_1 = \frac{E \omega_2 \cos \delta_2}{\Omega},$$

sowie

$$s_1 = E \omega_2 \sin \delta_2.$$

das Verhältnis von  $\frac{r_2}{r_1}$  ergibt sich mit:

$$\frac{r_2}{r_1} = -\frac{E \omega_1 \cos(\delta + \delta_2)}{E \omega_2 \cos \delta_2} = -\frac{\operatorname{tg} \delta_2}{\operatorname{tg}(\delta + \delta_2)}.$$

Ähnliche Gleichungen erhält man, wenn man eine der beiden ursprünglichen Rotationsgeschwindigkeiten z. B.  $\omega_1$  negativ annimmt; und fasst man endlich beide Annahmen und die hiefür erhaltenen Formeln zusammen, so ergibt sich für eine geforderte Rotationsgeschwindigkeit  $\pm \omega_1$  um die Axe  $A_1$  und  $\pm \omega_2$  um die Axe  $A_2$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin(\delta \pm \delta_2)} = i \quad \dots \quad 85)$$

$$\frac{r_2 \omega_2}{r_1 \omega_1} = \pm \frac{\cos \delta_1}{\cos \delta_2} = \frac{\cos(\delta \pm \delta_2)}{\cos \delta_2} \quad \dots \quad 86)$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{\operatorname{tg} \delta_2}{\operatorname{tg} \delta_1} = \pm \frac{\operatorname{tg} \delta_2}{\operatorname{tg}(\delta \pm \delta_2)} \quad \dots \quad 87)$$

$$s_1 = s_2 = E \omega_1 \sin \delta_1 = E \omega_2 \sin \delta_2 \quad \dots \quad 88)$$

Setzt man ferner noch

$$E = r_1 + r_2,$$

so wird nach ziemlich weitläufiger Umrechnung

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= E \frac{\frac{1}{i} \mp \cos \delta}{\frac{1}{i} + i \mp 2 \cos \delta}, \\ r_2 &= E \frac{i \mp \cos \delta}{\frac{1}{i} + i \mp 2 \cos \delta} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 89)$$

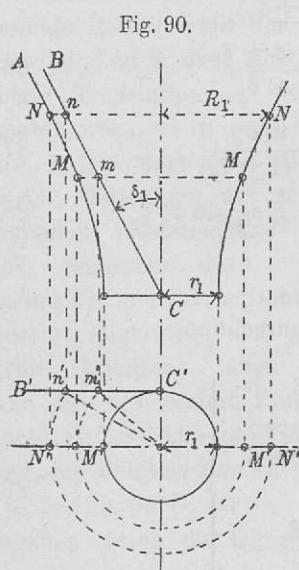
und

und

Die ganze relative Bewegung jedes der beiden Radkörper gegen den anderen ist mithin bestimmt durch eine Rotation um die resultierende relative Momentanaxe  $CB$  mit der Geschwindigkeit  $\Omega$  und eine relativ schleifende Bewegung in der Richtung dieser Momentanaxe mit der Geschwindigkeit  $s$ . Durch diese Bestimmung der relativen Bewegung ist aber die Grundlage für die Bestimmung der beiden Rädern zu gebenden Grundform gegeben.

Nimmt man direkte Berührung der beiden Radformen an, so muss diese jedenfalls in einem Punkte auf der Linie des kürzesten Abstandes der beiden Axen statthaben, kann aber auch dann entweder nur in diesem Punkte oder längs einer geraden Linie statthaben. Soll letzteres der Fall sein, so muss diese Berührungsline in diesem Momente beiden Radkörpern eigen sein, daher mit der relativen Momentanaxe zusammenfallen, welche durch den Punkt  $C$  auf der Linie der kürzesten Entfernung der beiden Axen geht.

Da nun bei konstantem Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten die Abstände  $O_1 C = r_1$  und  $O_2 C = r_2$  stets die gleichen bleiben, und da stets andere und wieder andere auf den Radgrundformen zu ziehende Geraden in die Lage der Momentanaxe kommen müssen, so werden die Radgrundformen, auf welchen solche Gerade denkbar sind, Rotationshyperboloide sein, erzeugt durch Rotation einer Geraden, welche mit den Axen  $A_1$  und  $A_2$  die Winkel  $\delta_1 = \delta \pm \delta_2$  und  $\delta_2$  bildet und in einem kleinsten Abstande von den Axen liegt, gleich den Kehlkreishalbmessern  $r_1$  und  $r_2$ .



Die weiteren Abmessungen dieser Rotationshyperboloide ergeben sich mit Hilfe nebenstehender Figur 90, und zwar insbesondere ist die ganze Meridianlinie derselben durch den Halbmesser beliebig vieler Parallelkreise gegeben mittelst der Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \sqrt{r_1^2 + l^2 \sin^2 \delta_1} \\ R_2 &= \sqrt{r_2^2 + l^2 \sin^2 \delta_2} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 90)$$

worin  $l$  die dem betreffenden Parallelkreise entsprechende Länge der Hyperboloiderzeugenden  $Cn$  bzw.  $Cm$  ist.

Auf Grund der vorstehenden Ausführungen ergeben sich nunmehr folgende spezielle Fälle:

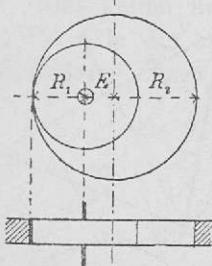
a. *Die Axen laufen parallel.*

Hier ist  $\delta = 0$ , daher auch  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ , ein relatives Schleifen findet nicht statt, weil

Fig. 91.

$$s_1 = s_2 = 0.$$

Es wird mithin



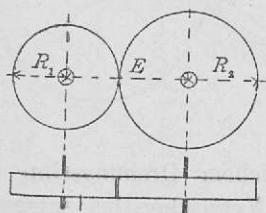
$$\frac{r_2}{r_1} = \mp \frac{\omega_1}{\omega_2} = \mp i,$$

$$R_1 = r_1 = \frac{E}{1 \mp i},$$

$$R_2 = r_2 = \mp \frac{E i}{1 \mp i},$$

d. h. die Radformen sind zylindrisch, und die Berührung derselben findet nach den mit den beiden Drehungssachsen parallel

Fig. 92.



laufenden Zylinder-Erzeugenden statt. Im doppelten Zeichen zeigt sich der gleiche oder ungleiche Drehungssinn, und zwar gilt das obere bei gleichem Drehungssinne für inneren Eingriff (Fig. 91), das untere bei entgegengesetztem Drehungssinn für äusseren Eingriff (Fig. 92).

b. *Die Axen schneiden sich.*

Hier ist

$$E = 0,$$

daher auch

$$r_1 = r_2 = 0.$$

Ferner wird

$$s = o,$$

und findet deshalb ein relatives Schleifen nicht statt. Es wird mithin

$$R_1 = l \sin \delta_1 = l \sin (\delta \mp \delta_2),$$

$$R_2 = l \sin \delta_2,$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = i,$$

d. h. die Radformen sind konisch und die Berührung findet nach den Kegelerzeugenden statt, welche mit den Hauptdrehungssachsen die Winkel  $\delta_2$  bzw.  $\delta_1 = (\delta \pm \delta_2)$  bilden. Im Doppelzeichen zeigt sich wieder der Drehungssinn, und zwar

Fig. 93.

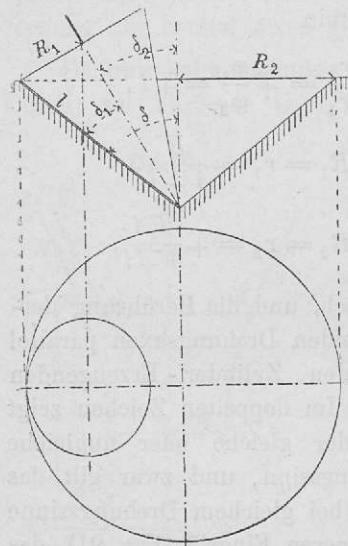
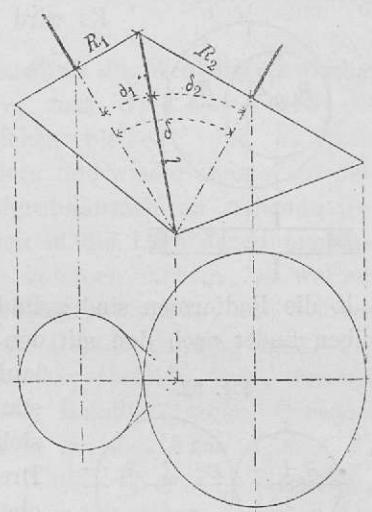


Fig. 94.



gilt das obere Vorzeichen bei gleichem Drehungssinn für inneren Eingriff (Fig. 93), das untere Vorzeichen bei entgegengesetztem Drehungssinn bei äusserem Eingriff (Fig. 94).

Fig. 95.

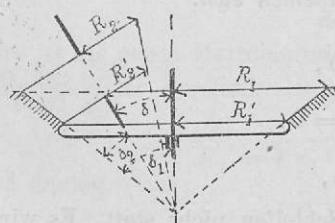
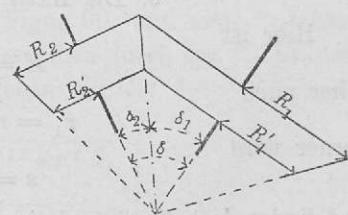


Fig. 96.



Benutzt man von den Erzeugenden nur einen Teil, so erhält man als Radformen Kegelstumpfe, welche zwischen den beiden Parallelschnitten  $R_1$  bzw.  $R_2$  und  $R_1'$  bzw.  $R_2'$  ein-

geschlossen sind, sogen. Parallelkreisräder; auch hiebei gilt das obere Vorzeichen bei gleichem Drehungssinn für inneren Eingriff (Fig. 95), das untere bei entgegengesetztem Drehungssinne für äusseren Eingriff (Fig. 96).

c. Die Axen kreuzen sich in einem kürzesten Abstand =  $E$ .

Hier gelten unverändert die allgemeinen Gleichungen 85 bis 89, d. h. die beiden Radformen sind Hyperboloide, deren Kehlkreise  $r_1$  bzw.  $r_2$  sind, und findet die Berührung, sowie

Fig. 97.

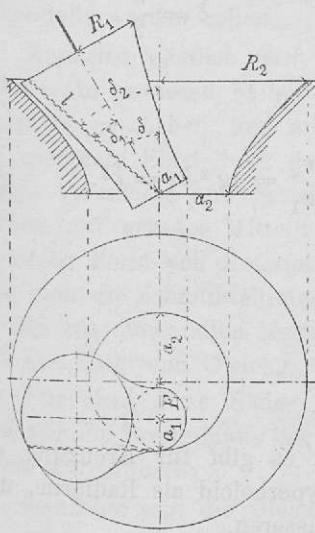
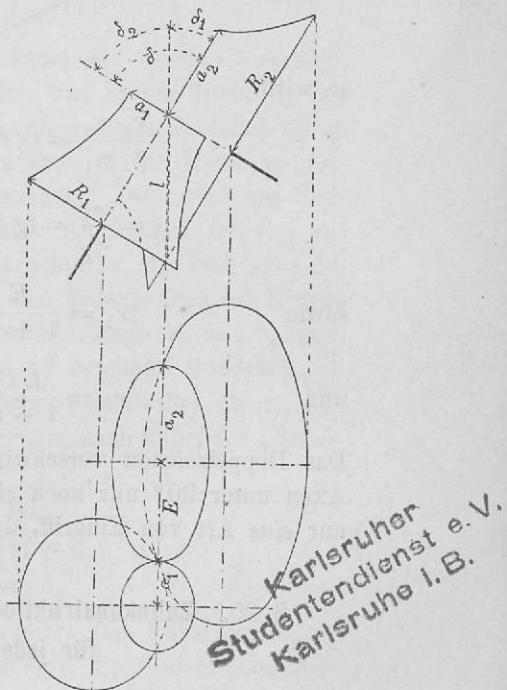


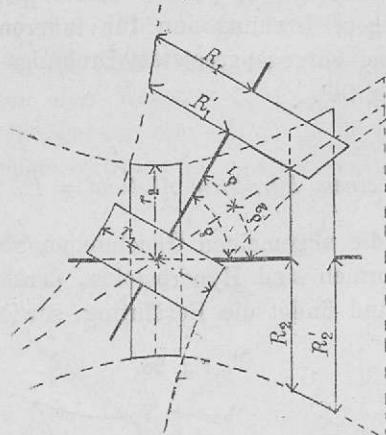
Fig. 98.



ein relatives Schleifen statt mit der Geschwindigkeit  $s$  nach der Richtung der Hyperboloid-Erzeugenden, welche mit den Rotationsachsen die Winkel  $\delta_2$  bzw.  $\delta_1 = (\delta \pm \delta_2)$  bildet. (Fig. 97 u. 98).

Benutzt man von den Erzeugenden nur einen Teil, so erhält man entweder Kehlkreisräder, wenn das benutzte Stück

Fig. 99.



so wird

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_2 \omega_2}{r_1 \omega_1} &= \operatorname{tg} \delta_2 \\ i &= \frac{\omega_1}{\omega_2} = \operatorname{tg} \delta_2 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \frac{r_2}{r_1} &= \operatorname{tg}^2 \delta_2 = i^2. \end{aligned} \right.$$

sowie

$$r_1 = \frac{E}{1 + i^2}$$

und

$$r_2 = \frac{E i^2}{1 + i^2}$$

Das Doppelzeichen verschwindet; es gibt für Kreuzung der Axen unter  $90^\circ$  nur noch *ein* Hyperboloid als Radform, und nur *eine* Art von Eingriff, den äusseren.

## § 20. Zahnkonstruktionskreise und Grundbedingung für jede Verzahnung.

Nach der Bestimmung der Radgrundform erfordert zuerst die Bedingung der gegenseitigen Mitnahme an der Berührungsstelle ein genügendes Anhaften mit einer Kraft, welche mindestens gleich sein muss dem auf den Halbmesser dieser Berührungsstelle reduzierten Widerstand des getriebenen, d. h. mitzunehmenden Rades. Dieses gegenseitige Anhaften kann

der Erzeugenden in der Nähe der Kehlkreise oder hyperbolische Parallelkreisräder, wenn das benützte Stück der Hyperboolerzeugenden zwischen den Kreisschnitten  $R_1$  bzw.  $R_2$  und  $R_1'$  bzw.  $R_2'$  eingeschlossen ist (Fig. 99).

Wird hierin speziell

$$\hat{\delta} = \frac{\pi}{2},$$

erreicht werden durch Aufrauung der Oberflächen der Radgrundformen, d. h. Anbringung von Erhöhungen an einem Rade, welche in entsprechende Vertiefungen am andern Rade eingreifen (sogenannte Verzahnungen); die in letzterem Sinne konstruierten Räder heissen Zahnräder. Erfolgt aber die gegenseitige Mitnahme der beiden Radformen durch Reibung (Adhäsion), so heissen die betreffenden Räder Reibungsräder.

Da jedenfalls durch die Anbringung von Zähnen, bei Vernichtung der sein sollenden theoretischen Radgrundform, die verlangten Bewegungs- und Geschwindigkeitsverhältnisse nicht gestört werden dürfen, so müssen diese Verzahnungen nach bestimmten Gesetzen hergestellt sein, welche im Folgenden festgestellt werden sollen.

Zunächst nämlich darf und kann das relative Schleifen, welches in gewissen Fällen auftritt, nur in der Richtung der Radzähne geschehen, und muss vielmehr dieses Schleifen durch die geeignete Einstellung der Radzähne in die Richtung desselben veranlasst und gesichert werden. Dies wird bei Radzähnen mit gerader Mittellinie, also bei Rädern mit der allgemeinen Form von Rotationshyperboloiden, dadurch erreicht, dass man die Zahnmittellinien mit den Erzeugenden der Hyperboloide zusammenfallen lässt, deren Kehlkreise  $r_1$  und  $r_2$  sind, und mit Hilfe von Gleichg. 85 bis 89 bestimmt werden.

Für eben diese Räder mit hyperboloidischer Grundform lässt sich die Bestimmung der Zahnkurve nach folgenden Grundsätzen durchführen.

Zunächst sagt die Gleichung 86:

$$\frac{r_2 \omega_2}{r_1 \omega_1} = \pm \frac{\cos(\delta \pm \delta_2)}{\cos \delta_2},$$

dass nicht die Umfangsgeschwindigkeiten der Kehlkreise  $r_2 \omega_2$  und  $r_1 \omega_1$  einander gleich sind, sondern die Projektionen derselben auf eine Ebene, welche mit der Ebene der Kehlkreise die Winkel  $\delta_2$  bzw.  $\delta_1 = \delta \pm \delta_2$  bildet. Eine solche Ebene steht senkrecht auf der Erzeugenden der Fläche und bildet mit der Ebene des Kehlkreisschnittes den gleichen Winkel  $\delta_2$  bzw.  $\delta_1 = \delta \pm \delta_2$ , welchen die Erzeugende der Fläche mit der Rotationsaxe einschliesst. Jene zur Erzeugenden

senkrechte Ebene schneidet das Hyperboloid zunächst dem Kehlkreis in einer krummen Linie, deren Krümmungsradius als Radius des Zahnkonstruktionskreises bezeichnet wird, d. h. es müssen den Radzähnen solche Formen gegeben werden, dass durch dieselben in der Peripherie der Zahnkonstruktionskreise gleiche lineare Geschwindigkeiten hervorgebracht und gesichert werden.

Da alle Verfahren der Konstruktion von Radzähnen eben darauf beruhen, dass durch dieselben bei zwei sich berührenden Kreisen gleiche (lineare) Umfangsgeschwindigkeiten erzeugt werden, so müssen auch für andere ausserhalb der Kehlkreise liegende Punkte der hyperboloidischen Radformen, die Richtungen und Linien gleicher Umfangsgeschwindigkeiten gesucht werden.

Man nimmt an, dass diese Linien gleicher linearer Geschwindigkeiten die Krümmungskreise ebener Normalschnitte durch die hyperboloidischen Radformen seien, und zwar senkrecht zu den Erzeugenden der Hyperboloiden, in deren Richtung das relative Schleifen stattfindet. Die Radien dieser Krümmungskreise, also die Halbmesser der Zahnkonstruktionskreise an einer beliebigen Stelle der hyperboloidischen Radformen bestimmen sich nun auf nachstehende Weise (Fig. 100):

Es sei \*)

$C O$  die Axe eines Hyperboloides,

$C B$  die Erzeugende desselben, endigend am Kreisschnitte  $R$ ,

$A$  ein Punkt der Meridianlinie desselben auf dem gleichen Kreisschnitte  $R$ .

Man zieht  $B O \perp C B$  bis zum Durchschnitte  $O$  mit der Axe, so ist  $A O$  eine Normale zur Meridianhyperbel und zum Hyperboloid. Jeder durch die Normale  $A O$  zum Hyperboloid gelegter Schnitt ist ein Normalschnitt. Von den beiden *Hauptnormalschnitten* liegt der eine in der Ebene des Meridian schnittes, der andere senkrecht dazu. Der Krümmungshalbmesser des letzteren, welcher an dem Kreisschnitte  $R$  tangiert,

\*) Zur Vereinfachung sind in folgender Ableitung die zur Unterscheidung der, beiden Rädern zukommenden, Grössen  $R_1, r_1, \delta_1$  u. s. w. sowie  $R_2, r_2, \delta_2$  die Index-Bezeichnungen weggelassen.

ist  $= \rho = \frac{R}{\cos \varphi}$ . Der Krümmungshalbmesser des ersten  $= \rho'$ .

Ein anderer Normalschnitt kann in eine durch  $A$  gehende Erzeugende des Hyperboloides fallen; der Krümmungshalbmesser des letzteren  $r' = \infty$ .

Der letztere Normalschnitt schliesst mit dem Meridianschnitt einen Winkel  $\psi$  ein, welchen man erhält, indem man den Tangentialschnitt des Hyperboloides im Grundriss verzeichnet. Dieser ist dargestellt durch das gleichschenklige Dreieck  $B' C' D'$ , dessen Basis  $= 2b$  ist. Trägt man nun an die Erzeugende des Hyperboloides ein gleichschenkliges Dreieck an (Fig. 100, Aufriss) mit der gleichen Basis, so stellt dieses den Tangentialschnitt in wirklicher Grösse dar, und

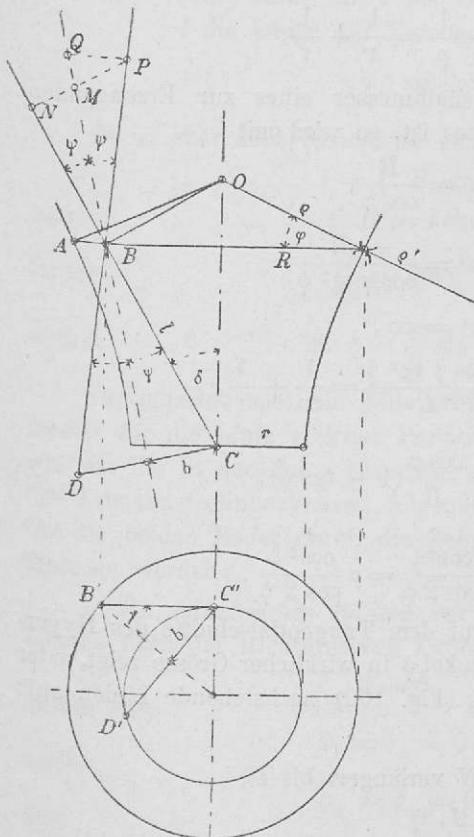
dessen halber Spitzenwinkel  $\phi$  ist gleichzeitig der Winkel des Meridianschnittes mit dem Normalschnitt durch die Erzeugende. Es gilt nun der Euler'sche Satz

$$\frac{1}{r'} = \frac{\cos^2 \psi}{\rho'} + \frac{\sin^2 \psi}{\rho} \quad \dots \dots \dots \quad (91)$$

Setzt man hier  $r' = \infty$ , so wird der Krümmungshalbmesser des Meridianschnittes im Punkte  $B$

$$\rho' = -\frac{\rho}{\operatorname{tg}^2 \psi} = -\frac{R}{\cos \varphi \operatorname{tg}^2 \psi} \quad \dots \dots \dots \quad (92)$$

Fig. 100.



Nimmt man noch den Satz zu Hilfe, dass die Summe der reziproken Werte der Krümmungshalbmesser je zweier senkrecht zu einander liegender Normalschnitte konstant und gleich ist, oder

$$\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r},$$

worin  $r$  der Krümmungshalbmesser eines zur Erzeugenden senkrechten Normalschnittes ist, so wird mit

$$\begin{cases} \rho = \frac{R}{\cos \varphi}, \\ \rho' = \frac{-R}{\cos \varphi \tan^2 \psi}, \\ r' = \infty, \end{cases}$$

$$\frac{\cos \varphi}{R} - \frac{\cos \varphi \tan^2 \psi}{R} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{r},$$

woraus endlich

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos \varphi}{R} (1 - \tan^2 \psi),$$

und

$$r = \frac{R}{\cos \varphi} \cdot \frac{\cos^2 \psi}{\cos 2 \psi} = \rho \frac{\cos^2 \psi}{\cos 2 \psi} \quad \dots \dots \dots \quad 93)$$

Trägt man daher auf dem Tangentialschnitte des Hyperboloides, welcher den Winkel  $\psi$  in wirklicher Grösse zeigt, oder auf dessen Verlängerung (Fig. 100) nachstehende Linien auf:

$$B M = \rho,$$

$M N \perp B N$  verlängert bis  $P$ ,

$P Q \perp B M$ , \*)

so ist

$$B N = B M \cos \psi = \rho \cos \psi,$$

$$B P = \frac{B N}{\cos 2 \psi} = \rho \frac{\cos \psi}{\cos 2 \psi},$$

$$B Q = B P \cos \psi = \rho \frac{\cos^2 \psi}{\cos 2 \psi} = r,$$

somit  $B Q = r$  der Krümmungsradius des fraglichen Normalschnittes, oder der Halbmesser des Zahnkonstruktionskreises.

\*) In umstehender Figur 100 ist die Richtung der Linie  $PQ$  irrtümlich  $\perp B P$ .

Der Winkel  $\psi$ , der vorstehend konstruktiv gefunden wurde, lässt sich auch durch Rechnung auf nachstehende Weise bestimmen.

Ist  $b$  die halbe Basis des Tangentialschnittes,  
 $l$  die Länge der Erzeugenden, so gilt zunächst

$$\sin \psi = \frac{b}{l}.$$

Es ist aber auch (Grundriss von Fig. 100)

$$b = C' B' \sin \gamma,$$

und

$$C' B' = l \sin \delta,$$

fernern

$$\frac{r}{R} = \sin \gamma,$$

mithin

$$\sin \psi = \frac{r}{R} \sin \delta. \dots \dots \dots \quad 94)$$

Für einzelne spezielle Fälle erhält jener Krümmungshalbmesser für die Linie gleicher Peripheriegeschwindigkeit, oder, wie wir ihn in der Folge bezeichnen werden, der Halbmesser des Zahnkonstruktionskreises, folgende Werte, wobei dieselben für die beiden Räder durch die Zeigerzahlen  $1$  und  $2$  unterschieden werden:

1. Bei zylindrischen Rädern mit parallelen Axen und mit Zähnen nach der Richtung von Zylinder-Erzeugenden ist

$$\delta = 0,$$

mithin auch

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,$$

sowie

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

und

$$\psi_1 = \psi_2 = 0,$$

daher wird hier:

$$r_1 = R_1,$$

$$r_2 = R_2,$$

2. Konische Räder mit sich schneidenden Axen und mit Zähnen, deren Mittellinien mit den Kegel-Erzeugenden übereinstimmen. Hier ist also

$$\psi_1 = \psi_2 = 0,$$

$$\varphi_1 = \delta_1,$$

$$\varphi_2 = \delta_2,$$

mithin

$$r_1 = p_1 = \frac{R_1}{\cos \hat{\delta}_1},$$

$$r_2 = p_2 = \frac{R_2}{\cos \hat{\delta}_2},$$

d. h. der Halbmesser des Zahnkonstruktionskreises ist die Seite des Normalkegels, d. h. eines Kegels, dessen Erzeugende auf den Erzeugenden der Radgrundform senkrecht stehen.

3. *Hyperbolische Räder mit sich kreuzenden Axen* und geradlinigen in die Hyperboloid-Erzeugenden fallenden Zahnmittellinien; hier ist zu setzen:

$$\psi = \psi_1 \text{ resp. } \psi_2,$$

$$\varphi = \varphi_1 \text{ resp. } \varphi_2, \quad R = R_1 \text{ resp. } R_2,$$

$$\beta = \hat{\delta}_1 \text{ resp. } \hat{\delta}_2, \quad r = r_1 \text{ resp. } r_2,$$

mithin

$$r_1 = R_1 \frac{\cos^2 \psi_1}{\cos \varphi_1 \cos 2\psi_1} \quad \left. \right\}$$

$$r_2 = R_2 \frac{\cos^2 \psi_2}{\cos \varphi_2 \cos 2\psi_2} \quad \left. \right\}$$

$$\sin \psi_1 = \sin \hat{\delta}_1 \frac{r_1}{R_1}, \quad \left. \right\}$$

$$\sin \psi_2 = \sin \hat{\delta}_2 \frac{r_2}{R_2}. \quad \left. \right\}$$

Wenn die Radkörper an Stelle der glatten rein geometrischen äusseren Form eine solche mit Erhöhungen und Vertiefungen erhalten sollen, welche durch ihr wechselseitiges Ineinandergreifen bei beiden Axen Rotationen zu vermitteln haben, identisch mit denjenigen, welche sich bei direkter Mitnahme der beiden theoretischen Radformen ergeben, so reduziert sich die vorliegende Aufgabe darauf, beiden Rädern derartig gebildete Zähne zu geben, dass durch sie in der Peripherie der beiden eben bestimmten in *einer* Ebene liegenden Krümmungskreise (Zahnkonstruktionskreise) gleiche lineare Geschwindigkeiten vermittelt werden.

Da die relative Momentanaxe *CB* die zur Erzeugenden senkrechte Ebene der Zahnkonstruktionskreise im Punkte

$B$  schneidet, so wird auch die *relative* Bewegung des zum einen Zahnkonstruktionskreise gehörigen ebenen Systemes, gegen das andere gerade so geschehen, wie wenn sie eine Drehung um das Momentanzentrum  $B$  wäre. Ist ein Teil jenes ebenen Systemes eine beliebige Kurve, und soll diese Kurve mit einer zum zweiten ebenen Systeme gehörigen Kurve in steter Berührung sein, so kann auch die relative Bewegung jener Kurve gegen die andere nur eine Drehung um das Momentanzentrum sein, und diese relative Bewegung kann für den Berührungs punkt der Zahnkurven nur in der Richtung der gemeinsamen Kurventangente geschehen. Es muss also die Kurventangente im Berührungs punkt normal stehen zum Fahrstrahl vom Momentanzentrum zum Berührungs punkt, oder

*„Ein Punkt einer Zahnkurve des einen Zahnkonstruktionskreises kommt dann zur Berührung mit einem Punkte einer Zahnkurve des andern Zahnkonstruktionskreises, wenn die für beide Kurvenpunkte gemeinsame Normale durch das Momentanzentrum, den Berührungs punkt der Zahnkonstruktionskreise, geht.“*

Den Berührungs punkt der Zahnkonstruktionskreise — im folgenden kurz Radkreise genannt — heisst man *Zentralpunkt*, die Verbindungs linie der Mittelpunkte der Radkreise *Zentra linie*.

Jedem Zahnpunkt entspricht also eine Berührungs stelle, ein *Eingriffsort*, einer vollständigen Zahnkurve entspricht als Ort des Eingriffs sämtlicher Zahnpunkte eine *Eingriffslinie*.

Ausserhalb der Eingriffslinie kann keine richtige Zahnb erührung stattfinden!

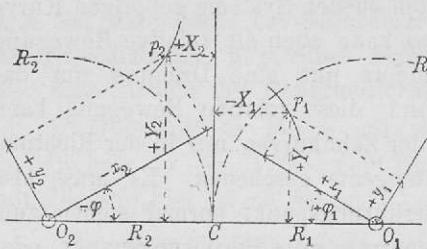
Im folgenden werden die Radkreise — übereinstimmend mit den bei zylindrischen Rädern treffenden Zahnkonstruktions kreisen — einfach mit  $R_1$  und  $R_2$  bezeichnet.

## § 21. Gleichungen der Zahnkurven.

Unter Benützung obigen Hauptgrundsatzes für jede richtig arbeitende Verzahnung lässt sich nun auch zu einer gegebenen, bekannten Zahnkurve, welche zu dem einen Radkreise gehört, die entsprechende andere des zweiten Rades finden.

Es sei (Fig. 101)  $y_1 = f_1(x_1)$  die Gleichung einer bekannten Zahnkurve, in der Ebene des Radkreises  $R_1$ , bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfang im Mittelpunkt des Radkreises liege, und  $y_2 = f_2(x_2)$  die zu

Fig. 101.



suchende Gleichung der unbekannten, mit dem Radkreise  $R_2$  zu verbindenden Zahnkurve, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfang im Mittelpunkt von  $R_2$  sei. Beide Zahnkurven lassen sich jedenfalls

auch definieren in bezug auf ein drittes rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfang im Berührungs punkte  $C$  der beiden Radkreise liege, und dessen  $X$ -Axe mit der Centrallinie (Verbindungslinie der beiden Radmittelpunkte) zusammenfalle, aber gegen die früheren  $x$ -Axe die Winkel  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  einschliesse. In bezug auf dieses neue System sind nun die Gleichungen der gegebenen Zahnkurve

$$\left. \begin{array}{l} X_1 = x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1 - R_1, \\ Y_1 = x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1. \end{array} \right\} \dots \quad 95)$$

Die Gleichungen der zweiten unbekannten Zahnkurve werden ähnliche Form erhalten, betreffs der Vorzeichen muss aber auf den Sinn der Drehung und die gegenseitige Lage der Radmittelpunkte Rücksicht genommen werden, indem bei äusserem Eingriffe der Sinn der Drehung entgegengesetzt ist, und die Radmittelpunkte auf den verschiedenen Zweigen der  $X$ -Axe liegen, während bei innerem Eingriffe der Sinn der Drehung der gleiche ist, und beide Radmittelpunkte auf derselben Seite vom Zentralpunkte aus zu finden sind. Wählt man etwa *äusseren* Eingriff, so kann für die zweite Kurve gesetzt werden

$$\left. \begin{array}{l} X_2 = x_2 \cos \varphi_2 + y_2 \sin \varphi_2 + R_2, \\ Y_2 = -x_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2. \end{array} \right\} \dots \quad 96)$$

Der Eingriffsort der beiden Zahnkurven ist jedenfalls dadurch gekennzeichnet, dass für eine Drehung  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  der beiden Radkreise ein Punkt  $X_1 Y_1$  der einen mit einem Punkte  $X_2 Y_2$  der andern Zahnkurve zusammenkommt, für welchen Augenblick sodann

$$X_1 = X_2,$$

und

$$Y_1 = Y_2$$

gesetzt werden muss.

Es wird mithin aus Gleichung 95 und 96 nach einiger Umformung

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - y_1 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - (R_1 + R_2) \cos \varphi_2, \\ y_2 &= x_1 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + y_1 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - (R_1 + R_2) \sin \varphi_2, \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} x_2 \\ y_2 \end{aligned} \right\} 97)$$

In diesen umgestalteten Gleichungen für die gesuchte Zahnkurve müssen die Winkelfunktionen derart bestimmt werden, dass der Hauptforderung für jede Verzahnung genügt werde, d. h. dass die Normale an die erste Kurve im Konflikt-Punkte  $X_1 Y_1$ , daher auch im Punkte  $X_2 Y_2$  an die zweite Kurve, durch den Zentralpunkt (hier den Koordinatenanfang) gehe. Es muss also, analytisch ausgedrückt, beispielsweise für die erste Kurve, sein:

$$\frac{\frac{d X_1}{d x_1}}{\frac{d Y_1}{d x_1}} = -\frac{Y_1}{X_1},$$

und mit Rücksicht auf die Werte von Gleichung 95

$$\begin{aligned} \frac{d X_1}{d x_1} &= \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \frac{d y_1}{d x_1}, \\ \frac{d Y_1}{d x_1} &= \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1 \frac{d y_1}{d x_1}. \end{aligned}$$

Mithin wird

$$\frac{\cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \frac{d y_1}{d x_1}}{\sin \varphi_1 + \cos \varphi_1 \frac{d y_1}{d x_1}} = -\frac{x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1}{x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1 - R_1}$$

und hieraus

$$x_1 + y_1 \frac{d y_1}{d x_1} = R_1 \left( \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \frac{d y_1}{d x_1} \right) \quad \dots \quad 98)$$

Mittels dieser Gleichung lässt sich aus den Gleichungen 97 die Grösse  $\varphi_1$  eliminieren, und ist dann durch die endgiltigen Gleichungen für  $x_2$  und  $y_2$  die gesuchte Zahnkurve analytisch bestimmt. \*)

### § 22. Konstruktion der Zahnkurven. Allgemeine Bedingung.

Die durch die Forderung der Herstellung von Verzahnungen an Rädern gestellte Aufgabe kann in zweierlei Weise gelöst werden, analytisch oder konstruktiv. Analytisch, indem unter Annahme einer bekannten Zahnkurve, deren Gleichung aufgestellt, hieraus die Gleichung der Eingriffslinie nach der in § 21 aufgestellten Bedingung gesucht wird, und sodann aus der Eingriffslinie bezw. aus deren Gleichung die zweite Zahnkurve durch ihre Gleichung erhalten werden kann.

Für die konstruktive Lösung kann die Aufgabe wieder in zweierlei Weise gestellt sein: entweder zu einer gegebenen Zahnkurve des einen die zugehörige des anderen Rades, oder bei gegebener Eingriffslinie die beiden Zahnkurven beider Räder zu suchen. Zunächst möge der Hauptgrundsatz für sämtliche Verzahnungsarten in elementarer Weise ohne Beziehung auf die oben gegebene allgemeine Zahnrädertheorie entwickelt werden.

Jedenfalls muss nach der Bedingung gleicher Peripheriegeschwindigkeit auf den Umfängen der Radkreise  $R_1$  und  $R_2$  gelten:

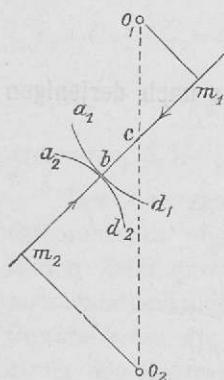
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Sind in Figur 102  $O_1$  und  $O_2$  die Mittelpunkte von  $R_1$  und  $R_2$ , und  $a_1 d_1$  bezw.  $a_2 d_2$  zwei zu  $R_1$  bezw.  $R_2$  ge-

\*) Die hiehergehörigen Rechnungen werden wohl mitunter sehr umständlich, und beschränke ich mich daher darauf, auf die in der 2. Auflage enthaltenen Ausführungen zu verweisen, sowie auf einen Aufsatz von P. A. Hansen in den Berichten der kgl. sächs. Ges. der Wissenschaften (17. Bd.), welche den Ausführungen als Grundlage dienten.

hörige Zahnkurven, so haben diese beiden im Berührungs-  
punkte  $b$  jedenfalls gemeinschaftliche Tangente und gemein-  
schaftliche Normale. Der Druck der beiden Zahnkurven gegen

Fig. 102.



einander kann nur in der Richtung der Normalen wirken, und eine Momentan-  
bewegung einer Zahnkurve durch die auf dieselbe einwirkende Pressung der anderen Zahnkurve ebenfalls nur in der  
Richtung der gemeinsamen Normalen veranlasst werden. An dieser Momentan-  
bewegung mit der Geschwindigkeit  $v$  müssen auch alle Punkte beider Räder  
teilnehmen, welche in der Richtung dieser Bewegung liegen, also auch die  
beiden Punkte  $m_1$  und  $m_2$ , welche die Fusspunkte der Senkrechten  $O_1 m_1$  und  
 $O_2 m_2$  von den Radmittelpunkten auf  
die Richtung der Normalen sind. Da aber  $m_1$  und  $m_2$  auch  
an der Rotation der bezüglichen Räder teilnehmen, so ist  
die lineare Geschwindigkeit dieser Punkte auf den Kreisen  
vom Halbmesser  $O_1 m_1$  und  $O_2 m_2$

$$v = O_1 m_1 \cdot \omega_1 = O_2 m_2 \cdot \omega_2.$$

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke  $O_1 m_1 c$  und  $O_2 m_2 c$   
ist

$$O_1 m_1 = O_2 m_2 \frac{O_1 c}{O_2 c},$$

mithin

$$\omega_1 \cdot O_1 c = \omega_2 \cdot O_2 c,$$

und

$$\frac{O_2 c}{O_1 c} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} \dots \dots \dots \dots \quad (99)$$

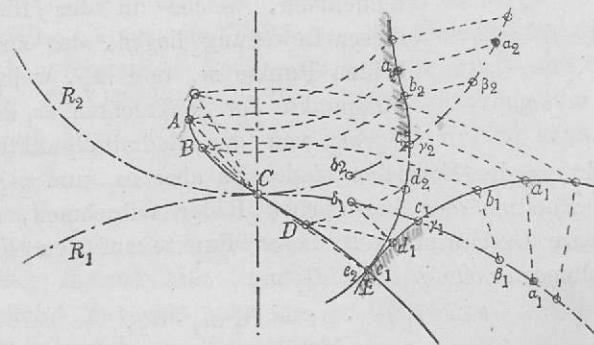
d. h. die Normale zu den Zahnkurven im Eingriffsorte teilt  
den Abstand der beiden Radmittelpunkte im Verhältnis der  
Halbmesser, und müssen daher wegen der direkten Berührung  
der beiden Radkreise die beiden Abstände der Radmittelpunkte  
vom Punkte  $c$  die Radhalbmesser sein; der Punkt  $c$  selbst  
muss also der Berührungs punkt der beiden Radumfänge oder  
der Zentralpunkt sein.

