

Analytische Mechanik

nach

VORTRÄGEN

gehalten an der polytechnischen Schule

von

Dr. **A. CLEBSCH**

Professor.

KARLSRUHE

A. Bielefeld's Hofbuchhandlung.

I. II.

[48 53]

III A

1700



III A 1700

Geschenk
der
**KARLSRUHER
HOCHSCHULVEREINIGUNG**



Analytische Mechanik

P. 1. Geschwindigkeit. Beschleunigung. Kraft. Gleichungen für die Bewegung eines Punktes.

Unter der Geschwindigkeit eines gleichförmig, geradlinig bewegten Punktes versteht man die Strecke, welche er in einer Sekunde zurücklegt, oder allgemeinere das Linienelement zurückgelegter Distanz durch die Zeit, in welcher es zurückgelegt ist. Ist man es daher mit einer ungleichförmigen Bewegung zu thun, so kann man dieselbe auf unendlich kleine Zeittheile als gleichförmig betrachten, da innerhalb derselben die Geschwindigkeit sich nur unmerklich ändern kann. Dies wird in dieser Zeit der kleine Weg des zurückgelegten, so ist nach dem Obigen die augenblickliche Geschwindigkeit des Punktes gegeben, durch die Formel

$$1 --- v = \frac{ds}{dt}$$

Ersetzt man nun bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung unter Beschleunigung das Linienelement, welches der Geschwindigkeit in einer Sekunde, oder allgemeiner, der Zeiteinheit der Geschwindigkeit entspricht durch die Zeit, in welcher dasselbe auftritt, so kann man dieselbe auf unendlich kleine Zeittheile als gleichförmig beschleunigt ansehen. Entsprechend kann für die augenblickliche Beschleunigung den Ausdruck

$$2 --- p = \frac{dv}{dt}$$

oder auch wenn man es als das erste constante Differential aufstellt, mit welcher alle übrigen bezogen werden:

$$3 --- p = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Es ist also die Geschwindigkeit gleich dem ersten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit, die Beschleunigung aber gleich dem zweiten, oder auch gleich

Um nun den Differentialquotienten der Gesammtheit der Kräfte zu erhalten, so ist
 G der Gewicht des Punktes (kleiner Körper), g die Beschleunigung der Erreger,
 P die Kraft, welche erforderlich ist, den Punkt in der Richtung seiner Bewegung
 mit der Beschleunigung P anzukommen, so ist

$$P = \frac{Gg}{g}$$

oder indem wir die Formel 3. anwenden:

$$4 \dots P = \frac{G}{g} \frac{dv^2}{dt^2}$$

Diese Gleichung ist ab, welche die Aufgabe der Mechanik der Bewegung auf sich
 bezieht, welche unmittelbar darauf führt die Gleichung in der der allgemeinen
 Bewegung eines Punktes anzustellen. Denn in der That darf man sich nur erinnern,
 daß die Bewegung eines Punktes im Raum dargestellt wird durch drei verschiedene
 Bewegungen, welche seine Projectionen auf den Coordinatenachsen bedeuten, und, daß
 man sich jede dieser Projectionen in einem wirklichen Punkt vorstellen kann, auf
 welchen eine der Componenten der wirklichen Kräfte wirkt, welche nach der ent-
 sprechenden Achse der Coordinaten genommen sind. Betrachtet man also ein
 Punkt irgendwo im Raum, so kann man auf ihn ein Kräftesystem $P, P_2 \dots P_n$ wirken,
 und bezeichnen die Richtungen der einzelnen Kräfte mit den Achsen bezüglich die
 Winkel bilden $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$,
 so sind diejenigen Kräfte, welche auf die gedachten Projectionen des Punktes wirken:

$$x P, \cos \alpha + P_2 \cos \alpha_2 + \dots P_n \cos \alpha_n,$$

$$y P, \cos \beta + P_2 \cos \beta_2 + \dots P_n \cos \beta_n,$$

$$z P, \cos \gamma + P_2 \cos \gamma_2 + \dots P_n \cos \gamma_n,$$

so sind die Componenten der Resultanten des Kräftesystems. Aber die von den
 Projectionen beschriebenen Wege sind, wenn X, Y, Z den Bewegungszustand d. Bewegung
 bezeichnen, bezüglich

$$x - x_0, y - y_0, z - z_0,$$

Es seien die Geschwindigkeiten der Projectionen:

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$$

und die Beschleunigungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Wenn nun Kräfte vorhanden, wie angegeben, bezüglich der drei Kräfte x, y, z vor. vorgegeben sein sollen, so muß man auch 4 die Gleichungen haben:

$$\begin{aligned} 6 \dots \frac{G}{g} \frac{d^2x}{dt^2} &= X \\ \frac{G}{g} \frac{d^2y}{dt^2} &= Y \\ \frac{G}{g} \frac{d^2z}{dt^2} &= Z \end{aligned}$$

Und dieses sind die Gleichungen, welche die Bewegung eines Punktes bestimmen, wenn man irgendwelche beliebigen Kräfte vorgegeben ist.

§. 2. Differentialgleichungen in der Mechanik.

Die Gleichungen 6 zeigen, daß die Bewegung eines Punktes im Allgemeinen zweierlei ist, mit ein System von drei Differentialgleichungen 2. Ordnung, in welchen die Coordinaten der abhängigen Variablen sind, die Zeit aber die unabhängige. Denn indem die Kräfte, oder die Componenten x, y, z im Allgemeinen nach den Coordinaten des Punktes, nach der Zeit u. nach Größen und Richtung der Geschwindigkeit gegeben sein müssen, gibt es sich, daß mit den Gleichungen 6. die zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ gegeben sind nach den Größen

$$x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}.$$

Die Gleichungen 6. nehmen also die Form an:

$$\frac{dx^2}{dt^2} = f_1(x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$$

$$f_2 \dots \frac{dy^2}{dt^2} = f_2(x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$$

$$\frac{dz^2}{dt^2} = f_3(x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$$

Die Integration dieser Gleichungen gibt dann x, y, z als Funktionen von t an. Es fällt somit die Bestimmung des Problems. Überwacht der Zeit, also kommt in den Ortsrückwärtigen, welche man für x, y, z findet, sondern, was müssen wir b. prüfen, welche in den Gleichungen f_i nicht vorkommen, d. welche man ganz beliebige constante / gewisse belegen kann, ohne dass der Einfluss von x, y, z auf die Gleichungen f_i geändert wird. In der That, wenn man sich $a, a_2, \dots, a_6$ solche willkürliche Constanten beizulegen, so kann man sich x, y, z immer in der folgenden Form gegeben denken:

$$x = F_1(t, a, a_2, \dots, a_6)$$

$$y = F_2(t, a, a_2, \dots, a_6)$$

$$z = F_3(t, a, a_2, \dots, a_6)$$

Dann kann man sich mit diesen Gleichungen neue Gleichungen bilden, indem man für ein- oder zweimal nach t differenzirt, so erhält man in ganzen neuen quadratischen Gleichungen, in denen die Coordinaten mit ihren ersten oder zweiten Differentialquotienten vorkommen, müssen, um aber t und die a_i eliminiert man mit diesen neuen Gleichungen aber die sechs Constanten a , so bleiben nur drei Gleichungen übrig, welche allein t, x, y, z , und die Differentialquotienten der letzteren enthalten.

Bemerkt man, dass mit diesen die Größen $\frac{dx^2}{dt^2}, \frac{dy^2}{dt^2}, \frac{dz^2}{dt^2}$, so erhält man für denselben Ortsrückwärtigen ganz denselben Ort, wie für die Gleichungen f_i substituirt. Und so, wenn die drei Funktionen F_i irgend einen Ort

sein können, so wird man sie immer so bestimmen können, daß dieselben angegebenen
 Operationen in der $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ gegebenen Funktioneigenschaften werden. Man darf daher
 festsetzen, daß jedes System Σ in seiner Aufstellung der Form Σ entspricht, d. h. feste willkür-
 liche Konstanten mit sich führt. Die Aufgabe besteht in der That in der Aufstellung
 der willkürlichen Konstanten. Und diese kann man sich in folgender Weise bemerklich
 machen. Man sucht zuerst solche Combinationen der Gleichungen Σ mit, welche
 die Gestalt

$$\frac{dS}{dt} = 0$$

annehmen, wo S eine Funktion der Σ Größen t, x, y, z $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ ist, d. h. heißt voraus,
 daß jede derartige Funktion einer willkürlichen Konstanten gleich sein muß. Legt
 man drei solcher Funktionen auf, so daß man also die Gleichungen

$$g \dots S_1 = \alpha_1, S_2 = \alpha_2, S_3 = \alpha_3$$

gefunden hat, so kann man mittels der ersten Differentialquotienten dieselbe
 die sieben Größen $t, x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ausdrücken, d. h. erfüllt man die Gleichungen g ,
 welche man die ersten Integrale der Gleichungen Σ mit, Gleichungen d. folgenden Form:

$$\begin{aligned} 10 \dots \frac{dx}{dt} &= \Psi_1(t, x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ \frac{dy}{dt} &= \Psi_2(t, x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ \frac{dz}{dt} &= \Psi_3(t, x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \end{aligned}$$

Es ist, man sich mittels nicht mehr Combinationen dieser Gleichungen von der Form
 $dx = 0$ oder X eine Funktion von $t, x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, bezieht, d. h. hat man drei
 solcher Combinationen gefunden, so erfüllt man die Gleichungen

$$11 \dots X_1 = \alpha_4, X_2 = \alpha_5, X_3 = \alpha_6$$

Und diese Gleichungen geben dann x, y, z als Funktionen der Größen $t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$,
 indem sie sich nur noch der Form nach von den Gleichungen Σ unterscheiden.

Die Integration eines Systems ist daher nur dann vollständig bestimmt, wenn

von 13

6.

Der auf ihn wirkenden Kräfte sein Ort zu Anfang der Bewegung so wie Richtung und Größe sei mir Anfangsgeschwindigkeit gegeben ist. Dies führt zur Bestimmung derjenigen Werts, welche man den Constanten α für ein bestimmtes unabhängiges Problem zu schreiben hat. Es seien x_0, y_0, z_0 die gegebenen Coordinaten des Punktes zur Zeit $t=0$, und u_0, v_0, w_0 die Anfangsgeschwindigkeit, welche Richtung und Größe derselben bestimmen. In den Gleichungen I darf man dann gleichzeitig setzen

$$t=0 \quad x=x_0 \quad y=y_0 \quad \dots \quad \frac{dx}{dt} = u_0 \quad \text{etc.},$$

und es fällt dann $\alpha, \alpha_2, \alpha_3$ ausgedrückt durch die bekannten, bestimmungsgroßen der Anfangsgeschwindigkeit. Nachdem aber auf diese Weise die Constanten $\alpha, \alpha_2, \alpha_3$ bestimmt sind, kann man die Werts derselben in die Gleichungen II einführen, setzt man in diesen dann $t=0$, also $x=x_0, y=y_0, z=z_0$, so findet man, wie $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ ausgedrückt durch bekannte Größen. Somit so sieht man, daß die Aufgabe zurückführt, auf die folgende: die Coordinaten des Punktes mit den Gleichungen I und II zu erhalten durch die Zeit, und durch die anfänglichen Coordinaten und Geschwindigkeiten des Punktes. Die Zurückführung der Constanten auf die gegebenen Größen kann dann Obigen zu folgen nach einer bestimmten Regel geschehen. Dagegen steht keine allgemeine Methode fest, welche zur Auffindung der Integrale I und II führen könnte.