Hieraus folgt wieder als Hauptgrundsatz für jede Verzahnung: *Ein Punkt einer Zahnkurve gelangt an seinen Eingriffsort, wenn die zugehörige Normale durch den Zentralpunkt geht.*

**§ 23. Bestimmung der Zahnkurve eines Rades nach derjenigen des anderen Rades.**

*A. Allgemeines Verfahren.*

Fig. 103.



Es seien (Fig. 103)

$a_1$        $b_1$        $c_1$        $d_1$  . . . Punkte der gegebenen  
 Zahnkurve, welche dann  
 an ihren Eingriffsort gelangen, wenn von ihren  
 Normalen

$a_1 \alpha_1$        $b_1 \beta_1$        $c_1 \gamma_1$        $d_1 \delta_1$  . . . die Fußpunkte  
 $\alpha_1$        $\beta_1$        $\gamma_1$        $\delta_1$  . . . durch den Zentralpunkt  
 gehen, mithin in den  
 Stellungen,

$A$        $B$        $C$        $D$  . . . durch welche die Ein-  
 griffslinie gegeben ist.  
 Für die entsprechenden  
 Punkte der anderen  
 Zahnkurve ergeben sich  
 die Fußpunkte ihrer  
 Normalen

$\alpha_2$  $\beta_2$  $\gamma_2$ 

$\delta_2$  . . . aus der Bedingung gleicher Umfangsgeschwindigkeit der beiden Radkreise durch Auftragung der gleichen Umfangsstrecken,

$C\alpha_2 = C\alpha_1$   $C\beta_2 = C\beta_1$   $C\gamma_2 = C\gamma_1$   $C\delta_2 = C\delta_1$  und die gesuchten Zahnpunkte

 $a_2$  $b_2$  $c_2$ 

$d_2$  . . . selbst durch Auftragung gleich langer Normalen:

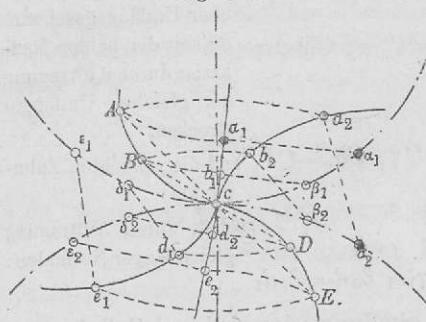
$\alpha_2 a_2 = \alpha_1 a_1$   $\beta_2 b_2 = \beta_1 b_1$   $\gamma_2 c_2 = \gamma_1 c_1$   $\delta_2 d_2 = \delta_1 d_1$

Der der gezeichneten Stellung der beiden Zahnkurven entsprechende augenblickliche Berührungs punkt, der natürlich beiden Zahnkurven angehört, ist der Punkt  $e_1$  bzw.  $e_2$  zusammenfallend mit dem Punkte  $E$  der Eingriffslinie. In diesem Punkte muss die augenblickliche gemeinsame Kurven normale durch den Zentralpunkt gehen.

Ist die Höhe eines Zahnes über dem Radkreise gegeben durch den die Zahnspitze begrenzenden Kreis, der z. B. durch den Punkt  $a_1$  gehen möge, so ist die der Zahnspitze  $e_1$   $a_1$  entsprechende Eingriffsdauer dargestellt durch die Umfangsstrecke gemessen von dem Punkte  $c_1$  des Zahnes auf dem Radkreise bis zum Fusspunkte  $\alpha_1$  der zu der äussersten Zahnspitze gehörenden Normalen; also durch die Strecke  $c_1 \alpha_1$ . Die Begrenzung des Zahnes, welche von den innersten konstruierten Punkten innerhalb der Radkreise noch weiter hergestellt werden muss, um eine genügend tiefe Zahnlücke zu erhalten, ist keine aktive Zahnkurve mehr und insofern in ihrer Form gleichgültig, wenn nur die freie Bewegung der in die Lücke eingreifenden Zahnspitze nicht gestört wird.

Als Spezialfall dieser allgemeinsten Art von Verzahnung kann angenommen werden, dass für beide Räder als die Zahnfussbegrenzung eine gerade Linie gegeben sei. (Fig. 104). Es ergeben sich dann nach dem eben gezeigten Verfahren die den beiden Zahn fussbegrenzungen  $a_1 b_1 c$  sowie  $c d_2 e_2$  entsprechenden Eingriffslinien  $A B C$  sowie  $C D E$ , und hieraus die zugehörigen Zahnspitzenformen  $a_2 b_2 c$  sowie  $c d_1 e_1$ . Diese Art von Verzahnung wird passend auch an Stelle der Zykloidenverzahnung mit geradem radialem Zahnfusse gesetzt, weil bei

Fig. 104.

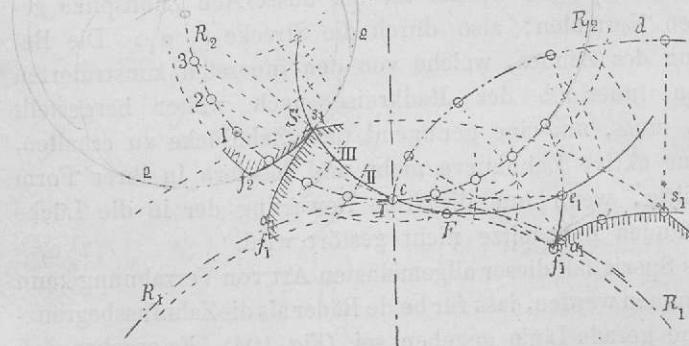


ander über, wie auch die Zahnspitzenkurven in den geradlinigen Zahnfuss.

### B. Triebstockverzahnung.

Als eine weitere spezielle Art des allgemeinen Verfahrens für die Konstruktion einer Zahnkurve des einen Rades aus derjenigen des anderen erscheint die sogenannte Triebstockverzahnung, bei welcher als die Zahnform des einen Rades gegeben ist ein Kreis (der sogenannte Triebstockkreis), dessen

Fig. 105.



Mittelpunkt im Teilkreise liegt. Die Eingriffslinie zunächst kann erhalten werden durch Konstruktion nach dem Verfahren der allgemeinen Verzahnungsart, oder auf folgende Weise (Fig. 105): Der Triebstockkreis ( $\rho$ ) wird während der Bewegung des zugehörigen Rades verschiedene auf einander folgende Positionen 1, 2, 3... einnehmen. Soll er nun in diesen

letzterer sich für sehr kleine Radhalbmesser eine bedenkliche Verjüngung der Zahndicke am Zahngrunde ergibt. Fallen die beiden Zahnfussbegrenzungen in dieselbe gerade Linie, so gehen die beiden Teile der Eingriffslinie  $A C$  und  $C E$  stetig in ein-

Stellungen stets eine richtig arbeitende Zahnkurve sein, so muss auch jederzeit irgend ein Punkt des Triebstockkreises in seinem Eingriffsorte stehen. Da für jeden Zahnpunkt die Normale in seinem Eingriffsorte durch den Zentralpunkt gehen muss, und die Normale zu jedem Punkte des Triebstockkreises stets durch dessen Mittelpunkt geht, so sind die Durchschnittspunkte I., II., III. . . . der Verbindungsline zwischen dem Zentralpunkte  $c$  und der Mittelpunktslage des Triebstockkreises 1., 2., 3. . . . jeweils die Eingriffsorte, und bilden diese Punkte I., II., III. . . . mit den dazwischen liegenden und den weiteren in gleicher Weise zu findenden Punkten die Eingriffslinie.

Da nun der Natur der Sache nach jede Zahnform des einen Rades die einhüllende Kurve ist zu sämtlichen Positionen der Zahnform des anderen Rades, wenn der letztere Radkreis auf dem ersten rollt, so findet man alle auf einander folgenden Positionen der gegebenen Zahnform, des Triebstockkreises, wenn man die sämtlichen Positionen von dessen Mittelpunkt verzeichnet. Dieser Mittelpunkt liegt auf dem rollenden Radkreise, und dessen sämtliche auf einander folgende Lagen bilden eine zyklische Kurve  $c\,d$ , erzeugt durch Rollen des zum Triebstock gehörigen Radkreises auf dem anderen Radkreise. Die einhüllende Linie  $f_1\,s_1$  an die Triebstockstellungen ist mithin eine Äquidistante oder Linie in gleichem Normalabstand zu jener zyklischen Kurve  $c\,d$ . Diese Äquidistante beginnt an dem die Zahnspitze begrenzenden Kreise bei  $s_1$ , durchschneidet den Radkreis bei  $a_1$  und setzt sich noch innerhalb desselben fort bis  $f_1$ ; von hier kehrt sie plötzlich um und endigt bei  $e_1$ , wo die Normale zur gegebenen Zahnkurve, der Radius des Triebstockkreises,  $\perp$  zur Zentrallinie steht. Dieser zurückspringende Teil der Äquidistanten ist als Zahnkurve praktisch nicht zu gebrauchen; diese hört daher am tiefsten Punkte  $f_1$  auf, dessen Eingriffsort bei  $F$  ist und dessen zugehöriger Punkt des Triebstockkreises  $f_2$  ist.

Der Eingriff beginnt sonach bei  $F$  und endigt bei  $S$ , wo der Spaltenkreis die Eingriffslinie durchschneidet.

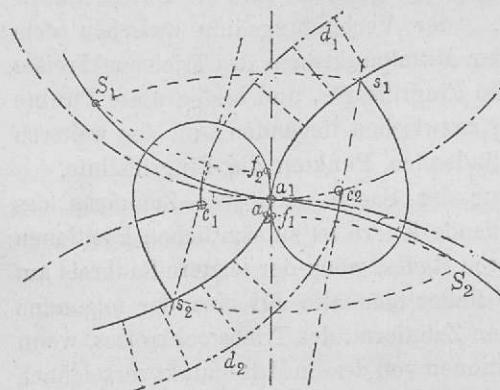
Lässt man den so konstruierten Zahn von  $R_1$  auf dem Radkreise aufhören, so beginnt der Eingriff im Zentralpunkt; von dem zum anderen Radkreise  $R_2$  gehörigen Triebstock

kommt sodann das ganze *über* dem Radkreise liegende Stück in Wegfall.

Berücksichtigt man, dass von dem Triebstockkreis im letzten Falle nur das *unter*, und von dem zugehörigen Zahn

des anderen Rades nur das *über* dem Radkreis befindliche Stück als aktive Zahnkurve anzusehen ist, so können beide Räder mit Triebstockkreisen als Zahnkurven *innerhalb* des Radkreises versehen werden, an welche sich sodann für beide Räder *ausserhalb* des Radkreises die in dar-

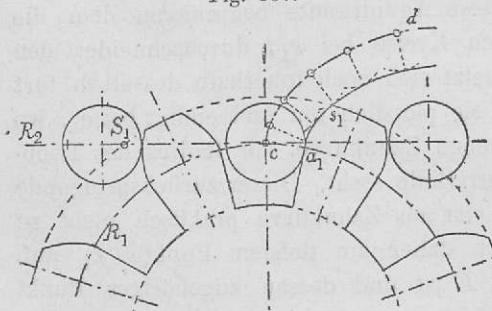
Fig. 106.



gestellter Weise ausgeführte Zahnform anschliesst. (Fig. 106).

Von den speziell mit Triebstockverzahnung konstruierten Rädereingriffen ist von besonderem Interesse der Fall der

Fig. 107.



hat dann als Zahnform  $a_1 s_1$  eine Äquidistante zur Evolvente  $c d$ .

Der Eingriff *vor* der Zentraillinie findet wieder annähernd statt durch  $a_1 c$ , *hinter* der Zentraillinie aber genau durch die Strecke  $c S_1$  unter Benützung der Zahnspitze  $a_1 s_1$  des eingreifenden Rades  $R_1$ .

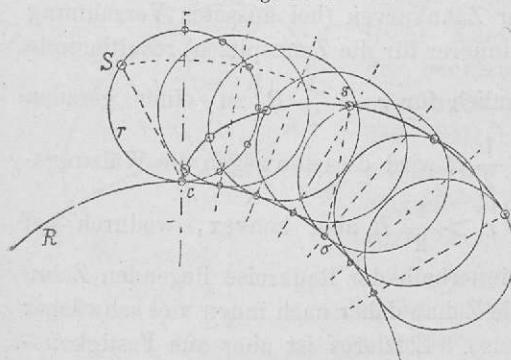
§ 24. Bestimmung der Zahnkurven beider Räder aus der Eingriffslinie.

A. Die Eingriffslinie ist ein Kreis. Zykloidenverzahnung.

Ist die Eingriffslinie ein Kreis vom Halbmesser  $r$ , welcher im Zentralpunkte mit den dort sich berührenden Radkreisen in Berührung ist, somit ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Zentrallinie liegt, so ergeben sich zunächst aus der analytischen Behandlung der Aufgabe für die beiden zusammengehörigen Zahnkurven die Gleichungen von zyklischen Kurven, deren Wälzungskreis von derselben Grösse ist, wie der Kreis der Eingriffslinie, und deren Grundkreise die beiden Radkreise sind.

Das Gleiche ergiebt sich umgekehrt, unter der Annahme der Bildung der Zahnformen durch zyklische Kurven, aus gewissen Eigenschaften der Zykloide.

Fig. 108.



Ist (Fig. 108)  $c s$  eine Zykloide, erzeugt durch Wälzen des Kreises  $r$  auf dem Grundkreise  $R$ , so geht für jeden Punkt der Zykloide (z. B. für den Punkt  $s$ ) die Normale durch den der Erzeugung des Punktes  $s$  entsprechenden Fußpunkt  $\sigma$ .

des rollenden Kreises. Nach dem allgemeinsten Gesetze für jede Verzahnung kommt sonach jeder Punkt einer Zykloide dann an seinen Eingriffsort, wenn der Fußpunkt des rollenden Kreises durch den Zentralpunkt geht. Da dies für jeden Punkt gilt, so ist überhaupt der geometrische Ort des Zahneingriffs der Wälzungskreis in seiner Zentralstellung.

Es folgt also daraus, dass beide Räder richtig verzahnt sind und in gegenseitigem Eingriff auch gleiche Peripheriegeschwindigkeiten erhalten, wenn die Zahnkurven als zyklische

Kurven konstruiert sind, deren Wälzungskreis von derselben Grösse ist, wie der als Eingriffslinie angenommene Kreis. Die Wälzung selbst geschieht aus einer Anfangsstellung, in welcher der Wälzungskreis mit der Eingriffslinie zusammenfällt, nach der dem benützten Teile der Eingriffslinie entgegengesetzten Seite der Zentrallinie. Weil die resultierende Zahnkurve eines Rades mithin nur von der Eingriffslinie, nicht aber von der Grösse des eingreifenden anderen Rades abhängig ist, so kann auch jedes derart mit zyklischen Kurven verzahnte Rad mit jedem anderen von beliebiger Grösse richtig arbeiten, wenn nur den Zahnkurven beider Räder die gleiche Eingriffslinie, d. h. der gleiche Wälzungskreis entspricht, und kann daher auch ein solches Rad bei Erfüllung dieser Bedingung mit mehreren anderen von verschiedenen Durchmessern zugleich im Eingriff stehen. Das in rein theoretischer Beziehung gleichgültige Mass für die Grösse des Wälzungskreises erhält mit Rücksicht auf einheitliche Zahnkonstruktion und Festigkeit der Zähne mitunter eine gewisse Beschränkung. Die für einen Teil der Zahnkurven (bei äusserer Verzahnung für die Zahnfüsse, bei innerer für die Zahnspitzen) resultierende

Hypozykloide wird nämlich für  $r = \frac{1}{2} R$  zu einer geraden radialen Linie, für  $r < \frac{1}{2} R$  wird dieselbe gegen die Wälzungsrichtung konkav, für  $r > \frac{1}{2} R$  aber konvex, wodurch bei äusserem Eingriff die innerhalb der Radkreise liegenden Zahnfüsse unterschnitten, die Zähne daher nach innen viel schwächer würden als am Radkreise. Letzteres ist aber aus Festigkeitsrücksichten unzulässig und wird daher als oberster Grenzwert für die Grösse des Rollkreises  $r = \frac{1}{2} R$  anzunehmen sein.

Soll ein derartiges Rad zu einem ganzen Rädersatze passen, dessen Zahnformen daher für alle Räder mit dem gleichen Wälzungskreise erzeugt sein müssen (*Satzeräder*), so darf selbstverständlich auch für das kleinste Rad  $R_0$  dieses Satzes aus Festigkeitsrücksichten der Zahnfuss nicht unterschnitten werden, d. h.  $r$  muss gleich oder darf doch nicht grösser als  $\frac{1}{2} R_0$  an-

genommen werden. Ist die Entfernung je zweier Zähne, d. h. auf einander folgender gleichgerichteter Zahnkurven, desselben Rades  $= t$ , und die Anzahl der auf dem Rade  $R_0$  angebrachten Zähne  $= Z_0$ , so ist

$$Z_0 t = 2 R_0 \pi, \dots \text{daher } R_0 = \frac{Z_0 t}{2 \pi},$$

und mithin

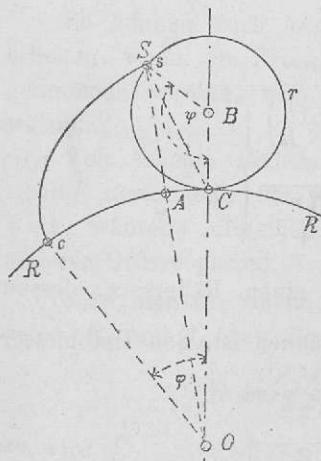
$$r = \frac{1}{2} R_0 = \frac{Z_0 t}{4 \pi}.$$

Es folgt daraus nachstehende Tabelle für die Zahanzahl  $Z_0$  des kleinsten Rades eines Satzes:

$Z_0 =$	8	9	10	11	12	13
$\frac{r}{t} =$	0,637	0,716	0,795	0,875	0,954	1,03

Der Eingriff bei mit zyklischen Kurven hergestellten Zähnen erfolgt nach dem Vorhergehenden, während ein Bogen

Fig. 109.



spitze aus durch

$$AS = OS - OA = \sqrt{OB^2 + BS^2 - 2 \cdot OB \cdot BS \cdot \cos \phi} - OA.$$

Setzt man hierin

$$OA = R,$$

$$BS = BC = r,$$

$$OB = R + r,$$

ferner

$$\begin{aligned}\cos \psi &= \sqrt{1 - \sin^2 \psi} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \psi^2,\end{aligned}$$

so wird nach einer kleinen Umformung

$$AS = R \left\{ \sqrt{1 + \frac{r^2 \psi^2}{R^2} \left( \frac{R}{r} + 1 \right)} - 1 \right\}$$

und hieraus mit genügender Annäherung:

$$AS = \frac{r^2 \psi^2}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) \dots \dots \dots \quad 100)$$

Nun ist aber  $r \psi$  nichts anderes als die Bogenlänge der Eingriffslinie oder des Wälzungskreises, gleichwertig mit der Eingriffsdauer  $R \varphi$ , welche ebenso wie die Spitzenhöhe durch ein Vielfaches der Zahnteilung ausgedrückt werden kann.

Setzt man sonach

$$r \psi = p \cdot t,$$

und

$$AS = n \cdot t,$$

so wird

$$n = \frac{p^2 t}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) \quad \dots \dots \dots \quad 101)$$

und

$$p = \sqrt{\frac{2n}{t} \cdot \frac{Rr}{R+r}} \quad \dots \dots \dots$$

Setzt man  $R = \frac{Zt}{2\pi}$  und für einen Rädersatz, dessenkleinstes Rad ein solches mit  $Z_0$  Zähnen ist, den Halbmesser des Wälzungskreises  $r = \frac{1}{2} \frac{Z_0 t}{2\pi}$ , so wird

$$p = \sqrt{\frac{n}{\pi} \frac{Z \cdot Z_0}{2Z + Z_0}} \quad \dots \dots \dots \quad 102)$$

Nimmt man z. B. hiebei an

$$Z_0 = 12 \text{ und } n = 0,3,$$

so wird

$$p = \sqrt{\frac{1,8 Z}{\pi(Z+6)}} = 0,757 \sqrt{\frac{Z}{Z+6}},$$

und bei dem Eingriff eines 20-zähnigen mit einem 60-zähnigen Rade für das erstere  $p_1 = 0,757 \sqrt{\frac{20}{20+6}} = 0,664$ ,

und für das letztere  $p_2 = 0,757 \sqrt{\frac{60}{60+6}} = 0,722$ ,

folglich  $p = p_1 + p_2 = 1,386$ , und daher die gesamte Eingriffsdauer

$$p t = 1,386 t.$$

Wenn aber gezahnte Räder nicht als zu einem ganzen Rädersatz passend, d. h. nicht als Satzräder konstruiert werden sollen, so kann recht wohl auch für jeden Teil der Eingriffslinie vor und hinter der Zentrallinie ein anderer Kreis, also auch verschiedene Wälzungskreise, gewählt werden. Nur muss stets der Erzeugungskreis der beiden zusammenarbeitenden Zahnkurven der gleiche sein, d. h. diesen beiden die gleiche Eingriffslinie entsprechen.

So können auch *beide* Räder radiale Zahnbegrenzungen erhalten, wenn die Erzeugungskreise bezw. halb so gross angenommen werden, wie die Radkreise, in welchen sie sich wälzen.

Von solchen Rädern arbeiten jedoch nur jene beiden richtig zusammen, für welche die Verzahnung konstruiert wird, während dieselben zu keinem anderen Rade irgend anderer Grösse passen.

Setzt man für solche Räder, deren Halbmesser und Zahzzahlen  $R_1$  und  $Z_1$  bezw.  $R_2$  und  $Z_2$  sein mögen, in Gleichung 102

$$R = \frac{Z_1 t}{2 \pi} \text{ und } r = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z_2 t}{2 \pi},$$

so wird

$$p = \sqrt{\frac{n}{\pi} \cdot \frac{Z_2 Z_1}{Z_2 + 2 Z_1}} \dots \dots \dots \quad 103)$$

und hieraus die Eingriffsdauer, veranlasst durch die Spitze des Rades  $R_1$  mit  $Z_1$  Zähnen  $= p t$ .

Seien wieder wie vorhin  $Z_1 = 20$ ,  $Z_2 = 60$ , so ergibt sich mit  $n = 0,3$  für die Eingriffsdauer, veranlasst durch die Spitze von  $R_1$

$$p_1 = \sqrt{\frac{0,3}{\pi} \cdot \frac{60 \cdot 20}{60 + 2 \cdot 20}} = 1,07,$$

und für diejenige veranlasst durch die Spitze von  $R_2$

$$p_2 = \sqrt{\frac{0,3}{\pi} \cdot \frac{60 \cdot 20}{20 + 2 \cdot 60}} = 0,90,$$

folglich die Gesamteingriffsdauer

$$p t = (p_1 + p_2) t = 1,97 t.$$

Aus dem Vorstehenden ergibt sich auch, dass die Eingriffsdauer bei Verzahnung mit radialen Zahnflanken unter sonst gleichen Verhältnissen bei weitem länger ist als für Satzräder.

Für innen verzahnte Räder kann die Eingriffsdauer nach den gleichen Formeln berechnet werden, nur ist dann der eine der beiden Halbmesser negativ zu setzen, daher gemäss Gleichung 101

$$n = \frac{p^2 t}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \dots \dots \dots \quad 104)$$

und

$$p = \sqrt{\frac{2 n}{t} \cdot \frac{R r}{R - r}} = \sqrt{\frac{n}{\pi} \frac{Z Z_0}{2 Z - Z_0}} \dots \dots \quad 105)$$

Es ist schon hieraus ersichtlich, dass in diesem Falle der Wert für die Eingriffsdauer grösser ausfällt als bei äusserem Eingriffe.

### Zusammenstellung verschiedener mit zyklischen Kurven darzustellender Verzahnungen.

I. *Satzräder-Verzahnung.* Das kleinste Rad habe  $Z_0$ -Zähne, die Eingriffs- und Erzeugungslinie ist durchweg ein Kreis vom Halbmesser

$$r_1 = r_2 = \frac{1}{2} \frac{Z_0 t}{2 \pi}.$$

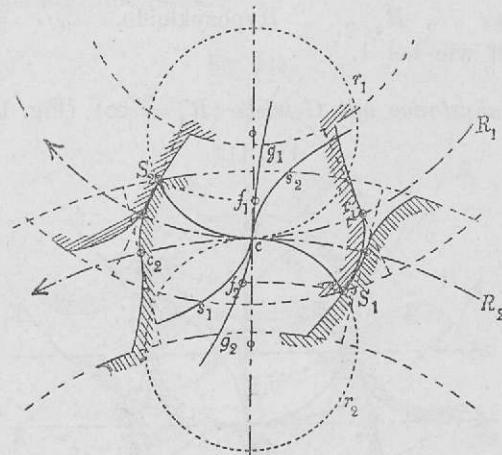
Der leitende Kreis ist stets der zugehörige Radkreis.

#### 1. *Ausserer Eingriff* (Fig. 110).

*c s<sub>1</sub>* Zahnspitze von  $R_1$  ist eine Epizykloide, Rollkreis  $= r_2 = r_1$ ,  
*c f<sub>1</sub>* „ fuss „  $R_1$  „ „ Hypozykloide, „ „  $= r_1 = r_2$ ,  
*c s<sub>2</sub>* „ spitze „  $R_2$  „ „ Epizykloide, „ „  $= r_1 = r_2$ ,  
*c f<sub>2</sub>* „ fuss „  $R_2$  „ „ Hypozykloide, „ „  $= r_2 = r_1$ .

Ganze benützte Länge der Eingriffslinie  $S_1 S_2$  und zwar veranlasst vor der Zentraallinie  $c S_1$  von der Spitze  $c s_1$  des getriebenen  $R_1$ , und hinter der Zentraallinie  $c S_2$  von der Spitze

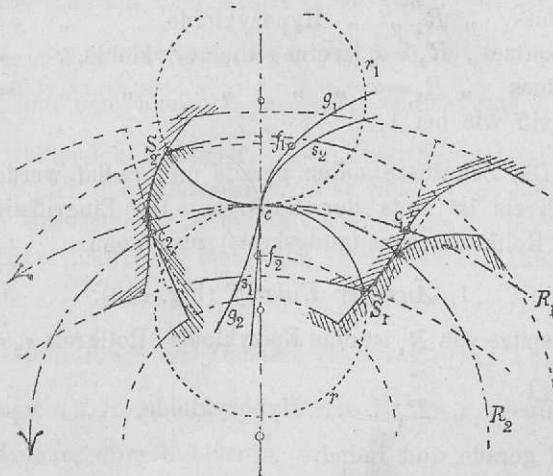
Fig. 110.



$c s_2$  des treibenden Rades  $R_2$ . Die Eingriffsdauer ist  $c c_1$  vor und  $c c_2$  hinter der Zentraallinie.

Das Stück  $f_1 g_1$  bzw.  $f_2 g_2$  innerhalb des letzten benützten Zahnpunktes  $f_1$  bzw.  $f_2$  ist keine aktive Zahnkurve mehr und dient zur Bildung der Zahnlücke.

Fig. 111.

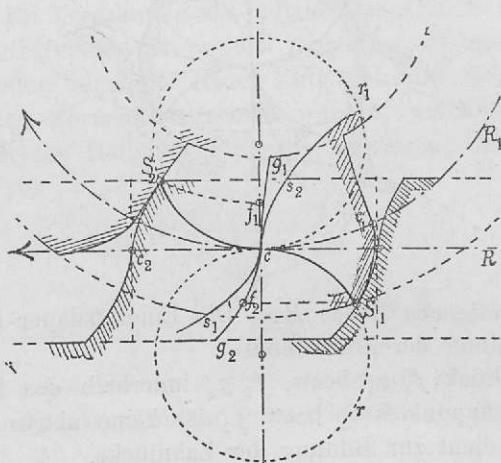


## 2. Innerer Eingriff (Fig. 111).

- $cs_1$  Zahnspitze von  $R_1$  ist eine Hypozykloide, Rollkreis  $= r_2 = r_1$ ,  
 $cf_1$  " fuss "  $R_1$  " " Epizykloide, " "  $= r_1 = r_2$ ,  
 $cs_2$  " spitze "  $R_2$  " " Epizykloide, " "  $= r_1 = r_2$ ,  
 $cf_2$  " fuss "  $R_2$  " " Hypozykloide, " "  $= r_2 = r_1$ .  
 Eingriff wie bei 1.

3. Zahnstange mit Getriebe ( $R_2 = \infty$ ) (Fig. 112).

Fig. 112.



Zahnstange

- $cs_1$  Zahnspitze von  $R_1$  ist eine Epizykloide, Rollkreis  $= r_2 = r_1$ ,  
 $cf_1$  " fuss "  $R_1$  " " Hypozykloide, " "  $= r_1 = r_2$ ,  
 $cs_2$  " spitze "  $R_2 = \infty$  ist eine gemeine Zyklide, " "  $= r_1 = r_2$ ,  
 $cf_2$  " fuss "  $R_2 = \infty$  " " " " " "  $= r_2 = r_1$ .  
 Eingriff wie bei 1.

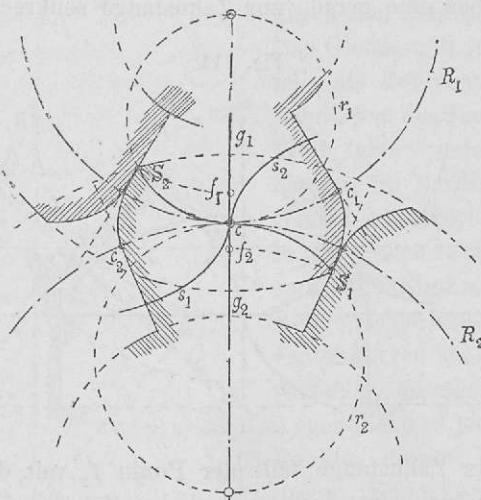
II. Die Zahnfüsse sollen gerade und radial werden. Der leitende Kreis ist stets der Radkreis. Die Eingriffslinie fällt mit dem Rollkreis (Erzeugungskreis) zusammen.

## 1. Äusserer Eingriff (Fig. 113).

- $cs_1$  Zahnspitze von  $R_1$  ist eine Epizykloide, Rollkreis  $r_2 = \frac{1}{2}R_2$ ,  
 $cf_1$  " fuss "  $R_1$  " " Hypozykloide, " "  $r_1 = \frac{1}{2}R_1$ ,  
 wird gerade und radial,

$c s_2$  Zahnspitze von  $R_2$  ist eine Epizykloide, Rollkreis  $r_1 = \frac{1}{2} R_1$ ,  
 $c f_2$  „ fuss „  $R_2$  „ „ Hypozykloide, „ „  $r_2 = \frac{1}{2} R_2$ ,  
wird gerade und radial.

Fig. 113.



Ganze benützte Eingriffslänge  $S_1 S_2$ , und zwar vor der Zentraallinie  $c S_1$  auf dem Kreise  $r_2 = \frac{1}{2} R_2$ , benützt von der Spitze  $c s_1$  des getriebenen Rades  $R_1$  und hinter der Zentraallinie  $c S_2$  auf dem Kreise  $r_1 = \frac{1}{2} R_1$ , benützt von der Spitze  $c s_2$  des treibenden Rades  $R_2$ . Die Eingriffsdauer ist  $c c_1$  vor und  $c c_2$  hinter der Zentraallinie. Das Stück  $f_1 g_1$  bzw.  $f_2 g_2$  unterhalb des letzten benützten Zahnpunktes  $f_1$  bzw.  $f_2$  ist keine aktive Zahnkurve mehr und dient nur zur Bildung der Zahnlücke.

## 2. Zahnstange mit Getriebe ( $R_2 = \infty$ ) (Fig. 114).

$c s_1$  Zahnspitze v.  $R_1$  ist eine Epizykloide, Rollkr.  $r_2 = \frac{1}{2} R_2 = \infty$ , wird daher eine Evolvente,

$c f_1$  Zahnfuss v.  $R_1$  ist eine Hypozykloide, Rollkreis  $r_1 = \frac{1}{2} R_1$ ,

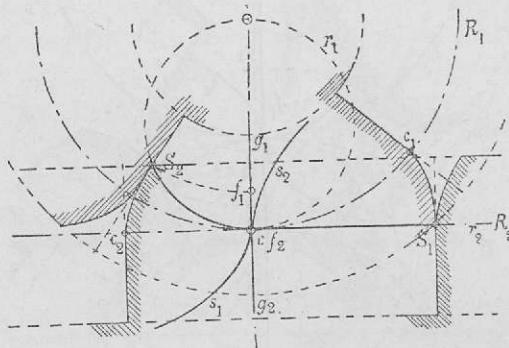
wird gerade und radial,

$c s_2$  Zahnspitze v.  $R_2$  ist eine gem. Zykloide, Rollkreis  $r_1 = \frac{1}{2} R_1$ ,

$c f_2$  Zahnfuss v.  $R_2$  ist eine Hypozykloide, Rollkr.  $r_2 = \frac{1}{2} R_2 = \infty$ ,

wird daher eine gerade zur Zahnstange senkrechte Linie.

Fig. 114.



An der Zahnstange fällt der Punkt  $f_2$  mit dem Punkt  $c$  zusammen; von dem ganzen radialen Zahnfuss ist nur der auf dem Radkreise liegende Punkt als *aktiver Zahnfuss* zu betrachten.

Eingriff wie bei 1.

### B. Die Eingriffslinie ist eine Gerade. Evolventenverzahnung.

Wenn als Eingriffslinie eine durch den Zentralpunkt  $C$  gehende und unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die Zentraallinie geneigte Gerade angenommen ist, so sind die entsprechenden Zahnkurven, wie sich aus der analytischen Behandlung der Aufgabe ergibt, Evolventen, deren Grundkreise  $O_1 C \sin \alpha$  bzw.  $O_2 C \sin \alpha$  sind.  $O_1 C$  und  $O_2 C$  sind die Abstände der Radmittelpunkte  $O_1$  und  $O_2$  vom Zentralpunkt. Ebenso ergibt sich umgekehrt unter Annahme von Zahnkurven, welche nach der Form von Evolventen gebildet sind, als die für beide gemeinsame Eingriffslinie eine durch den Zentralpunkt gehende

Gerade, und lässt sich dieses aus gewissen Eigenschaften der Evolvente ableiten.

Die Normale zur Evolvente in irgend einem Punkte derselben ist Tangente an den Evolutenkreis; also wird ein Punkt einer Evolvente dann an seinen Eingriffsort gelangen, wenn

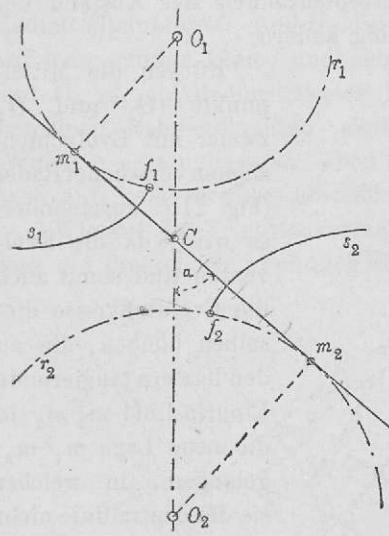
die zugehörige Normale, die Tangente zum Evolutenkreis, durch den Zentralpunkt geht. Das Gleiche gilt für die ebenfalls als Evolvente gebildete Zahnnkurve des anderen Rades. Weil aber jederzeit zwei Kurven im Berührungs punkt gemeinsame Normale haben, so lässt sich der Satz aussprechen: Sind zwei zusammengehörige Räder mit Evolventenkurven als Zahntformen versehen, so sind in jedem Augenblicke jene beiden Punkte dieser Kurven an ihrem Eingriffsorte, deren gemeinsame Normale gleichzeitig Tangente an beide Evolutenkreise ist.