§ 3. Unfreie Bewegung.

Wenn der Punkt gezwungen ist sich auf einer Oberfläche oder auf einem Curven zu bewegen, so ist es zulässig von der Bestimmung der Componenten x, y, z des Kräfteystems und der unbekunden Druckkräfte ab zu sondern, welche durch die Unfreiheit der Bewegung entstehen, und diese für sich zu betrachten. Angenommen man setze x, y, z nur die Componenten der äußeren Kräfte, so ist man bei der Bildung

den Gleichungen b. auf die Componenten dieser Geschwindigkeiten hinzuzufügen. Letztere
 zu einer gewissen Bewegung auf einer Oberfläche, welche durch ihre Gleichung

$$12 \quad \dots f(x, y, z) = 0$$

gegeben sein mag. Wenn dann die Normale dieser Oberfläche mit den Coordinaten,
 gegen den Winkel α β γ bildet, u. D die Normale selbst ist, so ist nachher man
 die Oberfläche aufsetzen kann, u. nachher oben diesen Winkel gegen die Coordinaten
 bilden, so sind die x y z hinzuzufügenden Componenten d. Normal.

Winkel $D \cos \alpha, D \cos \beta, D \cos \gamma$.

Es ist bekanntlich, sind die Winkel α β γ gegeben durch die Formeln

$$\cos \alpha = \frac{f'_x}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + (f'_z)^2}}, \cos \beta = \frac{f'_y}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + (f'_z)^2}}, \cos \gamma = \frac{f'_z}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + (f'_z)^2}}$$

Setzt man also die Wurzeln

$$13 \quad \dots \lambda = \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + (f'_z)^2}$$

so sind die gesuchten Componenten

$$\lambda \cdot f'_x, \lambda \cdot f'_y, \lambda \cdot f'_z.$$

Und die Gleichungen der Bewegung nehmen die Gestalt an:

$$14 \quad \dots \begin{aligned} \frac{G}{g} \frac{dx}{dt^2} &= x + \lambda f'_x \\ \frac{G}{g} \frac{dy}{dt^2} &= y + \lambda f'_y \\ \frac{G}{g} \frac{dz}{dt^2} &= z + \lambda f'_z \end{aligned}$$

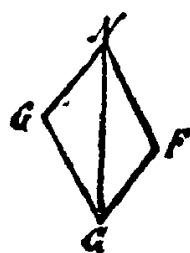
Wenn man diese drei Gleichungen mit der Gleichung 12 verbindet so erhält man
 4 Gleichungen zur Bestimmung von x y z λ . Man kann noch bemerken, daß alle
 Dinge der Normalen der Oberfläche nur in ihrer einen Ausdehnung mit den
 gegen den Winkel bildet, deren Cosinus oben angegeben sind, die andere Nor-
 malenrichtung gibt dieselben Cosinus mit entgegengesetzten Zeichen.

Es muß also zunächst untersucht werden, daß der Punkt D sich im Inneren der ersten Dualangrenzung positiv verhält, daß also, wenn die Richtung einer gegebenen Kraft gibt, der Punkt in Richtung jener ersten Dualangrenzung vergrößernd wirkt, in Richtung der zweiten Dualangrenzung aber, sobald D einen negativen Druck annimmt. Dies ist von Wichtigkeit, wenn der Punkt nicht genau richtig ist, auf der einen Seite der Oberfläche zu bleiben, sich nach der anderen Seite von der Oberfläche entfernen kann. Dann findet eine vollständige Bewegung mit der Oberfläche mit so lange D ein bestimmtes Merkmal beibehält, und die Bewegung geht in eine Seite über, sobald D das selbe verläßt, was dann nicht mehr in Gleichgewichte 14 sondern die Gleichgewichte beizubehalten sind.

Ist endlich der Punkt geneigt sich auf einer Linie zu bewegen, so kann man das selbe sich dargestellt denken durch den Schnitt der beiden Oberflächen

$$15. \dots f(x, y, z) = 0 \quad S(x, y, z) = 0$$

Die Richtung ON der Druckes nehmen die Linien an, und es ist, wenn es sich um eine Normalablenkung handelt, eine Linie, die die Richtung in das selbe hinein feststellt. Der Punkt in das selbe Strahlensystem auf die beiden Normalen



C mit OF der Oberfläche f u. S aufhalten sind so kann man die Ableitungen der Ableitungen der Richtung in 2 Congruenzen, den gegebenen, nach der bekannten Richtung OF u. C haben. Es zeigt man diese Congruenzen durch D mit Δ , u. setzt man

man erhält:

$$\lambda = \frac{D}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + (f'_z)^2}} \quad \mu = \frac{\Delta}{\sqrt{(S'_x)^2 + (S'_y)^2 + (S'_z)^2}}$$

so werden die Congruenzen der Punkte der Linien an, und es ist:

$$\lambda f'_x + \mu S'_x, \lambda f'_y + \mu S'_y, \lambda f'_z + \mu S'_z$$

und das ist die Gleichung der Bewegung

$$16 \dots \frac{G}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} x + \lambda f' \dot{x} + \mu I' \dot{x}$$

$$\frac{G}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} y + \lambda f' \dot{y} + \mu I' \dot{y}$$

$$\frac{G}{g} \frac{d^2 z}{dt^2} z + \lambda f' \dot{z} + \mu I' \dot{z}$$

In dieselben way die unbekannten Größen λ & μ erhalten, so muß man die Gleichungen 15. zu Hilfe nehmen, um ein vollständig bestimmtes Problem vor sich zu haben.

Man hat also fünf Gleichungen mit ebenfalls unbekannten Größen x, y, z, λ, μ .

I. 4. Tangentiale und normale Componente der Beschleunigung.

In der elementaren Mechanik wird gezeigt, daß von den wirkenden Kräften der Beschleunigungen nur ein Theil dazu dient, die Geschwindigkeit zu verändern, während ein anderer Theil der Krümmung der Bahn bestimmt. Man kann dies hier leicht durch Vor, mehr verfolgen. Zunächst ist es klar, da sich die Richtung der Bewegung fortwährend ändern, und der Moment mit der Richtung im veränderlichen sind mit der Richtung der Beschleunigung zusammenzufallen, daß diese drei Richtungen in einer Ebene liegen. Diese Ebene, welche genau mit einer der folgenden Ebenen der Bahn in sich selbst, und welche man die Osculations-Ebene nennt, liegt so, daß sie zugleich die Richtung der Beschleunigung enthält.

Man also die tangentielle Beschleunigung, welche die Geschwindigkeit verändert, und die Normale, welche die Krümmung der Bahn bestimmt, von einander zu trennen, set man nur die normale Beschleunigung in der Osculations-Ebene zu zero, liegen. Bei dem T die tangentielle, N die normale Componente, die Identität, welche T mit den Coordinaten bildet, folgen aus den gegebenen Componenten der Geschwindigkeit. Wenn ist V die absolute Geschwindigkeit, sind α, β, γ die Winkel ihrer Richtung gegen die Axen, so ist bekanntlich

$$17 \dots V \cos \alpha = \frac{dx}{dt} \quad V \cos \beta = \frac{dy}{dt} \quad V \cos \gamma = \frac{dz}{dt}$$

Benutzt man, wenn das Argument, der Gleichung

$$18 \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

so findet sich durch Differentiation der Gleichungen 17

$$19 \quad V = \frac{ds}{dt} \cos \alpha = \frac{dx}{ds} \cos \beta = \frac{dy}{ds} \cos \gamma = \frac{dz}{ds}$$

Die drei Komponenten der Beschleunigung $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ geben also nach der Richtung der Bahntangente die Komponenten

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dy}{ds}, \times \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \frac{dz}{ds};$$

und indem man alle drei setzt, erhält man die tangentielle Komponente der Beschleunigung

$$20 \quad T = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \frac{dz}{ds},$$

oder nach mit Rücksicht auf 18, weil $ds \, d^2s = dx \, d^2x + dy \, d^2y + dz \, d^2z$ ist

$$21 \quad T = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Der absolute Betrag der Beschleunigung ist also

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 = N^2 + T^2,$$

und somit findet man für N den Ausdruck:

$$22 \quad N = \sqrt{\left\{ \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 \right\}},$$

erhält sich nach, indem man für T den Ausdruck 20. einsetzt, in der folgenden Form darstellen läßt

$$23 \quad N = \sqrt{\frac{(dy \, d^2x - dx \, d^2y)^2 + (dx \, d^2z - dz \, d^2x)^2 + (dz \, d^2y - dy \, d^2z)^2}{dt^2 \, ds}}$$

beimut man sich noch, daß die Normalbeschleunigung den Ausdruck $\frac{V^2}{R}$ nimmt, wo R den Krümmungshalbmesser der Bahnkurve bedeutet, so findet man den Ausdruck für diesen Krümmungshalbmesser. Dann ist

$$24 \quad V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

so folgt mit der Gleichung 23. $N = \frac{1}{R} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, und

$$25 \quad \frac{1}{R} = \sqrt{\frac{(dy \, d^2x - dx \, d^2y)^2 + (dx \, d^2z - dz \, d^2x)^2 + (dz \, d^2y - dy \, d^2z)^2}{ds^3}}$$

ein Kräftepaar, welches man sonst abwärts auf geradestricktem Wege ansetzt. Wenn die Bewegung in einer Ebene stattfindet, so kann man für dieselbe die X, Y Ebene annehmen, und dx, dy etc. annehmen lassen. In diesem Falle erfüllt man die Krümmungsgleichungen einer ebenen Kurve:

$$2b \dots \frac{1}{r} = \frac{dx \, dy^2 - dy \, dx^2}{ds^3}$$

Während der Krümmungswinkel in der Formel 25. steht, einen positiven Werth erhält, gibt der gegenwärtige Winkel ein Anzeichen gleiches an, um welches die Kurve gekrümmt ist. Wenn $\frac{1}{r}$ in 26 ist positiv oder negativ, je nachdem $\frac{dy}{dx}$ positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem die Tangente das Minimum der Tangente gegen die X Achse erhält oder abnimmt. Man geht ein positives Werth von r an, daß die Krümmung der Kurve in demselben Sinne vor sich geht, wie die eines Kreises, welcher von Anfang der Coordinaten als Mittelpunkt gegeben, von der $+ X$ Achse sich nach der $+ Y$ Achse wendet; während ein negativer Werth von r auf eine Krümmung setzt, welche der Krümmung des in entgegengesetztem Richtung gegebenen Kreises entspricht.

S. 5. Gleichgewichtsbedingungen. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Die Gleichungen des S. 1. und 3. kann man zunächst auf den Gleichgewichtszustand der Punkte anwenden. In diesem Falle werden, wie für den Fall einer gleichförmigen geraden Bewegung) annehmen, offenbar die Beschleunigungen, d. h. man setzt die Gleichungen haben:

für einen freibeweglichen Punkt:

$$\begin{aligned} X &= 0 \\ 27 \dots Y &= 0 \\ Z &= 0 \end{aligned} ;$$

für einen Punkt, welcher gemässigt ist sich mit der Oberflähe zu bewegen:

$$f(x, y, z) = 0$$

$$28 \text{ --- } \begin{aligned} x + \lambda f'_x &= 0 \\ y + \lambda f'_y &= 0 \\ z + \lambda f'_z &= 0 \end{aligned}$$

für einen Punkt, welcher gemässigt ist sich mit der Ebene

$$f(x, y, z) = 0, f(x, y, z) = 0 \text{ zu bewegen:}$$

$$29 \text{ --- } \begin{aligned} x + \lambda f'_x + \mu f'_x &= 0 \\ y + \lambda f'_y + \mu f'_y &= 0 \\ z + \lambda f'_z + \mu f'_z &= 0 \end{aligned}$$

In jedem dieser Fälle hat man abermal Gleichungen als Substituente, für jeden Fall ist also die Aufgabe im Allgemeinen bestimmt, die Gleichungseinstellung, so wie die Substituten durch die Substituente werden durch algebraische Operationen ermittelt.

Durch das Prinzip der simultanen Gleichungen aber ist man in den Stand gesetzt, diese Gleichungseinstellungen allgemein in eine einzige symbolische Gleichung zu verwandeln. Denken wir dem betrachteten Punkt eine kleine Verschiebung δ mitgeteilt, deren Projectionen δx δy δz sind.

Nachdem man weiß, dass die Richtung der Verschiebung ganz beliebig sein darf, so sind δx δy δz von einander ganz unabhängige Größen, und die mit 27. für einen fest benutzten Punkt folgende Gleichung:

$$30 \text{ --- } x \delta x + y \delta y + z \delta z = 0$$

kann man nicht allgemein befehlen, wenn nicht x y z jedes für sich verschwindet, die Gleichung 30. ist also ein allgemeines Symbol, welches die Gleichungen 27. in sich schließt. Zu dem Fall einer unbeschränkten Bewegung müsste man dem Ausdruck 30. noch hinzufügen

$$\lambda (f'_x \delta x + f'_y \delta y + f'_z \delta z) \text{ oder } \lambda (f'_x \delta x + f'_y \delta y + f'_z \delta z) + \mu (f'_x \delta x + f'_y \delta y + f'_z \delta z).$$

Diese Ausdrücke aber zusammenfassen, und der Ausdruck 30. stellt die allgemeine

Oberflächenbedingung und muß für eine gewisse Lösung der, wenn man die Bedingung hinzusetzt, daß die gegebene Darstellung mit den Bedingungen vereinbar sein soll, welche der Punkt andeutet. In der That, wenn der Punkt x, y, z , welcher sich auf der Oberfläche $f(x, y, z) = 0$ befindet, sich auf der Darstellung und auf denselben befinden soll, so muß er sein:

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0$$

oder indem man nach dem Taylor'schen Satz entwickelt:

$$31. \quad \delta f = f'_x \cdot \delta x + f'_y \cdot \delta y + f'_z \cdot \delta z = 0$$

Dies zeigt, daß wenn in der That, wenn der Punkt sich auf einer Oberfläche befindet, die Gleichungen 28. wiederum auf die Gleichung 30 führen. Aber ein Punkt, welcher gegeben ist auf einer Curve zu bleiben, kann so unendlich werden als da, wenn er sich gleichzeitig auf zwei Oberflächen, und wenn eine die Oberfläche, die gleichzeitig in beiden vorhanden sein lassen, so müssen die beiden Gleichungen bestehen

$$\delta f = f'_x \cdot \delta x + f'_y \cdot \delta y + f'_z \cdot \delta z = 0$$

$$32. \quad \delta F = F'_x \cdot \delta x + F'_y \cdot \delta y + F'_z \cdot \delta z = 0$$

so daß auch in diesem Falle der zu 30. hinzugefügte Term vernachlässigt. Die Gleichung 30 gibt das Princip der virtuellen Eigenschaften für einen Punkt an. Die sagt uns, daß der Raum der Variationen Null ist, welche bei einer kleinen Verschiebung geschehen werden, die mit den gegebenen Bedingungen vereinbar ist. In der That der Resultanten hat der Betrag der Componenten gleich ist, so kann man in 30 statt der x, y, z unmittelbar die Arbeit der gegebenen Kräfte einsetzen, und also schreiben:

$$33. \quad 0 = x \delta x + y \delta y + z \delta z = P_1 \delta s \cos(P_1, \delta s) + P_2 \delta s \cos(P_2, \delta s) + \dots \\ = \delta s \sum P \cos(P, \delta s),$$

die Kräfte auf sämtliche Punkte bezogen, welchen der gegebene Punkt angehört, ist.

S. 6. Das d'Alembert'sche Princip.

Von dem Princip der einwirkenden Gesammthaltungen kann man unmittelbar zu einer isoperimetrischen Darstellung der Bewegungsgleichungen zurückgehen, unmittelbar eines Grundsatzes, welcher das d'Alembert'sche Princip heißt. Dies besteht wesentlich in Folgendem. Da nun der Punkt bewegt sein mag, so wird er durch in jedem Augenblicke, wenn sich gleichförmig bewegen, wenn außer den auf ihn wirkenden Kräften noch eine Kraft auftritt, welche der resultirenden Kraft genau gegen gleich dem entgegenge setzt ist. Aber jene resultirende Kraft wirkt in dem Punkte die beschleunigende Kraft

$$\frac{dx^2}{dt^2}, \frac{dy^2}{dt^2}, \frac{dz^2}{dt^2},$$

oder ihre Componenten sind gleich den Ausdrücken

$$\frac{G}{g} \frac{dx^2}{dt^2}, \frac{G}{g} \frac{dy^2}{dt^2}, \frac{G}{g} \frac{dz^2}{dt^2}.$$

Der Punkt würde also im Gleichgewicht sein (wenn er sich gleichförmig bewegen), wenn die Componenten der Kräfte in Richtung der drei Coordinaten die folgenden Eigenschaften hätten:

$$-\frac{G}{g} \frac{dx^2}{dt^2}, -\frac{G}{g} \frac{dy^2}{dt^2}, -\frac{G}{g} \frac{dz^2}{dt^2}.$$

Bezeichnen wir also durch X, Y, Z die Componenten der gegebenen Kräfte, durch $\delta x, \delta y, \delta z$ die Projectionen einer kleinen Verschiebung δs , welche unter den gegebenen Bedingungen gestattet ist, so muß wegen der Gleichung δs , die Gleichung erfüllt sein:

$$34 \quad \dots \left(X - \frac{G}{g} \frac{dx^2}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{G}{g} \frac{dy^2}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{G}{g} \frac{dz^2}{dt^2} \right) \delta z = 0;$$

Diese Gleichung gilt aber für jede beliebige Verschiebung, und schließt in einem symbolischen Summe aller Verschiebungsgleichungen in sich. Wenn erfüllt für alle $\delta x, \delta y, \delta z$ ist, so heißt die Gleichung in 6. 14. 16. Enten, wenn aber zugleich die bei der Gleichung δs vorausgesetzten Bedingungen zu berücksichtigen sind, kann man

Einige Ableitung aus dem folgenden Resultat geben

$$35 \dots \frac{G}{g} \left(\frac{dx^2}{dt^2} \delta x + \frac{dy^2}{dt^2} \delta y + \frac{dz^2}{dt^2} \delta z \right) = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z \\ = \delta s \cdot \sum P \cos(P, ds).$$

Die Anwendung dieser symbolischen Formeln ist in besondern Maaße von Wichtigkeit, wenn man es mit einer Inflection des Weges zu thun hat, u. stellt die Coordinaten des Punktes, dessen abhängige Parameter einführen will, nachher die Bedingungsbedingungen identisch aufstellen.

§. 7. Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Unter einem Princip der Mechanik versteht man ganz gewöhnlich einen ganz allgemeinen Grundsatz, welcher als Fundament der mechanischen Betrachtungen betrachtet werden kann. Und in der That ist das Princip der mechanischen Gesetzmässigkeiten, ist das d'Alembert'sche Princip. Aber das ist nicht nur ein groeres Fundament, indem es auf gewisse Combinationen der mechanischen Gleichungen angewandt wird, so daß in sehr vielen Fällen dazu dienen, Integrale der Bewegungsgleichungen zu bilden. Und dieses ist das zweite Princip, was nachher in Folgenden gesondert werden soll, das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft, mit dem Princip der Erhaltung der Schwerkraft. Unter den Vorsetzungen, welche man einem festen oder flossigen Körper zuschreiben kann, sind gewisse Eigenschaften anzunehmen, welche der Körper in sich selbst tragen möchte. Und diese Eigenschaften der Vorsetzung aber bestimmt der Körper den kleinen Theil des festen Körper, dessen Eigenschaften $dx \, dy \, dz$ sind. Die Gleichung 35 ist, also, ohne Zweifel richtig, wenn man darin $ds \, dx \, dy \, dz$ durch $ds \, dx \, dy \, dz$ ersetzt, und so aufstellt man:

$$\frac{G}{g} \frac{dx \, dx^2 + dy \, dy^2 + dz \, dz^2}{dt^2} = ds \sum P \cos(P, ds) = (X \, dx + Y \, dy + Z \, dz).$$

Oben in $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, müssen $ds \, ds^2 = dx \, dx^2 + dy \, dy^2 + dz \, dz^2$, so stellt der linke Theil der Gleichung nichts dar als

$$\frac{G}{g} \frac{ds \, ds^2}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{G}{g} \frac{d(ds)^2}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{G}{g} d(V^2).$$

16.