Da dieser Satz für alle Punkte der als Evolventen gebildeten Zahnnkurven gilt, so kann derselbe auch so lauten: Der Eingriffsort für zwei mit Evolventen-Zahnnkurven versehene Räder ist die gemeinsame Tangente an die bez. Evolutenkreise. Diese Eingriffslinie oder Drucklinie durchschneidet die Zentra linie im Punkte  $C$  und teilt die Zentra linie im umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten und Umdrehungszahlen; also gilt

$$\frac{O_2 C}{O_1 C} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke  $O_1 C m_1 \sim O_2 C m_2$  folgt auch

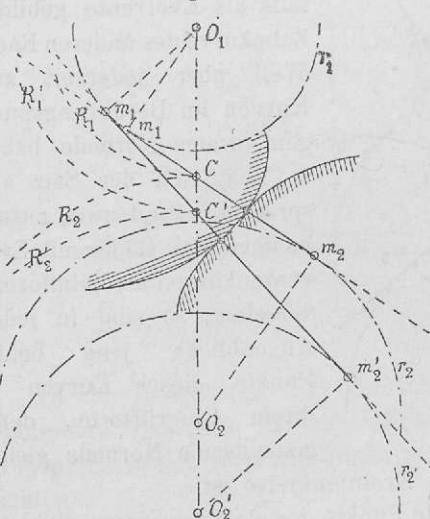
$$\frac{O_2 C}{O_1 C} = \frac{O_2 m_2}{O_1 m_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \dots \quad (106)$$



d. h. auch die Evolutenkreise verhalten sich umgekehrt wie die Winkelgeschwindigkeiten oder wie die Umdrehungszahlen; es herrscht deshalb auch in den Evolutenkreisen gleiche Umfangsgeschwindigkeit, und müssen sonach beide Räder gleiche Teilung auf dem Evolutenkreise haben.

Da alles Vorstehende für jede Entfernung der Radmittel  $O_1 O_2$  gilt, so kann bei Evolventenzähnen der Abstand der Axen zweier Räder sich beliebig ändern.

Fig. 116.



Rücken die Mittelpunkte  $O_1$  und  $O_2$  zweier mit Evolventenzähnen versehener Räder (Fig. 116) auseinander, so wird, da die Evolventen und somit auch die Evolutenkreise dieselben bleiben, die an den letztern tangierende Eingriffslinie  $m_1 m_2$  in die neue Lage  $m_1' m_2'$  gelangen, in welcher sie die Zentrallinie nicht mehr im Punkte  $C$ , sondern im Punkt  $C'$  durchschneidet. Durch den

Punkt  $C'$  wird aber die nunmehrige Entfernung der beiden Drehungssachsen  $O_1 O_2'$  wieder in dem gleichen Verhältnis geteilt, in welchem die Halbmesser der Evolutenkreise stehen, also auch wieder im umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten und Umdrehungszahlen, also muss wieder gelten :

$$\frac{O_2' C'}{O_1 C'} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{O_2 C}{O_1 C} \quad \dots \quad 107)$$

Es kann somit bei Rädern mit Evolventenzähnen von eigentlichen Radkreisen mit feststehenden Werten nicht die Rede sein, sondern sind als solche Radkreise je nach der wechselnden Entfernung der Radmittelpunkte jene Kreise zu verstehen, welche durch die jeweilige Lage des Zentralpunktes

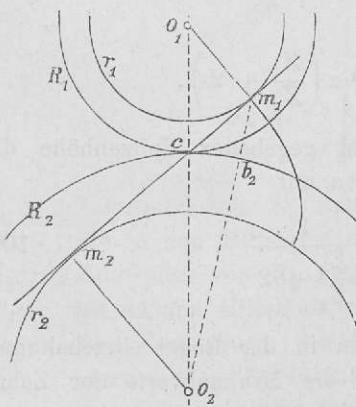
gehen. Für unwandelbar festgelagerte Radachsen bleibt daher auch der Zentralpunkt und der Halbmesser der Radkreise feststehend.

Die Regel zur Verzeichnung der Evolventen-Verzahnung lautet mithin: Durch den Zentralpunkt, der für eine gegebene Mittelpunktentfernung bekannt ist, zieht man eine Linie unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die Zentrallinie, fällt von den beiden Radmittelpunkten  $O_1$  und  $O_2$  die Senkrechten  $O_1 m_1$  und  $O_2 m_2$  auf jene schräge Linie, und betrachtet die Senkrechten  $O_1 m_1$  und  $O_2 m_2$  als Radien zweier Kreise, deren Abwicklung die gesuchten Zahnevolventen sind. Der theoretisch beliebige Winkel  $\alpha$  erhält passend einen Wert, der von  $75^\circ$  nicht viel nach auf- oder abwärts abweicht.

Wie bei der Triebstockverzahnung, so zeigt sich auch hier, dass die theoretisch unendlich lange Eingriffslinie für praktisch

ausführbare Zahnformen nur bis zu einer gewissen Grenze benutzt werden kann, und zwar bei äusserem Eingriff nur die Strecken zwischen dem Zentralpunkte  $c$  und den Berührungspunkten  $m_1$  und  $m_2$  mit den Evolventenkreisen; bei innerem Eingriff und bei dem Eingriff von Zahnstange und Getriebe findet richtiger Eingriff nur statt nach der einen Seite bis zum Punkte  $m_1$  des kleineren Rades, während

Fig. 117.



nach der anderen Seite der Zentrallinie der Eingriff auch für praktisch ausführbare Zahnformen beliebig weit fortgeführt werden könnte. Es folgt daraus ein Zusammenhang zwischen dem Halbmesser des kleineren von zwei zusammenarbeitenden Rädern, der Neigung der Drucklinie und der vorgeschriebenen Höhe der Zahnspitze über dem Teilkreise. Diese letztere darf nach dem Vorstehenden jedenfalls nicht grösser sein als  $b_2 m_1$  (Fig. 117), d. h. es muss, wenn dieselbe durch ein Vielfaches der Teilung  $= n t$  ausgedrückt wird,  $n t \geq b_2 m_1$  sein.

Es ist aber

$$\begin{aligned}
 b_2 m_1 - o_2 m_1 - o_2 b_2 &= \sqrt{o_2 c^2 + c m_1^2 + 2 o_2 c \cdot c m_1 \cos \alpha} - o_2 b_2, \\
 &= \sqrt{R_2^2 + R_1^2 \cos^2 \alpha + 2 R_1 R_2 \cos^2 \alpha} - R_2, \\
 &= R_2 \sqrt{1 + \cos^2 \alpha \left[ \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 + 2 \frac{R_1}{R_2} \right]} - R_2.
 \end{aligned}$$

Entwickelt man den Wurzelausdruck in eine Reihe, wobei man sich mit den beiden ersten Gliedern begnügt, und vereinfacht, so wird

$$b_2 m_1 = \frac{1}{2} R_1 \cos^2 \alpha \left( \frac{R_1}{R_2} + 2 \right).$$

Setzt man hierin

$$R_1 = \frac{Z_1 t}{2\pi} \text{ und } R_2 = \frac{Z_2 t}{2\pi},$$

so muss mithin gelten

$$n \cdot t \leq \frac{Z_1}{4\pi} t \cos^2 \alpha \left( \frac{Z_1}{Z_2} + 2 \right).$$

Hieraus wird endlich bei gegebener Spitzenhöhe die Minimal-Zahanzahl sich bestimmen mit

$$Z_1 > \frac{4\pi}{\cos^2 \alpha} n \frac{1}{Z_1 + 2} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (108)$$

So ergäben sich bei einem in der Regel eingehaltenen Werte  $n = 0,3$  und  $\alpha = 75^\circ$  die Minimalwerte der Zahenzahl  $Z_1$  für je das kleinere Rad

$$\text{für } \frac{Z_1}{Z_2} = 1,0 \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad -\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{4} \quad -1$$

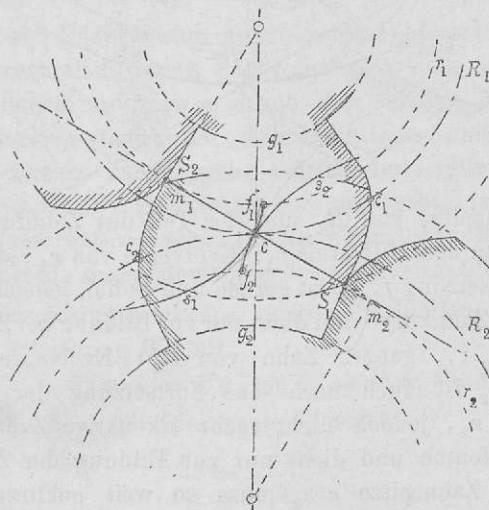
$$Z_1 \geq 19 \quad 20 \quad 22 \quad 25 \quad 28 \quad 32 \quad 37 \quad 15 \quad 56$$

Der Wert  $\frac{Z_1}{Z_2} = 0$  entspricht mit einer Zahnstange mit  $Z_2 = \infty$ , die positiven Werte dem äusseren Eingriffe, die negativen Werte von  $\frac{Z_1}{Z_2}$  dem inneren Eingriffe.

*Zusammenstellung der mit Evolventenkurven darzustellenden  
Verzahnungen.*

*1. Äusserer Eingriff* (Fig. 118).

Fig. 118.



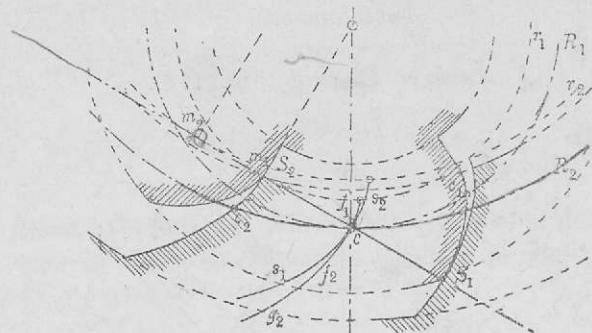
$cs_1$  ... Zahnspitze von  $R_1$  und der Teil des Zahnfusses  
 $cf_1$  ... bis an den Hilfskreis  $r_1$ : Evolvente von  $r_1$ ;  
 $cs_2$  ... Zahnspitze von  $R_2$  und der Teil des Zahnfusses  
 $cf_2$  ... bis an den Hilfskreis  $r_2$ : Evolvente von  $r_2$ ; die wei-  
tere Fortsetzung des Zahnfusses  $f_1 g_1$  bzw.  $f_2 g_2$   
innerhalb des Evolutenkreises ist gerade und radial, \*)  
jedoch keine aktive Zahnkurve und dient lediglich zur  
Bildung einer genügend tiefen Zahnlücke.

Der Eingriff geschieht von  $S_1$  bis  $S_2$ . Zahnspitze  $cs_1$  des getriebenen Rades benützt die Strecke  $S_1 c$  der Eingriffslinie vor, und Zahnspitze  $cs_2$  des treibenden Rades benützt die Strecke  $c S_2$  der Eingriffslinie hinter der Zentrallinie.

\*) In dieser und den beiden folgenden Figuren der Deutlichkeit halber weggelassen.

## 2. Innerer Eingriff (Fig. 119).

Fig. 119.

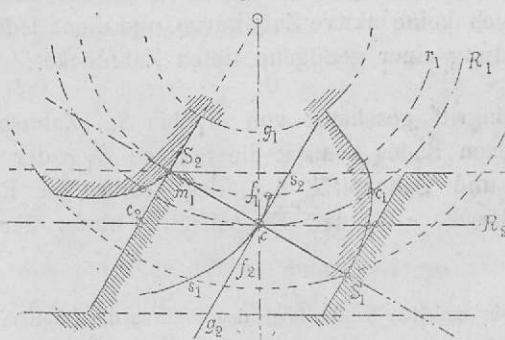


$cs_1$  ... Zahnspitze von  $R_1$  und der Teil des Zahnfusses  
 $cf_1$  ... bis an den Hilfskreis  $r_1$ : Evolvente von  $r_1$ ; die weitere  
 Fortsetzung  $f_1 g_1$  ist gerade und radial, jedoch keine ak-  
 tive Zahnkurve und dient nur zur Bildung der Zahnlücke,  
 $cs_2$  und  $cf_2$  ... ganzer Zahn von  $R_2$ : Evolvente von  $r_2$ ,  
 $f_2 g_2$  ist auch noch eine Fortsetzung der Evolvente  
 von  $r_2$ , jedoch nicht mehr als aktive Zahnkurve zu  
 betrachten und dient nur zur Bildung der Zahnlücke.  
 Die Zahnspitze  $cs_2$  muss so weit gekürzt werden,  
 dass ein Eingriff über den Punkt  $m_1$  hinaus nicht mehr  
 erfolgen kann, mithin durch einen durch  $m_1$  gehenden  
 konzentrischen Kreis.

Eingriff wie bei 1.

## 3. Zahnstange und Getriebe (Fig. 120).

Fig. 120.



$cs_1$  und  $cf_1 \dots$  und  $f_1 g_1$  wie sub 2,  
 $cs_2$  und  $cf_2 \dots$  ganzer Zahn von  $R_2$ : eine zur Eingriffslinie  
senkrechte Gerade;  $f_2 g_2$ , eine Fortsetzung der schrägen  
Linie  $s_2 f_2$ , dient zur Bildung der Zahnlücke und ist nicht  
als aktive Zahnkurve anzusehen. — Eingriff wie bei 1.

### § 25. Arbeitsverlust beim Räderbetrieb.

Die beim Räderbetrieb auftretenden Widerstände sind veranlasst vornehmlich durch Zahnreibung, welche in zweifacher Weise entsteht, und zwar durch das relative Schleifen der Radgrundformen längs der Zahnrichtungen und durch das Schleifen zweier Zahnkurven aufeinander. Die Ebene, in welcher die *letztere* Bewegung vor sich geht, ist die Ebene der Zahnkonstruktionskreise, mithin normal zur Momentanaxe, längs welcher die *erstere* Bewegung des relativen Schleifens erfolgt.

Die Geschwindigkeit des relativen Schleifens ist gegeben durch die Gleichung 88 mit (5.91)

$s_1 = s_2 = s = E \omega_2 \sin \delta_2 = E \omega_1 \sin \delta_1$ ,  
oder, wenn man nach Gleichung 87 setzt:

$$\frac{r_2}{r_1} = + \frac{\operatorname{tg} \delta_2}{\operatorname{tg} \delta_1},$$

durch

$$s = r_2 \omega_2 \cos \delta_2 (\operatorname{tg} \delta_2 \mp \operatorname{tg} \delta_1) = r_1 \omega_1 \cos \delta_1 (\operatorname{tg} \delta_2 \mp \operatorname{tg} \delta_1) \quad 109)$$

Bezeichnet nun

$P$  den Umfangsdruck am treibenden Rade in der Ebene des Parallelkreises  $R_1$ ,

$Q$  den Umfangsdruck am getriebenen Rade in der Ebene des Parallelkreises  $R_2$ ,

$N$  den Normaldruck zwischen den Radzähnen, in der Ebene der Zahnkonstruktionskreise, mithin senkrecht zur Momentanaxe,

so ist die Arbeitsgleichung

$$P \omega_1 R_1 = Q \omega_2 R_2 + N \mu s \dots \dots \dots \quad 110)$$

Den Normaldruck kann man unter Vernachlässigung der Reibung bestimmen durch

$$N = \frac{P}{\cos \psi_1} = \frac{Q}{\cos \psi_2} \dots \dots \dots \quad 111)$$

worin  $\psi_1$  und  $\psi_2$  die in § 20 Fig. 100 erklärte Bedeutung haben.

Mithin wird

$$P = Q \left\{ \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{R_2}{R_1} + \mu \frac{r_1}{R_1} \frac{\cos \delta_1}{\cos \psi_2} (\operatorname{tg} \delta_2 \mp \operatorname{tg} \delta_1) \right\} \quad \dots 112)$$

oder

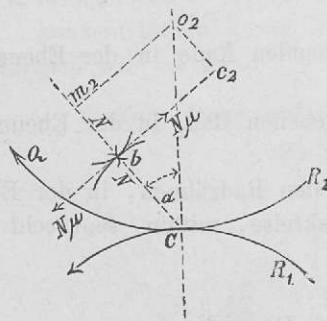
$$P = Q \left\{ 1 + \mu \frac{r_1}{R_1} \frac{\cos \delta_1}{\cos \psi_2} (\operatorname{tg} \delta_2 \mp \operatorname{tg} \delta_1) \right\}$$

Die zweite Art von Reibungswiderständen entsteht dadurch, dass je zwei zusammenarbeitende Zähne nicht in rein rollendem Kontakt sind sondern auch auf einander schleifen; eine Erscheinung, welche sich zunächst dadurch begründet, dass zwei zusammenarbeitende Zahnkurven nicht von gleicher Länge sind, und das Schleifen mithin durch eine Länge gleich der Differenz der bei einem vollständigen Eingriff benützten Bogenlängen der beiden Zahnkurven geschieht.

Dieser Widerstand entsteht durch den Normaldruck  $N$  zwischen den Zahnkurven, aus welchem sich eine Reibung  $N\mu$  und eine ihrer Überwindung entsprechende Arbeit  $N\mu v$  ergibt, wenn  $v$  die Geschwindigkeit der relativen gleitenden Bewegung der Zahnkurven aufeinander bezeichnet. Die Winkelgeschwindigkeit dieser relativen Bewegung ist gegeben durch \*)

$$\Omega = \omega_1 \mp \omega_2 = \omega_2 R_2 \left\{ \frac{1}{R_1} \mp \frac{1}{R_2} \right\}.$$

Fig. 121.



Ist (Fig. 121) in der Ebene einer Zahnkurve der momentane Konfliktpunkt bei  $b$  in der Entfernung  $cb = l_1$  von dem Momentanzentrum  $c$ , so ist die zur Überwindung des dem Normaldrucke  $N$  im Konfliktpunkte entsprechenden Reibungswiderstandes  $N\mu$  aufzuwendende Arbeit:

$$\mathfrak{A} = N\mu l_1 \Omega = N\mu \omega_2 R_2 \left( \frac{1}{R_1} \mp \frac{1}{R_2} \right) l_1 \quad \dots 113)$$

\*) Diese Gleichung wird erhalten, wenn man in Gleichung (§ 19 pag. 90)

$$\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 \mp 2 \omega_1 \omega_2 \cos \delta}$$

$\delta = 0$  setzt, indem man den ganzen Zahnreibungsorgang als in der Ebene des Zahnkonstruktionskreises geschehend annimmt.

Es ist somit die Gleichung für die produzierten und konsumierten Arbeitsgrößen

$$P \omega_1 r_1 = Q \omega_2 r_2 + N \mu \omega_2 R_2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) l_1.$$

Hieraus ergibt sich die auf den Umfang von  $R_1$  reduzierte, zur Überwindung der Zahnreibung benötigte Kraft

$$F = N \mu \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) l_1.$$

Der Normaldruck bestimmt sich für die auf das Rad  $R_2$  wirkenden Kräfte  $Q$ ,  $N$  und  $N \mu$  durch

$$Q \omega_2 r_2 - N(o_2 m_2) \omega_2 + N \mu (o_2 c_2) \omega_2 = 0,$$

woraus

$$N = \frac{Q}{\sin \alpha - \mu \left( \cos \alpha - \frac{l_1}{R_2} \right)},$$

und hieraus annähernd

$$N = \frac{Q}{\sin \alpha}.$$

Mithin wird

$$F = Q \mu \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{l_1}{\sin \alpha} \dots \dots \dots 114)$$

Diese zur Ueberwindung der Zahnreibung nötige, auf den Halbmesser  $R_1$  bezogene Kraft legt bei einer unendlich kleinen Drehung des Rades  $R_1$  den unendlich kleinen Weg  $ds_1 = R_1 d\varphi_1$  zurück, und ist der mittlere Wert derselben

$$F_m = \frac{\int F ds_1}{\int ds_1} = Q \mu \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\int \frac{l_1}{\sin \alpha} d\varphi_1}{\int d\varphi_1}.$$

Die Länge  $l_1$  ist variabel; sie wird, wenn  $\varphi_1 = 0$  (für den Moment der Berührung in der Zentraillinie) ebenfalls = 0, und wächst bis zum Ende des Eingriffs. Die Abhängigkeit zwischen  $l_1$  und  $\varphi_1$  ist bei den verschiedenen Verzahnungsarten verschieden.

Da es sich aber in praktischen Fällen nur um die Bestimmung eines durchschnittlichen Wertes des Zahnreibungs-

widerstandes, unabhängig von der speziell benützten Verzahnungsart handelt, so darf man

$$\frac{\int \frac{l_1}{\sin \alpha} d\varphi_1}{\int d\varphi_1} = \frac{p t}{2}$$

setzen, worin  $t$  die Teilung der Radkreise und  $p t$  die dem letzten benützten Punkte der Zahnspitze entsprechende Eingriffsdauer ist;  $\frac{1}{2} p t$  ist nämlich der mittlere Wert der Eingriffsdauer, deren Minimalwert für den Eingriff in der Zentrallinie mit  $p = 0$  ebenfalls  $= 0$  und deren Maximalwert  $= p t$  gesetzt wird.

Es ist mithin zu setzen für den mittleren Wert des auf den Umfang von  $R_1$  bezogenen Reibungswiderstandes

$$F_m = \frac{1}{2} Q \mu p t \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \dots \dots \dots \quad 115)$$

und die entsprechende Reibungsarbeit für eine Eingriffsdauer  $= p t$

$$A_r = F_m \cdot p t = \frac{1}{2} Q \mu \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (p t)^2 \dots \dots \quad 116)$$

Führt man statt der Halbmesser die Zahnzahlen ein, so erhält man aus Gleichg. 115

$$F_m = Q \mu p \pi \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) \dots \dots \dots \quad 117)$$

Jedenfalls zeigt es sich, dass die Zahnreibung mit zunehmender Rädergrösse und Zahnzahl geringer und auch bei innerem Eingriffe, bei welchem die oberen Vorzeichen gelten, günstiger wird als bei äusserem.

Denkt man sich ein Zahnpaar entlastet in dem Augenblick, wenn ein folgendes Paar in Konflikt kommt, so findet der die Reibung veranlassende Eingriff für jedes Zahnpaar nur durch eine Eingriffsdauer gleich einer Teilung statt, und ist dann zu setzen mit  $p = 1$

$$F_m = \frac{Q}{2} \mu t \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad \left. \begin{array}{l} \\ = Q \mu \pi \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad 118)$$

Die Annahme, dass je ein im Eingriff befindliches Zahnpaar entlastet wird, sobald das nächste Zahnpaar in Eingriff kommt, würde zu der Folgerung führen, dass durch mehrere stufenförmig gegenseitig versetzte Räder die Reibung auf ein beliebiges Mass reduziert werden könnte, indem dabei Entlastung je eines Zahnpaares schon nach  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  etc. einer Teilung eintreten würde, also  $p = \frac{1}{2}$  bzw.  $= \frac{1}{3}$  etc. gesetzt werden müsste.

Eine derartige vollkommene Entlastung findet aber nicht statt, und muss man annehmen, dass der Eingriff mit Druck, Reibung und Abnutzung jederzeit durch eine volle Teilung stattfinde, und sich auf die Zähne der einzelnen Stufen zu gleichen Teilen verteile.

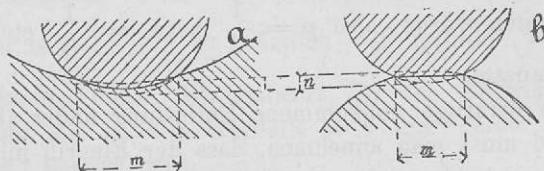
Da in diesen Formeln unter  $R_1$  bzw.  $R_2$  stets der Halbmesser der Zahnkonstruktionskreise gemeint ist, dieser aber bei konischen Rädern grösser als der Halbmesser des Kreisschnittes der Konusbasis ist, so folgt daraus, dass bei konischen (wie auch bei allen anderen nicht zylindrisch gestalteten) Rädern die aus dem Eingriffe zweier Zahnkurven hervorgehende Reibung kleiner ausfällt als bei zylindrischen Rädern. Bei allen jenen Rädern, bei welchen sich auch ein Reibungswiderstand in Folge des Schleifens längs der Zahnrichtungen ergibt, sind die beiden sich ergebenden Widerstände zu kombinieren, wenn nicht, wie bei den Schraubenrädern, der aus der Zahnkurvenreibung hervorgehende Widerstand gegen denjenigen des Schleifens längs der Zahnrichtungen so gering ist, dass er neben dem letzteren vernachlässigt werden kann.

Die Abnutzung (normal gemessen) ist direkt proportional dem *spezifischen* (Flächen-)Druck und der Geschwindigkeit, mit welcher zwei aufeinander schleifende und daher sich reibende Körper übereinander hinbewegt werden. Die normale Abnutzung wird mithin bei Zahnkurven der Reibungsarbeit direkt proportional gesetzt werden können, und würde dieselbe für jede Zahnstelle konstant bleiben, wenn der Zahndruck und die Geschwindigkeit der relativen Gleitenden Bewegung konstant

bliebe, was aber nach dem Vorhergehenden bei keiner Verzahnungsart vollkommen der Fall ist.

Der spezifische Druck zwischen den Zahnflächen ist von der Ausdehnung der Berührungsfläche abhängig. Diese Berührungsfläche erstreckt sich theoretisch allerdings nur über ein *Element* der Zahnkurven, ist aber tatsächlich von viel

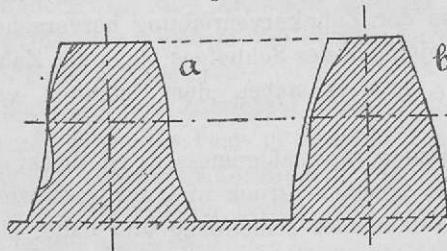
Fig. 122.



grösserer Ausdehnung; diese letztere selbst aber ist abhängig von der Krümmung der sich berührenden beiden Kurven, indem die sich tatsächlich ergebende Abplattung bei stark gekrümmten Kurven geringer ist als bei Kurven mit schwacher Krümmung, auch bei konvex-konkaver Berührung (Fig. 122 a) grösser wird als bei konvex-konvexer Berührung zweier Kurven (Fig. 122 b).

Deshalb fällt bei *Evolventenverzahnung* zunächst der gesamte normale Zahndruck  $N = \frac{Q}{\sin \alpha}$  wegen der Unveränderlichkeit des Winkels  $\alpha$  ebenfalls konstant aus; dagegen wird dieser Druck wegen der nach aussen immer schwächer werdenden

Fig. 123.



Krümmung dort über eine grössere Berührungsfläche verteilt als am Teilkreise, und daher der spezifische Druck geringer. In höherem Masse aber als dieser spezifische Druck abnimmt, nimmt die Geschwindigkeit der relativen Bewegung der Zähne

zu, und muss sonach bei Evolventenverzahnung gegen die Zahnspitze hin eine immer stärker werdende Abnützung sich herausstellen. (Fig. 123 b).

Bei Zykloidenverzahnung haben zunächst jene Punkte, welche auf den Teilkreisen liegen und in der Zentraillinie zum Eingriff gelangen, keinerlei relative Geschwindigkeit bei beiden Zähnen; dagegen nimmt diese relative Geschwindigkeit gegen die Zahnspitzen hin, d. h. je weiter der Eingriff sich von der Zentraillinie entfernt, immer mehr zu. Die Druckverteilung ist günstiger bei Zykloidenverzahnung, weil hier die Kurven sich konvex-konkav berühren. Die Abnützung, die sich herausstellt, wird etwa nach Fig. 123 a erfolgen, wird aber normal zur Zahnbegrenzung kleiner sein als bei Evolventenzähnen.

## V. KONSTRUKTIVE AUSFÜHRUNG DER ZAHNRÄDER.

### § 26. Bestimmung der Zahn-Abmessungen.

Man unterscheidet:

*Zahnbreite*: die Länge der Zahnberührung, senkrecht gemessen zum Zahnkonstruktionskreise,

*Zahnstärke*: die Dicke des Zahnkörpers, aufgetragen auf der Peripherie des Zahnkonstruktionskreises;

*Zahnhöhe*: die Höhe des Zahnkörpers, aufgetragen in der Richtung des Radius des Zahnkonstruktionskreises.

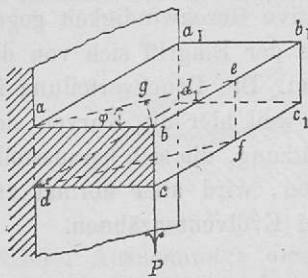
Der senkrecht zur Zahnmittellinie wirkende Druck (Teilrissdruck, Umfangskraft) zwischen den Zähnen zweier in einander eingreifender Räder wirkt daher auch in der Ebene der Zahnkonstruktionskreise. Die Bestimmung der Abmessungen der Zähne muss nach zweierlei Gesichtspunkten geschehen: nämlich mit Rücksicht auf die Festigkeit der Zähne gegen die einwirkende Inanspruchnahme auf Biegung und mit Rücksicht auf einen zulässigen Wert des spezifischen Druckes zwischen den sich berührenden Zahnflächen. Nimmt man in erster Hinsicht vorerst auf die möglichst nachteilige Inanspruchnahme eines Zahnes Bedacht, so wird diese dann eintreten, wenn der von einem Zahne auf den andern ausgeübte Druck

nur an einer äussersten Spitze des letzteren zur Einwirkung gelangt.

Man betrachtet dabei, mit Vernachlässigung der für jede Zahnkonstruktionsart in anderer Weise gebildeten krummlinig

begrenzten Zahnform, den Zahnquerschnitt als rechteckig und den Zahn somit als ein zur Ebene des Zahnquerschnittes senkrecht Prisma (Fig. 124)

Fig. 124.



von der Stärke  $a d = b c = \alpha$ ,

“ “ Höhe  $a b = d c = \gamma$ ,

“ “ Breite  $a a_1 = b b_1 = \beta$ ,

und nimmt den Zahndruck  $P$  normal zur Zahnhöhe  $ab$  wirkend an.

Ein auf die Ecke bei  $b$  ausgeübter Druck sucht diese Ecke nach der Fläche  $a e f d$  abzubrechen und ist, wenn  $b g$  senkrecht zu  $a e$  gezogen wird,  $P \cdot b g$  in der bekannten Gleichung:  $M = W R$  zu setzen als das biegende Moment  $M$  in bezug auf die eventuelle Bruchstelle, sowie

$$W = \frac{1}{6} a e \cdot \overline{a d^2}.$$

Es folgt somit wegen

$$b g = a b \cdot \sin \varphi,$$

und

$$a b = a e \cdot \cos \varphi,$$

$$M = P \cdot a e \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{1}{6} a e \cdot \overline{a d^2} \cdot k,$$

$$P \cdot \frac{\sin 2 \varphi}{2} = \frac{1}{6} \alpha^2 h. \quad \dots \quad 119)$$

Ein Maximalwert für  $\sin 2 \varphi$  und folglich auch für das biegende Moment ergibt sich bei  $\sin 2 \varphi = 1$ , d. h. bei  $\varphi = 45^\circ$ , und wird dann

$$\alpha = \sqrt{\frac{3 P}{k}}. \quad \dots \quad 120)$$

Denkt man sich hingegen zwei Zähne nach ihrer ganzen Zahnbreite sich berührend, so wird unter Voraussetzung eines

gleichförmig über die ganze Zahnbreite verteilten Druckes die nachteiligste Inanspruchnahme eintreten, wenn der Druck  $P$  normal gegen die Zahnhöhe  $a b$  und zwar auf die ganze äusserste Kante  $b b_1$  wirkt und den Zahn nach seiner ganzen Anhaftungsfläche  $a a_1 d d_1$  abzubrechen strebt. Die Festigkeitsgleichung heisst dann:

$$P \gamma = \frac{1}{6} \beta \alpha^2 k_1, \dots \dots \dots \quad (121)$$

woraus mit  $\gamma = 1,5 \alpha$

$$\alpha = 3 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sqrt{\frac{P}{k_1}}. \dots \dots \dots \quad (122)$$

Es ergibt sich hieraus das Verhältnis der Materialanstrengung unter den beiden Voraussetzungen (Abbrechen der Zahnecke oder der ganzen Zahnanhaftungsfläche)

$$k_1 = k \cdot 3 \frac{\alpha}{\beta}. \dots \dots \dots \quad (123)$$

In der Praxis bezeichnet man die Stärke der Zähne in der Regel durch die Teilung  $t$ , und zwar für den Eingriff von Rädern mit beiderseits Gusseisen-Zähnen bei  $\alpha = \frac{t}{2,1}$ , durch die Durchschnittsregel

$$\left. \begin{array}{l} t = 1,78 \sqrt{P} \\ \alpha = 0,85 \sqrt{P} \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (124)$$

woraus bei Vergleich mit Formel 120 und 122 sich ergiebt

$$\left. \begin{array}{l} k = 4,16, \\ \text{und} \quad k_1 = 4,16 \cdot 3 \cdot \frac{\alpha}{\beta} = 12,48 \frac{\alpha}{\beta} \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (125)$$

Diese Gleichung sagt, dass bei gleichmässig stattfindender Auflage die Anstrengung geringer, d. h. die Sicherheit grösser wird mit zunehmendem Breitenverhältnis  $\frac{\beta}{\alpha}$ , und dass für den Wert  $\frac{\beta}{\alpha} = 3$  die nach Gleichung 124 gerechneten Zähne gleiche Sicherheit bieten gegen das Abbrechen einer Zahnecke, wie auch der ganzen Anhaftungsfläche.

Es wird nun für

$\frac{\beta}{\alpha}$	2	2,5	3	4	5	6	7	8
$k_1$	6,24	4,99	4,16	3,12	2,50	2,08	1,78	1,56

Das Breitenverhältnis wird tatsächlich grösser angenommen mit zunehmenden Werten der Umdrehungsgeschwindigkeiten, und es muss auch ganz naturgemäss erscheinen, dass bei schneller laufenden Rädern mit Rücksicht insbesondere auf vorkommende Stösse und auf die im Laufe der Zeit durch Abnutzung entstehende Verschwächung der Sicherheitsgrad höher angenommen wird. Eine Begründung der Annahme grösserer Sicherheit für grössere Geschwindigkeit liegt auch in der bedeutenden Mehranstrengung, welche sich bei geringen, auch ganz minimalen, Fehlern in Teilung oder Zahnstärke bei grossen Geschwindigkeiten ergiebt. Ein solcher Fehler wird sich unter Voraussetzung gleichmässig bleibender Umfangsgeschwindigkeit des treibenden Rades zeitweise in einer Beschleunigung des getriebenen Rades und der gesamten getriebenen Masse äussern.

Diese Beschleunigung selbst ist eine in einer gewissen Zeit zu bewirkende Geschwindigkeitsänderung von  $v_1$  zu  $v_2$ ; die Zeit aber, innerhalb deren jene Geschwindigkeitsänderung eintreten muss, ist die Zeit  $T$ , welche dem Übergang des Eingriffs von einem Zahnpaar zum nächsten, also dem Durchlaufen einer Zahnteilung  $t$  entspricht, mithin ist zu setzen

$$T = \frac{t}{v_1} = \frac{2 R \pi}{Z \cdot v_1}, \dots \quad 126)$$

und ist die der gesamten getriebenen Masse zu erteilende Beschleunigung

$$b = \frac{v_2 - v_1}{T} = \frac{(v_2 - v_1) Z v_1}{2 R \pi} \dots \quad 127)$$

Mithin wird die zur Hervorbringung einer solchen Beschleunigung nötige Kraft, d. h. die Mehranstrengung eines Zahnes

$$B = \frac{G}{g} b = \frac{G}{g} \cdot v_1^2 \left( \frac{v_2}{v_1} - 1 \right) \frac{Z}{2 R \pi} \dots \quad 128)$$

Nimmt man zum Beispiel einen derartigen Fehler an, dass

$$\frac{v_2 - v_1}{v_1} = \frac{v_2}{v_1} - 1 = f, \text{ so wird}$$

$$B = \frac{G}{g} v_1^2 \cdot f \cdot \frac{Z}{2R\pi} = \frac{G}{g} \frac{v_1^2 f}{t} \quad \dots \quad (129)$$

Die Mehranstrengung des Zahnmaterials ist mithin dem Quadrate der Umfangsgeschwindigkeit proportional, und deshalb wohl zu rechtfertigen, dass man bei grösseren Geschwindigkeiten die Zähne mit grösserer Sicherheit berechnet.

Als Durchschnittswert kann angenommen werden:

$\frac{\beta}{\alpha} = 4$  für Maschinen mit langsamer Bewegung, insbesondere für alle von Hand aus bewegten Aufzüge, Bau-maschinen, Pressen etc. (Räder für *Krafttriebwerke*),

$\frac{\beta}{\alpha} = 6$  für schneller laufende Maschinen, insbesondere für alle Transmissionen und feineren Arbeitsmaschinen (Räder für *Arbeitstriebwerke*).\*

Sämtliche hienach berechneten Räder aber bieten gegen das Abbrechen einer Zahnecke gleiche Sicherheit ( $k = 4,16$ ); daher für Räder, welche ganz ausserordentlichen Stössen und Erschütterungen, der Einwirkung von bedeutenden lebendigen Kräften (etwa herrührend von in Bewegung befindlichen Schwungmassen, wie z. B. bei Walzwerken) ausgesetzt sind, zum Zwecke grösserer Sicherheit genommen werden kann:

$$t = 2,0 \text{ bis } 2,2 \sqrt{P}.$$

Endlich kann auch bei solchen Rädern, welche, wie es oft bei Lasten- und Schleusenaufzügen etc. der Fall ist, nicht

\*) Die von *Reuleaux* eingeführte Unterscheidung der beiden oben definierten Zahnräderarten in Krahnen- und Triebwerkräder glauben wir nicht länger festhalten zu sollen, zumal das Gebiet der *Krahne* ein viel zu eng begrenztes ist im Vergleich zu dem sonstigen Verwendungsgebiet der hieher gehörigen Räder; dann auch, weil die Zahnräder beider Arten zur Herstellung von Zahnrad-Triebwerken dienen. Besser zutreffend sind schon die von *Bach* angenommenen Bezeichnungen von Kraft- und Arbeitsräder; unter Annahme der beiden Werte *Kraft* und *Arbeit* und Vereinigung derselben mit der Bezeichnung eines *Triebwerkes* schien mir die obige Bezeichnung als die das Wesen der beiden Rädergattungen am erschöpfendsten darstellende.

in kontinuierlichem Betriebe stehen, oder nur ganz selten in Betrieb kommen, bei geringerer Sicherheit gegen Bruch und Abnützung der Wert von  $t$  kleiner genommen werden, bis zu

$$t = 1,2 \sqrt{P}.$$

Setzt man in Gleichung 121

$$\gamma = 1,5 \alpha \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{\gamma}{1,5},$$

so erhält man

$$P = \frac{k_1}{13,5} \beta \gamma = c \cdot \beta \gamma,$$

oder mit dem durchschnittlichen Werte  $\gamma = 0,7 t$

$$P = c \cdot 0,7 \cdot \beta t = c_1 \beta t. \quad \dots \quad 130)$$

Auf diese beiden Formeln zur Berechnung der Radzähne wird von verschiedenen Seiten grosses Gewicht gelegt, da dieselben angeblich gestatten, die Zähne mit Rücksicht auf Abnützung nach Massgabe eines gestatteten Flächendruckes zu berechnen. Dies ist wohl nicht zutreffend; denn zunächst sind jene Formeln nur einfache Ableitungen der Gleichungen für Biegungsfestigkeit der Zähne; sodann gestatten dieselben doch keinen eigentlichen Schluss auf die zulässige Beanspruchung der Zähne.  $\beta \gamma$  ist allerdings die Projektion der Zahnflanke und setzt man

$$c = m p$$

so lässt sich schreiben  $P = p \cdot m \beta \gamma \dots \dots \dots \quad 131)$

worin  $p$  der Flächendruck wäre, mit welchem sich  $P$  auf die ganze wirkliche Berührungsfläche  $m \cdot \beta \gamma$  verteilt. Der Wert von  $m$  kann aber nie bestimmt werden, ist eigentlich theoretisch unendlich klein, da die Berührung theoretisch nur nach einem Flächenelement stattfindet, dessen Länge gleich der Zahnbreite und dessen Breite nur ein unendlich kleines Bogen-element ist. Die tatsächliche Berührungsfläche erhält infolge der Komprimierbarkeit des Materials einen Wert  $> 0$ , jedoch wechselnd je nach der Erzeugungsart der Zahnkurven.