Integriert man also auf beiden Seiten, und ist von Anfangs der Bewegung zur Zeit $t = 0$, wo $s = s_0$ und $v = v_0$, so hat man

$$36 \quad \frac{G}{g} \frac{v^2 - v_0^2}{2} = \int_{s_0}^s \equiv P \cos(P, ds) = \int_{s_0}^s (X dx + Y dy + Z dz).$$

Da man das Produkt der Masse in das Äquivalent der Gasfessentlichkeit der lebendigen Kraft des Punktes genommen hat, so heißt diese Gleichung die der lebendigen Kraft. Sie ist eine doppelte Bedeutung, eine rein mechanische, und eine analytische: die erste besagt, daß der erste Theil dieser Gleichung nichts ist, als die, auf dem zurückgelegten Wege geleistete Arbeit, und daß also der Zuwachs der lebendigen Kraft durch diese Arbeit sich darstellt.

Das Integral der rechten Seite ist immer ausdrückbar, wenn man von jeder Stelle des Weges die Kräfte kennt, von allem also den Weg selbst. Aber so kann man, wenn die ganze Bewegung bekannt ist, das Integral der Arbeiten immer berechnen. Aber die große analytische Bedeutung des Princips tritt hervor, wenn man

$$\text{das Integral} \quad \int (X dx + Y dy + Z dz)$$

ausdrücken kann, ohne den Weg zu kennen, nachdem der Punkt befreit ist. Und dies tritt ein, wenn die Componenten X, Y, Z in einer solchen analytischen Form gegeben sind, daß eine Function U von x, y, z existiert, welche X, Y, Z zu ihren partiellen Differentialquotienten hat, wenn also

$$37 \quad X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Man nennt dann U die Kraftfunction, und wenn man sie einsetzt, und zugleich U_0 den Werth beizusetzt, welchen U für den Anfangspunkt der Bewegung annimmt, so geht die Gleichung der lebendigen Kraft über in:

$$38 \quad \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{2} = U - U_0$$

oder, wenn man die constante Zahl $\frac{G}{g} \frac{v_0^2}{2} - U_0$ durch

$$39 \quad h = \frac{G}{g} \frac{v_0^2}{2} - U_0$$

bezeichnet, in

$$40. \quad \frac{G}{g} \frac{v^2}{2} = U + h$$

Diese Gleichung, welche in einem gewissen Angrade von Exaktheit ausfallen kann, setzt den Ausdruck des Potentials der Fallkraft der lebendigen Kraft.

Die Gleichung $U = \text{Const.}$

bedeutet dann, die U eine Funktion von x, y, z ist eine gewisse Oberfläche. Die Gleichung 40. sagt also aus, daß der Punkt immer wieder dieselbe Geschwindigkeit hat, sobald er dieselbe Oberfläche durchläuft. Die der Fall, daß nur die Bewegung auf der Oberfläche wirkt, ist die Oberfläche eine horizontale Ebene. Man set also dann der Satz, daß der Punkt in gleicher Höhe immer wieder die nämliche absolute Geschwindigkeit zeigt.

Die Kräftefunktion ist nun für die Betrachtung der Gleichgewichte von Interesse der Wichtigkeit. Wenn man eine solche existiert, so nimmt das Prinzip der virtuellen Verschiebungen die Form an:

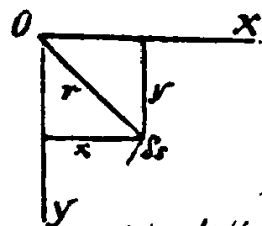
$$41. \quad 0 = \frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z = \delta U,$$

was nicht anders bedeutet, als daß der Punkt von stationären Orten im Gleichgewicht ist, wo nachher die Kräftefunktion ein Maximum, oder ein Minimum annimmt. Dasselbe ist ein absolutes, sobald der Punkt frei beweglich ist, ein relatives hingegen, wenn dasselbe gewissen Bedingungen unterworfen ist.

§. 8. Prinzip der Erhaltung der Flächenräume.

Wenn gegeben die Kraft, unter deren Einfluß der Punkt sich bewegt, so ist auch immer der Punkt einer festen Lage gewidmet, so kann man auf eine andere Weise ein Integral der Bewegung ableiten. Ist das Lage des Punktes L gegeben, so ist die Kraft in einer konstanten L , und die Richtung dieser Kraft, d. in einer konstanten R senkrecht gegen dieselbe. Die Kraft gegen den L ist gegeben, so bildet sie, mit den Lagen OX, OY bildet einen bestimmten Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ eingepaßt werden,

18.



Wenn $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Die Componenten X, Y haben also die Form

$$42 \quad X = \frac{xR}{r}, \quad Y = \frac{yR}{r},$$

Bei so nun verlangt den Punkt so zu beschreiben, dass sein $\angle$ best., mehr sich zwar nicht ändert, es aber gleichsam einen kleinen Kreisbogen beschreibt, dessen Mittelpunkt 0 der dessen Radius r ist, denken wir uns also den Punkt mit der $\angle$ θ fast unverändert und denken ihn dann um $\delta\theta$ um einen kleinen Winkel $\delta\theta$, so ist die Gleichung 35 zu setzen:

$$\delta x = 0, \quad \delta x = -\frac{y}{r} \delta\theta, \quad \delta y = +\frac{x}{r} \delta\theta, \quad \delta s = r \delta\theta,$$

also hat man die Gleichung $\frac{G}{g} \left(\frac{dx^2}{dt^2} \cdot x - \frac{dy^2}{dt^2} \cdot y \right) = 0$;

welche man gleich integrieren kann, und deren Integral ist:

$$43 \quad x \frac{dy}{dt^2} - y \frac{dx}{dt^2} = c.$$

Es zeigt sich der Punkt auf einer Obenfläche, so genügt es, um die größte Klarheit als gelöstig aufzuweisen zu lassen, dass derselbe eine Rotations-Obenfläche d. d. $\angle$ θ der Rotationsaxe derselben ist. Die Gleichung 43 zeigt den Namen der Fläche der Beziehung der Flächenräume, ferner ist dies auf einen Punkt, unanwendbar ist. Aber die Größe, um die Fläche Rotationsgegenstände zu lassen, kann man sich aus den Coordinaten einsehen, welche oben steht, was größer die Flächengröße ist, nämlich die Koordinaten. Bei weiter r der Radius θ der $\angle$ θ der Winkel derselben gegen die X -Achse, so kann man X, Y durch r, θ ausdrücken und hat dann

$$X = r \cos \theta \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta$$

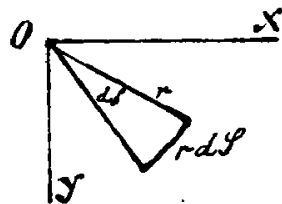
$$Y = r \sin \theta \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \frac{d\theta}{dt} \cos \theta$$

Diese Coordinaten haben die Eigenschaft, dass das Quadrat der Geschwindigkeit in der XY Ebene sich ausdrücken lässt einfach durch dieselbe, nämlich, indem

$$45 \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

die Gleichung 43. der Höhenräume übernimmt die Gestalt von

$$46 \quad \dots \quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c.$$



Es drückt aber, da der Radius r d. S. als constant betrachtet werden darf, $r^2 d\varphi$ nicht anders aus als das kleine Höhenstück, welches der Partikel'scher r in der kleinen Zeit dt beschreibt, u. es

ist also das beständige Höhenelement dem Zeitmoment proportional. Daraus folgt, daß ein endliches Höhenstück der Zeit proportional ist, in welcher es bestiegen wird, oder andy, daß der projectirte Partikel'scher r in gleichen Zeiten gleiche Höhenstücke durchläuft. In der That kann das Prinzip: - Ein Partikel'scher r in einem Fall der Beschleunigung der nachfolgenden Höhenräume überflüssig zu machen, indem man jene Zeitabschnitte der ersten Integrals anfallen sein. Sprich: - Es sollen mehrere Annahmen der Prinzipien gegeben werden.

I. 9. Bewegung auf einer Curve. Einfaches Pendel.

Wenn der Partikel sich auf einer Curve zu bewegen gezwungen ist, der Zwangskraft entgegen, welche eine Kräftefunktion haben, so genügt das Prinzip der lebendigen Kraft zur vollständigen Bestimmung der Bewegung.

Wenn man nicht die S den Längen der Curve, von einem beliebigen Punkte an gerechnet, bezeichnen, so können wir, da die Lage des Partikels nur von einer Größe abhängt, seine Coordinaten durch S ausdrücken, mit dem Vorbehalt, daß dann gilt die Gleichung 40

$$47 \quad \dots \quad v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{G} (U + h)$$

$$t = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{U+h}} = \sqrt{\frac{G}{2g}} \cdot \dots$$

wo rechts ein vollständiges Integral steht, welches die Zeit t durch die Integration,

nicht angegeben, mitgeteilt worden kann. Der Druck von P hängt mit 29. Abh. kann aber nicht alles durch eine Continuitätsbedingung des Punktesumdrucks, zum Beispiel durch die L. Continuitätsbedingung, ausrechenbar sein.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

so nimmt die Gleichung 47, dann die Gestalt an:

$$48. \dots \int_{x_0}^x dx \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{U+h}} \sqrt{\frac{G}{2g}}$$

für Beispiel setzen, dass es ein Pendel ist, das in einem Punkt, ein fester Punkt, an einem Punkt von der Länge l befestigt, nachher sich hin und her auf einem vertikalen Kreis bewegt. Bei der P also vertikal, im Punkt der Gleichgewicht, die X also horizontal, so ist

$$U = Gl \cos \varphi$$

oder, wenn φ den Abweichungswinkel aus der Ruhelage bedeutet:

$$U = Gl \cos \varphi, \text{ neigende Gleichung}$$

$$ds = l \cdot d\varphi.$$

Es sei gegeben die Gleichungen 47

$$v = \sqrt{2g \cos \varphi + \frac{2hg}{G}}$$

$$t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{l d\varphi}{\sqrt{2g \cos \varphi + \frac{2hg}{G}}}$$

Bey dem wie die Zeit von einem Aufhängepunkt des Punktes, durch den Punkt P , so dass $\varphi_0 = 0$ und also $U_0 = Gl$ so findet sich mit der Gleichung 39.

$$h = \frac{G}{g} \cdot \frac{v_0^2}{2} - Gl, \text{ mit demselben gegen die obigen}$$

Formeln, und ist aber in

$$v = \sqrt{v_0^2 - 4gl \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$t = \int_0^{\varphi} \frac{l d\varphi}{\sqrt{v_0^2 - 4gl \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

Das Integral lässt sich mit Hilfe der elliptischen Funktionen vollständig

unlösbar. Erst wenn man, dass der Punkt, normal der Gasdruckteil still
 stehen kann, und also immer, den ganzen Kreis, in gleichem Sinne durchläuft, d. h. wenn
 sich Bewegung der Bewegung bei den folgenden Hinlängen zeigen, so ist $v_0 > 2\sqrt{gl}$;
 gegenwärtig im Gegenteil, wenn $v_0 < 2\sqrt{gl}$, die Gasdruckteil still wird, wenn

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}}$$

so dass der endgültige Druck, wenn φ der größte Wert, erreicht, nachher das
 Pendel, um seinen Punkt, oder Fall, nachher beiden Seiten hin bewegen, kommt,
 wenn $v_0 = 2\sqrt{gl}$, ist möglich zu zeigen, nachher die vollständige Lösung
 gegeben ist. Dann die Gleichungen 49. geben also dann in die folgenden über

$$v = 2\sqrt{gl} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \quad t = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Das Integral ist unlösbar, nur man hat

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \log \operatorname{tg} \frac{\pi \varphi}{4}, \quad \text{oder} \\ \operatorname{tg} \frac{\pi \varphi}{4} = -t \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Diese Formel zeigt, dass der Winkel $\varphi = \varphi(t)$ bestimmt abnimmt, oder dass φ auf
 dem Punkte $\varphi = 0$, der Kreis der nach oben gerichteten Verticalen, bestimmt steht,
 und dass dieser jetzt einmal vollkommen zu sein, dann nach dem Verlauf
 einer ziemlich langen Zeit umkehrt, und der Winkel, auf der rechten Seite der obigen
 Gleichung. Das wird durch erklärt, dass die Gasdruckteil der Druck ist:

$$v = 2\sqrt{gl} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} = 4\sqrt{gl} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi \varphi}{4}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi \varphi}{4}} = \frac{4\sqrt{gl}}{1 + t^2 \frac{g}{l}}$$

nachher ebenfalls umkehren abnimmt. Der Kreis ist also damit, nach
 einer ziemlich langen Zeit die stabile Gleichgewichtsposition anzunehmen.

§. 10. Kleine Schwingungen des Pendels.

Es geht aus der obigen Formel die Integration nach φ dann, wenn man nur sehr
 kleine Schwingungen betrachtet. Diese Aufgabe ist möglich, wenn, dass die nur,

22.

gewöhnliche Differentialgleichung für denselben, wenn man abgeleitet nach dem
 m. m. Man findet, dasselbe leicht kann, dass die Tangentialkraft

$$\frac{G}{g} \frac{ds^2}{dt^2} \text{ für } s = l \text{ ist } -G \sin I;$$

und da wir $s = l$ setzen, so hat man die Differential-

$$\text{gleichung} \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin I$$

Da die kleinen Auslenkungen aber hat man $\sin I$ mit I annähernd,

und man hat dann die lineare Differentialgleichung:

$$50 \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{l} s$$

Man wird denselben Versuch in einem

$$51 \quad s = C \sin (mt + T),$$

wo dann die Differentialgleichung erfüllt ist, sobald

$$m = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Der Ausdruck 51. ist dann das vollständige Integral der Gleichung 50, da man
 nur die beiden willkürlichen Constanten C und T enthält. Wenn wir aber die Zeit
 von dem Durchgange durch die Gleichgewichtslage, so bezeichnet t mit T mit
 Null, so ist $T = 0$ sein. Ist ferner α die Amplitude der Schwingung, so weißt man
 größten Theil, wenn $\sin (mt + T) = 1$, so dass $C = \alpha$ und dann erfüllt man

$$52 \quad s = \alpha \sin (t \sqrt{\frac{g}{l}}),$$

als die vollständig bestimmte Lösung des Problems. Es folgt daraus die Schwing-

ungsdauer

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

da man sich einen Anhaltspunkt findet, wenn t diese Größe erreicht wird.
 Es ist zu bemerken, dass die Gleichung 52. nur für kleine Auslenkungen gilt, so dass man
 denselben bei den geringen Genauigkeiten, welche man in der Natur

Krummen, der auf der Forderung der Unveränderlichkeit der Form, nebst einer
 zu zugleich dem Ankerpunkt der veränderlichen Längsfrist, d. h. dem Ankerpunkt des
 bewegten kleinen Ringes proportional ist. Der Wert g dieser Ankerpunkte, E eine
 constante Zahl, so kann man die mit diesen Ankerpunkten fließende Tangential-
 Kraft $\text{Kraft} = E g l \frac{dS}{dt}$ einfallen. Hier kann jetzt die Gleichung II in die
 folgende über:

$$\text{III} \quad \frac{d^2 S}{dt^2} + \frac{E g g}{G} \cdot \frac{dS}{dt} + \frac{g}{l} S = 0$$

Diese Gleichung gemischt man durch die Annahme:

$$S = C e^{-Kt} \sin(mt + \tau).$$

Dann ist man, wenn dieser Ausdruck in III eingesetzt, gelangt man zu der Bedingung,
 wegen $K = \frac{E g g}{2G}$, $m = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{E^2 g^2 g^2}{4G^2}}$

Ansatz man wird sehen, dass die Form der Lösungsgleichung der Differentialgleichung, so
 wie $\tau = 0$. Die Lösung ist, aber werden wir zeigen, dass jetzt für die Integrationen
 der gemischten nicht mehr constant, sondern die Lösung der Differentialgleichung,
 von der Annahme nicht bleibt. In der That, wird immer wieder gleich
 Null, so dass $\frac{2\pi}{m}$ gegeben ist, die Differentialgleichung ist also

$$T = \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{g}{l} - \frac{E^2 g^2 g^2}{4G^2}}};$$

ein wenig größer, als der Durchschnitt der Differentialgleichung. Die größten
 Lösungen aber, falls man in dem, was die Zeit der Querschnitt beträgt:

$$\frac{\pi}{2m}, \frac{3\pi}{2m}, \frac{5\pi}{2m}, \frac{7\pi}{2m} \dots, \text{ oder kann}$$

$$S = C e^{-\frac{\pi K}{2m}}, C e^{-\frac{3\pi K}{2m}}, C e^{-\frac{5\pi K}{2m}}, C e^{-\frac{7\pi K}{2m}} \dots \text{ oder}$$

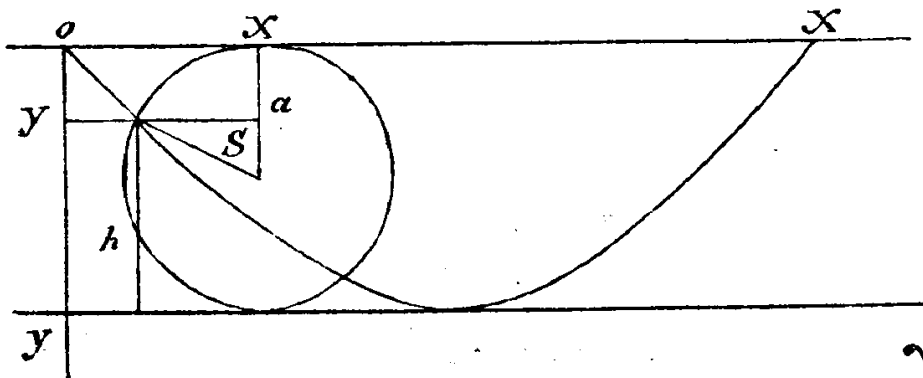
man kann die Lösung setzen $\alpha = C e^{-\frac{\pi K}{2m}}$ folgt:

$$S = C \alpha, C \alpha^3, C \alpha^5, C \alpha^7 \dots$$

Die Lösung ist, wenn man die folgenden Differentialgleichungen setzen, also in geometrischer
 Reihe ab.

§. 11. Bewegung auf der Cycloide.

Die Bewegung fort setzen in gleicher Zeit die Kreisformel der Geometrie auf sich gebracht, unmittelbar auf in Rücksicht auf ihre mechanischen Eigenschaften. Die Kurve wird durch einen Punkt in der Peripherie eines Kreises beschrieben, welcher um einen festen



zirkulären Linie fortbewegt. Bei der x liegt diese Tangente, der Bewegungspunkt der Curve, unterhalb der Bewegung, bey der beschriebenen Punkte.

Dann steht man die Coordinaten

eine Punkte der Bewegung durch den Winkel der abgemessenen Bogen der Bewegungspunkte, ausdrücken. Ist I der Winkel, a der Radius des Kreises, bestimmt man unmittelbar:

$$§ 4. \quad x = a(I - \sin I) \quad y = a(1 - \cos I).$$

Man kann sich hier wieder mit Hülfe der Masse bestimmen, daß man die Länge, die Kraft, nicht verliert; obgleich die in §. 9. niedergelegte Masse gleich der Integral der Bewegungsgleichung geben würde. Es ist die Eigenschaft aller Massen, in solchen Fällen begünstigt durch die speziellen Regeln zu werden, die sie zeigen für, wenn man genau die Natur der Sache und ihren inneren Zusammenhang, der das ist, ist, vollständig zu zeigen. Man findet mit §. 4.

$$dx = a dI (1 - \cos I), \quad dy = a \sin I dI, \quad \text{also } ds = 2 a dI \sin \frac{I}{2}.$$

Die Tangentialbeschleunigung ist also

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(2 a \sin \frac{I}{2} \frac{dI}{dt} \right) = - 4 a \frac{d^2 \cos \frac{I}{2}}{dt^2}$$

Zugleich aber ist die Lösung der Systeme von unabhängigen Differentialgleichungen

$$g \frac{dy}{ds} = y \cdot \frac{\sin \frac{S}{2}}{2 \sin \frac{S_0}{2}} = g \cdot \cos \frac{S}{2}$$

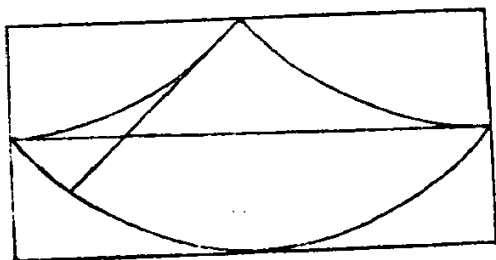
Man hat also die Gleichung

$$\frac{d^2 z - \frac{S}{2}}{dt^2} = - \frac{g}{4a} \cos \frac{S_0}{2}$$

Das aber ist eine lineare Gleichung für $\cos \frac{S}{2}$; und wenn man bei 10. 50 gebräuchliche Methode darauf verwendet, so kommt:

$$55 - - - \cos \frac{S}{2} = \cos \frac{S_0}{2} \cdot \sin \left(t \sqrt{\frac{g}{4a}} \right).$$