Immerhin kann man  $c$  durch eine aus Erfahrung geschöpfte Formel auszudrücken suchen, so dass diese Grösse und somit auch  $p$  mit zunehmender Abnützungsmöglichkeit, also bei wachsenden Umdrehungszahlen abnimmt, etwa nach der Formel

$$c = m p = 0,004 (50 - \sqrt{n}) \dots \dots \quad 132)$$

Hiermit wird z. B. für

$n =$	60	120	180	240	300	360	420
$c =$	0,169	0,156	0,146	0,138	0,131	0,124	0,118
$k_1 = 13,5 c =$	2,28	2,11	1,97	1,86	1,77	1,67	1,59
$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{12,48}{k_1} =$	5,47	5,91	6,34	6,71	7,05	7,48	7,85

Es finden sich auch tatsächlich in verschiedenen Ausführungen Räder für grössere Umdrehungszahlen mit grösseren Breitenverhältnissen als  $\frac{\beta}{\alpha} = 6$ . Derartige besonders breite

Räder werden sehr oft auch als Stufen- oder Pfeilräder ausgeführt. Bei anderen Materialien werden mit Rücksicht auf andere Werte der zulässigen Inanspruchnahme, auch die Zahnstärken andere Werte erhalten, und ist hierunter insbesondere zu berücksichtigen der Eingriff von *Gusseisenzähnen* des einen mit *Holzzähnen* des anderen Rades.

Bezeichnet

$\alpha_g$  die Zahnstärke eines Gusseisenzahnes,

$\alpha_h$  " " " Holzzahnes,

$\sigma$  den Spielraum in der Zahnlücke,

so drückt sich die Teilung aus beim Eingriff von Gusseisen und Gusseisen durch

$$t_{gg} = \alpha_g + \alpha_g + \sigma,$$

beim Eingriff von Gusseisen und Holz durch

$$t_{gh} = \alpha_g + \alpha_h + \sigma.$$

Der Spielraum, in der Regel  $= \sigma = 0,1 \alpha_g$ , kann unter Voraussetzung besonders guter Arbeit auch bis zu  $\sigma = 0,05 \alpha_g$  vermindert angenommen werden, so dass die Grenzwerte sind für

$$t_{gg} = 2,05 \alpha_g \text{ bis } 2,1 \alpha_g \dots \dots \quad (133)$$

Bei Gusseisen- und Holz-Eingriff kann  $\alpha_h$  wechseln zwischen  $\alpha_h = \alpha_g$  bis zu  $\alpha_h = 1,4 \alpha_g$ , am häufigsten zwischen 1,3 bis 1,4  $\alpha_g$ , so dass mit  $\sigma = 0,1 \alpha_g$ , die Teilung sich ausdrückt durch

$$t_{gh} = 2,4 \alpha_g \text{ bis } 2,5 \alpha_g \dots \dots \quad (134)$$

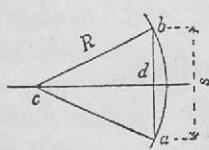
Die Zahnhöhe  $\gamma$  bleibt aber für beide Materialien dieselbe  $= 1,5 \alpha_g$ , desgleichen auch im Wesentlichen die Breite  $\beta$ ; hie und

da wird auch bei Eingriff von Gusseisen und Holz die Breite des Gusseisenzahnes um 5 bis 10 mm grösser gemacht, als die des Holzzahnes, damit bei nicht ganz genauer Aufstellung die Abnutzung sich dennoch über die ganze Breite des Holzzahnes gleichmässig ausdehne.

Die Annahme ( $\alpha_h = \alpha_g$ ) einer gleichbleibenden Stärke für Eisenzähne und Holzkämme gewährt für den Fabrikanten den Vorteil, ein und dasselbe Radmodell für Eingriff mit einem Rad mit Eisen- oder mit Holzzähnen benützen zu können. Der in diesem Falle etwas zu schwache Holzzahn wird dabei ausserdem als Sicherung für das andere Rad dienen, indem bei plötzlichen übermässigen Krafteinwirkungen sicher der hölzerne Kamm zu Bruch kommt.

Bei der praktischen Verzeichnung der Radzähne trägt

Fig. 125.



man mit dem Zirkel die Sehne  $s$  der auf dem Teilkreise aufzutragenden, als Bogen gedachten Teilung  $t$  auf; der Zusammenhang zwischen diesen beiden Längen ist gegeben mit Bezug auf Fig. 125 durch

$$\frac{1}{2} s = b \quad d = a \quad d = R \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{Z},$$

$$s = 2 R \sin \frac{\pi}{Z},$$

während oben gesetzt wurde  $t = \frac{2 R \pi}{Z}$ . Die beiden Formeln werden identisch, und  $s = t$ , wenn wir so geringe Zahnteilungsbogen  $\frac{2\pi}{Z}$  haben, dass wir statt des sinus den Bogen setzen dürfen, was allerdings erst bei Zahnzahlen über 20 gut eintreten kann.

Da der in Formel 124 S. 137 enthaltene Zahndruck nicht immer von vornherein bekannt ist, möge im Folgenden, unter Voraussetzung von Gusseisen als Material für die beiderseitigen Radzähne, die Teilung unter verschiedenen Annahmen bestimmt werden.

Ausgehend von jener Formel

$$t_{gg} = 1,78 \sqrt{P} \quad \text{und} \quad \alpha_g = 0,85 \sqrt{P} \quad \dots \quad 135 \text{ a})$$

setzt man zunächst  $P = \frac{M}{R}$  und  $M = 716200 \frac{N}{n}$  und erhält

$$t_{gg} = 1,78 \sqrt{\frac{M}{R}} \text{ und } \alpha_g = 0,85 \sqrt{\frac{M}{R}} \dots 135 \text{ b)}$$

$$t_{gg} = 1506 \sqrt{\frac{N}{nR}} \text{ und } \alpha_g = 717 \sqrt{\frac{N}{nR}} \dots 135 \text{ c)}$$

Setzt man hierin

$$\frac{2R\pi n}{60} = v$$

(wobei die Umfangsgeschwindigkeit  $v$  in Millimetern ausgedrückt ist), so erhält man

$$t_{gg} = 487,4 \sqrt{\frac{N}{v}} \text{ und } \alpha_g = 232 \sqrt{\frac{N}{v}} \dots 135 \text{ d)}$$

Ist  $V$  die Umfangsgeschwindigkeit in Metern ausgedrückt, so wird

$$t_{gg} = 15,41 \sqrt{\frac{N}{V}} \text{ und } \alpha_g = 7,34 \sqrt{\frac{N}{V}} \dots 135 \text{ e)}$$

Da es mitunter bequem ist, bei der Bestimmung der Radabmessungen von der Zahnzahl auszugehen, setzt man in Gleichg. 135 b u. 135 c  $R = \frac{Zt}{2\pi}$  und erhält

$$t_{gg} = 2,71 \sqrt[3]{\frac{M}{Z}} \text{ und } \alpha_g = 1,3 \sqrt[3]{\frac{M}{Z}} \dots 135 \text{ f)}$$

$$t_{gg} = 242,5 \sqrt[3]{\frac{N}{nZ}} \text{ und } \alpha_g = 115,5 \sqrt[3]{\frac{N}{n \cdot Z}} \dots 135 \text{ g)}$$

Eine weitere Formel endlich ist zu erhalten aus der Kombination von Gleichung 135 f mit der Gleichung für eine durch das gleiche drehende Moment in Anspruch genommene schmiedeiserne Torsionswelle, nämlich

$$d = 1,36 \sqrt[3]{M}$$

Es ergibt sich hieraus:

$$t = 2d \sqrt[3]{\frac{1}{Z}} \dots 135 \text{ h)}$$

Bei der Entscheidung, welche dieser 8 Formeln im speziell gegebenen Falle zu wählen ist, wird die anzuwendende Rädergattung und die Art des Betriebes massgebend sein.

Bei derjenigen Rädergattung, (den *Rädern für Krafttriebwerke*), für welche oben  $\frac{\beta}{\alpha}$  im Mittel = 4 angenommen wurde, werden Rücksichten auf Raum- und Kostenersparung Veranlassung sein, mit den Zahnzahlen auf ein möglichstes Minimum herabzugehen, und zwar dabei wegen der meistens sehr starken Übersetzungen die *Zahnzahl des kleineren* von zweien zusammenarbeitenden Rädern anzunehmen. Auf diese Weise erhalten die Räder allerdings auch ziemlich grobe Teilung; es wird infolge dessen die Eingriffsdauer sehr lange, die übertragene Umfangskraft, wenigstens bei zyklischen Verzahnungen periodisch wechselnd, und daher die Gangart unruhig, auch die Reibung wegen des längeren Eingriffes grösser; aber diese Nachteile sind für jene Rädergattung von geringerer Wichtigkeit als insbesondere eine gedrungene Anordnung.

Für die andere Klasse von Zahnrädern, (den *Rädern für Arbeits-Triebwerke*), bei welchen  $\frac{\beta}{\alpha}$  im Mittel = 6 angenommen wird, steht unter allen Rücksichten diejenige auf eine ruhige, gleichmässige Gangart obenan, und wird diese durch einen kurzen Eingriff und daher gleichmässig bleibenden Zahndruck zu erzielen sein. Ein kurzer Eingriff wird durch geringe Zahnhöhe, und diese durch eine feine Zahnteilung erlangt, und daher endlich, um letzteres zu erreichen, der Hebelarm  $R$  des Torsionsmomentes  $M$  in Formel 135 b und 135 c oder die Zahnzahl in Formel 135 f und 135 g möglichst gross genommen werden müssen. Damit werden allerdings diese Räder etwas grösser und dieselben auch mehr Zähne erhalten als die Räder für Krafttriebwerke, aber es wird zugleich sowohl durch den geringeren Zahndruck, als auch infolge des kürzer dauernden Eingriffes Reibung und Abnutzung geringer.

Ist aber die Entfernung  $E$  der beiden Axen gegeben, so sind damit bei gegebener Übersetzungszahl auch die beiden Radhalbesser gegeben, und können dieselben nicht mehr,

ebensowenig wie die Zahnzahlen, nach Belieben angenommen werden. Hier ist zu setzen:

$$E = R_1 + R_2 = R_1 \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) = R_1 \left( 1 + \frac{n_1}{n_2} \right) = R_1 (1 \mp i),$$

woraus

$$R_1 = \frac{E}{1 \mp i} \dots \dots \dots \quad R_2 = \mp \frac{Ei}{1 \mp i} \text{ *)} \dots \dots \dots \quad (136)$$

### § 27. Zylindrische Räder mit geraden Zahnmittellinien.

Hier gilt (§ 19 S. 93)

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2},$$

d. h. die Radhalbmeßzahlen stehen in umgekehrtem Verhältnisse zu den Umdrehungszahlen, und (§ 20 S. 101)

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = R_1 \\ r_2 = R_2 \end{array} \right\}$$

d. h. die Radkreise sind auch Zahnkonstruktionskreise.

#### a. Radgrößze und Zahanzahl.

Will man bei Rädern für *Arbeitstriebwerke* von dem Halbmesser derselben ausgehen, so kann man einen Anhaltspunkt finden in der Gleichung

$$R = (5 + i) d \dots \dots \dots \quad (137)$$

für das grösste von zwei zusammengehörigen Rädern, worin

$$d = 122 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$$

den Durchmesser der zu  $R$  gehörigen, d. h. der gleichen Leistung entsprechenden Welle und  $i$  das Übersetzungsverhältnis, d. h. das *Verhältnis der grösseren zur kleineren Umdrehungszahl* bedeutet.

\*) Das Verhältnis der Zahanzahlen  $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{i}$  muss natürlich stets ein echter Bruch sein, und daher eine als Dezimalbruch gegebene Übersetzungszahl  $\frac{1}{i}$  mit grösstmöglicher Annäherung in einen echten Bruch verwandelt werden.

Will man bei solchen Rädern von der Zahnzahl ausgehen, so kann für diejenige des grösseren Rades die Formel

$$Z = 60 + 22 i \dots \dots \dots \quad 138 \text{ a}$$

oder für diejenige des kleineren Rades die Formel

$$Z = 22 + \frac{60}{i} \dots \dots \dots \quad 138 \text{ b}$$

als Anhalt dienen, und zwar für Eingriff von *Eisen* in *Eisen*.

Bei *Rädern für Krafttriebwerke* kann die Zahnzahl des kleineren Rades bis auf die Zahl 8 herabgesetzt werden.

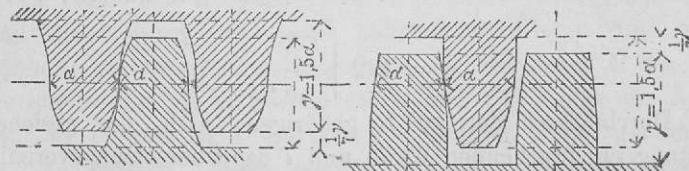
### b. Zahnkranz und Radkranz.

Da hier der Zahnkonstruktionskreis mit dem zur Axe senkrechten Kreisschnitt der zylindrischen Radform übereinstimmt, so liegen hier die Zahnquerschnitte in demselben Kreisschnitt, und die darauf senkrechte Zahnbreite  $\beta$ , mit der Länge der gemeinsamen Berührungsline übereinstimmend, wird nach der Zylinder-Erzeugenden aufgetragen. Die gesamte Zahnhöhe  $\gamma = 1,5 \alpha_g$  wird in der Regel

zu  $\frac{3}{7} \gamma = \text{ca. } 0,65 \alpha_g = \text{ca. } 0,3 t_{gg}$  über,

zu  $\frac{4}{7} \gamma = \text{ca. } 0,85 \alpha_g = \text{ca. } 0,4 t_{gg}$  unter dem Teilkreise aufgetragen.

Fig. 126.

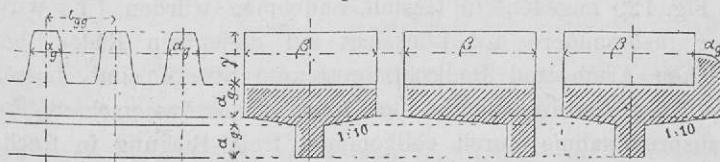


Diese gesamte Zahnhöhe wird auch beibehalten, wenn etwa bei Evolventenverzahnung die Zahnspitze des grösseren Rades eine Verkürzung erhält (Fig. 126), oder wenn zum Zwecke einfacherer Herstellung der Zahnform für Holzzähne nur der radiale Zahnfuss benutzt werden soll, wobei dieser auf eine Höhe von  $\frac{6}{7} \gamma$  hergestellt wird, während über dem

Teilkreise nur  $\frac{1}{7}$  γ von der entsprechenden Kurve vorhanden bleibt.

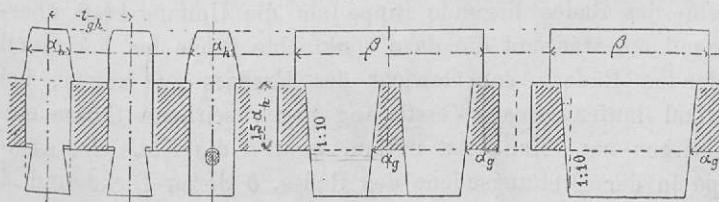
Die ganze Reihe von Zähnen ist durch den Radkranz zu einem steifen Ringe verbunden. Dieser ist für Eisenzähne mit denselben aus *einem* Stücke hergestellt, von einer Minimalstärke gleich der Zahnstärke  $\alpha_g$  (Fig. 127).

Fig. 127.



Bei Holzzähnen (Holzkämmen) (Fig. 128) erhält der Radkranz eine der Zahnzahl entsprechende Anzahl von Öffnungen zur Aufnahme der Zahnstiele. Die Holzzähne werden dann bis zur Breite von 180 mm bis 200 mm in *einem* Stücke, bei grösseren Breiten aus zwei oder mehreren Teilen hergestellt, die dann auch in entsprechend abgeteilte Stiellöcher eingesetzt werden. Die Auflage der Holzkämme auf dem Radkranz am

Fig. 128.



Ende der Zahnbreite beträgt manchmal nur 5 bis 10<sup>mm</sup>; bei geteilten Zähnen wird der Zwischensteg entweder bis auf die ganze Dicke des Radkranzes durchgeführt (Fig. 128), oder nur durch etwa  $\frac{3}{4}$  desselben. Die Befestigung der Zähne gegen den Radkranz geschieht entweder durch zwischen je 2 Zahnstiele eingesetzte Keile, welche dann zweckmäßig gegen die ersten durch eingeschlagene Drahtstifte festgehalten werden, oder mittelst durchgeschlagener (»auf den Anzug gesetzter«) Stifte.

c. *Radarme*

sind auf Biegung in Anspruch genommen; man darf jedenfalls dieselben alle als gleichzeitig tragend annehmen und zwar für die Berechnung der zunächst der Radnabe gelgenden Abmessungen so, als wenn sie sich aussen am Radkranze frei biegen könnten. Dies ist allerdings bei den mit dem Radkranze aus *einem* Stücke hergestellten Armen nicht genau der Fall, indem diese bei eintretender Biegung eher die in Fig. 129 angedeutete Gestalt annehmen würden. Es wird aber insbesondere mit Rücksicht auf diejenigen Räder, bei welchen Arme und Radkranz getrennte Stücke sind, besser sein, für die Innenstärke der Arme die etwas nachteiligere Inanspruchnahme durch vollkommen freie Biegung in Rechnung zu ziehen. Bei den in der Regel nach Fig. 130 geformten Armquerschnitten nimmt man nur die parallel zur

Fig. 129.

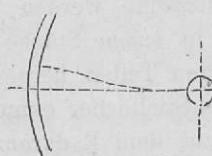
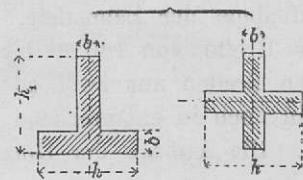


Fig. 130



Ebene des Rades liegende Rippe als die Umfangskraft übertragend an, während die dazu senkrechte Rippe bei horizontal laufenden Rädern das Gewicht des Kranzes zu tragen, bei vertikal laufenden als Versteifung gegen seitliche Stöße etc. zu wirken hat. Man setzt mithin, wenn  $h$  die Höhe der Armrippe in der Drehungsebene des Rades,  $b$  deren Dicke und  $A$  die Anzahl der Arme ist:

$$M_b = P R = \frac{1}{6} b h^2 \cdot k_1 A,$$

woraus mit den Durchschnittswerten

$$b = \frac{1}{5}h, \quad \frac{\beta}{\alpha} = 6 \quad \text{und} \quad k_1 = 2,0$$

sich ergiebt

$$h^3 = 15 \frac{M_b}{A} \dots \dots \dots \quad (139)$$

Berücksichtigt man, dass das auf die Arme einwirkende biegende Moment dem auf die Axe einwirkenden drehenden Moment gleichzusetzen ist, so giebt eine Vergleichung dieser Formel mit der früher erhaltenen (§ 9 S. 23) für eine ebenso stark beanspruchte schmiedeiserne Welle, nämlich mit

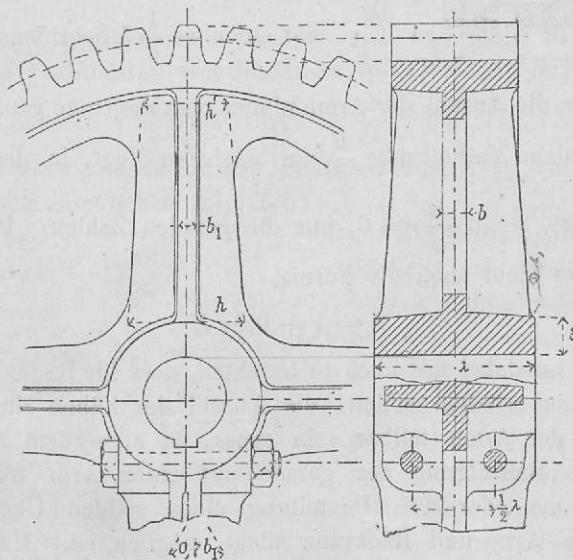
$$d^3 = \frac{32}{\pi k} M_d \text{ und mit } k = 4$$

die einfache Beziehung

$$\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{6}{A}} = 1,8 \sqrt[3]{\frac{1}{A}} \quad \dots \quad (140)$$

Diese so gerechnete Armstärke und Armhöhe, eigentlich gültig für die Radmitte, trägt man tangential zur Wellenhülse auf und verschwägt gegen den Radumfang auf  $h_1 = \frac{3}{4} h$ ,

Fig. 131.



lässt aber  $b$  konstant. Die sonach für das äussere Armende erhaltene Abmessung entspricht auch bei gleicher Materialanstrengung der Annahme, dass der Arm mit dem Kranze ein Stück und der Winkel der Armmittellinie mit dem Kranze auch nach der Biegung ein rechter sei, also der Annahme der Biegung des Armes als eines am freien Ende in seiner Richtung festgehaltenen Trägers (Fig. 129).

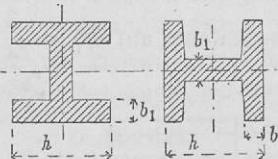
Die zur Hauptarmrippe senkrechte, in die Richtung der Radbreite fallende Rippe wird durchaus konstant

$$b_1 = \frac{1}{6} h$$

genommen. Es ist dabei nur zu berücksichtigen, dass behufs Erzielung einer harmonischen Konstruktion  $b_1$  nicht kleiner als  $\frac{3}{4} \alpha$ , daher  $b$  nicht kleiner als  $0,9 \alpha$  werden soll.

Für alle anderen Formen von Armquerschnitten, insbesondere den I-förmigen (Fig. 132), gilt die Regel, dass für

Fig. 132.



solche die Höhe  $h$  mit dem oben für rechteckigen Armquerschnitt bestimmten Masse beibehalten, die Armrippen aber ( $b$  sowohl wie  $b_1$ ) auf nur etwa  $\frac{1}{6} h$  gegriffen werden.

Für die Anzahl der Arme nimmt man diejenige ganze Zahl, welche dem Verhältnisse  $\frac{R}{d}$  am nächsten liegt, in der Regel allerdings, wenn  $\frac{R}{d} > 6$ , nur die geraden Zahlen. Passende Resultate giebt auch die Formel

$$\mathfrak{A} = 1 + 0,07 Z \dots \dots \dots \quad (141)$$

Es ist dabei nur noch zu beachten, dass für Räder, welche Holzzähne erhalten sollen, die Anzahl der Zähne durch die Anzahl der Arme teilbar sein muss, da außerdem eine genügende Befestigung der gerade auf einen Arm treffenden Holzkämme oder die Herstellung eines soliden Überganges zwischen Arm und Radkranz nicht möglich ist. Man lässt dabei entweder einen Holzzahn gerade auf die Nebenrippe des Armes treffen, welche in diesem Falle aussen geteilt werden muss (Fig. 133), oder man lässt die Nebenrippe direkt in den Steg zwischen zwei Stiellöchern übergehen (Fig. 134), wobei dann die mit der Hauptrippe des Armes in Kollision kommenden Zahnstiele hiefür ausgeschnitten werden müssen. Wird die Anzahl der Arme kleiner als 3, so wird man ein-

Fig. 133.

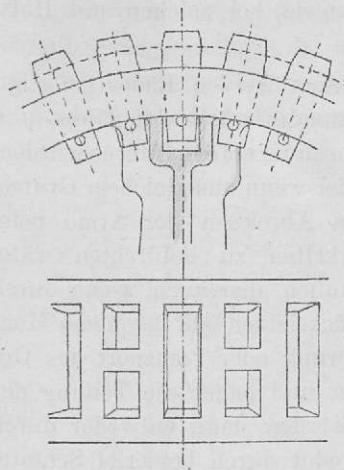
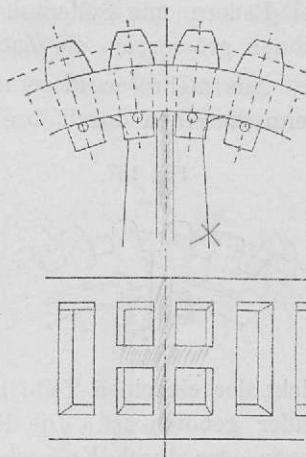


Fig. 134.



zelle Arme nicht mehr bilden können, und stellt in diesem Falle die Verbindung von Radkranz und Radnabe durch eine massive Scheibe von einer Dicke  $= \frac{1}{5} h$  her (Fig. 135), oder lässt bei ganz kleinen Rädern Radkranz und Nabe vollständig in einander übergehen (Fig. 136).

Fig. 135.

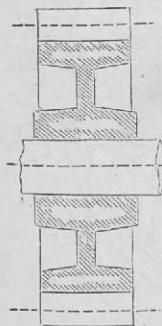
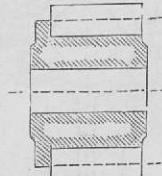


Fig. 136.



Die Seitenscheibe, die seitlich auf einer oder beiden Seiten die Zähne begrenzt und bis an den Teilkreis oder auch bis an die Zahnspitze reicht, dient zur Erhöhung der Festigkeit der Radzähne. Die Zahnbreite der mit Seitenscheibe versehenen Räder muss wegen des nötigen Spielraumes etwas grösser

als die des anderen eingreifenden Rades sein.

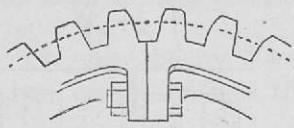
$$\left. \begin{array}{l} \text{Stärke der Radnabe} \dots \delta = 0,4(d + 10\text{mm}), \\ \text{Länge} \dots \lambda = \beta' + 0,06 R, \\ \text{Breite des Keiles} \dots k_1 = 0,7\delta = 0,28(d + 10\text{mm}), \\ \text{Dicke} \dots k_2 = 0,4\delta = 0,16(d + 10\text{mm}), \end{array} \right\} \dots 142$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Stärke der Radnabe} \dots \delta = 0,4(d + 10\text{mm}), \\ \text{Länge} \dots \lambda = \beta' + 0,06 R, \\ \text{Breite des Keiles} \dots k_1 = 0,7\delta = 0,28(d + 10\text{mm}), \\ \text{Dicke} \dots k_2 = 0,4\delta = 0,16(d + 10\text{mm}), \end{array} \right\} \dots 143$$

wobei unter  $\beta'$  die Breite des Radkranzes zu verstehen ist, welche bei Rädern mit Seitenscheibe, sowie bei solchen mit Holzzähnen grösser als die Zahnbreite ist.

Aus mehreren einzelnen Stücken werden Räder gefertigt, wenn dieselben durch ihre bedeutende Grösse den Giess- und

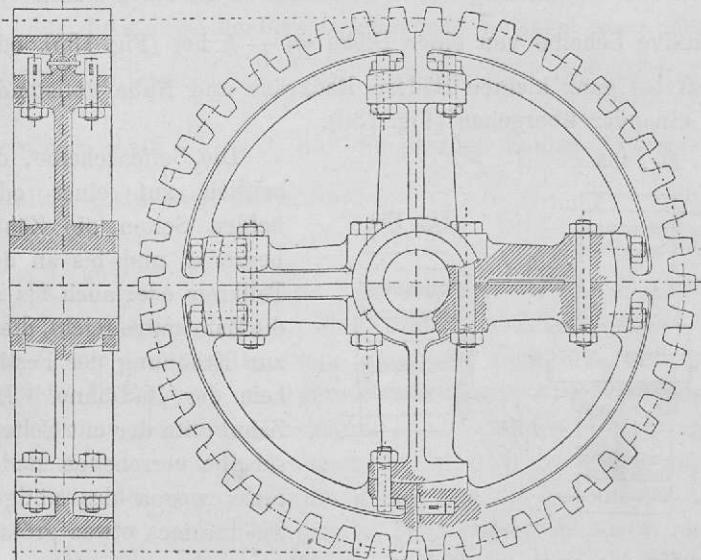
Fig. 137.



Formprozess erschweren würden, oder wenn aus gleichem Grunde ein Abreissen der Arme beim Erkalten zu befürchten wäre; endlich aber auch, wenn durch Rücksichten auf bequeme Montierung oder Transport das Ge-

wicht der einzelnen Teile begrenzt und daher die Teilung der Räder geboten ist. Die Räder werden dann entweder durch ebene oder durch Kreisschnitte, oder durch beiderlei Schnitte

Fig. 138.

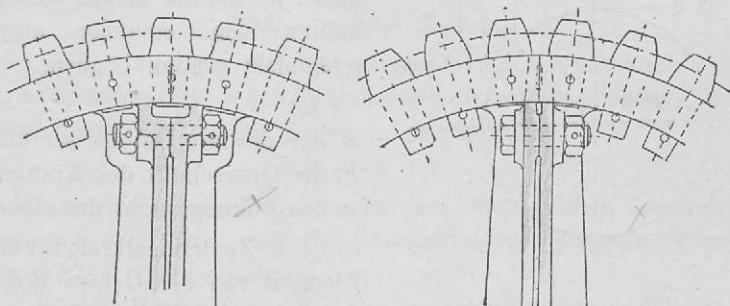


zugleich geteilt. Ebene radiale Schnitte teilen das Armsystem, wie auch den Radkranz in zwei oder mehrere Teile, nur muss bei letzterem die Fuge stets zwischen zwei Zähne fallen. Kreisschnitte trennen den Radkranz von dem Armsystem. Die

Stärke der Verbindungsschrauben am Radkranze wird  $0,7 \alpha$ , bis  $0,8 \alpha$ , genommen, je nachdem an einer Stelle 2 oder 4 Schrauben angebracht sind. (Fig. 138.)

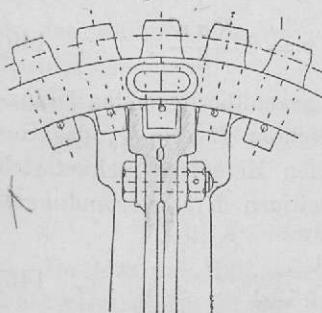
Bei Rädern mit Holzkämmen kann man die Teilung und Verbindung des Radkranzes nach Fig. 139 u. 140 durchführen,

Fig. 139.



wobei das Bestreben leiten kann, die Schrauben soweit als thunlich nach aussen an den Kranz zu setzen, auch wenn dies nur durch Abkürzen der Zahnstiele zu erreichen wäre.

Fig. 140.



Bei der Verbindung Fig. 140 ist die Schraubenverbindung sehr weit nach innen gerückt, so dass der Radkranz noch einer besonderen Befestigung bedarf, welche hier durch einen warm aufgezogene schmiedeisernen Ring (Schrumpfing) hergestellt werden kann.

Zur Verbindung einer gespaltenen Radnabe dienen, wie

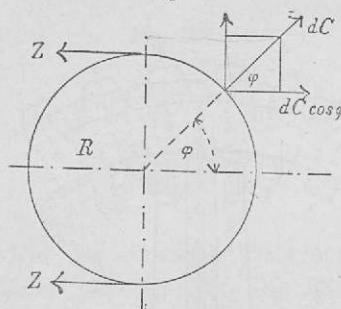
bei der Schalenkupplung, Schrauben (in der Regel 4 Stück zu  $0,6 \delta$  bis  $0,7 \delta$  Stärke) oder warm aufgezogene schmiedeiserne Ringe von  $0,4 \delta$  bis  $0,5 \delta$  Stärke, oder beiderlei zu gleicher Zeit (Fig. 138). Jedenfalls sollen die Schrauben so nah als möglich an die Axenbohrung herangesetzt werden, damit möglichst kurze, wenn auch dicke, Flanschen resultieren.

Bei Benützung eines Keiles wird derselbe auf die Fuge der Nabenteilung gesetzt, bei Benützung von 2 Keilen werden

dieselben unter gegenseitigem Winkel von  $90^\circ$  bis  $120^\circ$  symmetrisch zu beiden Seiten der Fuge angeordnet.

Die Verbindungsteile des Radkranzes sind, unabhängig von der gleichzeitig noch stattfindenden Verbindung der Arme

Fig. 141.



und Nabe, zu berechnen in bezug auf die Zentrifugalkraft, durch welche die beiden Kranzhälften von einander abschleudert werden können.

Ist

$R$  der mittlere Halbmesser und  $F$  der Querschnitt des Kranzes,  $\sigma$  das Volumengewicht desselben, so ist die Zentrifugalkraft für ein Element von der Grösse  $R d\varphi$

$$dC = \frac{FRd\varphi\sigma}{g} \cdot \frac{v^2}{R} = \frac{F\sigma v^2}{g} d\varphi \quad \dots \quad 144)$$

Die Komponente von  $dC$  senkrecht zur Kranzfuge ist  $= dC \cdot \cos \varphi$ , daher die gesamte senkrecht zur Kranzfuge wirkende Kraft, die Inanspruchnahme der Verbindungsteile,

$$2Z = \int \frac{F\sigma v^2}{g} \cos \varphi d\varphi = 2 \frac{F\sigma v^2}{g} \quad \dots \quad 145)$$

wovon auf jede der beiden diametral gegenüberliegenden Kranzverbindungen die Hälfte trifft; bezeichnet  $I\sigma = G_0$  das Gewicht des Kranzes auf den laufenden Meter, so rechnet sich die Anstrengung jeder der beiderseitigen Kranzverbindungen aus mit

$$Z = G_0 \frac{v^2}{g} \quad \dots \quad 146)$$

### § 28. Konische Räder mit geraden Zahnmittellinien.

Hier gilt (§ 19 S. 94)

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2},$$

d. h. die Halbmesser der Teilkreise oder der Grundflächen der theoretischen konischen Radgrundformen verhalten sich wie

die Umdrehungszahlen, und gilt für die Zahnkonstruktionskreise (§ 20 S. 102)

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{R_1}{\cos \delta_1}, \\ r_2 &= \frac{R_2}{\cos \delta_2}. \end{aligned} \right\}$$

#### a. Radgrösse und Zahnzahl.

Will man für die Berechnung von Kegelrädern für *Arbeitstriebwerke* von den Halbmessern derselben ausgehen, so kann man einen Anhalt finden in der Formel

$$R = (4 + i) d \quad \dots \quad 147)$$

wobei wieder  $d$  den Durchmesser der der gleichen Leistung entsprechenden Axe, und  $i$  das Übersetzungsverhältnis im Sinne von § 27 S. 145 bezeichnet.

Für die Bestimmung oder Annahme der Zahnzahlen können die Formeln benutzt werden

$$Z = 40 + 22 i \quad \dots \quad 148 \text{ a)}$$

für das grössere und

$$Z = 22 + \frac{40}{i} \quad \dots \quad 148 \text{ b)}$$

für das kleinere von zwei zusammenarbeitenden Rädern mit *Eisen-Eisen-Eingriff*.

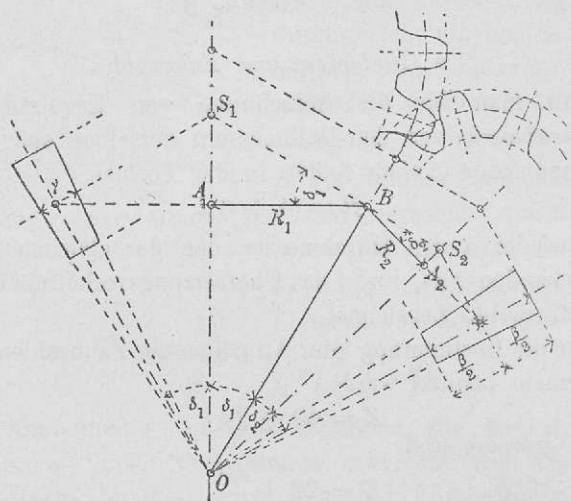
Bei Rädern für *Krafttriebwerke* kann auch wieder bis auf  $Z = 8$  die Zahnzahl des kleineren von zweien Rädern herabgesetzt werden.