Wenn ist die Zeit vom dem Augenblick gerechnet, wo $\cos \frac{S}{2} = 0$, d. h. wo der Punkt die tiefste Stelle der Cycloide einnimmt, und so ist S_0 der größte Abstand des Punktes von der constanten Amplitude der Oscillationen. Man bemerkt aber, daß die Oscillationsdauer $T = 2\pi \sqrt{\frac{4a}{g}}$ von der Amplitude der Oscillationen ganz unabhängig ist, daß also ein Punkt, von welchem her er sich fälle, den Theil der Cycloide stets in der gleichen Zeit erreicht. Diese Eigenschaft, welche der Cycloide stets in allen Stellungen zukommt, verwendet man beim Laufe vieler sehr kleiner Oscillationen, und es gilt, hat man die Lösung gegeben, für den kleinen Theil der Curve, den gleichen Teil,zeiten beizulegen. Die Oscillationszeit ist die nämliche, welche der kleinen Oscillationen eines Punktes zugehen, dessen Abstand dem einfachen Abstand des angegebenen Punktes gleich ist. Man kann in der That die Bewegung der Cycloide durch einen Punkt von dieser Länge hervorbringen. Denn die Cycloide hat die Eigenschaft, daß ihre Tangente mit zwei Halften einer ihr conjugirten Cycloide besteht. Ein Punkt von der Länge $4a$, im Ursprungspunkte beider Halften befestigt, welcher sich



mit dieser Geschwindigkeit bewegt, beschreibt den mit seinem Endpunkte der conjugirten Cycloide, u. man hat in der That versucht sich auf diese

26

Wir setzen nun wieder h für die mittlere DichtungsgröÙe des Punktes, h_0 die anfängliche DichtungsgröÙe des Punktes, h die DichtungsgröÙe des Punktes zur Zeit t bezeichnen, die Gleichungen gelten: $h = 1 + \cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$, $h_0 = 1 + \cos \varphi_0 = 2 \cos^2 \frac{\varphi_0}{2}$, so daÙ also die Gleichung 55 in der folgenden übergeht:

$$h = h_0 \sin^2 \left(t \sqrt{\frac{g}{4a}} \right).$$

wo h die vertikale Ordinate zu jeder Zeit anzeigt.

S. 12. Bewegung auf einer Rotationsoberfläche.

Wenn ein Punkt sich auf einer Rotationsoberfläche bewegt, der die Potentiale der äußeren Kräfte gehörig auf einem Punkte der Rotationsaxe gewirkt ist, und eine Kraftfunktion existiert, so genügen die Prinzipien der lebendigen Kräfte mit den Gleichungen zur vollständigen Lösung des Problems.

Ist die Z Axe der Rotationsaxe der Oberfläche, so müssen die Kräfte X Y Z nach S. 8. 42. die Gleichungen annehmen:

$$X = \frac{x}{r} R, \quad Y = \frac{y}{r} R.$$

Und wenn ferner eine Kraftfunktion existieren soll, so muß man haben

$$dU = \frac{x dx + y dy}{r} R + Z dz.$$

hieraus folgt da $x^2 + y^2 = r^2$, $x dx + y dy = r dr$:

$$56 \quad dU = R dr + Z dz$$

d. h. die Kräfte hängen selbst nur von den Coordinaten z und r ab, also müssen von dem Winkel φ unabhängig sein, u. es muß ferner sein:

$$R = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Also können wir auch nach den beiden Gleichungen 40 und 46:

$$57 \quad v^2 = \frac{2g}{a} (U + h) \quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c.$$

Nun für vollständig die Polarkoordinaten einzuführen, so muss man die Gleichung 45 zu Hilfe nehmen, und man erhält dann

$$58 \quad V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \\ = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

Dann muss man noch die Gleichung der Oberflähe

$$59 \quad r = Fz$$

eingesetzt, so ist dann die Aufgaber Lösung der drei Gleichungen darz. stellt.

$$60 \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{G} (U+h) \\ r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C \quad r = Fz$$

Indem man nun alles auf z zurückführt hat man oben Drittes:

$$61 \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (1 + (F'_z)^2) + \frac{C^2}{(F_z)^2} = \frac{2g}{G} (U+h)$$

und somit hat man folgende Integrale:

$$62 \quad t = \int_{z_0}^z dx \sqrt{\frac{1 + (F'_z)^2}{\frac{2g}{G} (U+h) - \frac{C^2}{(F_z)^2}}} \\ S = \int_{z_0}^z \frac{cdx}{(F_z)^2} \sqrt{\frac{1 + (F'_z)^2}{\frac{2g}{G} (U+h) - \frac{C^2}{(F_z)^2}}}$$

welche alles auf die Ordinate z zurückzuführen. Die untere Grenze z_0 bedeutet dabei den Ort dieser Coordinate beim Beginn der Bewegung, von welcher Zeit an die Differential Gleichung aufgestellt werden. Es bemerkt dabei, in Bezug auf die Formel 61. dass das Glied $\frac{C^2}{(F_z)^2}$ auf $\frac{C^2}{r^2}$ auf, indem es auf die rechte Seite geschafft wird als ein Theil der Kraftfunktion da, transportieren kann, indem man dann statt U nun U' zu setzen hat

$$U' = \frac{G C^2}{2g r^2}$$

und in der Formel 56. sollte man dann für R zu setzen

$$R + \frac{G C^2}{g r^3}$$

Da nun das eine Glied der Bewegung auf der Rotationsbewegung von der anderen Bewegung auf ihrem Meridianenwer unabhängig ist, so kann man sagen, daß man statt der Bewegung auf der Rotationsbewegung das Problem für die Meridianenwer substituieren kann. Wenn man nun mit der Bewegung $\frac{C^2}{r^3}$ punktiert gegen die Rotationsbewegung singuliert. Diese Leistungsbewegung aber ist nichts, anderes als die Centrifugale Leistungsbewegung. Denn in der That ist die Gleichzeitigkeit mit nachher den Punkt an dem Punkt r ist um die Rotationsbewegung Kraft

$$r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r};$$

also ist $\frac{C^2}{r^3}$ wirklich das Äquivalent dieser Gleichzeitigkeit die ist das auf den Punkt der Bewegung, wobei die Centrifugale Leistungsbewegung gemeint wird.

P. 13. Konisches Pendel.

Diese Leistungsbewegungen müssen zunächst ihre Annahmen finden mit der allgemeinen der Bewegung des Pendels, oder mit anderen Worten, daß die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Kugelbewegung, mit dem Punkt l . Für diesen Fall ist die Kräftefunction, wenn die z über auf dem vertikalen Draht steht

$$U = Gz;$$

und da somit $R = 0$ wird, so sind alle Bedingungen des vorigen P. erfüllt. Man hat daher zunächst

$$63 \quad r = \sqrt{l^2 - z^2} - Fz,$$

und sodann eingeben die Gleichungen 62. folgender Maßen:

$$t = \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{(l^2 - z^2)(2gz + \frac{2hg}{G}) - C^2}}$$

64 ---

$$I = \int_{z_0}^z \frac{l \, dz}{(l^2 - z^2) \sqrt{(l^2 - z^2)(2gz + \frac{2hg}{G}) - C^2}}$$

Diese beiden Integrale sind allerdings nur mit Hilfe der elliptischen Funktionen vollständig auflösbar. Aber man kann einige Betrachtungen daran knüpfen, welche dazu dienen ein vollständiges Bild der Bewegung zu entwerfen. Zunächst ist es bekannt, daß der Punkt sich zwischen zwei bestimmten Horizontalabscissen auf und ab bewegt. An beiden Grenzen muß die Quanticitätsfunktion des Punktes verschwinden, d. h. es muß sein

$$65 \quad 0 = l^2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = (l^2 - x^2) (2gx + 2xg) - c^2.$$

Man erfüllt ferner eine cubische Gleichung für x ; zwei Wurzeln derselben geben die oben und unten der Bewegung entsprechenden der Bewegung. Um diese zu untersuchen bemerkt man zunächst, daß x die Constante der lebendigen Kraft nach 39. der Kraft ist: $x = \frac{C}{g} \frac{v_0^2}{2} - Cx_0.$

Es sei nun an, daß die untere Grenze x_0 der Integrals 64. die untere Horizontalgrenze der Bewegung angibt, nur als die ganze Bewegung von einem unteren Theil der Bewegung beider, zu geschnitten werde. Dann ist v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes im $x = x_0$, d. h.

$$v_0 = \frac{c^2}{x_0^2} = \frac{c^2}{l^2 - x_0^2}$$

Setzen wir die auf diese Weise erhaltenen Werte von x und c in die Gleichung 65. ein, so wird

$$66 \quad l^2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = (x - x_0) \{ 2g(l^2 - x^2) - v_0^2(x + x_0) \}$$

so daß also wirklich $x = x_0$ eine Wurzel der cubischen Gleichung 65 ist. Damit man aber x_0 einem unteren Theil der Bewegung beider entsprechen könne, ist es nötig, daß wenn x ein wenig kleiner als x_0 wird, der Ausdruck für $\left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ positiv bleibe, da sonst $\frac{dx}{dt}$ imaginär wird. Und dies ist man dann der Fall, wenn der zweite Factor rechts in 66. für $x = x_0$

negativ ist, d. f. wenn

$$67 \quad 2x_0 v_0^2 > 2g(l^2 - x_0^2)$$

Dies zeigt, daß x_0 immer positiv sein muß, d. f. daß die untere Begrenzung immer überhalb der unteren Gleichgewichtshöhe bestimmt.