#### b. Zahnkranz und Radkranz.

Da hier der Halbmesser ( $r_1$  bzw.  $r_2$ ) des Zahnkonstruktionskreises gleich ist der Seite eines Normalkegels  $BS_1$  bzw.  $BS_2$  (eines Kegels, dessen Erzeugende auf den Seiten des Kegels der Radgrundform senkrecht stehen), so sind die Zahnformen zu verzeichnen auf der Abwicklung dieses Normalkegels, und ist das Mass der Zahnbreite (die benützte Länge der gemeinsamen Berührungsline) auf den zu dem Zahnquerschnitte senkrechten Erzeugenden des Grundkegels aufzutragen. Damit erhalten die Radzähne die Form von Pyramiden, deren gemeinschaftliche Spitze im Durchschnittspunkte  $O$  der beiden

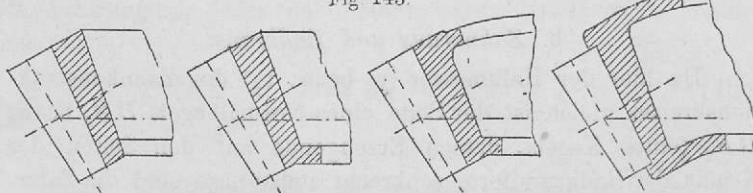
Rotationsachsen liegt, und deren zur Mittellinie senkrechte Querschnitte daher jederzeit die ähnlichen Figuren der Zahnform zeigen werden. Wegen der dadurch veranlassten Verjüngung der Zahnstärken trägt man mit Rücksicht auf genügende

Fig. 142.



Festigkeit die Zahnbreite  $\beta$  zur Hälfte nach innen und zur Hälfte nach aussen vom Teilkreise an auf. Die in der Konstruktionszeichnung einzutragenden Masse für Zahndimensionen und Halbmesser müssen sich jedoch auf das äusserste Ende der Zahnbreite beziehen, und sind daher aus den für die Mitte

Fig. 143.



der Zahnbreite geltenden Werten für  $\alpha$ ,  $\gamma$  und  $R$  zu berechnen. Die Zahnhöhe, wie auch die Radkranzdicke wird dem Vorhergehenden gemäss auf den Seiten des Normalkegels, die Zahnstärke auf der Peripherie der Basis des Haupt- und des Normalkegels aufgetragen. Da mithin alle in den Formeln 130 u. ff. berechneten und in Fig. 127 u. 128 verzeichneten Masse hier

nur für die Mitte der Zahnbreite günstig sind, so ergeben sich für konische Räder die Anordnungen von Fig. 143 u. 144.

Auch hier beträgt die Auflagebreite der Holzkämme auf dem eisernen Radkranz manchmal nur 5 bis 10 mm; bei ge-

Fig. 144.

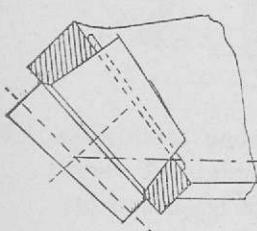
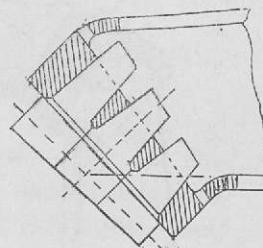
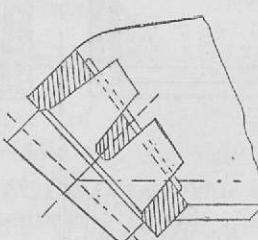


Fig. 145



teilten Zähnen wird der gusseiserne Zwischensteg entweder bis auf die ganze Dicke des Radkranzes oder (wie Fig. 145) nur bis auf etwa  $\frac{3}{4}$  derselben durchgeführt.

### c. Radarme.

Die Stärke und Anzahl der Arme bestimmt sich wie bei Stirnrädern; dieselben sind aber hier in der Regel von unsymmetrischer

Fig. 146.

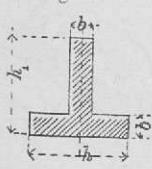
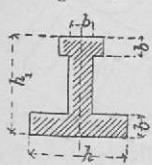


Fig. 147.



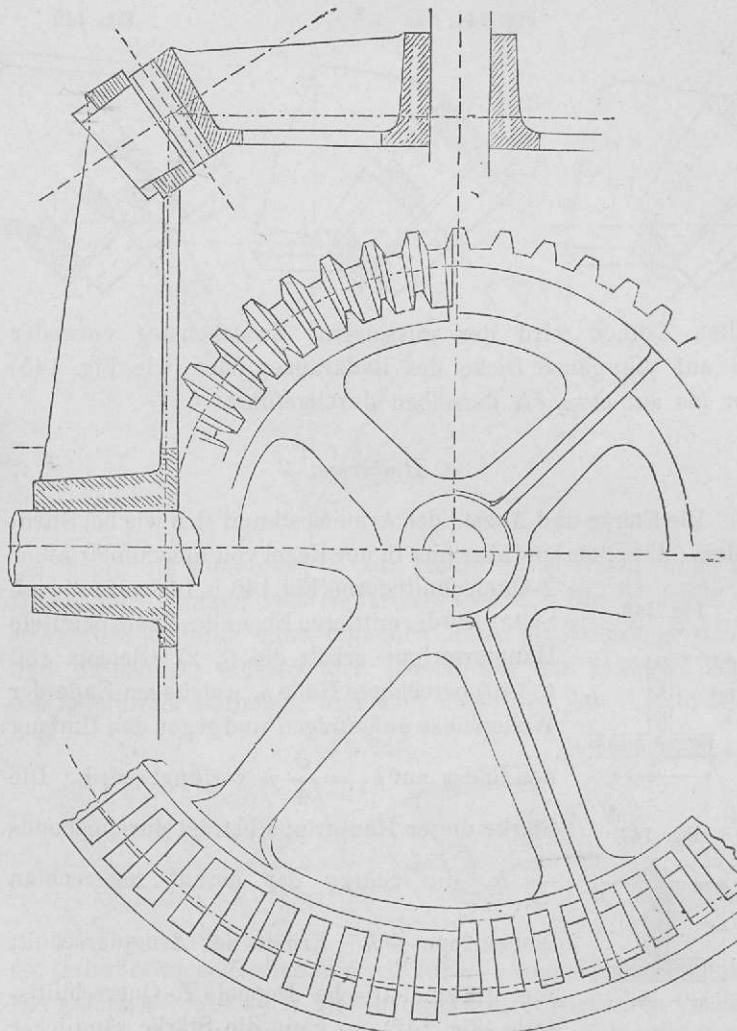
T-Querschnittsform (Fig. 146 u. 148 auf folgend. Seite). Die der mittleren Ebene des Rades parallele Hauptarmrippe erhält die (§ 27 Gleichg. 139 u. 140) berechnete Höhe  $h$ , welche am Ende der Wellenhülse aufgetragen und gegen den Umfang des Rades auf  $h_1 = \frac{3}{4} h$  verjüngt wird. Die

Stärke dieser Hauptrippe beträgt durchgehends  $\frac{1}{5} h$ , die Stärke der darauf senkrechten Nebenrippe  $\frac{1}{6} h$ . Erhält der Armquerschnitt die unsymmetrische Doppel-T-Querschnittsform (Fig. 147), so kann die Stärke sämtlicher

Rippen  $= \frac{1}{6} h$  genommen werden. Fällt bei den konischen Rädern die Armzahl gleich oder kleiner als 3 aus, so geht

das Armsystem in eine massive Scheibe über (Fig. 149 links). Auch kann in diesem Falle der Radkörper eine hohle (Kasten-) Form erhalten (Fig. 149 rechts); bei noch kleineren Dimen-

Fig. 148.



sionen wird das Rad als Blockrad (Fig. 150) ausgeführt, bei welchem Radkranz und Wellenhülse in einander übergehen. Räder von besonders grossen Dimensionen werden mehrteilig

Fig. 149.

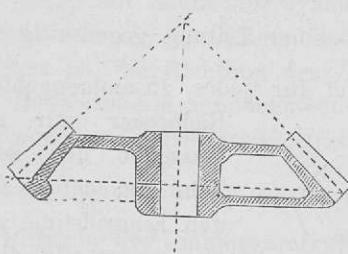
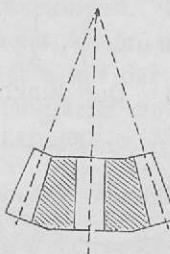


Fig. 150.



ausgeführt, und geschieht die Art der Verbindung der einzelnen Teile ähnlich wie bei Stirnrädern an ebenen oder konzentrischen Schnitten durch Flanschen und Schrauben. Bei-

Fig. 151.

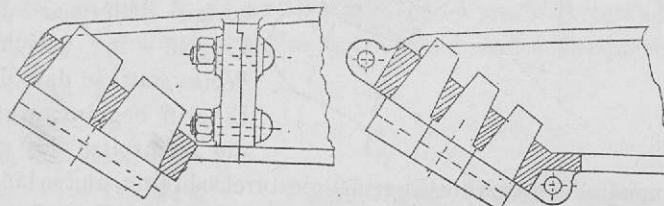
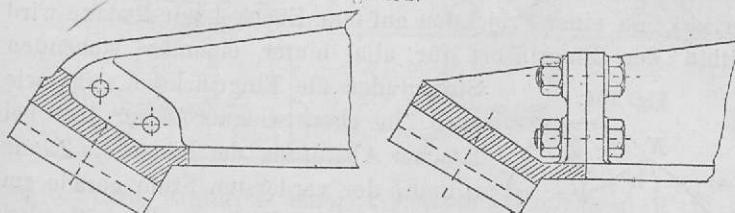


Fig. 152.



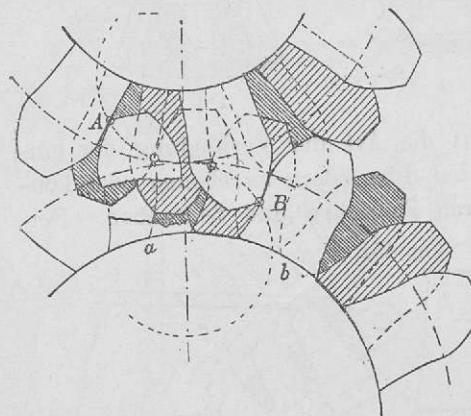
spiele von Verbindung der Teile konischer Räder am Radkranz oder an den Armen zeigen Fig. 151 u. 152.

### § 29. Zylindrische und konische Stufenräder.

Befestigt man auf einer Axe zwei genau gleiche Räder, deren Zahnstellungen gegenseitig um eine halbe Teilung versetzt sind, so werden diese Räder mit zwei anderen ebenso versetzten Rädern auf einer zweiten Axe derart zusammenarbeiten, dass der zu übertragende Umfangsdruck, oder das zu übertragende Drehmoment sich zu gleichen Teilen auf die

beiden Räder einer Axe verteilt. Das gleiche findet statt bei 3, 4 oder  $n$  auf einer Axe befestigten Rädern, deren Zahnstellungen um  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  oder  $\frac{1}{n}$  einer Teilung gegenseitig versetzt sind. Der Eingriff findet für jedes zusammengehörige

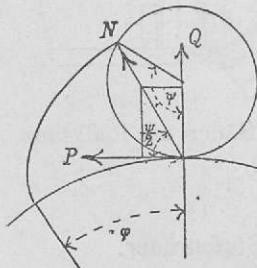
Fig. 153.



Räderpaar nur nach Massgabe der seiner Zahnform entsprechenden Eingriffslinie statt, und wenn alle die 3, 4 oder  $n$  Räderpaare mit derselben Zahnform versehen sind, so findet für jedes zusammengehörige Räderpaar der Eingriff in gleicher Weise statt, so dass der Eingriff beginnt, wenn die Zahnspitze des ge-

triebenen Rades durch die Eingriffslinie durchschreitet, und so lange dauert, bis die Zahnspitze des treibenden Rades die Eingriffslinie verlässt. In einer Projektion auf eine Ebene  $\perp$  zur Radaxe wird mithin der Eingriffsort für alle hinter einander stehenden

Fig. 154.



Stufenräder die Eingriffslinie sein, wie z. B. in obenstehender Figur 153 bei 3 facher Abstufung der Räder die Zähne  $a$  und  $b$  der vordersten Stufe gerade am Anfang und am Ende des Eingriffes bei  $A$  und  $B$  stehen, während die weiter rückwärts gelegenen Zähne der zweiten und dritten Stufe an zwischen liegenden Punkten der Eingriffslinie ihren Eingriffsort besitzen. Und wäre die Anzahl

der Stufen unendlich gross, immer würde auf der Eingriffslinie der vordersten Stufe auch der Eingriffsort jedes Zahnes der folgenden Stufen zu finden sein.

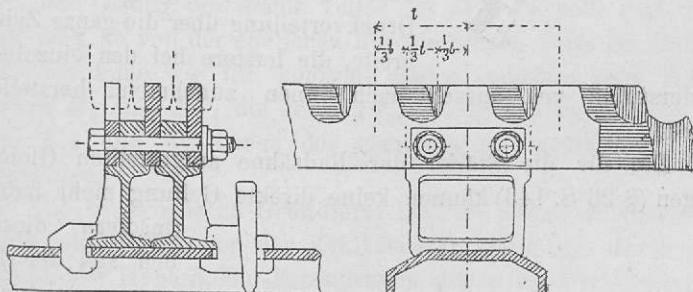
Durch die Annahme von mehreren Radscheiben mit stufenförmig versetzten Zähnen wird aber die Gleichförmigkeit des

Ganges wesentlich erhöht. Dies ist zunächst leicht zu zeigen mit bezug auf Zähne mit zyklischen Zahnkurven. Für solche stimmt nur in dem Augenblicke, wo der Zentralpunkt Eingriffsort ist, die Richtung des Zahndruckes mit der tangential zur Radperipherie anzunehmenden Umfangskraft überein, für alle anderen Eingriffsorte wirkt der Normaldruck  $N$  zwischen zwei Radzähnen unter einem wechselnden Winkel  $\frac{\psi}{2}$  gegen die Richtung der Umfangskraft  $P$  (Fig. 154), während gleichzeitig durch die in die Richtung der Zentrallinie fallende Kraft  $Q$  die Axen gegen ihre Lagerungen gepresst werden. Die Beziehungen

$$P = N \cos \frac{\psi}{2} \quad \text{und} \quad Q = N \sin \frac{\psi}{2}$$

zeigen sowohl  $N$  als auch  $Q$  und daher auch  $P$  veränderlich, so dass die Bewegung des getriebenen Rades durchaus nicht

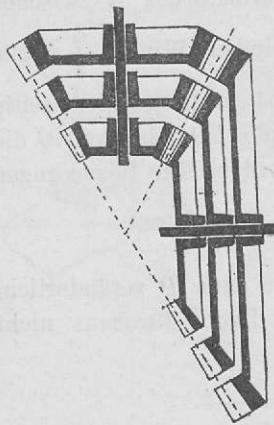
Fig. 155.



unter dem Einflusse einer konstanten Umfangskraft  $P$  geschieht, sondern selbst veränderlich ist, und zwar periodischen Schwankungen unterliegt. Diese Schwankungen werden vermindert, wenn man die gesamte Umfangskraft auf mehrere Räderstufen verteilt, wodurch der Gesamtwert der auf das getriebene Rad einwirkenden Umfangskraft ziemlich konstant erhalten wird, wenn auch die Verteilung derselben auf die Zähne der einzelnen Räderstufen periodisch wechselt. So hat beispielsweise die A b t'sche Schiene der Zahnradbahnen zwei bis drei versetzte Zahnstufen, und desgleichen besitzen die eingreifenden Zahnräder zwei bis drei versetzte Zahnkränze (Fig. 155).

Nach den gleichen Grundsätzen können auch zur Verbindung sich schneidender Axen Stufenräder mit konischer Grundform gebildet werden, indem man zunächst auf jeder Axe mehrere Räder befestigt und deren Zahnstellung gegenseitig versetzt (Fig. 156).

Fig. 156.

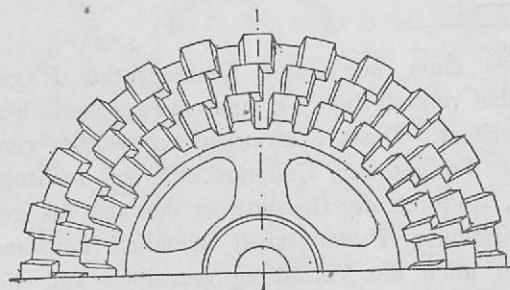


Räderstufen von aussen nach innen zunehmend herstellen würde.

Die für die Stärke der Radzähne aufgestellten Gleichungen (§ 26 S. 143) können keine direkte Geltung mehr haben

(insofern dieselben aus der Inanspruchnahme der Zähne auf Biegung abgeleitet sind), sobald die Stufenräder nicht mehr als getrennte Räder ausgeführt, sondern zu einem einzigen

Fig. 157.



Radkörper mit stufenförmig abgesetzten Zähnen vereinigt sind (Fig. 157). Es kann aber trotzdem eine Berechnung der Zahnstärke nach jenen Regeln erfolgen, weil letztere auch einen Schluss auf die Druckverteilung über die Zahnbreite

gestatteten, in bezug auf welche für Stufenräder ebenso wie für die später (§ 31) zu betrachtenden Schrauben- und Pfeilräder die Berechnung einzig und allein geschehen kann.

### § 30. Hyperbolische\*) Räder mit geraden Zahnmittellinien.

Die Ausführung solcher Räder, welche dem Vorhergehen- den gemäss ihre Anwendung finden, sobald die beiden zu verbindenden Axen sich in einer kürzesten Entfernung =  $E$  kreuzen, gliedert sich in 3 Hauptaufgaben:

1. Berechnung der hauptsächlichsten Rad- und Zahndimensionen,
2. Konstruktion der hyperbolischen Radgrundformen,
3. Verzeichnung der auf der Radgrundform anzubringenden Zähne.

Bei Lösung des ersten Teiles der Aufgabe sehe man vorerst ganz ab von der endlichen hyperbolischen Form der Räder, und bestimme wie für konische Räder zunächst zwei Halbmesser  $R_1'$  und  $R_2'$ , die Teilung  $t_1$ , die beiden Zahnzahlen  $Z_1$  und  $Z_2$ , und die Länge der gemeinsamen berührenden Erzeugenden.

Die hyperbolische Grundform ist, wie bekannt, bestimmt durch die Halbmesser der Kehlkreise ( $r_1$  und  $r_2$ ), durch die Winkel der Hyperboloid-Erzeugenden gegen die Drehungssachsen ( $\delta_1$  und  $\delta_2$ ) und durch die Länge  $l$  der als Radberührungs- linie betrachteten Erzeugenden der Hyperboloide, mithin durch die Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\cos(\delta_1 \pm \delta_2)}{\cos \delta_2}, & \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin(\delta_1 \pm \delta_2)} \dots \dots 149 \\ R_1 = \sqrt{r_1^2 + l^2 \sin^2 \delta_1}, & R_2 = \sqrt{r_2^2 + l^2 \sin^2 \delta_2} \dots 150 \end{cases}$$

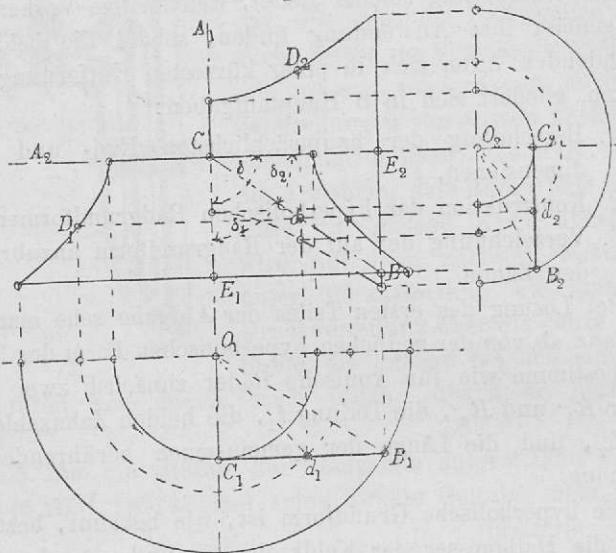
In der Regel ist dabei  $\delta = 90^\circ$ , d. h. die beiden Axen kreuzen sich rechtwinklig und gelten dann speziell die vereinfachten Gleichungen:

\*) Zur Vereinfachung im Folgenden statt der korrekteren Bezeichnung „hyperboloidische Räder“.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{r_2}{r_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{tg} \delta_2, \\ \frac{\omega_1}{\omega_2} = i = \operatorname{tg} \delta_2, \end{array} \right\} \frac{r_2}{r_1} = \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 = i^2, \dots \quad (151)$$

$$r_1 = \frac{E}{1+i^2}, \quad r_2 = \frac{Ei^2}{1+i^2} \dots \dots \dots 152)$$

Fig. 158.



Nachdem nun die Halbmesser  $R_1'$  und  $R_2'$  sowie die Länge

$$l = \sqrt{R_1'^2 + R_2'^2} *)$$

ohne Rücksicht auf die Entfernung  $E$  bestimmt sind, trägt man (Fig. 158)  $R_1' = E_1 B$  und  $R_2' = E_2 B$  bezw. senkrecht zu den Drehungssachsen  $A_1$  und  $A_2$  auf. Die Enden der Halbmesser treffen in  $B$  zusammen und  $BC$  ist die Länge der berührenden Erzeugenden für konische Räder; nun nimmt man, um den hyperbolischen Rädern ähnliche Größenverhältnisse wie den übrigen Rädern zu geben, diese Länge  $BC$  auch als

\*) Mit Rücksicht auf die Verjüngung der Zähne würde wohl richtiger wie bei den Kegelrädern die Zahnbreite  $\beta$  vom Teilkreise aus zur Hälfte nach innen und zur Hälfte nach aussen aufgetragen werden, und daher an Stelle von  $l$  in der folgenden Konstruktion zu nehmen sein  $l' = l + \frac{\beta}{2}$ .

Länge der Erzeugenden für diese hyperbolischen Räder an. Diese Erzeugende schliesst auch bei Kegelräder mit den Drehungsachsen  $A_1$  und  $A_2$  dieselben Winkel  $\delta_1 = (\delta \pm \delta_2)$  und  $\delta_2$  ein, welche die Erzeugende der beiden zu konstruierenden hyperbolischen Räder gegen die Axen einschliessen soll. Somit zeigt sich in  $CB = l$  auch die Hyperboloid-Erzeugende in wirklicher Lage und Länge. Es erscheint diese in die Grundrisse projiziert als  $C_1 B_1$  und  $C_2 B_2$ , und die Abstände  $O_1 B_1 = R_1$  und  $O_2 B_2 = R_2$  werden die Halbmesser der der Länge  $= l$  entsprechenden grössten Parallelkreise der beiden Grundhyperboloide sein.

Die beiden Hyperboloide vervollständigen sich nun, indem man eine Reihe von Parallelkreisen gezogen denkt. Man zieht hiezu im Aufriss eine Anzahl von Linien senkrecht zu den Axen, z. B.  $D_1 d$  und  $D_2 d$ , welche die Erzeugende in  $d$  schneiden (in den Grundrissen  $d_1$  und  $d_2$ ), und hat nun die Abstände  $O_1 d_1$  und  $O_2 d_2$  als Halbmesser der betreffenden Parallelkreise, d. h. im Aufriss  $D_1$  und  $D_2$  als Punkte der Meridiankurve an den entsprechenden Linien  $D_1 d$  und  $D_2 d$  aufzutragen.

Zur Lösung des dritten Teiles unserer Aufgabe bestimmt man vorerst aus den Zahnzahlen  $Z_1$  und  $Z_2$  sowie den Halbmessern  $R_1$  und  $R_2$ , die für beide Räder *nicht gleichen* Teilungen  $t_1 = \frac{2 R_1 \pi}{Z_1}$  und  $t_2 = \frac{2 R_2 \pi}{Z_2}$ , sodann konstruktiv oder durch Rechnung) mittelst der Winkel  $\psi_1$  und  $\psi_2$  die Halbmesser der Zahnkonstruktionskreise  $r_1$  und  $r_2$ , mit welchen die Verzahnung für die *beiderseits gleiche* Teilung  $t_0 = t_1 \cos \psi_1 = t_2 \cos \psi_2$  durchgeführt wird, und macht hiebei wie sonst

$$\alpha_0 = \frac{t_0}{2,1},$$

$$\gamma_0 = 1,5 \alpha_0,$$

$$\beta_0 = (4 \text{ bis } 6) \cdot \alpha_0.$$



Von hier an möge die weitere Konstruktion nur für das eine der beiden Räder gezeigt werden.

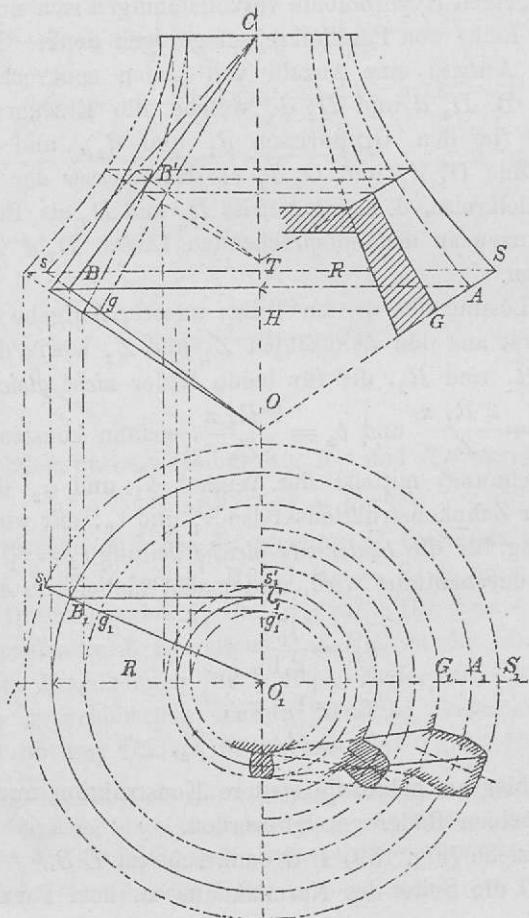
Man ziehe (Fig. 159)  $BO$  senkrecht zu  $CB$ , so ist  $AO$  die Seite des Normalkonus an dem Parallelkreise

$R = O_1 B_1$ . Auf  $A O$  trägt man die Zahnhöhe, und zwar  $A S = 0,3 t_0$  als Höhe der Zahnspitze über, und

$A G = 0,4 t_0$  als Tiefe des Zahngrundes unter dem Teilkreise auf. Es liegen nun sämtliche Zahnspitzen, sowie sämtliche Zahnwurzeln wieder auf Hyperboloiden, deren grösste Parallelkreise die Halbmesser  $S T$  bzw.  $G H$  im Aufriss,  $O_1 S_1$  und  $O_1 G_1$  im Grundriss haben. Auf der Seite  $O B$  des Normalkonus zeigen sich die Begrenzungen der Zahnspitze und des Zahngrundes bei  $s$  und  $g$  (Grundriss  $s_1$  und  $g_1$ ).

Die Geraden  $Cs$  und  $Cg$  (Grundriss  $s_1 s_1'$  und  $g_1 g_1'$ ) sind

Fig. 159.

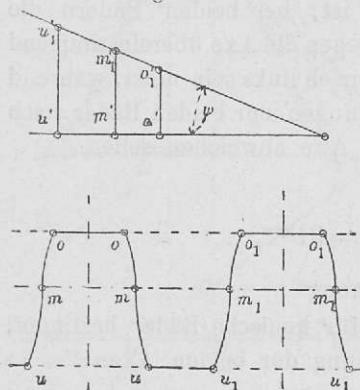


nun die Erzeugenden der Hyperboloide für Spitze und Grund der Zähne, und deren Kehlkreise  $O_1 s_1'$  und  $O_1 g_1'$ . Aus diesen Elementen lassen sich die zwei Hyperboloide für Zahnspitze und Zahnggrund ebenso wie das Teilkreishyperboloid vervollständigen.

Die Zahnbreite  $\beta_0$ , als benützte Länge der berührenden Erzeugenden  $CB$ , trägt man an derselben auf mit  $BB' = \beta$ , und wird nun die Begrenzung der Zähne ebenfalls durch einen hier an  $B'$  konstruierten Normalkonus ausgeführt.

Ist (Fig. 160)  $o m u u m o$  das für den Zahnkonstruktionskreis  $r$  erhaltene Zahnprofil mit den Dicken

Fig. 160.



$o o$  oben an der Zahnspitze,  
 $m m$  in der Mitte am Teilkreise,  
 $u u$  unten am Zahnggrund,  
so werden die auf dem Normal-  
konus sowie im Grundriss auf-  
zutragenden Zahnstärken  $o_1 o_1$ ,  
 $m_1 m_1$ ,  $u_1 u_1$  im Verhältnis  
 $\frac{1}{\cos \psi}$  stärker sein.

Diese Masse  $o_1 o_1$  etc. lassen  
sich auch graphisch bestimmen,  
wenn man zwei Linien unter  
einem Winkel  $\psi$  zieht, auf dem

horizontalen Schenkel des hiedurch gebildeten Winkels von  
der Winkel spitze aus

$$a o' = o o,$$

$$a m' = m m$$

$$\text{und } a u' = u u$$

aufträgt\*) und in den Punkten  $o'$ ,  $m'$ ,  $u'$  Senkrechte zieht,  
welche die schräge Linie in  $o_1'$ ,  $m_1'$ ,  $u_1'$  treffen. Dann ist

$$a o_1' = \frac{a o'}{\cos \psi} = o_1 o_1,$$

$$a m_1' = \frac{a m'}{\cos \psi} = m_1 m_1,$$

$$a u_1' = \frac{a u'}{\cos \psi} = u_1 u_1.$$

\*) Diese Konstruktion ist in dem oberen Teile von Fig. 160 in vergrößertem Masse durchgeführt. An der Winkel spitze der Figur fehlt der Buchstabe  $a$ .

Diese Stärken  $a o_1' = o_1 o_1$ ,  $a m_1' = m_1 m_1$  und  $a u_1' = u_1 u_1$  trägt man im Grundriss von Fig. 159 auf den durch  $S_1$ ,  $A_1$  und  $G_1$  gezogenen Kreisen auf, und zwar mit Annahme einer radialen Mittellinie, wodurch sich dann aus dem konstruierten Zahnprofil  $o_1 m_1 u_1 u_1 m_1 o_1$  das Zahnprofil im Grundriss ergibt. Zur Vervollständigung der Zähne zieht man nun die Kanten von den Zahnspitzen tangential zum Kehlkreis  $O_1 s_1'$ , diejenigen vom Zahngrund tangential zum Kehlkreis  $O_1 g_1'$ , für zwischenliegende Punkte tangential an zwischenliegende Kehlkreise. Ein Hauptaugenmerk ist auf die Richtung der Zähne zweier zusammenarbeitender hyperbolischer Räder zu richten, indem, wenn der Eingriff ein äusserer ist, bei beiden Rädern die Abweichung der Zahnmittellinien gegen die Axe übereinstimmend nach rechts oder übereinstimmend nach links sein muss, während bei innerem Eingriff die Zahnrichtungen der beiden Räder nach entgegengesetzten Seiten von der Axe abweichen sollen.

Beispiel. Es sei gegeben,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{3}, \quad E = 91 \text{ mm},$$

ferner sei durch vorläufige Rechnung

$Z_1 = 36$ ,  $Z_2 = 24$ ,  $l = 208$  wie für konische Räder bestimmt, so folgt bei rechtwinkliger Kreuzung der beiden Axen:

$$\frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$a_2 = 28 \text{ mm} \quad \dots \quad a_1 = 63 \text{ mm},$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{3} = 0,666,$$

$$\delta_2 = \dots \quad 33^\circ 41' 24'',$$

$$R_2 = \sqrt{a_2^2 + l^2 \sin^2 \delta_2} = 118,7 \text{ mm},$$

$$t_2 = \frac{2R_2 \pi}{Z_2} = \dots \quad 31,09 \text{ mm},$$

$$\rho_2 = \dots \quad 141,5 \text{ mm},$$

$$\psi_2 = \dots \quad 7^\circ 30' 33'',$$

$$t_0 = t_1 \cos \psi_1 = t_2 \cos \psi_2 = 30,8 \text{ mm}.$$

$$\delta_1 = \dots \quad 56^\circ 18' 36'',$$

$$R_1 = \sqrt{a_1^2 + l^2 \sin^2 \delta_1} = 184,2 \text{ mm},$$

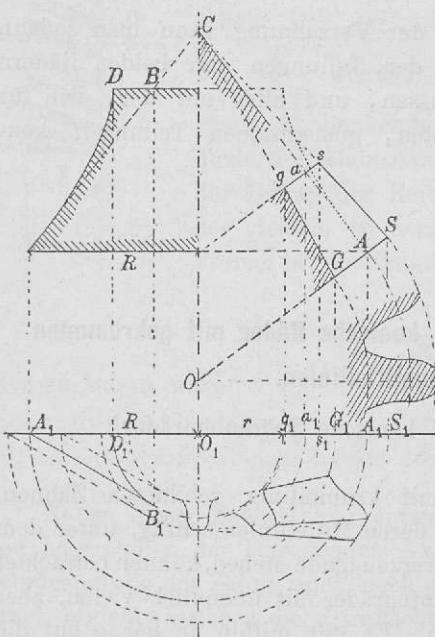
$$t_1 = \frac{2R_1 \pi}{Z_1} = \dots \quad 32,15 \text{ mm},$$

$$\rho_1 = \dots \quad 318,4 \text{ mm},$$

$$\psi_1 = \dots \quad 16^\circ 23' 36'',$$

Für die in der Praxis vorkommenden Fälle kann man sich auch einer vereinfachten, aber immer noch genügend genauen Konstruktionsmethode bedienen, welche darauf beruht, dass die für die Zahnberührung benützte Länge  $= \beta$  der Hyperboloiderzeugenden in Vergleich zur ganzen Länge derselben verhältnismässig klein ist, so dass man auch statt der hyperbolischen Radform eine konische substituieren kann. Als solche

Fig. 161.



Durchschnittspunkte  $C$  (Aufriss) verlängert. Dieser Punkt  $C$  kann dann als Spitze eines Kegels betrachtet werden, welcher auf die verhältnismässig kurze Strecke  $\beta$  mit dem Hyperboloide tangierend zusammenfällt.

Die ganze übrige Verzeichnung des hyperbolischen Rades erfolgt nun für diesen Tangentenkonus, wie früher bei den konischen Rädern. Man zieht  $AO$  als Seite des Normalkonus, betrachtet diese als Halbmesser des Zahnkonstruktionskreises, und trägt auf  $AO$  die Länge  $AS = 0,3 t$  als Zahnspitze,

$A \cdot G = 0,4 \cdot t$  als Zahnfuss,

sowie auf  $A C$  die Länge  $A a = 3$  als Zahnbreite auf, wo-

nimmt man den an das Hyperboloid am grössten Parallelkreis vom Halbmesser  $R_1$  bzw.  $R_2$  konstruierten

Tangentenkonus, welcher sich auf folgende Weise bestimmen lässt. Es sei (Fig. 161)  $O_1 A_1 = R$  (Grundriss) der Halbmesser des grössten Parallelkreises,  $O_1 D_1 = r$  der Halbmesser des Kehlkreises für das Hyperboloid, so ist  $A B$  im Aufriss ( $A_1 B_1$  im Grundriss) die dem äussersten Punkte  $A$  entsprechende Erzeugende, welche man bis zum

durch sich auch die Abmessungen für das innere Zahnprofil ergeben, nämlich

$a s$  als Zahnspitze,

$a g$  als Zahnfuss und die Kreise  $O_1 s_1$  und  $O_1 g_1$ .

Durch die Parallelen zu  $A_1 B_1$  ergeben sich die Kehlkreise, an welche tangierend die Kanten der Zahnspitzen und Zahnfüsse gezogen werden.

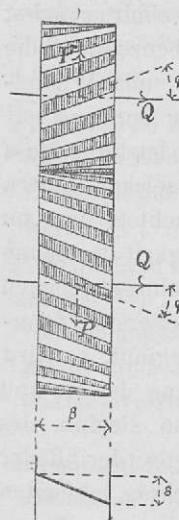
Bei der Konstruktion der Verzahnung kann man sodann auch die Verschiedenheit der Teilungen von beiden Rädern ausser Berücksichtigung lassen, und alles mit der, wie für konische Räder bestimmten, gemeinsamen Teilung  $t$  konstruieren.

### § 31. Zylindrische und konische Räder mit gekrümmten Zahnmittellinien.

(Zylindrische und konische Schraubenräder.)

Zylindrische Räder mit krummlinig gebildeten Zähnen, deren Axen parallel, und deren Mittellinien schräg, unter dem Winkel  $\varphi$  gegen die Zylindererzeugende stehen, können betrachtet werden als zylindrische Stufenräder mit unendlich vielen, aber unendlich schmalen Stufen. Es gilt mithin in bezug auf die Festigkeit und den Eingriff der Zähne alles dort Gesagte. Der geometrische Ort des über die ganze beliebig grosse Zahnbreite verteilten Eingriffs ist eine Normalzylinderfläche, deren Basis die für einen beliebigen senkrecht zur Radaxe geführten Rad schnitt geltende Eingriffslinie ist, und deren Erzeugende parallel zu den Radaxen und zu den den Radaxen parallelen Erzeugenden der zylindrischen Räder gerichtet sind. Der Eingriff kann sonach nach Massgabe der Höhe der Zahnspitze gleichzeitig über die ganze Radbreite statthaben, für jeden Normalschnitt der Räder aber an einer andern Stelle der Eingriffslinie. Die Ruhe des Ganges, welche zum Teil schon durch

Fig. 162.



stufenförmige Gestaltung der Radzähne erreicht wird, wird durch schraubenförmige Bildung derselben noch mehr erhöht, während jedoch andererseits durch diese Schrägstellung der Zähne auch die Reibung vermehrt wird. Ist (Fig. 162) die Schrägstellung der Zähne durch den Winkel  $\varphi$  gegeben, welchen deren Mittellinie mit den Axenrichtungen einschliesst, so erhöht sich der normale Zahndruck von  $P$  auf  $\frac{P}{\cos \varphi}$ , wenn  $P$  die in der mittleren Radebene zu denkende auf den Radumfang reduzierte Umfangskraft bezeichnet. Dabei bleibt der Betrag der Reibung an den Zahnkurven der gleiche, so dass an Stelle der bekannten Formel für die Zahnreibung (Gleich. 118 S. 132)

$$F = \pi \mu \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) P$$

hier zu setzen wäre

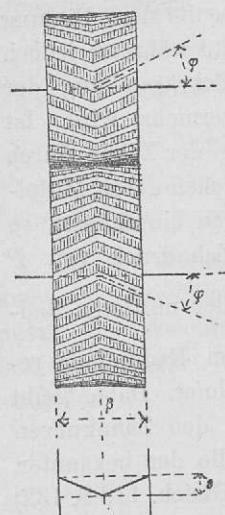
$$F = \pi \mu \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) \frac{P}{\cos \varphi}. \quad \dots \quad 153)$$

Neben dieser Zahnreibung entsteht noch eine Reibung an den Lagerstellen der betreffenden Axen, indem sich aus der Schrägstellung der Zähne auch noch ein axialwirkender Seitendruck ergibt, welcher die Stirnflächen der Axzapfen und die Bunde der Lagerhälse gegen ihre Lager presst.

Es möge aber besonders betont werden, dass nach vorstehender Darstellung über den Verlauf des Zahneingriffes kein Grund gesehen werden kann, die Zahnformen in den Normalschnitten der zylindrischen Schraubenräder anders als nach den üblichen Verzahnungsarten gewöhnlicher Stirnräder zu bilden.

Der schädliche axiale Seitendruck lässt sich vermeiden, wenn man die schrägstehenden Zahnmittellinien in der Mitte der Radbreite bricht, und sonach von hier die Zähne nach beiden Seiten symmetrisch schräge verlaufen lässt. (Fig. 163).

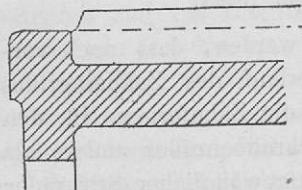
Fig. 163.



Die Projektion der Zahnmittellinie auf die Ebene des normalen Radschnittes heisst der *Sprung s* der Schraubenzähne, die Räder selbst heissen Räder mit Winkelzähnen oder *Pfeilräder*. Der Sprung *s* soll zwischen  $\frac{3}{4} t$  bis  $t$  betragen, letzteres Mass aber nicht überschreiten. Bei solchen Rädern wird es für zweckmässig erachtet, dass im Interesse der Widerstandsfähigkeit der Zähne der Winkel vorauslaufe. Da beim getriebenen Rade der Eingriff an der äussersten Zahnspitze vor der Zentraillinie beginnt, so wird durch die genannte Anordnung der hie und da mit Stössen verbundene Beginn des Eingriffes in die Mittelebene der Räder verlegt, wo die beiderseits schräg laufenden Zahnteile sich wechselseitig unterstützen.

Solche Unterstützung (Versteifung) findet auch noch durch die ganze Zahnbreite hindurch bis zur seitlichen äussern Begrenzungsebene der Zähne statt, wo das Zahnprofil keine Stützung mehr findet. An dieser Begrenzungsebene der Zähne der Pfeilräder muss mithin die schwächste Stelle jedes solchen Zahnes geschen werden, wenn nicht — was allerdings in der Regel der Fall ist — auch dieser äusserste Zahnschnitt eine Stützung erhält durch eine bis auf den Teilkreis reichende Seitenscheibe (Fig. 164).

Fig. 164.



Die Ausführungen solcher Pfeilräder bewegen sich innerhalb viel weiterer Grenzen, als diejenigen von Rädern mit normalen geradlinigen Zähnen. Einige der grössten und kleinsten Ausführungen mögen in umstehender Tabelle zusammen-

gestellt sein.

Konische Räder mit krummlinig gebildeten Zähnen, deren Mittellinien schräg unter einem konstanten oder veränderlichen Winkel  $\varphi$  gegen die Kegelerzeugenden liegen, können angesehen werden als konische Stufenräder mit unendlich vielen und

Fabrikant u. Bestimmung der Räder	Zahn- teilung mm	Zahn- breite mm	Durch- messer mm	Zahn- zahlen	Umdreh- ungen per Minute
<i>Fr. Krupp</i> in Essen.*)					
Zum Betrieb eines Panzerplatten-Walz- werks . . . . .	251	—	1600	20	
<i>P. R. Jackson</i> in Man- chester.**)					
Betrieb eines Kessel- blech- und Schiffs- platten-Walzwerks .	229	914	1753 u. 3429	24 u. 48	
<i>Maschinenbauanstalt</i> <i>Humboldt</i> ***)	2,9	73	19,2 u. 189,9	21 u. 208	29700 u. 3000
Betrieb d. Laval'schen					
Dampfturbinen . . .	8,5	288	48,9 u. 568,0	17 u. 210	13000 u. 1050

unendlich schmalen Stufen. Es gilt daher auch in bezug auf Festigkeit der Zähne und deren Eingriff alles für Stufenräder Gesagte. Der bei zylindrischen Schraubenräder unter der Annahme eines konstanten Winkels  $\varphi$  sich ergebenden gleichmässig schrägen Richtung der Zahnmittellinien gegen die Erzeugenden entspräche bei konischen Schraubenrädern die Annahme gleichzeitiger gleicher Änderungen der Halbmesser und der Verdrehungswinkel. Unter dieser Annahme ist die Projektion der Kegelschraubenlinie auf eine zur Radaxe senkrechte Ebene eine archimedische Spirale (Fig. 165). An Stelle des Sprunges (bei zylindrischen Schraubenrädern) erscheint hier der Verdrehungswinkel (Sprungwinkel)  $\varphi$ . Die Herstellung der Zähne ist eine ziemlich schwierige, und wird bei nicht

\*) Aus der Ausstellung in Chicago 1893 zitiert von *Bach. Maschinen-  
elemente.* 5. Aufl.

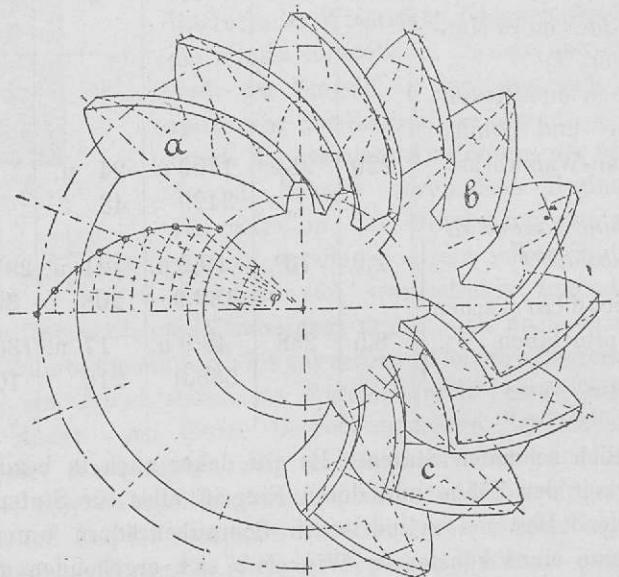
\*\*) Engineering. Vol. 60 und persönliche Mitteilungen des Fabrikanten.

\*\*\*) Von der Direktion des *Humboldt* gütigst mitgeteilt.

genau zu erreichender Herstellung der richtigen Zahnformen die Erreichung des sonst durch Anwendung von Schraubenrädern beabsichtigten Zweckes mindestens fraglich.

Das Gleiche gilt in noch höherem Masse von den *konischen Pfeilrädern*, welche ihre Entstehung ebenfalls der Erwägung verdanken, dass bei einfach-schrägen Zähnen ein schädlicher Seitendruck entsteht, und dieser bei doppelt-schrägen Zähnen

Fig. 165.



vermieden werden kann. Der Sprungwinkel ist dann zu rechnen nach Massgabe der Verschiebung der Mittellinie des äusseren Zahnprofiles gegen diejenige des Zahnprofiles an der Winkel spitze, wobei für den weiter innen gelegenen Teil des Winkelzahnes ein gleichgrosser Sprungwinkel anzunehmen ist. Bei den in Fig. 165 gezeichneten Rädern ist der Sprungwinkel im Teile

a) der Zeichnung gleich d. doppelten Teilungswinkel d. h.  $\varphi = 2 \frac{2 R \pi}{Z}$ ,

b) „ „ „ „ einfachen „ „ „ „  $\varphi = \frac{2R\pi}{Z}$ ,

Trotz der Schwierigkeit ihrer Herstellung finden solche konische Pfeilräder und Schraubenräder immerhin vereinzelte Anwendung in Fällen, in welchen ein möglichst ruhiger Gang erzielt werden soll.

### § 32. Hyperbolische Schraubenräder für gekreuzte Axen.

Benützt man von den hyperbolischen Rädern nur die Teile, die in die Nähe der Kehlkreise fallen (theoretisch eigentlich nur die Kehlkreise selbst mit  $l = 0$ ), so erhält man Kehlkreisräder, welche sodann praktisch mit messbarer Breite angenähert als zylindrische Räder ausgeführt werden. Bei denselben findet ein relatives Gleiten in der Richtung der Momentanaxe statt, welche mit der Richtung der Zähne übereinstimmt. Denkt man sich nun — wie aus den zylindrischen Rädern Stufenräder entstehen — diese Kehlkreisräder in eine Anzahl Scheiben zerschnitten, und jede gegen die vorhergehende um einen bestimmten gleichen Winkel verdreht, so würden hyperbolische Stufenräder entstehen. Macht man die Anzahl der Scheiben unendlich gross, und sie selbst unendlich schmal, so entstehen hyperbolische Schraubenräder, bei welchen dann die *Zähne gegen die Hyperboloidezeugenden einen Winkel einschliessen*. Da aber bei hyperbolischen Rädern ein Gleiten längs der relativen Momentanaxe statthaben muss, bei Ersatz der hyperbolischen Radgrundformen durch gezähnte Räder praktisch das Gleiten nur in der Richtung der Zähne stattfinden kann, *so sind solche hyperbolische Kehlkreiszahnräder mit stufenförmigen oder mit schräggestellten, schraubenförmigen Zähnen nicht möglich*. Bei vorgeschrriebener Winkelgeschwindigkeit der beiden Räder ist deren relative Bewegung eine Elementarschraubenbewegung, bestehend aus einer Rotationskomponente und einer Translationskomponente; soll die letztere in ihrer Richtung geändert werden, so dass sie mit der angenommenen Richtung der Schraubenzähne übereinstimmt, so kann dieses nur dadurch geschehen, dass die Axe der Rotationskomponente verlegt wird; damit erhalten die Radformen auf der Linie der kürzesten Entfernung der beiden Drehungssachsen einen neuen Berührungs-

punkt, und an Stelle der Kehlkreishalbmesser selbst treten andere Halbmesser für die zu konstruierenden Schraubenräder.\*). Die weitere Behandlung der sonach vorliegenden allgemeinen Aufgabe ist für den praktischen Maschinenbau von zurücktretendem Werte. Dagegen ist es ein Spezialfall von solchen Schraubenrädern, der mit Rücksicht auf seine ungemein zahlreichen Anwendungen einer eingehenderen Würdigung bedarf; dies ist das sogenannte Schneckengetriebe (Wurmrad, Schraube ohne Ende etc.) mit einem Winkel der Axen von  $\delta = 90^\circ$ .

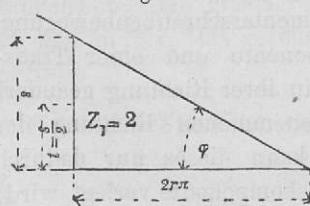
Charakteristisch diesem Getriebe ist, dass jederzeit grosse Übersetzungen damit erreicht werden sollen, so dass die Zahanzahl des einen Rades sehr klein, abnehmend bis  $Z_1 = 1$ , gewählt wird. Dabei weicht auch die Richtung der Zähne dieses Rades sehr stark, bis nahe gegen den rechten Winkel, von der Axenrichtung ab, so dass aus dem schrägaufgesetzten Zahne ein um den Radzyylinder laufendes Schraubengewinde wird.

Dieser Spezialfall von Schraubenräder gestattet auch eine ziemlich elementare Behandlung, welche auf einfache Weise zur Bestimmung der Hauptabmessungen der beiden Räder führt: Ist  $Q$  der an einer Schraube axial wirkende Widerstand,

$P$  die am Halbmesser des mittleren Schraubenkreises auf Drehung der Schraube wirkende Kraft,  
 $\varphi$  der Winkel, um welchen die Richtung der Mittellinie des Schraubengewindes vom Normalschnitt abweicht,  
so gilt bekanntlich

worin  $\rho$  der Reibungswinkel für die hier in Frage kommenden Materialien, und  $\operatorname{tg} \rho = \mu =$  dem Reibungskoeffizienten ist.

Fig. 166.



Die Abwicklung des mittleren Schraubengewindes zeigt ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Basis der Umfang  $2 r_1 \pi$  des mittleren Schraubenzylinders und dessen Höhe die Steigung des mittleren Schraubengewindes ist (Fig. 166).

\*) Siehe die Behandlung dieser Aufgabe in der II. Auflage der „Triebwerke“ pag. 83 u. ff.

Für  $Z_1 = 1, 2$  oder  $3$  u. s. w. ist die Steigung  $s = 1, 2$  oder  $3t$ , worin  $t$  die Teilung der Schraube oder die axial gemessene Entfernung zweier benachbarter Gewindequerschnitte ist. Es ist daher zu setzen

$$t_1 = \frac{s}{Z_1} = \frac{2r_1 \pi \operatorname{tg} \varphi}{Z_1} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 155)$$

Die Gewinde der Schraube (Zähne des Rades  $r_1$ ) greifen in die Zahnlücken des andern Rades  $r_2$  ein, und erhält man für eine Zahanzahl desselben  $= Z_2$  die Teilung des Rades  $r_2$

$$t_2 = \frac{2r_2 \pi}{Z_2} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 156)$$

Da nun wegen des richtigen und fortdauernden Eingriffs  $t_1 = t_2$  sein muss, so folgt aus Gleichung 155 und 156

$$r_1 = r_2 \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 157)$$

Multipliziert man Gleichung 154 und 157, so ergiebt sich

$$Pr_1 = Qr_2 \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi + \rho)}{\operatorname{tg} \varphi},$$

und hieraus

$$\left. \begin{aligned} \text{mit } Pr_1 = M_1 \\ \text{und } Qr_2 = M_2 \end{aligned} \right\} Z_2 = Z_1 \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi + \rho)}{\operatorname{tg} \varphi} = Z_1 \frac{M_2}{M_1} \frac{1}{\eta} \quad 158)$$

Die Grösse  $\eta$  stellt den Wirkungsgrad dieses Getriebes dar, welcher bei Vernachlässigung der gleitenden Reibung mit  $\rho = 0$  den Wert  $\eta = 1$  annimmt.

Den Reibungskoeffizienten  $\mu = \operatorname{tg} \rho$  kann man zwischen den Werten 0,1 bis 0,14 annehmen, im Mittel etwa 0,12, entsprechend einem ungefähren Winkel  $\rho = 7^\circ$ ; hieraus ergiebt sich nachstehende Tabelle.\*)

\*) Aus den von *Salomon* bearbeiteten Versuchen von *Sellers* und *Thurston* ergiebt sich, dass der Wirkungsgrad mit der Geschwindigkeit bedeutend zunimmt, wie es einer Abnahme des Reibungskoeffizienten bis auf etwa 0,02 entsprechen würde. (Zeitschr. d. V. d. I. 1887 S. 451.)

Ganz besonders bemerkenswert sind die Versuche von *Stribeck* (Z. d. V. d. I. 1897 S. 936 u. ff.)

$\operatorname{tg} \varphi$	$\frac{1}{\eta}$	$\eta$	$\operatorname{tg} \varphi$	$\frac{1}{\eta}$	$\eta$	$\operatorname{tg} \varphi$	$\frac{1}{\eta}$	$\eta$
0,08	2,56	0,39	0,14	1,92	0,52	0,20	1,65	0,60
0,09	2,39	0,42	0,15	1,95	0,54	0,21	1,62	0,62
0,10	2,26	0,44	0,16	1,80	0,56	0,22	1,60	0,63
0,11	2,15	0,46	0,17	1,76	0,57	0,23	1,57	0,64
0,12	2,06	0,48	0,18	1,72	0,58	0,24	1,55	0,64
0,13	2,00	0,50	0,19	1,68	0,59	0,25	1,53	0,65

Nach Festsetzung der Zahnzahl  $Z_2$  des Schraubenrades berechnen sich die übrigen Abmessungen mit Hilfe der bei anderen Zahnrädern geltigen Formeln:

$$\left. \begin{aligned} t &= 2,71 \sqrt[3]{\frac{M_2}{Z_2}} \\ \alpha &= \frac{t}{2,1} \dots \beta = 3\alpha \text{ bis } 4\alpha \dots \gamma = 1,5\alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (159)$$

Bei Schraubengetrieben, welche verhältnismässig selten benutzt werden, bei welchen sonach auf Abnützung keine Rücksicht zu nehmen ist, kann  $t$  auch kleiner, bis zu

$t = 2,0 \sqrt[3]{\frac{M_2}{Z_2}}$  genommen werden. Durch die Einteilung der ganzen Zahnhöhe  $\gamma$  in Zahnspitze  $= \frac{3}{7}\gamma$  und Zahnfuss  $= \frac{4}{7}\gamma$  ergibt sich endlich auch der äussere und innere Halbmesser der Schnecke mit

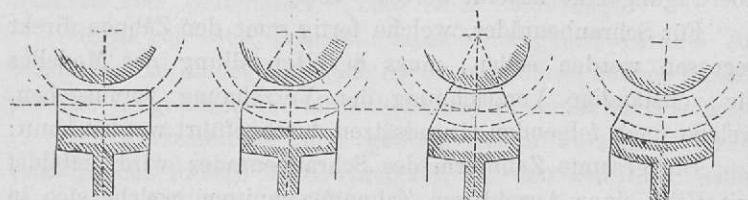
$$r_a = r + \frac{3}{7}\gamma, \dots \text{ und } r_i = r - \frac{4}{7}\gamma \dots \dots \dots \quad (160)$$

Der Querschnitt des Radkranzes wird auf verschiedene Weise ausgeführt, je nachdem Arbeit und Gangart eine mehr oder weniger genaue sein, und auf Abnützung mehr oder weniger Rücksicht genommen werden soll. Am einfachsten und billigsten werden Schraubenräder mit geraden, aber schräggestellten Zähnen versehen (Fig. 167 a). Diese geben aber auch deshalb von Anfang an nur einen schlechten (theoretisch ganz unrichtigen) Eingriff, welcher erst im Laufe der Zeit bei fortschreitender Abnützung richtiger wird. Bei solchen Zähnen werden auch oft vom Teilkreise oder vom Grund derselben

aus deren äusserste Ecken (gegen die Schraubenaxe radial) abgeschrägt, da ja diese Ecken doch nie, oder wenigstens nicht korrekt zum Eingriff kommen (Fig. 167 *b* u. *c*). Richtig ist das

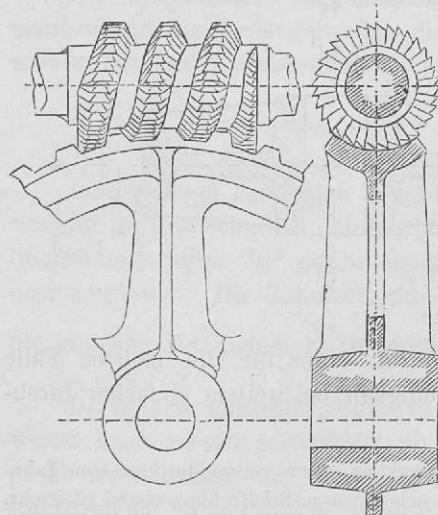
*a**b*

Fig. 167.

*c**d*

Schraubenrad nur gebildet, wenn sein Kranz mit den Zähnen und Zahnlücken die einhüllende Fläche darstellt an sämtliche Stellungen der Schraubenfläche bei deren relativer Bewegung gegen das Schraubenrad. Absolut genau erhält man deshalb diese Zahnform auf folgende Weise. Man fertigt 2 kongruente\*) Schrauben, deren eine als künftig zu benützende Antriebsschraube das gewünschte Material, Schmiedeisen oder Gusseisen, erhält,

Fig. 168.



während die andere aus Stahl gemacht wird. Diese letztere versieht man durch eine grosse Anzahl von Einschnitten mit Ecken und Kanten, so dass nur Teile der ursprünglichen Schraube übrig sind, welche, gehärtet, nun eine Werkzeugschraube bilden. Diese wird an den vorläufig glatt abgedrehten Radkörper angepresst und in Rotation versetzt, wobei die Werkzeugschraube (Fraise) sich mit ihren scharfen

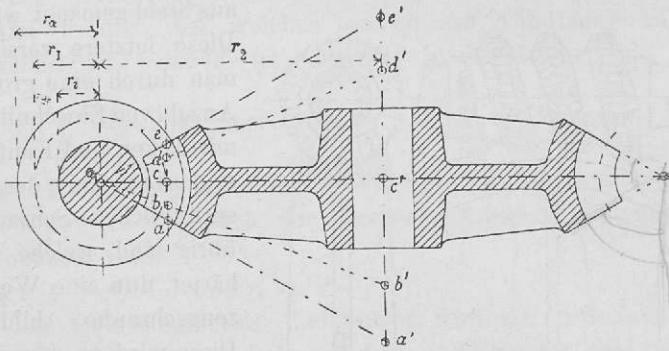
\*) Die Werkzeugfabrik von Reinecker in Chemnitz fertigt und benützt solche hinterdrehte Schneckenradfraise, deren äussere Begrenzung nicht zylindrisch, sondern konoidisch ist.

Ecken und Kanten in den Radkörper einwühlt und so die richtige Zahnform erzeugt (Fig. 168). Bringt man dann anstatt der Werkzeugschraube die andere vorher Gefertigte in Eingriff mit dem gefrästen Radkranze, so wird die vermittelte Bewegungsübertragung eine absolut korrekte sein.

Für Schraubenräder, welche fertig samt den Zähnen direkt gegossen werden sollen, muss der Herstellung des Modelles die vollständige Verzeichnung der Verzahnung vorausgehen, welche nach folgenden Grundsätzen durchgeführt werden kann:

Die gesamte Zahnform des Schraubenrades wird gebildet mit Hilfe einer Anzahl von Zahnquerschnitten, welche sich in verschiedenen Schnittebenen ergeben. Diese Schnittebenen können entweder parallel zu der Mittelebene des Schraubenrades oder radial zur Schnecke gelegt werden. Die erstere Annahme lässt, wenn nur eine grössere Anzahl von parallelen Schnittebenen gelegt wird, eine vollständig genaue Konstruktion der Zahnform erreichen,\*) ist aber umständlicher, während die Bestimmung der Schraubenradzähne aus radial zur Schnecken-

Fig. 169.



axe gelegten Schnittebenen mit einer für die meisten Fälle der Praxis genügenden Genauigkeit bei weitem einfacher durchzuführen ist. (Fig. 169.)

\* Auf diese Art der Konstruktion einer vollständig korrekten Zahnform des Schraubenrades wurde schon von *v. Schütz* hingewiesen (Zeitschr. d. V. d. Ing. vol. XXIII. S. 99) und neuerdings hat *R. Stribeck* in seinem wertvollen Aufsatz über „*Versuche mit Schneckengetrieben*“ (Zeitschr. d. V. d. Ing. vol. XXXXI. S. 936) die Durchführung der Konstruktion auf Grundlage der gleichen Annahme gezeigt.

Die Bestimmung des Zahnprofiles in der mittleren Radebene ist für beide genannten Konstruktionsannahmen gemeinsam. Hier findet wegen der geradlinigen, parallel zur Schneckenaxe stattfindenden Translation der Eingriff statt wie für ein Zahnrad vom Halbmesser  $r_2$  mit einer Zahnstange.

Genau dieselbe Translationsgeschwindigkeit, parallel zur Schneckenaxe, findet man auch in jedem anderen ebenen Radialschnitte, desgleichen überall dasselbe Gewindeprofil der Schnecke.

Die Verzeichnung aller gebräuchlichen Verzahnungsarten setzt gleiche lineare Geschwindigkeit auf den Teillinien beider zusammenarbeitender Räder voraus. Im Zentralpunkt berühren sich die Teillinien beider Räder, also hier der Zahnkonstruktionskreis des Schraubenrades und die gerade Teillinie des radialen Schraubenschnittes.

Da für das Schraubenrad Punkte gleicher Umfangsgeschwindigkeit nur in gleichem Abstande  $= r_2$  von der Schraubenradaxe liegen können, so liegen die Teillinien für die übrigen Radialschnitte der Schnecke in ungleichen Abständen von deren Axe, nämlich in den Abständen  $o_1a$ ,  $o_1b$ ,  $o_1c$ ,  $o_1d$  und  $o_1e$ .

Als Halbmesser der Zahnkonstruktionskreise betrachtet man sodann die Verlängerungen dieser Linien bis zum Durchschnitt mit der Schraubenradaxe, nämlich die Linien

$$aa', bb', cc', dd' \text{ und } ee'.$$

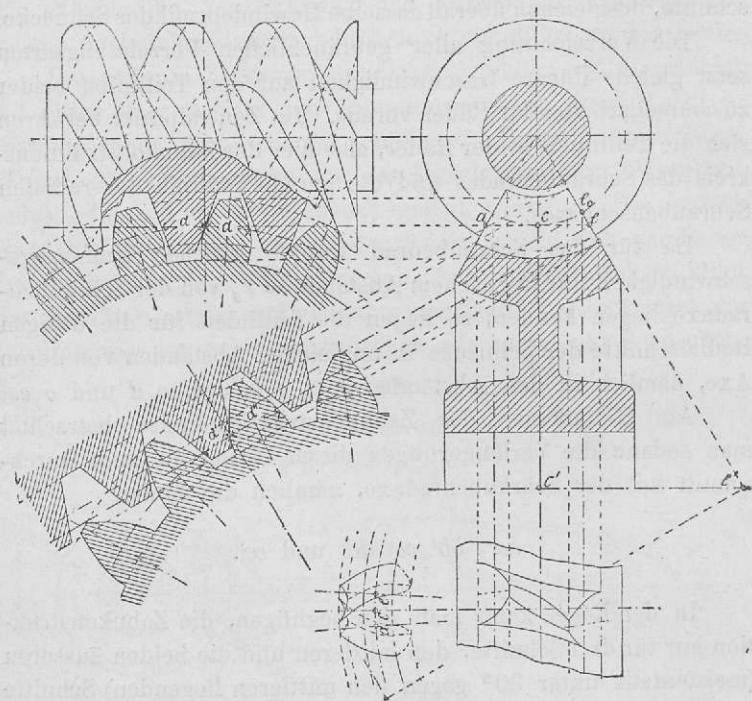
In der Regel kann man sich begnügen, die Zahnkonstruktion nur für drei Schnitte, den mittleren und die beiden äusseren (meistenteils unter  $30^\circ$  gegen den mittleren liegenden) Schnitte durchzuführen. Die Zahnform in diesen beiden letzteren ist die gleiche; die Zahndicke im mittleren Schnitte ist  $\alpha = \frac{t}{2,1}$ .

Da in den seitlichen Schnitten die Teillinie der Schnecke weiter nach aussen gerückt ist, so ergiebt sich für das Zahnprofil der Schnecke auf dieser Teillinie eine geringere Zahndicke  $\alpha'$  als am mittleren Schnitte. Da aber die Teilung in jedem Schnitte doch die gleiche bleiben muss, so ergiebt sich weiter, dass bei gleichbleibendem Flankenspielraum die Zahndicke  $\alpha''$  am Schraubenrade in den seitlichen Schnitten genau

um den gleichen Betrag dicker sein, oder die Summe der beiden Zahnstärken stets die gleiche bleiben muss.

Die gegenseitige Lage der auf diese Weise bestimmten Zahnformen des Schraubenrades an den beiden Begrenzungsschnitten und im mittleren Schnitte bestimmt sich darnach,

Fig. 170.

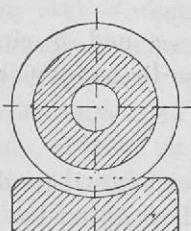


dass an der Schnecke die Mittellinien der Zahnlücken, in welche die Schraubenradzähne eingreifen, nach Massgabe der zugehörigen Winkel entsprechend dem Bogen  $ce_0$  (in der Regel  $30^\circ$ ) gegen den mittleren Schnitt verdreht sind, und um ebensoviel daher auch die Mittellinien der seitlichen Zahnprofile gegen diejenige des mittleren Zahnprofiles auf dem durch  $c$  gehenden Teilkreise vom Halbmesser  $r_2$  zu verschieben sind.

Als Verzahnungsart kann jede der üblichen Verzahnungsarten gewählt werden; für die Verzeichnung und Ausführung

am einfachsten ist die Evolventenverzahnung, bei welcher das Profil des Schraubengewindes der Schnecke trapezförmig ist.

Fig. 171.



Bei Werkzeugmaschinen findet man mitunter die Eingriffstiefe bedeutend reduziert, indem (Fig. 171) vom Schraubenrad nur die Aushöhlung des Zahngundes ausgeführt wird. Bei dieser, infolgedessen bedeutenden, Reduktion der Berührungsfläche der Zähne muss dann auch naturgemäß die Abnutzung erheblich ausfallen.

Die Verzeichnung eines normal zur Schneckenaxe gelegten ebenen Schnittes, der ebenen Endbegrenzung einer Schraube erfolgt auf nachstehende Weise: Ist (Fig. 172)

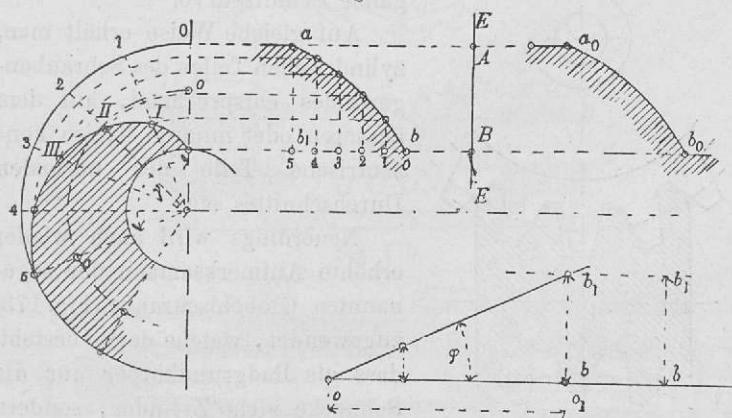
$a$   $b$  das erzeugende Profil für das Schraubengewinde in einer Anfangsstellung,

$a_0$   $b_0$  das erzeugende Profil für das Schraubengewinde in einer Endstellung,

$aa_0 = bb_0$  mithin die Steigung parallel zur Axe, entsprechend einer Drehung der Schraube um den Winkel  $2\pi$ ,

$EE$  eine feste Ebene, so wird

Fig. 172.



$a$  zum Durchschnitt kommen mit der festen Ebene  $EE$  nach einer linearen Steigung  $aA$ , entsprechend einer Drehung  $\alpha = 2\pi \frac{aA}{aa_0}$ , und

$b$  zum Durchschnitt kommen mit der festen Ebene  $E\ E$  nach einer linearen Steigung  $b\ B$ , entsprechend einer Drehung

$$\beta = 2\pi \frac{b\ B}{b\ b_0} = 2\pi \frac{b\ B}{a\ a_0}.$$

Mithin entsprechen die Durchschnitte mit  $a$  und  $b$  einer relativen Verschiebung  $a\ A - b\ B$ , oder einem Drehungswinkel

$$\gamma = (\alpha - \beta) = 2\pi \frac{a\ A - b\ B}{a\ a_0} = 2\pi \frac{b\ b_1}{a\ a_0}.$$

Trägt man an eine Horizontale den Steigungswinkel der mittleren Schraubenlinie  $= \varphi$  auf, und in dem Abstand  $b\ b_1$  von der Horizontalen eine dazu Parallelle, so wird durch deren Durchschnitt mit dem schrägen Winkelschenkel auf der Horizontalen eine Länge  $0\ 0_1$  abgeschnitten, gleich der Bogenlänge  $0\ 0$  auf dem mittleren Schraubenkreis, welche dem Winkel  $\gamma$  entspricht. Teilt man die Länge  $b\ b_1$  in eine gewisse Anzahl gleicher Teile, durch welche das Schneckenprofil in den Punkten  $0, 1, 2, 3 \dots$  getroffen wird, und zieht durch ebenso viele Teilungspunkte des Winkels  $\gamma$  die Radiallinien, so ergeben sich in den Schnittpunkten der gleich nummerierten Radien

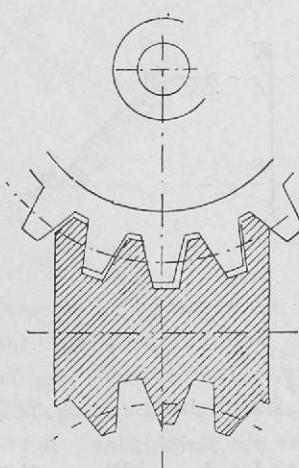
und Kreise die Punkte I, II, III der Schnittkurve, und somit die ganze Schnittkurve.

Auf gleiche Weise erhält man, zylindrischen Teilen des Schraubengewindes entsprechend, auf dem äusseren oder inneren Kreise konzentrische Teile des normalen Durchschnittes etc.

Neuerdings wird auch wieder erhöhte Aufmerksamkeit der sogenannten Globoidschraube (Fig. 173) zugewendet, welche darin besteht, dass als Radgrundkörper für die Schnecke nicht Zylinder, sondern andere Rotationskörper verwendet

werden. Am gebräuchlichsten ist diejenige Form der Ausführung, bei welcher als Erzeugende der Radgrundform der Schnecke ein Teil des Teilkreises des Schraubenrades ange-

Fig. 173.



nommen wird. Damit hört, wenigstens im mittleren Rad-  
schnitte, die Verzahnung auf, als solche sich gegen die Schnecken-  
profile zu verschieben, und die Zahreibung als solche ist besei-  
tigt, weil — wenigstens im mittleren Schnitte — an Stelle einer  
Zahnstangenverzahnung eine innere Verzahnung mit zwei  
gleich grossen Teilkreishalbmessern tritt. In den seitlichen  
Berührungsstellen verhält sich die Sache allerdings anders,  
und kommt dort die Zahreibung nicht in Wegfall,  
während gleichzeitig die Gewindereibung durch die ganze  
Ausdehnung der Schnecke bestehen bleibt. Selbstverständlich  
ist, dass beim Schneiden solcher Schrauben der Schneidestahl  
mit seinem Support eine Drehbewegung machen muss, deren  
Halbmesser im mittleren Gewindeprofile gleich dem Halb-  
messer des Schraubenrades sein muss.\*)

Der in der Richtung der Axe auf die Schraube ein-  
wirkende Druck kann nur bei verhältnismässig geringen Kräften

Fig. 174.

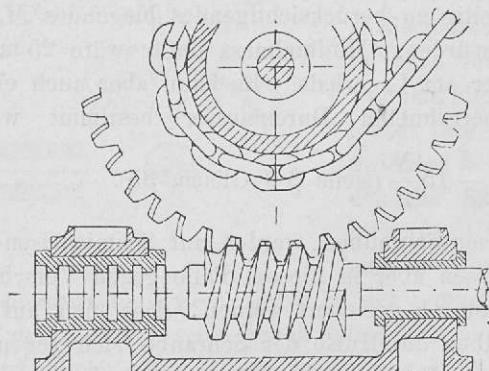
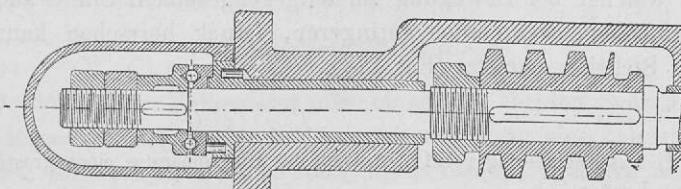


Fig. 175.



\*) Siehe hierüber auch *Hartmann*, Reiseskizzen, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1893. S. 586 und *Hartmann*, Werkzeugmaschinen der Ausstellung in Chicago. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1894 S. 567.

durch die an der Schraubenaxe anzubringenden Lagerhälse bzw. durch deren Flanken aufgenommen werden; bei grösseren Druckbeträgen bedarf es eigener Drucklager (Kammlager). (Fig. 174) \*) oder Kugelstützlager (Fig. 175). \*\*)

Schmiedeiserne Schrauben sind wohl meistens (Fig. 176) mit der zugehörigen Axe aus *einem* Stücke; die letztere ist, wenn der Betrieb derselben von Hand geschieht, meistens in

Fig. 176.

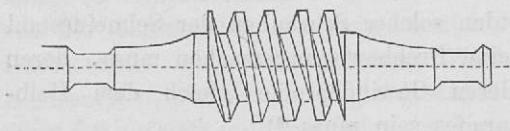
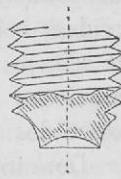


Fig. 178.



stärkeren Abmessungen auszuführen, als es die Formeln (§ 9) mit Rücksicht auf das einwirkende Torsionsmoment  $M_d$  und ein gleichzeitig zu berücksichtigendes biegendes  $M_b = 0,7 M_d$  verlangen würden. Minimalmass dafür wäre 25 mm für den Durchmesser am Lagerhals. Es kann aber auch ein Zuschlag  $\Delta$  zum berechneten Durchmesser bestimmt werden mit

$$\Delta = 15 \text{ mm} - 15 \frac{N}{n} \text{ (siehe § 9 Gleich. 35).}$$

Gusseisen-Schrauben werden auf Schmiedeisen-Axen aufgekeilt, müssen aber in diesem Falle gegen Verschiebung auf der Axe dadurch gesichert werden, dass man auf der einen Seite derselben die Hülse der Schraube sich gegen einen auf der Axe festen Bund anlegen lässt, auf der andern Seite aber, nach welcher bei Bewegung im entgegengesetzten Sinne auch ein gewisser, wenn auch geringerer, Druck herrschen kann, einen Stellring vorsetzt (Fig. 177).

\*) Aus Engineering vol. 14. Antrieb des Hebeapparates eines grossen Scheren-Krahns.

\*\*) Schraubengetriebe für Werkzeugmaschinen mit direktem elektrischen Antrieb, ausgeführt von der elsässischen Maschinenbaugesellschaft in Grafenstaden, von derselben gütigst mitgeteilt.