Ist $2x_0 v_0^2 < 2g(l^2 - x_0^2)$ so wird x_0 ein oberer Limes sein. Ist endlich

$$v_0^2 = \frac{2g(l^2 - x_0^2)}{2x_0}$$

so wird x_0 ein oberer und unterer Limes zugleich, d. f. der Punkt bewegt sich auf der Horizontalen, in welcher die Kugel von derselben x_0 geschnitten wird. Ist $x < x_0$, die obere Begrenzung, so folgt der Druck von L , man wird die quadratischen Gleichung (66)

$$68 \quad 2g(l^2 - x^2) - v_0^2(x_0 + x) = 0,$$

und man hat man diejenigen Druck von x_0 zu nehmen, dessen horizontale Ebene genau über der Ebene $x = x_0$ liegt. Setzt man aber in den Ausdruck

68. der Druck nach $x = x_0$, $x = -l$, $x = -p$, so erhalten wir

$$\text{für } x = x_0: \quad 2g(l^2 - x_0^2) - 2v_0^2 x_0$$

$$\text{für } x = -l: \quad v_0^2(l - x_0)$$

$$\text{für } x = -p: \quad -2g \cdot (p)^2$$

Es zeigt die Formel 67 ist für den ersten Ausdruck negativ oder positiv, der zweite immer negativ. Es liegt also der eine oder den anderen der quadratischen Gleichung zwischen x_0 und $-l$, d. f. auf der Kugel und oberhalb x_0 , der zweite liegt zwischen $-l$ und $-p$, d. f. über der Kugel, und kommt für den nicht in Betracht. Die obere Grenze ist also die kleinste Kugel der quadratischen Gleichung, und so ist:

$$69 \quad \dots \quad x_1 = - \frac{V_0^2}{4g} + \sqrt{l^2 - \frac{V_0^2}{2g} z_0 + \frac{V_0^4}{16g^2}}.$$

Nehmen wir nun zu den Gleichungen 64. zu. Die Zeit muß immer positiv sein, daher muß das Element des ersten Integrals stets positiv sein. Obwar z nimmt ab beim Aufsteigen, nimmt zu beim Absteigen, also dz ist negativ im ersten, positiv im zweiten Fall. Daher muß die Quadratwurzel beim Aufsteigen das negative, beim Absteigen das positive Zeichen erhalten, d. h. das fallen Zeichen muß sie beibehalten für z . Die Zeit, welche während des Aufsteigens verfließt ist, also

$$T = - \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_{z_1}^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{z}},$$

oder T den Länge wegen für den Fall, daß der Punkt unter der Kugel, gegeben ist. Aus der dem nämlichen Werthe unmittelbar für die Zeit des Absteigens, und sich ergibt, so ergibt sich, daß der Punkt seine absteigenden und aufsteigenden Bewegungen sämmtlich in gleichen Zeiten durchläuft. Aber in denselben Zeit durchläuft er sich auch den gleichen Winkel um die z Achse, nämlich den des Winkels

$$\phi = - \int_{z_0}^z \frac{dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{z}} = \int_{z_1}^{z_0} \frac{dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{z}}.$$

Der obere Cyclus also scheint sich gleichförmig um die z Achse zu drehen, ebenso der untere; so daß immer ein unterer Cyclus in die Mitte greiften genau, oben zu liegen kommt. Aus diesem Grunde aber können wir nicht zeigen, daß unabhängig je zwei aufsteigende und absteigende Zonen der Bewegungsbewegungen symmetrisch, also absteigende oben so sein, als aufsteigende Zonen unter einer oder congruent sind.

S. 14. Bewegung ohne Kräfte.

Ein zweites Beispiel zu den in S. 12. angegebenen Umständen bietet die Bewegung eines Punktes auf einer Rotationsparabel, nachher kreisförmig in einem Kreisseiten unter, voraus ist. Es sei nicht $U = 0$ und

$$\text{§ 2} \quad \dots \quad v^2 = v_0^2 \quad \frac{2xy}{a} = v_0^2$$

so daß der Punkt sich mit ändernder Geschwindigkeit bewegt. Die Gleichung zu § 2. kann aber:

$$t = \int_{x_0}^x dx \sqrt{\frac{1 + (F'x)^2}{v_0^2 - \frac{c^2}{F^2 x^2}}}$$

§ 3. ---

$$s = \int_{x_0}^x \frac{cdx}{(F'x)^2} \sqrt{\frac{1 + (F'x)^2}{v_0^2 - \frac{c^2}{(F'x)^2}}}$$

Die letzte dieser Gleichungen gibt den Lufthub des Punktes an, man nennt denselben eine kürzeste Linie, da der Punkt sich immer auf dem kürzesten Wege zwischen zwei gegebenen Punkten bewegt, wenn keine äußeren Kräfte auf ihn einwirken. Die erste Gleichung gibt die Zeit, oder noch dasselbe ist, da der Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegt, die Länge der kürzesten Linie an. Er gewinnt das mechanische Problem eine rein geometrische Bedeutung. Die vorhergehenden Gleichungen lassen sich vollständig auflösen, für den Fall einer Rotationsparabel, um Oberflächennormale für eine Schiffskeel zeigt nachher in einem Cylinder verläuft; die Gleichung dieser Oberflächennormale ist

$$\text{§ 2} \quad \dots \quad r^2 = 2px.$$

Wenn man dies in die Gleichungen § 1. einsetzt, so erhält man:

$$t = \int_{x_0}^x dx \sqrt{\frac{x + \frac{p}{2}}{v_0^2 x - \frac{c^2}{2p}}}$$

§ 3. ---

$$s = \int_{x_0}^x \frac{cdx}{2px} \sqrt{\frac{x + \frac{p}{2}}{v_0^2 x - \frac{c^2}{2p}}}$$

Man sieht aus diesen Gleichungen, daß z niemals kleiner werden kann, als

$$\frac{Cz}{2pv_0^2}$$

Nehmen wir daher als äußere Grenze z_0 diese kleinste Stelle der Bewegungskurve, so ist für dieselbe offenbar die Gefahrschwindigkeit horizontal, und also v_0 gleich der Bewegungsgeschwindigkeit am der z liegt,

$$v_0^2 = \frac{Cz}{2pv_0^2} = \frac{Cz}{2pz_0}$$

Daher nehmen die Gleichungen 73 den einfachsten Gestalt an:

$$v_0 t = \int_{z_0}^z dx \sqrt{\frac{z + \frac{p}{2}}{z - z_0}}$$

$$S = \int_{z_0}^z \sqrt{\frac{z_0}{2p}} \frac{dz}{z} \sqrt{\frac{z + \frac{p}{2}}{z - z_0}}$$

Diese Integrale gestalten sich leicht die Integration, wenn man einen Winkel ϑ einführt, so daß $\frac{z + \frac{p}{2}}{z - z_0} = \frac{1}{\sin^2 \vartheta}$, $z = z_0 + \frac{p}{2} \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^2 \vartheta}$, so daß für $\vartheta = 0$ $z = z_0$ wird, und z immer mit ϑ wächst bis bei $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ $z = \infty$ wird. Dann hat man aber:

$$v_0 t = \int_0^{\vartheta} (2z_0 + p) \frac{d\vartheta}{\cos^3 \vartheta}$$

$$S = \int_0^{\vartheta} \sqrt{\frac{z_0}{2p}} \left(\frac{p \cos \vartheta}{z_0 + \frac{p}{2} \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{\cos \vartheta} \right) d\vartheta$$

Bemerkung man merke die beiden Formeln

$$\int \frac{d\vartheta}{\cos^3 \vartheta} = \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right), \quad \int \frac{d\vartheta}{\cos^3 \vartheta} = \frac{1}{2} \frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} - \frac{1}{2} \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right).$$

so findet man ohne Schwierigkeit

$$74 \quad \dots \quad v_0 t = (z_0 + \frac{p}{2}) \left(\frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} - \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right) \right)$$

$$S = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{p}{2z_0}} \sin \vartheta \right) + \sqrt{\frac{2z_0}{p}} \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right).$$

Gleichungen welche zusammen mit

$$75 \quad \dots \quad z = \frac{z_0 + \frac{p}{2} \sin^2 \vartheta}{\cos^2 \vartheta}$$

alles durch den Winkel ϑ ausdrücken. Will man dagegen diesen Winkel als, minimieren, so erfüllt man die Formeln

$$76 \quad \dots \quad S = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{p}{2z_0}} \cdot \sqrt{\frac{z - z_0}{z + \frac{p}{2}}} \right) + \sqrt{\frac{z_0}{2p}} \log \frac{\sqrt{z + \frac{p}{2}} + \sqrt{z - z_0}}{\sqrt{z + \frac{p}{2}} - \sqrt{z - z_0}}$$

Da in der Summe 74 I mit 2 sein Zeichen wechselt, neßman z sich nicht
ändert, wenn ds übergeht, so sieht man, daß von dem Element ds der Länge,
auf beiden Seiten ds gleichmäßig wirkt und ferner, daß die spiralförmige Oberfläche
immerfort, mit beiden Seiten, welche sich nicht selbst ausbalancieren (für
 $I = m \cdot T$), im Gleichgewicht verbleibt.

I. 15. Anziehung nach einem festen Centrum.

Setzen wir nämlich einen fest benannten Punkt, welcher von einem
festen Centrum umgeben, sich um dasselbe bewegt. So sei das angezogene Centrum
im Mittelpunkte der Coordinaten, die Anziehung gesetzlich aus einer beliebigen
Function der Entfernung, in der Richtung der Verbindungslinie. Ist also r die
Entfernung,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

und $f(r)$ die Kraft mit welcher die Gegend einseitig das Centrum anzieht, so wird die Gegend der wirklichen Anziehung
 $GC'fr$,

wo GC' die Gegend des umgezogenen, und das angezogene Centrum sind. Die
Richtung dieser Anziehung bildet mit den Coordinaten Winkel der Cosinus
 $-\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}, -\frac{z}{r}$. Also hat man für die Componenten der Kraft die Ausdrücke
 $X = -GC'fr \frac{x}{r}, Y = -GC'fr \frac{y}{r}, Z = -GC'fr \frac{z}{r},$

und demnach werden die Gleichungen der Bewegung:

$$\frac{G}{g} \frac{dx}{dt^2} = -GC'fr \frac{x}{r}$$

$$\frac{G}{g} \frac{dy}{dt^2} = -GC'fr \frac{y}{r}$$

$$\frac{G}{g} \frac{dz}{dt^2} = -GC'fr \frac{z}{r}$$

Zuletzt bemerkt man, daß das Princip der Stützen für seine Anwendung findet,
am besten da, wo man sich der Obergrenze der Entfernung versichern kann.

Man set also die drei Gleichungen (nach 43)

$$\begin{aligned} 78 \dots & \quad y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = C_1, \\ & \quad z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = C_2, \\ & \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C_3, \end{aligned}$$

und nehmen sich durch Multiplikation mit xyz ergibt:

$$79 \dots \quad C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0$$

adine abweist die Gleichung einer Ebene, den Punkt bestimmt daher eine Ebene. Trifft es sich ungünstig die Aufgabe zu vereinfachen, indem man diese Ebene zur XY Ebene wählt, wor dann $z = 0$ wird, und die Gleichungen 78 sich viel easier auflösen. Aber es existiert nicht eine Kraftfunktion, dann es nicht

$$dV = -G G' \frac{f}{r} (x dx + y dy + z dz) = -G G' f dr$$

also 80... $V = -G G' \int f dr$

Lassen wir also nur die ganze Bewegung in der XY Ebene vor sich gehen, so können wir die ersten Integrale des Problems leicht angeben, es gilt ein Flächensatz und das Prinzip der lebendigen Kraft.