Der Stellring kann nach folgenden Regeln gebildet werden :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Schraubenstärke } s = 8 \text{ mm} + 0,1 d, \\ \text{Breite des Ringes } b = 2,0 s = 16 + 0,2 d, \\ \text{Dicke des Ringes } a = 1\frac{1}{4} s = 10 + 0,125 d \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (161)$$

Fig. 177.

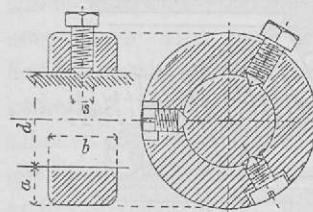
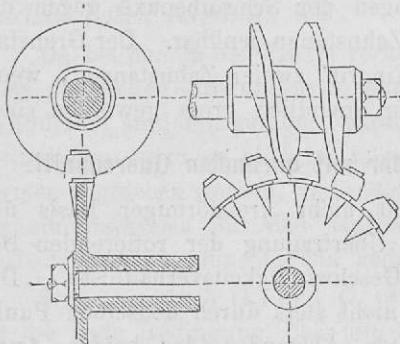


Fig. 179.



Die Schrauben (bei kleineren Wellen 1 Stk., bei Wellen über 70 mm Stärke 2 Stk., über 150 mm Stärke 3 Stk.), welche zweckmässig versenkt angebracht werden, erhalten an ihrem untern Ende eine Spitze, oder zur besseren Schonung der Welle eine nach Fig. 178 gebildete Form.

Zur Verkleinerung der Reibung zwischen Gewinde u. Radzähnen werden letztere auch durch Rollen ersetzt und so die gleitende Reibung in eine rollende verwandelt (Fig. 179)\*). Da hiebei die Berührungsfläche zwischen Schraube und den die Radzähne ersetzenden Rollen jeweils nur in einem Punkte

stattfindet, so muss in diesem, bezw. in der vom Berührungs punkte auf den Rollen beschriebenen Spirallinie die Abnutzung eine ganz erhebliche sein. Diese Anordnung kann daher nur zur Übertragung kleinerer Kräfte geeignet sein.

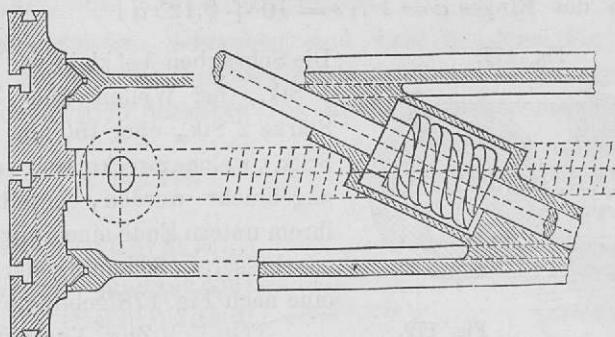
#### *Schraube und Zahnstange.*

Wird der Halbmesser des einen der beiden Schraubenräder  $= \infty$ , so geht der Radkranz desselben in eine Zahnstange über und erhält man so den Mechanismus, welchen *Sellers*

\*) Angewendet bei einzelnen Gölz-Mechanismen, bei dem Betrieb des Ablege-Mechanismus an Mähemaschinen etc. etc.

bei den nach ihm benannten Hobelmaschinen zur Vorwärtsbewegung des Tisches adoptiert hat (Fig. 180)\*). Dabei sind

Fig. 180.



natürlich alle möglichen Lagen der Schraubenaxe gegen die Fortbewegungsrichtung der Zahnstange denkbar. Der Grenzfall wäre gegeben durch den Eingriff zweier Zahnstangen, wenn die Halbmesser beider Räder unendlich gross geworden sind.

### § 33. Zylindrische Räder mit unrundem Querschnitt.

Zylindrische Räder mit nicht kreisförmiger Basis des Grundzylinders dienen zur Übertragung der rotierenden Bewegung mit variablem Geschwindigkeitsverhältnisse. Die Momentanaxe wird dann nicht stets durch denselben Punkt auf der Linie des kürzesten Abstandes der beiden Axen gehen können, welcher bei unveränderlichem Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten durch die Entferungen  $r_1$  und  $r_2$  gegeben war durch die Gleichung:

$$\frac{r_2}{r_1} = + \frac{\omega_1 \cos(\delta + \beta_2)}{\omega_2 \cos \beta_2}.$$

Wenn aber die Lage der Momentanaxe nicht die gleiche bleibt, so werden auch die auf den Radgrundformen denkbaren Geraden, welche nach und nach mit der Momentanaxe zusammenfallen, nicht stets in der gleichen Entfernung von den zugehörigen Rotationsaxen sein; daher können in diesem Falle die

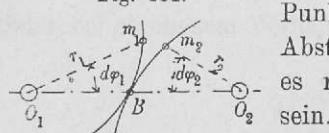
\*) Vergl. auch „Hart, Werkzeugmaschinen“ Tafel 40. Bei passender Wahl des Winkels zwischen Schraubenaxe und Zahnstange kann ein aus der gleitenden Reibung sich ergebender Seitendruck vermieden werden.

Radgrundformen auch keine Rotationskörper sein. Auch bei solchen Rädern werden im allgemeinsten Falle nicht die Peripheriegeschwindigkeiten selbst gleich sein können, sondern nur deren Komponenten nach Richtungen senkrecht zu den Zahnmittellinien. Eine auf der unrunden Radgrundform an einem gewissen Punkte senkrecht zur Zahnmittellinie gezeichnete Linie wird eine krumme Linie von zu bestimmendem Krümmungshalbmesser sein. Ebenso, wie es für die im Allgemeinen als Rotationshyperboloide geformten Radkörper geschehen ist, lässt sich auch für die nicht als Rotationskörper gebildeten Radformen die Bedingung des richtigen Zahneingriffes so ausdrücken, dass die herzustellende Konstruktion in der Ebene der Krümmungskreise *jener auf den Radgrundformen gezogenen Linien bei denselben gleiche Peripheriegeschwindigkeit vermitteln soll.*

Da bei den in der Praxis vorkommenden unrunden Rädern stets die beiden Drehungssachsen parallel, d. h. die Räder selbst zylindrisch sind mit geraden, parallel zur Axe laufenden Zahnmittellinien, so möge auch im folgenden von allen andern Radformen abgesehen werden, und mögen daher die oben erwähnten Krümmungskreise mit den senkrecht zu den Axen geführten Radschnitten zusammenfallend gedacht werden.

Sind (Fig. 181)  $O_1$  und  $O_2$  die beiden Drehungssachsen, so ist die erste Bedingung, dass die beiden nicht konzentrischen

Fig. 181.



Radschnitte (Teilkurven) sich in einem Punkte  $B$  auf der Linie des kürzesten Abstandes  $O_1 O_2$  berühren sollen, d. h. es muss  $O_1 B + B O_2 = O_1 O_2 = E$  sein.

Habe sich nun in einem Zeitelemente  $dt$  das eine Rad um den Winkel  $d\varphi_1$ , das andere um  $d\varphi_2$  gedreht, und seien die variablen Abstände

$$O_1 m_1 = r_1 \quad \text{und} \quad O_2 m_2 = r_2,$$

nur während des Zeitelementes  $dt$  als konstant zu betrachten, so gilt jedenfalls

$$r_1 d\varphi_1 = r_2 d\varphi_2,$$

$$R_1 + R_2 = O_1 O_2 = E \quad (?)$$

und daher

$$r_1 = \frac{E}{1 + \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}},$$

$$R_1 + r_1 \frac{dy_1}{dx_1} = E$$

$$R_1 = \frac{E}{1 + \frac{dy_1}{dx_1}}$$

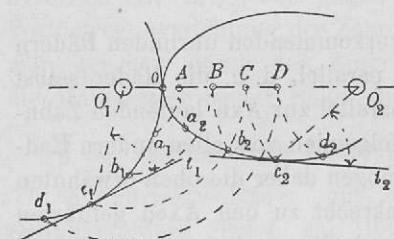
sowie

$$r_2 = \frac{E}{1 + \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}} \cdot \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}.$$

Es muss daher das momentane Übersetzungsverhältnis  $\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}$  und die Entfernung der beiden Axen gegeben sein, wenn die beiden Radkurven zu verzeichnen sind.

Ist aber eine der selben und die Lage der Drehungssachsen gegeben, so lässt sich

Fig. 182.



die andere auch graphisch finden. Es seien (Fig. 182)  $a_1, b_1, c_1 \dots$  Punkte der gegebenen um  $O_1$  drehbaren Kurve, welche daher nach und nach die Zentralebene  $O_1 O_2$  in den Punkten  $A, B, C \dots$  durchschreiten werden; man zieht die konzentrischen Kreise  $O_2 A, O_2 B, O_2 C \dots$ , und trägt die

Stücke ab:

$$\widehat{O_2 a_2} = \widehat{O_2 a_1},$$

$$\widehat{a_2 b_2} = \widehat{a_1 b_1},$$

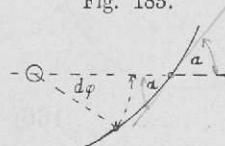
$$\widehat{b_2 c_2} = \widehat{b_1 c_1},$$

.....

und erhält  $a_2, b_2, c_2 \dots$  als Punkte der gesuchten Radkurve. Diese Konstruktionsweise setzt allerdings voraus, dass die Einteilungspunkte so nahe gesetzt werden, dass die Sehne füglich statt des Bogens aufgetragen werden kann, und dass die Schnitte der konzentrischen Kreise mit den Radkurven nicht unter zu spitzen Winkeln erfolgen, welche eine genaue Bezeichnung der Schnittpunkte nicht gestatten. Ist die gegebene Radkurve eine geschlossene, so folgt daraus noch nicht, dass auch die gesuchte eine geschlossene Kurve wird.

Weil sich die beiden Radkurven auf der Zentraillinie berühren sollen, und zwei sich berührende Kurven im Berührungs punkte gemeinschaftliche Tangente haben, so muss der Winkel dieser Tangente mit den Fahrstrahlen für beide Räder der gleiche sein, d. h. es muss  $\angle O_1 c_1 t_1 = \angle O_2 c_2 t_2$  sein. (Fig. 182.)

Fig. 183.



Ist beispielsweise dieser Winkel für alle Punkte der Radkurve konstant  $= \alpha$ , so ist es auch die Tangente desselben. Diese letztere drückt sich (Fig. 183) aus durch

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r d \varphi}{d r}.$$

Es folgt nun

Da nun gegebenen Falles der grösste und kleinste Wert des Fahrstrahles  $r$ , sowie der Winkel  $\varphi_1$  gegeben ist, um welchen sich die Axe drehen soll, während der Fahrstrahl sich zwischen den beiden äussersten Werten  $r_0$  und  $r_1$  ändert, so ergibt sich aus Gl. 162 der für jeden Punkt der Peripherie konstant angenommene Winkel  $\alpha$  mit

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varphi_1}{\lg \operatorname{nat} \left( \frac{r_1}{r_0} \right)} \quad \dots \dots \dots \quad 163)$$

oder bei gegebenem Verhältnis  $\frac{r_1}{r_0}$

Da ferner bekanntlich gesetzt werden kann

$$\lg \text{nat } x = 2,3026 \log x,$$

so lässt sich die eben erhaltene Gleichung 163 auch schreiben

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varphi_1}{2,3 \log \left( \frac{r_1}{r_0} \right)} \quad \dots \dots \dots \quad (165)$$

Die gesamte Form des unrunden Rades ergiebt sich nunmehr, indem man den Winkel  $\varphi_1$  in eine beliebige Anzahl,  $m$ ,

gleicher Teile teilt, und für jeden Fahrstrahl, der um den Winkel  $\varphi = 1 \frac{\varphi_1}{m}, 2 \frac{\varphi_1}{m}, 3 \frac{\varphi_1}{m}, \dots, m \frac{\varphi_1}{m}$  allgemein um  $x \frac{\varphi_1}{m}$  aus der Anfangslage mit der Länge  $r_0$  gedreht ist, die zugehörige Länge  $r$  findet aus der ebenfalls aus Gleichung 163 sich ergebenden Gleichung

$$\lg \text{nat } r = \frac{\varphi}{\text{tg } \alpha} + \lg \text{nat } r_0$$

oder auch

$$\log r = \frac{\varphi}{2,3 \text{ tg } \alpha} + \log r_0 \quad \dots \dots \quad (166)$$

$$= \frac{x}{2,3 m} \frac{\varphi_1}{\text{tg } \alpha} + \log r_0 = x \cdot c + \log r_0 \quad \dots \dots \quad (167)$$

d. h. die Änderung der Länge der Fahrstrahlen von einem Teilpunkt zum andern ist nur abhängig von dem Verhältnis des grössten zum kleinsten Fahrstrahl, aber unabhängig von der Anzahl der Ecken, und von dem Polygonmittelpunktswinkel  $\varphi_1$ .

Für polygonale Räder von  $n$  Ecken ergibt sich der Polygonmittelpunktswinkel  $\varphi_1$ , innerhalb dessen der Fahrstrahl von  $r_0$  auf  $r_1$  zu- und wieder auf  $r_0$  abnimmt, mit

$$2 \varphi_1 = \frac{2 \pi}{n},$$

und so entstehen für das 1-, 2-, 3- und 4-Eck nachstehende Radformen (Fig. 184). Hierbei ist des Beispiels halber angenommen:

$$\begin{aligned} r_0 &= 200 \\ r_1 &= 400 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} r_1 = 2, \\ r_0 \end{array} \right.$$

$$\log \frac{r_1}{r_0} = 0,301,$$

somit für das

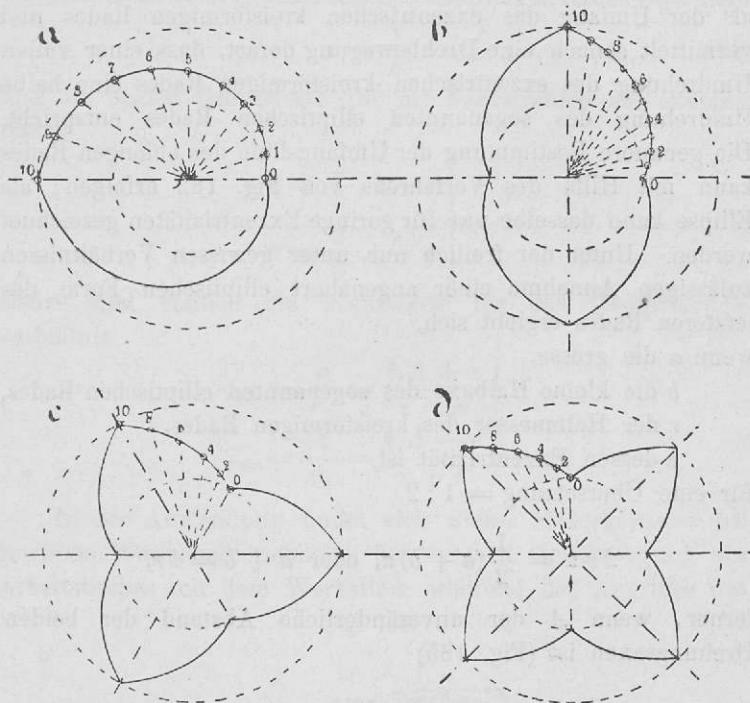
$$1\text{-Eck (Fig. 184a)} \quad \varphi_1 = \frac{1}{2} 2 \pi, \quad \text{tg } \alpha = 4,54$$

$$2\text{-Eck (Fig. 184b)} \quad \varphi_1 = \frac{1}{4} 2 \pi, \quad \text{tg } \alpha = 2,27$$

$$3\text{-Eck (Fig. 184c)} \quad \varphi_1 = \frac{1}{6} 2 \pi, \quad \text{tg } \alpha = 1,51$$

$$4\text{-Eck (Fig. 184d)} \quad \varphi_1 = \frac{1}{8} 2 \pi, \quad \text{tg } \alpha = 0,13$$

Fig. 184.



und für eine Einteilung von  $\varrho$  in 10 Teile

$\varphi = 0$	...	$r = 200 = r_0$
„ = 0,1 $\varphi_1$	...	„ = 214,3,
„ = 0,2 $\varphi_1$	...	„ = 229,5,
„ = 0,3 $\varphi_1$	...	„ = 246,0,
„ = 0,4 $\varphi_1$	...	„ = 263,6,
„ = 0,5 $\varphi_1$	...	„ = 282,4,
„ = 0,6 $\varphi_1$	...	„ = 302,6,
„ = 0,7 $\varphi_1$	...	„ = 324,2,
„ = 0,8 $\varphi_1$	...	„ = 347,4,
„ = 0,9 $\varphi_1$	...	„ = 372,2,
„ = 1,0 $\varphi_1$	...	„ = 400,0 = r_1

Eine besondere Art von unruunden Rädern stellt das exzentrische kreisförmige Rad dar, welches mit einem angenähert elliptischen Rade in Eingriff ist; das letztere ist um seinen

Mittelpunkt drehbar, hat eine Peripherielänge doppelt so gross als der Umfang des exzentrischen kreisförmigen Rades und vermittelt sonach eine Drehbewegung derart, dass einer vollen Umdrehung des exzentrischen kreisförmigen Rades eine halbe Umdrehung des sogenannten elliptischen Rades entspricht. Die genauere Bestimmung der Umfangslinie des ovalen Rades kann mit Hilfe des Verfahrens von Fig. 182 erfolgen; als Ellipse kann dasselbe nur für geringe Exzentrizitäten gezeichnet werden. Unter der freilich nur unter gewissen Verhältnissen zulässigen Annahme einer angenähert elliptischen Form des letzteren Rades ergiebt sich,

wenn  $a$  die grosse,

$b$  die kleine Halbaxe des sogenannten elliptischen Rades,

$r$  der Halbmesser des kreisförmigen Rades,

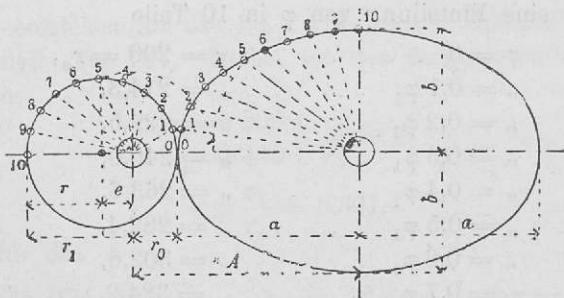
$e$  dessen Exzentrizität ist,

für eine Übersetzung  $= 1 : 2$

$$2r\pi = \frac{1}{2}(a+b)\pi, \text{ oder } a+b=4r,$$

ferner, wenn  $A$  der unveränderliche Abstand der beiden Drehungssäulen ist (Fig. 185)

Fig. 185.



$$A = b + r + e, \text{ oder auch } A = a + r - e.$$

Hieraus ergiebt sich  
während oben war

$$a - b = 2e,$$

$$a + b = 4r,$$

woraus  
und

$$a = 2r + e,$$

$$b = 2r - e.$$

Der Halbmesser des exzentrischen kreisförmigen Rades wird dann

$$r = \frac{1}{3} A \dots \dots \dots \quad 168)$$

und die beiden Grenzwerte für die Fahrstrahlen des anderen Rades

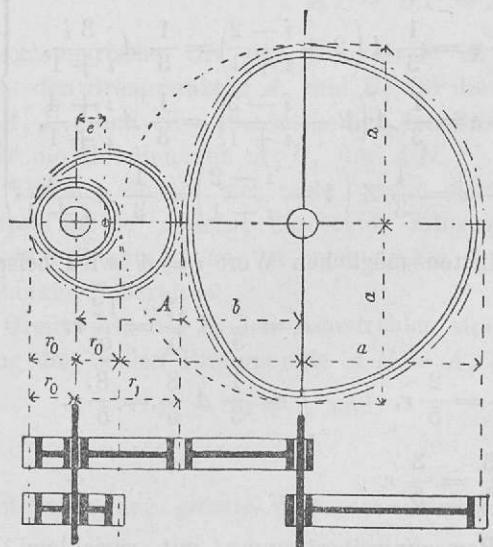
$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{2}{3} A + e \\ b = \frac{2}{3} A - e \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad 169)$$

Daher sind endlich die Grenzwerte für das Übersetzungsverhältnis

$$\left. \begin{array}{l} i_{\max} = \frac{a}{r_0} = \frac{\frac{2}{3} A + e}{r - e} \\ i_{\min} = \frac{b}{r_1} = \frac{\frac{2}{3} A - e}{r + e} \end{array} \right\}$$

In der Anwendung findet sich dieses Rädergetriebe bei gewissen Werkzeugmaschinen, bei welchen die Bewegung des Arbeitstisches mit dem Werkstück während des Angriffes des

Fig. 186.



Werkzeuges langsamer, während des Rückganges dagegen rascher erfolgen soll. (Fig. 186.) Die eine Axe erhält dann

zwei Räder, das exzentrisch kreisförmige und ein konzentrisch kreisförmiges von einem Halbmesser gleich dem kleinsten Halbmesser  $r_0$  des ersten. Die andere Axe erhält zwei halbe Räder, eines von der Form einer halben Ellipse mit den Halbaxen  $a$  und  $b$ , und ein konzentrisch halbkreisförmiges vom Durchmesser  $2a$ . Der Umfang des letzteren muss selbstverständlich eine *ganze* Zahl Umfänge des eingreifenden kleineren Rades enthalten, d. h. es muss der Wert des Quotienten

$$\frac{a\pi}{2(r-e)\pi} = \frac{a}{2r_0} = \frac{i}{2}$$

eine ganze Zahl sein.

Die auf jeder der beiden Axen zu befestigenden Räder werden bei Ausführungen in einem Stücke hergestellt.

Man geht daher bei Ausführungen von der Annahme des Wertes  $i$  mit dem möglichen Minimalwerte  $i = 4$  aus, und berechnet hieraus mit Hilfe der vorstehenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{1}{3} A \frac{i-2}{i+1} \\ a &= \frac{2}{3} A + e = \frac{1}{3} A \left( 2 + \frac{i-2}{i+1} \right) = \frac{1}{3} A \frac{3i}{i+1}, \\ b &= \frac{2}{3} A - e = \frac{1}{3} A \left( 2 - \frac{i-2}{i+1} \right) = \frac{1}{3} A \frac{i+4}{i+1}, \\ r_0 &= \frac{1}{3} A - e = \frac{1}{3} A \left( 1 - \frac{i-2}{i+1} \right) = \frac{1}{3} A \frac{3}{i+1}, \end{aligned} \right\} \dots 170$$

für den kleinsten möglichen Wert  $i = 4$  wird beispielsweise:

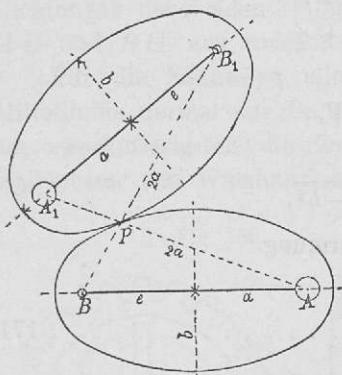
$$r = \frac{1}{3} A, \quad a = \frac{1}{3} A \frac{12}{5} = \frac{12}{5} r,$$

$$e = \frac{1}{3} A \frac{2}{5} = \frac{2}{5} r, \quad b = \frac{1}{3} A \frac{8}{5} = \frac{8}{5} r,$$

$$r_0 = \frac{1}{3} A \frac{3}{5} = \frac{3}{5} r.$$

Eine Bewegungsübertragung mit variablem Winkelgeschwindigkeitsverhältnisse, und zwar die am häufigsten vorkommende, lässt sich auch durch 2 gleichgrosse elliptische Räder

Fig. 187.



Durchschnittspunkt von  $AA_1$  und  $BB_1$  sei  $P$ .

Es wird dann für jede Stellung  $\triangle ABA_1 \cong A_1B_1B$ ,  
daher auch  $\triangle ABP \cong B_1A_1P$ ,  
und  $BP = A_1P$ ,  
 $AP = B_1P$ ,  
 $AP + BP = A_1P + B_1P$ .

Der geometrische Ort des Punktes  $P$  ist somit eine Ellipse mit den Brennpunkten  $A_1$  und  $B_1$  für die Rotation von  $AB$  um  $A_1B_1$ , und eine ebensolche mit den Brennpunkten  $A$  und  $B$  für die Rotation von  $A_1B_1$  um  $AB$ .

Der Vorgang ändert sich nicht, wenn statt des Rollens einer Ellipse auf der andern, die beiden Ellipsen gleichzeitig um die festen Punkte  $A$  und  $A_1$  sich drehen und dabei sich in dem Punkte  $P$  berühren.

Die Grenzwerte der beiden Fahrstrahlen sind, wenn die Entfernung der beiden Brennpunkte  $AB = A_1B_1 = 2e$  ist,

$$r_{\max} = a + e, \text{ und}$$

$$r_{\min} = a - e.$$

Es ist daher der grösste Wert des Übersetzungsverhältnisses

$$i_{\max} = \frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{a + e}{a - e},$$

erreichen, deren Rotationsachsen je in einem Brennpunkte und zwar um die Länge der grossen Axe  $2a$  von einander entfernt liegen. Es lässt sich dies auf folgende Art darthun. (Fig. 187.)

Eine Gerade  $AB$  von einer Länge  $2e$  bewege sich derart um eine andere Gerade  $A_1B_1$  von derselben Länge, dass der Punkt  $A$  einen Kreis um  $A_1$ , und  $B$  einen Kreis um  $B_1$  mit dem Radius  $AA_1 = BB_1 = 2a$  beschreibe. Der momentane

und der kleinste Wert

$$i_{\min} = \frac{a - e}{a + e}.$$

Setzt man

$$\frac{i_{\max}}{i_{\min}} = V,$$

und ferner

$$e = \sqrt{a^2 - b^2},$$

so wird nach einer kleinen Umformung

$$\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt[4]{V}}{1 + \sqrt{V}}. \quad \dots \dots \dots \quad (171)$$

So wird z. B. für

$$V = 4 \dots \frac{b}{a} = 0,942 \dots \frac{a}{b} = 1,06, \\ = 9 \dots \Rightarrow = 0,866 \dots \Rightarrow = 1,15.$$

Ist hiezu die Entfernung  $A$  der beiden Axen gegeben, so folgen die Werte für  $a$  und  $b$  mit Hilfe der Gleichungen

$$A = 2 \, a,$$

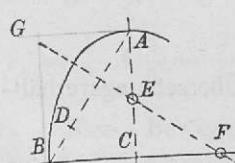
$$\frac{b}{\frac{1}{2}A} = \frac{2\sqrt[4]{V}}{1 + \sqrt[4]{V}},$$

$$\frac{b}{A} = \frac{\sqrt[4]{V}}{1 + \sqrt[4]{V}}, \quad \dots \dots \dots \quad (172)$$

$$a = b \frac{a}{b}.$$

Die Verzeichnung der Ellipse (Fig. 188) erfolgt bequem auf folgende Weise. Man mache

Fig. 188.



$$AC = a,$$

$$B C = b,$$

ziehe *A B*, und trage darauf

$$B D \equiv a - b \text{ an.}$$

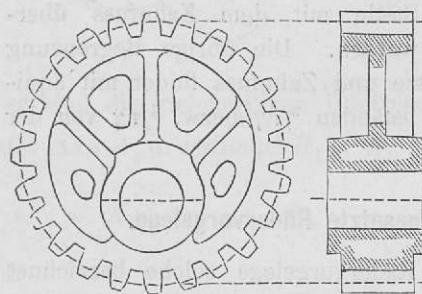
*A D* halbiert man durch die auf *A D* senkrechte Linie *G E F* (die Mittelnormale)

und erhält in den Durchschnittspunkten *E* und *F* mit den Richtungen der beiden Halbaxen die Mittelpunkte der Kreise *A G* und *B G*, aus welchen die Ellipse gebildet werden kann.

Für die Zähne an allen unrunden Rädern werden die Mittellinien normal zur Peripherie gestellt, und als Zahnform am zweckmässigsten die Zykloide gewählt, für welche der Halbmesser des Wälzungskreises gleich der Zahnteilung und

als leitende Linie der zur Axe normale Radschnitt (Querschnitt der Radform) genommen wird. Es kommen allerdings mitunter auch andere als kreisförmige oder elliptische Räder in der Praxis vor, doch ist deren Anwendung ganz ausnahmsweise, und möge daher auf deren Formbestim-

Fig. 189.

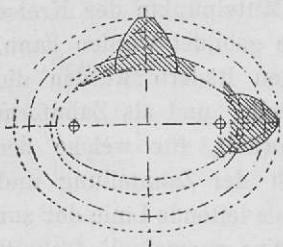


mung nicht näher eingegangen werden. Kreisförmige und elliptische unrunde Räder im Eingriff finden sich an Hobelmaschinen, Langlochbohrmaschinen, rotierenden Pumpen und Dampfmaschinen etc.\*)

Für elliptische Räder insbesondere können die Zahnformen auf zweierlei Weise konstruiert werden: Nimmt man Zykloidenformen an, so erzeugt man die Zahnprofile durch Wälzen eines Kreises von einem Halbmesser gleich der Zahnteilung auf und in der Ellipse. Es werden dann die auf eine Viertelellipse treffenden Zähne sämtlich verschieden, wenn die Ellipse als solche genau gezeichnet ist. Ist sie aber nach obigem Verfahren aus zwei Krümmungskreisen gebildet, so ergeben sich zunächst nur zweierlei Zahnformen, soweit die betreffenden Krümmungskreise reichen; nur in der Nähe des Überganges von einem Krümmungskreise in den anderen werden auch die Zahnformen nach Massgabe der Letzteren Übergangsformen zeigen.

\*) Unrunde Räder für eine Garnaufwinde-Maschine, Engineering 1871  
6. Januar.

Fig. 190.



einstimmend angenommen werden. Die übrige Begrenzung der Zähne aber an Zahnspitze und Zahnfuss findet mit äquidistanten Ellipsen in den Abständen  $\frac{3}{7} \gamma$  bzw.  $\frac{4}{7} \gamma$  von der Teil-Ellipse statt.

### § 34. Zusammengesetzte Rädervorgelege.

Während als einfache Rädervorgelege solche bezeichnet werden können, bei welchen nur zwei um festliegende Axen drehbare Räder, das *reibende* und das *getriebene*, sich in Eingriff befinden, werden als zusammengesetzte solche bezeichnet, bei welchen zwischen dem ersten (*reibenden*) und dem letzten (*getriebenen*) noch andere Räder eingeschaltet sind, oder solche, bei welchen die relative Lage der Drehungssachsen keine feste ist. Man unterscheidet demnach mehrfache und epizyklische Vorgelege und Kombinationen dieser beiden.

#### 1. Mehrfache Vorgelege.

##### a. Zwischenräder (Fig. 191 und 192).

Es seien zwischen dem ersten Rade  $R_1$  auf der ersten Axe  $A_1$  und dem letzten Rade  $R_x$  auf der letzten Axe  $A_x$  noch eine Anzahl anderer Räder:

$$R_2 \text{ auf der Axe } A_2, \\ R_3 \text{ } \rightarrow \text{ } \rightarrow \text{ } A_3, \\ \dots \dots \dots$$

<sup>\*)</sup> Siehe „Civilingenieur“ vol. XXI. S. 223 „über Verzahnung elliptischer Räder“ von Prof. Dr. Kirsch.

vorhanden, welche alle der Reihe nach im Eingriff seien:

$$R_1 \text{ mit } R_2, \quad R_2 \text{ mit } R_3, \dots, R_{x-1} \text{ mit } R_x,$$

Fig. 191.

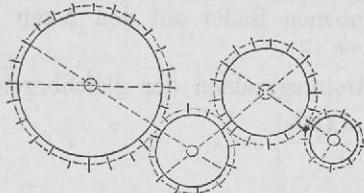
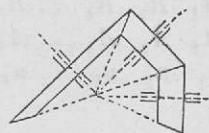


Fig. 192.



so sind die gleichzeitigen Umdrehungen

$$\text{der Axe } A_1 \text{ u. des Rades } R_1 \dots n_1 \dots \dots \dots = n_1,$$

$$\Rightarrow \quad \Rightarrow \quad A_2 \dots \dots \dots R_2 \dots n_2 = \dots \dots \dots n_1 \frac{R_1}{R_2} = n_1 \frac{Z_1}{Z_2},$$

$$\Rightarrow \quad \Rightarrow \quad A_3 \dots \dots \dots R_3 \dots n_3 = n_2 \frac{R_2}{R_3} = n_1 \frac{R_1}{R_3} = n_1 \frac{Z_1}{Z_3},$$

$$\Rightarrow \quad \Rightarrow \quad A_x \dots \dots \dots R_x \dots n_x = \dots \dots \dots n_1 \frac{R_1}{R_x} = n_1 \frac{Z_1}{Z_x}.$$

Die Umdrehungszahl des letzten Rades ergiebt sich mithin, wie wenn die Zwischenräder gar nicht vorhanden wären, und das erste Rad direkt in das letzte eingreifen würde. Die Umfangsgeschwindigkeiten sämtlicher Räder sind gleich gross, daher alle auch gleiche Teilung haben müssen. Von Einfluss ist die Anzahl der Zwischenräder lediglich auf die Umdrehungsrichtung, welche bei einer geraden Anzahl derselben für das erste und letzte Rad ungleich, für eine ungerade Anzahl derselben gleich ist. Es haben somit das 1., 3., 5. . . und das 2., 4., 6. . . bzw. gleiche Drehungsrichtung.

Bei konischen Rädern (Fig. 192) muss man sich diese Drehung vom Durchschnittspunkte der Axen angesehen denken. Dieser Punkt ist die gemeinsame Spitze sämtlicher Grundkegel, und besitzen sämtliche berührende Erzeugenden gleiche Länge.

## b. Mehrfache Übersetzungen (Fig. 193 und 194).

Sind

$r_1 \ r_2 \ r_3 \dots r_x$  die treibenden Räder auf den Axen  
 $A_1 \ A_2 \ A_3 \dots A_x$ ,  
 $R_1 \ R_2 \ R_3 \dots R_x$  die getriebenen Räder auf den Axen  
 $A_2 \ A_3 \ A_4 \dots A_{x+1}$ ,  
 $n_1 \ n_2 \ n_3 \dots n_{x+1}$  die Umdrehungszahlen der gleichbezeichneten Axen,

so ist

$$n_1 = \dots \dots \dots n_1 \dots \dots \dots = n_1,$$

$$n_2 = \dots \dots \dots n_1 \frac{r_1}{R_1} \dots \dots \dots = n_1 \frac{z_1}{Z_1},$$

$$n_3 = n_2 \frac{r_2}{R_2} = n_1 \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2} \dots \dots = n_1 \frac{z_1}{Z_1} \cdot \frac{z_2}{Z_2},$$

.....

$$n_{x+1} = \dots \dots \dots n_1 \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2} \dots \frac{r_x}{R_x} = n_1 \frac{z_1}{Z_1} \cdot \frac{z_2}{Z_2} \dots \frac{z_x}{Z_x}.$$

Solche mehrfache Übersetzungen sind nötig, um grosse Differenzen in den Umdrehungszahlen der ersten und letzten

Fig. 193.

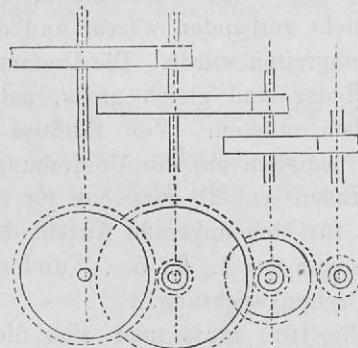
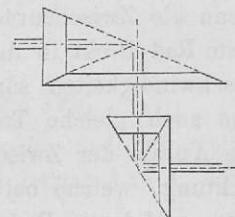


Fig. 194.



Axe zu vermitteln, was sich wohl theoretisch, praktisch jedoch sehr oft nicht mit einem einzigen Räderpaare erreichen lässt.

Ist dabei die Anzahl der Rädereingriffe oder Übersetzungen  $= x$ , so ist die Anzahl der benötigten Axen  $= x + 1$ .

Sind sämtliche Übersetzungen, d. h. Halbmesser- oder Zahnzahlverhältnisse gleich und zwar  $= i$ , ferner die totale Übersetzung  $= J$ , so ergibt sich

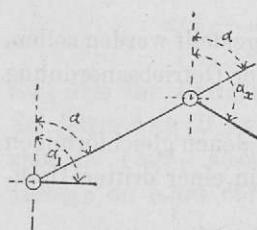
$$n_{x+1} = n_1 i^x,$$

$$i = \sqrt[x]{\frac{n_{x+1}}{n_1}} = \sqrt[x]{J}.$$

## 2. Epizyklische Getriebe.

Das Wesentliche eines epizyklischen Getriebes lässt sich in folgendem darstellen: Zwischen zwei Axen ist eine Getriebsverbindung derart hergestellt, dass mindestens eine Axe dieses Zwischengetriebes auf einem Hebel gelagert ist, der um eine der Hauptaxen drehbar ist. Diese als Drehungsaxe des Hebels dienende Axe heisse die erste, das darauf befestigte Rad sei mit  $r_1$  und dessen Drehung (absolut gedacht) mit  $\alpha_1$  bezeichnet.

Fig. 195.



Bezieht man diese Drehung, sowie auch diejenige der letzten Axe  $\alpha_x$  und des Hebels  $= \alpha$  auf eine feste Linie im Raum, z. B. eine vertikale (Fig. 195), so lassen sich die gleichzeitigen relativen Drehungen der beiden Räder gegen den ruhend gedachten Hebel darstellen durch

$$\alpha_1 - \alpha \text{ und } \alpha_x - \alpha.$$

Bei ruhend gedachtem Hebel sei ferner die durch das Zwischengetriebe hergestellte Übersetzung zwischen der ersten und der letzten Axe  $= J$ , so kann jedenfalls gesetzt werden

$$(\alpha_x - \alpha) = (\alpha_1 - \alpha) J \dots \dots \dots 173)$$

Der Drehungssinn muss so aufgefasst werden, dass bei ruhendem Hebel für gleiche Drehung des ersten und letzten Rades  $J$  positiv, für ungleiche Drehungsrichtung aber negativ gesetzt wird. Aus dieser Gleichung folgen nun folgende drei,

welche die hauptsächlichen Bewegungsverhältnisse des ersten und letzten Rades sowie des beweglichen Hebels klar stellen:

$$\alpha = \frac{\alpha_x - \alpha_1 J}{1 - J}, \dots \dots \dots \quad 174)$$

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{\alpha_x - \alpha}{J}, \dots \dots \dots \quad 175)$$

$$\alpha_x = \alpha + (\alpha_1 - \alpha) J. \dots \dots \dots \quad 176)$$

Handelt es sich um gleichförmige Drehungen, so kann anstatt der in gleichen Zeiten erfolgenden Drehungen um die Winkel  $\alpha_1$ ,  $\alpha_x$  und  $\alpha$  auch die Tourenzahl

$n_1$ ,  $n_x$  und  $n$

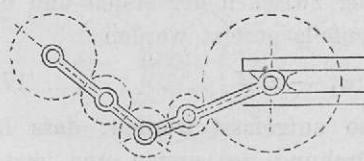
gesetzt werden.

Anwendung finden epizyklistische Vorgelege vor allem in folgenden Fällen:

1. Wenn die epizyklistische Bewegung, d. h. die Bewegung eines ein Zwischengetriebe tragenden Hebels selbst Zweck ist, oder wenn Axen mit veränderlicher Lage verbunden werden sollen,
2. wenn Übersetzungsverhältnisse hergestellt werden sollen, deren Ausführung mit gewöhnlicher Getriebsanordnung schwierig ist,
3. wenn der Einfluss von zwei verschiedenen gleichförmigen oder ungleichförmigen Drehungen in einer dritten Drehung sich combinieren soll.

Beispiele:

Fig. 196.



Zu Gattung 1) a. Hierher gehört das Rädergehänge, in Fig. 196 mit Stirnrädern durchgeführt, aber auch mit Kegelrädern herzustellen.\*.) Es besteht dieses aus 2 kombinierten epizyklistischen Getrieben.

\*) Siehe „The Engineer“ vol. 38 S. 248.

für das eine ist  $A_1$  die erste feste Axe,  
 $A_x$  die letzte Axe,

für das zweite  $A_x = B_1$  die erste Axe,  
 $B_x$  die letzte Axe,

und gelten daher folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha + \frac{\alpha_x - \alpha}{J_1}, \\ \alpha_x = \alpha + (\alpha_1 - \alpha) J_1. \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} \beta_1 = \beta + \frac{\beta_x - \beta}{J_2}, \\ \beta_x = \beta + (\beta_1 - \beta) J_2. \end{array} \right.$$

Soll nun die Verschiebbarkeit der Axen auf die schliessliche Bewegung keinen Einfluss haben, so muss für

$$\alpha_1 = 0 \text{ auch } \beta_x = 0 \text{ werden.}$$

Dies ist dann der Fall, wenn gleichzeitig

$$\alpha_x = \alpha (1 - J_1), \text{ und } \beta_1 = \beta \left(1 - \frac{1}{J_2}\right);$$

weil aber das letzte Rad des ersten Systemes auf der Axe  $A_x$  identisch ist mit dem ersten Rade des zweiten Systemes auf der Axe  $B_1 = A_x$ , also auch die absolute Drehung  $\alpha_x = \beta_1$ , so folgt

$$\alpha (1 - J_1) = \beta \left(1 - \frac{1}{J_2}\right) \dots \dots \dots \quad (177)$$

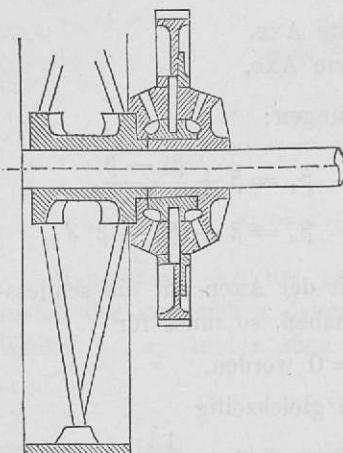
Soll also die Bewegungsübertragung von der ersten ( $A_1$ ) auf die letzte Axe ( $B_x$ ) vor sich gehen, unabhängig von der wechselnden Lage, also von der Drehung  $\alpha$  und  $\beta$  der beiden Hebel, so muss der letzten Gleichung genügt werden durch

$$J_1 = J_2 = +1, \dots \dots \dots \quad (178)$$

d. h. die Grösse der Zwischenräder ist gleichgültig, und müssen nur die Endräder auf jedem Hebel gleich gross sein; aus dem + Zeichen aber folgt, dass die Drehung aller Endräder in gleichem Sinne erfolgen soll, d. h. dass auf jedem Gelenke eine ungerade Anzahl von Zwischenräder sich finden muss.

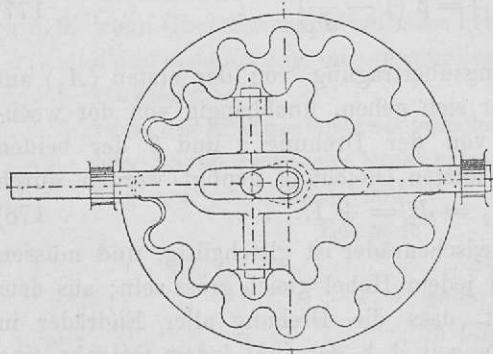
b. Als weiteres hierher gehöriges Beispiel kann das Triebwerk einer Strassenlokomotive erwähnt werden. (Fig. 197.) Hierbei ist nur das eine der beiden Triebräder auf der Triebaxe fest, das andere dagegen durch ein Differentialräderwerk mit derselben verbunden, sonst aber lose auf der Axe drehbar.

Fig. 197.



Triebräder ihre gegenseitige Stellung ändern. Diese dadurch veranlasste selbständige Beweglichkeit beider Triebräder ist insbesondere für die Bewegung in Kurven von grossem Werte.\*)

Fig. 198.



in Eingriff befindliches aussen verzahntes; das letztere ist derart in dem beweglichen Hebel gelagert (in Ausführung auf einem auf der ersten Axe sitzenden Exzenter), dass es

So lange die Bewegung auf gerader Bahn vor sich geht und der Widerstand beider Triebräder konstant ist, bleibt auch wegen des durchweg gleichen Zahndruckes zwischen sämtlichen konischen Rädern der Differentialmechanismus in Ruhe. Beide Triebräder bewegen sich dann mit vollkommen gleicher Geschwindigkeit miteinander. Sobald jedoch der Widerstand nicht auf beide Triebräder in gleicher Grösse wirkt, wird eine Bewegung in den Rädern des Differentialmechanismus entstehen, und werden die beiden

#### Zu Gattung 2.

Die Benützung eines epizyklichen Getriebes zur Herstellung grosser Übersetzungen zeigt der Eadesche Flaschenzug. (Fig. 198.) Hierbei ist das erste Rad ein innen verzahntes, das letzte ein mit demselben

\*) Auch die Verbindung der beiden Drahtseilrollen mit der zugehörigen Axe beim alten Wasserwerk Schaffhausen ist nach gleichem Prinzip durchgeführt.

an der Kreisbewegung desselben teilnehmen muss, selbst aber an der Drehung verhindert ist. Da nun demgemäß hier  $\alpha_x = 0$  gesetzt werden muss, so folgt

$$\alpha_1 = \alpha \left(1 - \frac{1}{J}\right).$$

Die Übersetzung bei ruhendem Hebel ist hier

$$J = + \frac{Z_1}{Z_x},$$

wobei  $Z_1$  und  $Z_x$  die Zahnzahlen des ersten und des letzten Rades sind, folglich wird hier

$$\alpha_1 = \alpha \left(1 - \frac{Z_x}{Z_1}\right). \quad \dots \dots \dots \quad (179)$$

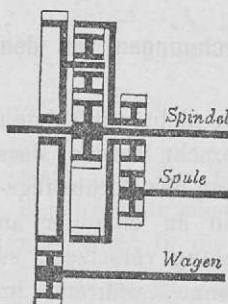
Wird nun hierin beispielsweise  $Z_x = Z_1 - 1$  gemacht, so wird

$$\alpha_1 = \alpha \left(1 - \frac{Z_1 - 1}{Z_1}\right) = \alpha \frac{1}{Z_1}.$$

Hierher gehören auch die zur Bewegung mannigfaltiger Uhr- und Planetenwerke dienenden Anordnungen.

Zu Gattung 3. kann als Beispiel das bei Spinnmaschinen benützte epizyklische oder Differentialräderwerk erwähnt werden,

Fig. 199.



wobei bei konstanter Spindeldrehung die Spulendrehung nach Massgabe der Aufwickelung des Gespinnstes reguliert werden muss. Man findet hiebei epizyklische Vorgelege mit konischen und mit zylindrischen Rädern. In Fig. 199 ist ein solches mit zylindrischen Rädern schematisch dargestellt, und ergibt sich dabei aus der Drehung  $n_1$  der ersten (Spindel-) Axe und derjenigen  $n$  des epizyklischen Hebels (hier zum Wagen- antrieb dienend, als Rad ausgeführt) die kombinierte Bewegung der letzten (Spulen-) Axe durch die Gleichung

$$n_x = n + (n_1 - n) J_1.$$

Da hierin  $n_1$  konstant,  $n$  aber variabel ist, d. h. die Wagenbewegung mit variabler Geschwindigkeit vor sich geht, so muss auch  $n_x$  variabel werden.

*Abstellungsvorrichtungen.* Der Betrieb zweier Wellen durch Zahnräder kann unterbrochen werden, indem man entweder die Verbindung eines derselben mit seiner Welle aufhebt oder die beiden zusammenarbeitenden Räder ausser Eingriff bringt. Zur auslösbarer Verbindung der Räder mit ihren Wellen dienen die auslösbarer Kupplungen, und zwar Klauen- oder Frik-tionskupplungen. Die In- oder Ausser-Eingriffsetzung zweier Räder kann durch Bewegung des einen derselben nach axialer oder radialer Richtung erreicht werden, selbstverständlich aber nur während des Stillstandes. Während die Verschiebung der Räder samt ihren Axen nach radialer Richtung stets wegen der hiezu nötigen Anordnung beweglicher Lager unbequem und selten angewandt ist, finden wir für die andere Anordnung der axialen Verschiebung der Zahnräder mit oder auf ihren Axen viele Beispiele insbesondere bei den Hebemaschinen. Werden die Räder auf den Axen verschoben, so geschieht dieses durch Ausrückgabeln, welche wie bei den auslösbarer Kupplungen (Fig. 81) in eine an der Radnabe angebrachte Ringnute eingreifen oder auch durch Schrauben, welche an der Radnabe angreifen.

## VI. REIBUNGSRÄDER.

### § 35. Allgemeine Anordnungen und Berechnungen für den Reibungsbetrieb.

Wenn die theoretischen Radgrundformen nicht mit Zähnen versehen, sondern derart in Berührung gebracht werden, dass dieselben sich durch die infolge des Druckes an der Berührungsstelle entstehende Reibung, durch Anhaftan an einander an der Berührungsstelle, gegenseitig in Bewegung versetzen, so erhält man *Reibungsbetrieb* im engeren Sinne, während im weiteren Sinne auch die Bewegungsübertragung durch Riemen, Drahtseile u. s. w. als Reibungsbetrieb zu betrachten ist. Die Radgrundformen berühren sich in diesem Falle nur nach einer geraden Linie, der relativen Momentanaxe, und ist dann die

relative Bewegung der beiden Radkörper ein Rollen des einen auf dem andern im allgemeinen in Verbindung mit einem Gleiten längs der Momentanaxe. Von den hiezu passenden theoretisch denkbaren Radformen finden sich in der Praxis nur wenige ausgeführt, nämlich nur einfach zylindrische Räder zur Verbindung zweier paralleler Axen (Fig. 200), sich berührend nach einer parallel zu den beiden Rotationsachsen liegenden Geraden, und die einfach konischen Räder zur Verbindung zweier sich schneidender Axen (Fig. 201), sich berührend nach einer geraden Kegelerzeugenden.

Fig. 200.

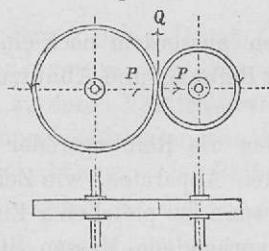
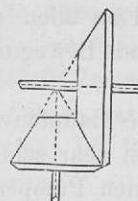
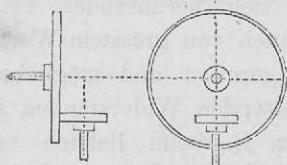


Fig. 201.



Nimmt man die benützte Länge der Berührungsline unendlich klein an, so lassen sich für die Verbindung zweier sich schneidender Axen auch zwei ebene Scheiben benützen, bei welchen die Peripherie der einen mit der Ebene der andern in Berührung steht (Fig. 202). Sowie aber die erstere eine messbare Dicke erhält, was bei praktischen Ausführungen der Fall sein muss, so findet die Berührung der beiden nicht mehr

Fig. 202.



allein in der relativen Momentanaxe statt, und folgt hieraus eine nicht mehr rein rollende, sondern eine noch hinzukommende schleifende Bewegung, deren Richtung aber nicht in die Richtung der relativen Momentanaxe fällt. \*)

\*) Dr. Fr. Schilling weist darauf hin, dass das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten hyperbolischer Reibungsräder seinen Wert ändert, je nachdem das eine oder das andere Rad das treibende ist, je nachdem die tatsächlich benutzten Teile der Hyperbole in grösserer oder geringerer Entfernung von den Kehlkreisen liegen. (Zeitschr. f. Math. und Physik. 42. Jahrg. 1. Heft.)

Eine Abweichung von der lediglich rollenden Bewegung tritt ferner auf, wenn man zur Erzeugung grösserer Reibung von der theoretischen Radgrundform in der Weise abweicht, dass man die beiden Radumfänge keilförmig ineinander eingreifen lässt.

In allen Fällen werden die Halbmesser der lediglich aufeinander rollenden Kreise gegeben sein durch die früher entwickelte Formel,

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{n_1}{n_2} = \mp \frac{w_1}{w_2},$$

während an allen andern Stellen ausserdem noch eine relative schleifende Bewegung und daher Reibung und Abnutzung stattfindet.

Ihre Hauptanwendung finden die Reibungsräder zum Betrieb von sehr schnell rotierenden Apparaten, wie Zentrifugen, rotierenden Pumpen etc., oder wenn bei plötzlicher Einrückung des Antriebes durch grössere vorhandene Massen Stöße und Erschütterungen entstehen würden, zu deren Vermeidung man dem Getriebe eine gewisse Nachgiebigkeit zu geben sucht, indem man behufs allmählicher Einleitung der normalen Geschwindigkeit der getriebenen Transmissionsteile ein teilweises zeitweiliges relatives Schleifen der sich berührenden Teile gestattet. Ein solches Schleifen ist auch von grösstem Werte, wenn Arbeitsmaschinen mit sich steigernden und möglicherweise die Festigkeitsgrenze überschreitenden Widerständen zu betreiben sind, ein Fall, welcher z. B. beim Betrieb von Schraubenpressen eintreten kann.

Wenn auch ein gleicher Zweck durch Riemscheiben erreicht werden kann, so ist deren Benützung doch bei geringer Axenentfernung sowie auch bei zu grosser Geschwindigkeit, bei welcher die Adhäsion des Riems durch die Zentrifugalkraft gestört wird, oft nicht gut angängig.

Das an der Berührungsstelle durch den Druck  $Q$  der Radumfänge gegen einander entstehende gegenseitige Anhaften  $F$  muss mindestens so gross sein, wie der auf den Halbmesser der Berührungsstelle reduzierte Widerstand  $P$ ,

oder

$$F \geq P.$$

Nimmt man zunächst für Verbindung paralleler Axen zylindrische Reibungsräder an, so müssen dieselben an der Berührungsstelle mit einem Normaldruck  $N$  auf einander einwirken, durch welchen eine Reibung  $N\mu$  entsteht, für welche sonach gilt

$$N\mu \geq P,$$

oder weil hier

$$N = Q,$$

so gilt auch

$$Q \geq \frac{P}{\mu} \quad \dots \dots \dots \quad (180)$$

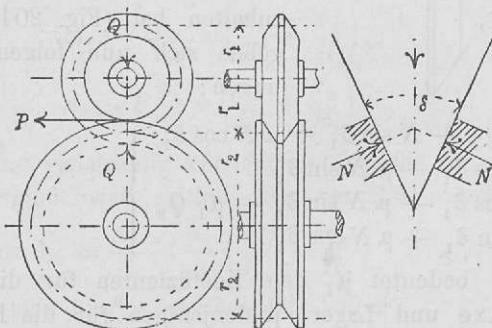
Mit dem gleichen Druck  $Q$  reagieren die Axen gegen ihre Lager, und verursachen dort wieder Reibung sowie auch Abnutzung, zu deren Verkleinerung eine thunlichste Vergrösserung des Reibungskoeffizienten  $\mu$  an der Mitnehmestelle zu erstreben ist.

Dabei können als Reibungskoeffizienten in Rechnung gebracht werden für die trockene Berührung

- von Eisen und Eisen . . . . .  $\mu = 0,15$ ,
- » Eisen » Papier oder Holz . . . = 0,20,
- » Eisen » Leder oder Kautschuk = 0,25.

Das gegenseitige Anhaften kann vergrössert werden, wenn man die beiden Radumfänge keilförmig in einander eingreifen

Fig. 203.



lässt (Fig. 203), und gilt dabei für die Beziehung zwischen dem an den Keilseiten erzeugten Normaldruck  $N$  und dem in der Richtung der Axen-Verbindungslinie wirkenden Drucke  $Q$

dieselbe Gleichung, welche für den Eingriff kegelförmiger Kupplungen entwickelt wurde.

$$Q = 2N \left( \sin \frac{\delta}{2} + \mu \cos \frac{\delta}{2} \right) \dots \dots \dots 181)$$

Ebenso muss auch hier

$$2N\mu R \geq M$$

sein, woraus

$$Q \geq \frac{M}{R\mu} \left( \sin \frac{\delta}{2} + \mu \cos \frac{\delta}{2} \right),$$

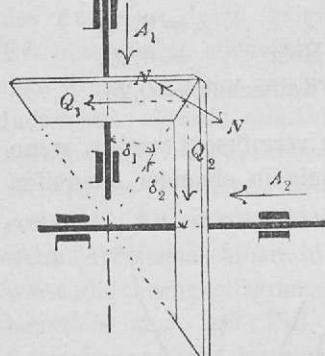
oder

$$Q \geq \frac{P}{\mu} \left( \sin \frac{\delta}{2} + \mu \cos \frac{\delta}{2} \right) \dots \dots \dots 182)$$

Konische Friktionsräder erhalten dadurch den nötigen Normaldruck  $N$ , dass das eine derselben mit einem Drucke  $A_1$

Fig. 204.

in der Richtung seiner Drehungs-  
axe gegen das andere bewegt,  
und so eine Art Keilwirkung  
erzeugt wird. In Folge davon  
wird auch die Axe des ersten  
mit einem Drucke  $Q_1$  und die-  
jenige des zweiten Rades mit einer  
Kraft  $Q_2$  gegen ihre Lager gepresst,  
während das letztere Rad auch  
noch einen axialen Druck  $A_2$  aus-  
zuhalten hat (Fig. 204). Es er-  
geben sich nun folgende Gleich-  
ungen:



$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \mu_1 Q_1 + N \sin \delta_1 + \mu N \cos \delta_1 \\ Q_1 &= N \cos \delta_1 - \mu N \sin \delta_1 \\ A_2 &= N \cos \delta_1 - \mu N \sin \delta_1 - \mu_1 Q_2 \\ Q_2 &= N \sin \delta_1 + \mu N \cos \delta_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 183)$$

Hiebei bedeutet  $\mu_1$  den Koeffizienten für die Reibung zwischen Axe und Lager,  $\mu$  denjenigen für die Reibung an den Radumfängen. Aus diesen 4 Gleichungen folgen die axialen Drucke

$$\begin{aligned} A_1 &= [(1 - \mu \mu_1) \sin \delta_1 + (\mu + \mu_1) \cos \delta_1] N, \\ A_2 &= [(1 - \mu \mu_1) \cos \delta_1 + (\mu + \mu_1) \sin \delta_1] N, \end{aligned}$$

und hieraus mit  $\mu = \operatorname{tg} \rho$  und  $\mu_1 = \operatorname{tg} \rho_1$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = \frac{\sin \delta_1 + \cos \delta_1 \operatorname{tg}(\rho + \rho_1)}{\cos \delta_1 - \sin \delta_1 \operatorname{tg}(\rho + \rho_1)} = \operatorname{tg}(\delta_1 + \rho + \rho_1) \\ A_2 = \frac{\sin \delta_1 + \mu \cos \delta_1}{\cos \delta_1 - \mu \sin \delta_1} = \operatorname{tg}(\delta_1 + \rho) \end{array} \right\} . 184)$$

Ebenso erhält man

$$\left. \begin{array}{l} Q_2 = \frac{\sin \delta_1 + \mu \cos \delta_1}{\cos \delta_1 - \mu \sin \delta_1} = \operatorname{tg}(\delta_1 + \rho) \end{array} \right\} . 184)$$

Bei Vernachlässigung sämtlicher Reibungen, welche sich beim Eindringen der Keilform an den Keilseiten und an den Lagerstellen ergeben, erhält man annähernd

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = N \sin \delta_1 = Q_2 \geq \frac{P}{\mu} \sin \delta_1, \\ A_2 = N \cos \delta_1 = Q_1 \geq \frac{P}{\mu} \cos \delta_1. \end{array} \right\} . 185)$$

### § 36. Arbeitsverlust bei Reibungsrädern.

a. Bei zylindrischen Rädern ergibt sich ein Arbeitsverlust infolge des Druckes, mit welchem die beiden Radumfänge gegen einander, und mit welchem infolgedessen auch die zugehörigen Axen in ihre Lagerungsstellen gepresst werden. Ist dieser Druck  $= Q$ , der Koeffizient der Axenreibung  $= \mu_1$ , derjenige der Radumfangsreibung  $= \mu$ , die Umfangsgeschwindigkeit der Räder mit  $v$ , die Radhalbmeß und Axenhalbmeß mit  $R_1$  bzw.  $R_2$  und  $r_1$  bzw.  $r_2$  bezeichnet, so ist der aus der Axenreibung sich ergebende Arbeitsverlust für die beiden

Axen  $A_r = Q \mu_1 v \left( \frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2} \right)$ ,

oder  $A_r \geq P \frac{\mu_1}{\mu} v \left( \frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2} \right)$ , . . . . . 186)

während die gleichzeitig verrichtete nützliche Arbeit  $A = P v$ .

Es ergiebt sich mithin der verhältnismäßige Arbeitsverlust mit  $V_o = \frac{A_r}{A} \geq \frac{\mu_1}{\mu} \left( \frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2} \right)$  . . . . . 187)

Setzt man hierin des Beispiels halber

$$\mu = 0,15,$$

$$\mu_1 = 0,10,$$

$$\frac{r_1}{R_1} = 0,2, \quad \frac{r_2}{R_2} = 0,1,$$

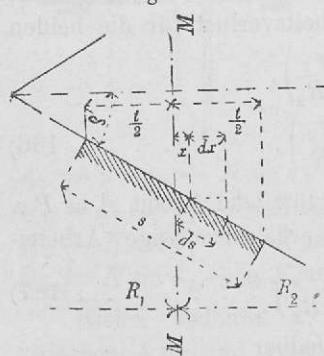
so wird

$$V_a > \frac{0,1}{0,15} (0,2 + 0,1) \text{ oder } V_a > 0,2, \text{ d. h. mindestens } 20\%.$$

Diese bedeutende Höhe des verhältnismässigen Arbeitsverlustes weist darauf hin, den Axendruck  $Q$  thunlichst zu verkleinern, was — wie gezeigt — durch Annahme eines keilförmigen Eingriffes geschehen kann. Allerdings ergibt sich dann auch ebendortselbst eine besondere Reibung und daher ein neuer Arbeitsverlust. Die Bestimmung des Gesamt-Arbeitsverlustes bei Keilrädern kann auf nachstehende Weise stattfinden:

Die gesamte schädliche Reibung setzt sich zusammen aus der Reibung am Keileingriff und derjenigen an den Axenlagerungen. Die erstere entsteht dadurch, dass eine rein rollende Bewegung nur an den beiden theoretischen Kreisen von den Halbmessern  $R_1$  und  $R_2$  stattfindet, während allen übrigen Berührungsstellen der Keilformen relativ schleifende Bewegung zukommt. Die relative Bewegung zweier Räder mit parallelen Axen, also auch der fraglichen Keilräder, ist eine Drehung um die Momentanaxe, d. h. um eine mit der theoretischen Radberührungsline zusammenfallende Zylindererzeugende, und zwar mit einer resultierenden relativen Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ . In Fig. 205 sei ein ebener Schnitt durch die beiden Räder an der Stelle des Keileingriffes dargestellt. Dieser Schnitt enthalte die beiden Drehungssachsen (in Fig. 205 nicht sichtbar); er enthält daher auch die Momentanaxe der relativen Bewegung =  $MM$ ; die Berührung der Keilflächen finde statt nach der Ausdehnung der Linie  $s$ , und senkrecht dazu auf die Breite = 1, und befindet sich ein Element dieser Berührungsline

Fig. 205.



$ds$  in dem Abstande  $x$  von der Momentanaxe; sonach ist zunächst

$$ds = \frac{dx}{\cos \frac{\delta}{2}}.$$

Auf dieses Element der Berührungsfläche wirke der als konstant über die Berührungsfläche verteilt angenommene spezifische Normaldruck  $= p$ , so dass die hiedurch auf dem Element  $ds$  veranlasste Reibungsarbeit sich ausdrückt durch

$$dA_{r_1} = p \mu \frac{dx}{\cos \frac{\delta}{2}} x \omega,$$

und daher die ganze Reibungsarbeit auf die ganze Eingriffstiefe  $t$

$$A_{r_1} = \frac{p \mu \cdot \omega}{\cos \frac{\delta}{2}} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} x dx = \frac{p \cdot \mu \cdot \omega}{\cos \frac{\delta}{2}} \cdot \frac{t^2}{4} \dots \dots \dots 188)$$

Hierin ist nun zu setzen

$$p \frac{t}{\delta} = ps = N,$$

sowie

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = v \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

folglich wird die ganze Reibungsarbeit auf einer Keilseitenfläche

$$A_{r_1} = N \mu v \frac{t}{4} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

und für beide Keilseiten

$$2A_{r_1} = N \mu v \frac{t}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

endlich für den Grenzfall der gerade genügenden Zusammenpressung mit  $2N\mu = P$

$$2A_{r_1} = Pv \frac{t}{4} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \dots \dots \dots 189)$$

Hiezu kommt noch der Arbeitsverlust, welcher durch die Axenreibung veranlasst wird. Der Druck zwischen Axe und Lager

ist

$$Q = 2N \left( \sin \frac{\delta}{2} + \mu \cos \frac{\delta}{2} \right),$$

mithin die Reibungsarbeit für eine Axe

$$A_{r_2} = Q \mu_1 v \frac{r_1}{R_1},$$

daher für beide Axen mit dem Grenzwert  $2 N \mu = P$

$$2 A_{r_2} = P \frac{\mu_1}{\mu} \left( \sin \frac{\delta}{2} + \mu \cos \frac{\delta}{2} \right) v \left( \frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2} \right), \dots 190)$$

und die gesamte Reibungsarbeit

$$A_r = 2 A_{r_1} + 2 A_{r_2} \\ = Pv \left\{ \frac{t}{4} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{\mu_1}{\mu} \left( \sin \frac{\delta}{2} + \mu \cos \frac{\delta}{2} \right) \left( \frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2} \right) \right\} \dots 191)$$

Setzt man hierin noch, um zu einer einfachen Formel zu gelangen,  $r_1 = r_2$ , so wird

$$A_r = Pv \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left\{ \frac{t}{4} + \frac{\mu_1}{\mu} \left( \sin \frac{\delta}{2} + \mu \cos \frac{\delta}{2} \right) r_1 \right\} \dots 192)$$

sowie wieder die gleichzeitig verrichtete nützliche Arbeit

$$A = Pv.$$

Mit den beispielsweise angenommenen Werten

$$\begin{array}{ll} R_1 = 100, & t = 15, \\ R_2 = 400, & \mu = 0,15, \\ r_2 = r_1 = 25, & \mu_1 = 0,1, \end{array}$$

wird der verhältnismässige Arbeitsverlust

$$V_a = \frac{A_r}{A} = 0,13 \text{ oder mindestens } 13\%.$$

### § 37. Konstruktive Ausführung der Reibungsräder.

Der Radkörper wird betreffs seines Halbmessers und der Stärke von Nabe, Armen und Radkranz nach den für Zahnräder gegebenen Regeln ausgeführt, der Radkranz bei Ausführung in Gusseisen, der theoretischen Form des Radumfangs entsprechend, glatt abgedreht. Ein Lederbesatz wird durch Aufleimen eines Lederstreifens (Fig 206) oder dadurch hergestellt, dass man eine Anzahl Lederplatten zwischen zwei

guss- oder schmiedeiserne Scheiben fest durch Schrauben ein-  
presst (Fig. 207). Auf ähnliche Weise wird auch (Fig. 208)

Fig. 206.

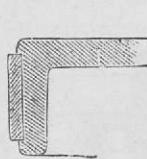


Fig. 207.

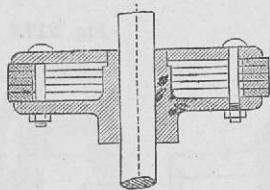
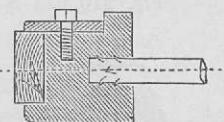
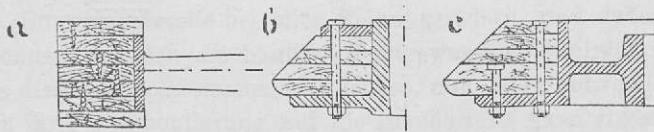


Fig. 208.



ein Holzring um den Radkranz gelegt und gegen denselben durch einen schmiedeisernen Ring und Kopfschrauben befestigt. Andere Arten der Herstellung des äusseren Umfanges der Reibungsräder aus Holz zeigen noch Fig. 209 (a, b und c).

Fig. 209.



Die Radbreite lässt sich, da die Grösse der Reibung von der Ausdehnung der Berührungsfläche unabhängig ist, nicht theoretisch bestimmen. Es wird angegeben, ein Millimeter Radbreite könne bei Ahornholz  $1/2$  kg, bei andern Holzarten  $1/4$  bis  $3/8$  kg Umfangskraft übertragen.

Jedenfalls sollen die Fasern ungefähr in der Richtung des Umfangs laufen, d. h. gegen den Umfang hin sich kein Hirnholz zeigen, und wenn nur eines der beiden Räder Holzbeleg erhält, so soll dies beim treibenden der Fall sein, da sonst bei etwaigem Schleifen an dem Umfange des getriebenen Holzrades sich Flächen erzeugen, welche die zylindrische Lauffläche unterbrechen. Beim Betrieb von Zentrifugen findet man vornehmlich die Verbindung eines grösseren konischen Rades mit eiserner Reibungsüberfläche mit einem kleineren konischen Triebrad aus Papier. Zur Herstellung eines Papierkegels (Fig. 210) wird vorher auf die zugehörige Welle eine Guss-eisenscheibe mit langer Nabe und auf diese Papier- oder Papp-scheiben bis zur genügenden Höhe gesteckt. Die letzteren

werden durch die aufgelegte Schlussscheibe mittelst kräftigen Druckes von einer hydraulischen oder Schraubenpresse komprimiert, wonach eine auf das Axenende aufgesetzte Mutter

Fig. 210.

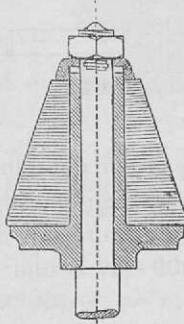
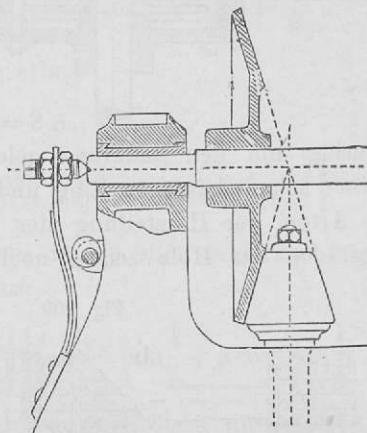


Fig. 211.



die Schlussscheibe an ihrer Stelle und die Papierlage in ihrem komprimierten Zustande erhält. Fig. 211 zeigt die Anordnung des Betriebes einer Zentrifuge, wobei der nötige Raddruck durch eine Feder hervorgebracht wird.

Bei keilförmigem Eingriff von Reibungsrädern ist die Eingriffstiefe möglichst gering zu machen, um die in Folge der verschiedenen Geschwindigkeiten beider Räder an den Keilflächen sich ergebende Abnützung und Reibung zu reduzieren. Der Keilwinkel an dessen Spitze wird im Mittel zu  $30^\circ$  genommen.

Die Anzahl der eingreifenden Keilbahnen, welche sich von 1 bis 6 findet, hat keinen Einfluss auf den Druck, mit welchem zwei solche Räder zusammengepresst werden müssen, da bekanntlich die Reibung unabhängig ist von der Grösse der sich reibenden Flächen, wohl aber wird bei grösserer Anzahl der Keilrillen die Abnützung in jeder einzelnen Rille geringer.

Eine zuverlässige auf Festigkeitsgleichungen basierte Berechnung für die Stärken der in einander eingreifenden Keile kann nicht durchgeführt werden, und darf die durchschnittliche und mittlere Stärke gleich der Stärke  $\alpha$  der gusseisernen Zähne

von Zahnrädern genommen werden (Fig. 212 und 213). Die

Eingriffstiefe trägt man zu  $\frac{\alpha}{2}$  über und  $\frac{\alpha}{2}$  unter dem Rad-

Fig. 212.

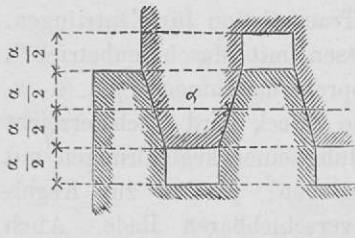
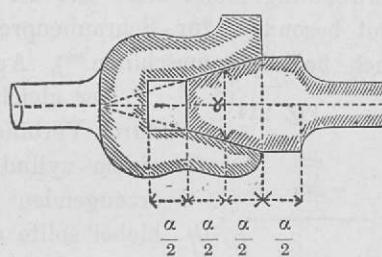


Fig. 213.



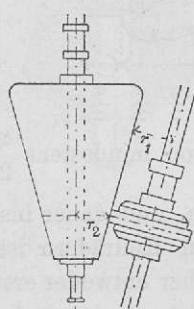
kreise auf, und lässt noch einen Spielraum von mindestens  $\frac{\alpha}{2}$ .

Eine Hauptsache bei allen Reibungsrädern, und daher insbesondere bei den am häufigsten angewandten Keilräder ist, dass dieselben vollkommen rund laufen, und daher entweder erst nach ihrer Aufmontierung auf die zugehörigen Axen abgedreht, oder auf konische Wellenstücke aufgepasst werden. Auch muss es aus gleichem Grunde zweckmässig erscheinen, die Axen an ihren Lagerstellen konisch zu formen, so dass auch bei erfolgter Ausnutzung die axiale Lage erhalten werden kann. Das Aufkeilen zylindrisch ausgebohrter Nabenscheiben von Reibungsrädern auf zylindrische Wellen würde unfehlbar eine gegen die letzteren exzentrische Lage der Radumfänge und somit veränderlichen Raddruck zur Folge haben. Um eine trotz aller Vorsicht entstehende Exzentrizität des Radumfanges auszugleichen, sollte das Anpressen des einen verschiebbaren Rades stets mit zu Hilfenahme eines elastischen Mittels (Stahlfedern, Kautschukpuffer oder Dampf etc.) geschehen.

Reibungsbetrieb mit variablem Geschwindigkeitsverhältnisse wird erreicht bei Verbindung zweier sich schneidender Axen mittelst einer mit der einen Welle verbundenen Planscheibe und eines mit oder auf der andern Welle verschiebbaren zylindrischen Reibungsrades (Fig. 202). Da die relative Bewegung zweier derartiger Räder mit messbarer Breite nicht mehr eine rollende ist, und bei hinzukommender gleitender

Bewegung stets Reibungswiderstand und Abnützung erzeugt wird, so sollte das mit der Planscheibe in Berührung stehende Reibungsrad eine ganz geringe Breite (Dicke) erhalten, oder noch besser schwach gewölbt gebildet werden, so dass die Berührung, wie von der Theorie verlangt, nur in *einem* Punkte stattfindet. Anwendung findet diese Art der Transmission für Zentrifugen, und besonders für Schraubenpressen mit Maschinenbetrieb\*), auch bei Spinnmaschinen\*\*), Appreturmaschinen\*\*\*) u. s. w.

Fig. 214.



Der gleiche Zweck wird auch erreicht durch Verbindung eines kegelförmigen mit einem zylindrischen, parallel zur Kegelerzeugenden verschiebbaren Rade. Auch hiebei sollte das letztere eine Scheibe von unendlich kleiner Dicke sein, damit die Berührung durch eine möglichst geringe Ausdehnung stattfinde, und daher Reibung und Verschleiss gering ausfalle. (Fig. 214)†) Letzteres ist der allgemeinste Fall, in Fig. 202 dagegen derselbe spezialisiert für einen Spitzwinkel des Kegels von  $180^\circ$ .

\*) The Engineer 1872. 20. Dez. Zeitschrift d. Ver. deutsch. Ing. Band IX, S. 25 u. s. w.

\*\*) Schweiz. polyt. Zeitschr. 1866 S. 66.

\*\*\*) Verh. d. Ver. f. Bef. d. Gewerbefl. 1866 S. 39.

†) The Eng. 1880 S. 404.