Setzen wir Polarkoordinaten ein, den Radius Vector r und den Winkel φ zwischen der X Achse bildet, so hat man folgende Gleichungen (45.46.40)

$$81 \dots \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{a} (U+h) \quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C.$$

Da nun U allein von r abhängt, so erfüllt man durch Integration von dV über dt unmittelbar zwei Integrale, welche mittels der Aufgabe vollständig lösen:

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2g}{a} (U+h) - \frac{C^2}{r^2}}}$$

$$V = \int_{r_0}^r r^2 \sqrt{\frac{2g}{a} (U+h) - \frac{C^2}{r^2}} dr$$

wobei r_0 der Größe des Radius Vector für den Augenblick bedeutet von

nehmen wir die Zeit mit der Distanz δ gleichzeitig gegeben, werden sollen, nehmen wir also den Punkt P auf dem positiven Theile der X Achse befestigt. Die Aufgabe ist nunmehr auf Antworten zurückgeführt.

P. 16. Anziehung nach dem Newtonischen Gesetze.

Die Planeten und die Sonne können bei ihrer gegen ihre Größe sehr bekannten Entfernung von einander als Punkte angesehen werden, welche sich umgekehrt proportional dem Einfluße der Entfernung umziehen, ein Gesetz, welches auf seinem Entdecker das Newtonsche genannt wird. Ist also r die Größe der Anziehung für die Gravitationskraft der Sonne und eines Planeten so ist

$$f r = \frac{\kappa}{r^2}, \quad U = -G G' \kappa \int \frac{dr}{r^2} = \frac{G G' \kappa}{r}.$$

Für diesen Fall also geben die Gleichungen 81. 82 in der folgenden Form wenn der Kümper wegen $G g \kappa = \mu \frac{2g^2}{r} = H$ gesetzt wird:

$$83 \quad \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + 2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{2\mu}{r} + H \quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C$$

$$84 \quad t = \int_{r_0}^r \frac{c dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + H - \frac{c^2}{r^2}}}$$

$$\varphi = \int_{r_0}^r \frac{c dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu}{r} + H - \frac{c^2}{r^2}}}$$

Die zweite dieser Gleichungen integriert sich wenn man $\frac{1}{r}$ als Variable betrachtet sehr leicht und es wird

$$85 \quad \varphi = \arccos \frac{\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c}}{\sqrt{H + \frac{\mu^2}{c^2}}} = \arccos \frac{\frac{c}{r_0} - \frac{\mu}{c}}{\sqrt{H + \frac{\mu^2}{c^2}}}$$

Man kann nun für die untere Grenze r_0 denjenigen Radius wählen, für welchen das $\cos = 1$ wird, oder immer einen positiven, aber möglichen Werth für r wählen, den man C als positiv betrachten darf:

$$86 \quad \frac{c}{r_0} = \frac{\mu}{c} + \sqrt{H + \frac{\mu^2}{c^2}}$$

und mit der Gleichung 85 erfüllt man dann:

$$87 - - - \frac{1}{r} = \frac{u}{c^2} (1 + \cos \vartheta \sqrt{1 - \frac{c^2 H}{\mu^2}})$$

Dies ist die Gleichung eines Kegelschnitts, dessen einen Brennpunkt im Anfangspunkt des Koordinaten Systems, und bei welchem der Winkel ϑ von dem Radius Vector gemessen wird, nach dem dem nächstliegenden Äst des Ellipses zugekehrt ist.

Der Punkt bewegt sich also in einem Kegelschnitt, dessen einen Brennpunkt, der ungesamte Centrum ist. Dieser Kegelschnitt ist eine Ellipse, wenn r mit $\frac{1}{r}$ ein Vielfaches von $\cos \vartheta$ kann, also wenn $\sqrt{1 + \frac{c^2 H}{\mu^2}}$ kleiner als 1 ist, eine Hyperbel wenn dieser Ausdruck größer als 1, und eine Parabel wenn er gleich 1 ist.

Oder es ist der Kegelschnitt eine Ellipse für $H < 0$,
eine Parabel für $H = 0$,
eine Hyperbel für $H > 0$,

Nach der Formel 83, wenn man $r = r_0$ gesetzt nimmt

$$H = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} \quad ,$$

so ist also der Kegelschnitt eine gewisse Curve, je nachdem die Anfangsgeschwindigkeit kleiner, gleich oder größer als $\sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$ ist, was r_0 die Entfernung des anfänglichen Lages des Punktes vom dem ungesamten Centrum bedeutet. Dies oben augenblicklich das Coordinatensystem gewährt, das ist mit $\frac{dr}{dt}$ im ersten Augenblicke Null, was der Punkt sich im Äst des inneren Brennpunktes, u. also $v_0^2 = \frac{c^2}{r_0^2}$ und

$$\sqrt{1 + \frac{c^2 H}{\mu^2}} = + \left(1 - \frac{c^2}{\mu r_0}\right)$$

was das Vorzeichen zeigt, nämlich ist, daß der Ausdruck positiv ist, unabhängig ob H positiv oder negativ ist, je nachdem c^2 μ r_0 ist. Letzteren wir gemessen der Bewegung in einer Ellipse, nach dem dem Planeten zugekehrt ist.

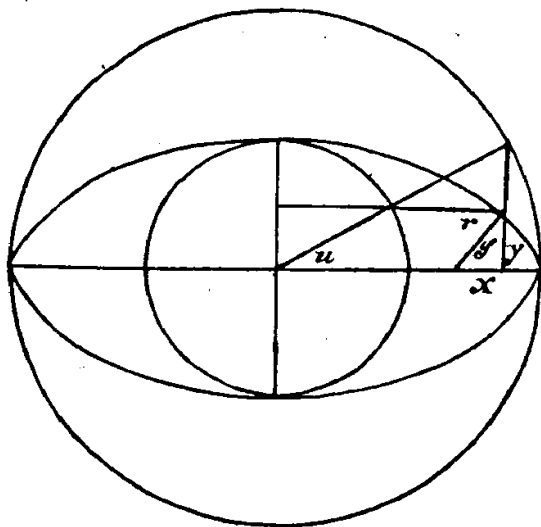
Setzen wir in der Gleichung 87:

$$88 - - - \sqrt{1 + \frac{H c^2}{\mu^2}} = e, \frac{c^2}{\mu} = a(1 - e^2)$$

so ist die Gleichung des Ellipses

$$89 \quad \frac{1}{r} = \frac{1+e \cos \varphi}{a(1-e^2)}$$

Der größte und kleinste Abstand des Perihels Abstand ist also $a(1 \pm e)$, daher a die halbe große Axe des Ellipses, ae die Entfernung des Sonnenpunktes vom Mittelpunkt. Wenn man aber den Abstand für die Zeit zu finden, ist es zweckmäßiger, statt des Perihels φ , nachfolgend die Apoanomen die neue Anomalie nennen, einen anderen, geeigneten, nachfolgend den Namen der excentrischen Zeit. Dies ist derjenige Winkel u , nachfolgend vom



Mittelpunkt des Ellipses liegend den Coordinaten des Ellipses, auf den Mittelpunkt bezogen, die Cos.

Er giebt $a \cos u$, $b \sin u$, wenn a b die große und kleine Axe bedeuten. Im ersten Falle also, wo die kleine Axe den Abstand $a \sqrt{1-e^2}$ misst,

$$\text{so hat man} \quad x = a \cos u - ae = r \cos \varphi$$

$$90 \quad y = a \sin u \sqrt{1-e^2} = r \sin \varphi.$$

Aus diesen Gleichungen findet sich leicht:

$$91 \quad r = a(1 - e \cos u).$$

ein Ausdruck, nachfolgend nachfolgend des Perihels Abstand noch einfacher als die Gleichung 89 darstellt. Indem man nun die Gleichungen 88. 91 zu Hilfe nimmt, erfüllt man sich 84. den sehr einfachen Ausdruck

$$t = \int_0^u \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (1 - e \cos u) du, \text{ daher}$$

$$92 \quad t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (u - e \sin u).$$

Die Aufgabe wird vollständig gelöst, wenn man aus dieser Gleichung u durch t ausdrückt, ein Problem, nachfolgend eine Lösung gefunden werden kann, falls man u in eine Reihe von Potenzen von e fortgesetzten Reihe ausdrückt, deren Glieder Funktionen

der Zeit sind. Man sieht aber sogleich, daß die Bewegung, welche man in
gleichem Maße sich wiederholt, um 2π , d. h. t um $2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$ gemessen ist.

Es wird daher
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

die Umlaufzeit der Planeten. der dritte Gesetz, nach Kepler für die
Bewegung der Planeten auf elliptischen Bahnen, findet sich durch die abge-
leiteten Formeln bestätigt. Das erste dieser Gesetze ist, daß die Planeten sich
in Ellipsen um die Sonne bewegen, deren Brennpunkte diese ist, ein Satz, welcher aber
bisher nicht bewiesen ist. Das zweite Keplersche Gesetz, welches angibt, daß der Radius
Vektor in gleichen Zeiten gleiche Räume durchläuft, ist nicht anders als das Prinzip
der Erhaltung der Flächen. Das dritte Gesetz endlich, welches besagt, daß die
Quadrate der großen Axen für verschiedene Planeten proportional der Anziehung der
Masse sind, liegt in dem Formel 93. Dann wird dasselbe folgt

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} = \frac{G'gK}{4\pi^2}$$

Dem Gesetz zu Folge muß also μ für alle Planeten denselben Werth haben, oder
sein G' um g ebenfalls nämliche Größen sein (das Gewicht der Sonnenmasse
und die Beschleunigung der Masse, beide auf die Erdoberfläche bezogen), so muß
 K für alle Planeten derselbe sein, d. h. spezifische Anziehung, welche die Sonne
auf alle Planeten ausübt, gleiche Maßzahl der spezifischen Planeten müssen in gleich
in Entfernung von der Sonne gleiche Anziehung ausüben, ein sehr
merkwürdiges Fact, welches die spezifischen Himmelskörper, von denen
man weiß, als eine Klasse von gleichartig annehmen läßt.

P. 17. Anziehung nach dem Kubus der Entfernung.

Dann ist die Anziehung auf dem Gränze der Entfernung einem Quadrat umgekehrt
der Entfernung.

Bewegung aus, welche ungeschwächt gerad ist, so ist es interessant bei dem Kinde der Entfernung des Gegenstandes zu sehen, dem entgegen der Punkt steht, und der nach solcher Zeit in das Centrum oder entfernt sich immer weiter von demselben bis ins Unendliche. Es ist in diesem Falle

$$fr = \frac{\kappa}{r^3}, U = -\frac{G G' \kappa}{2} \int \frac{dr}{r^3} = \frac{G G' \kappa}{2} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Setzt man also wieder $G G' \kappa = \mu$, $\frac{2g^2}{a} = H$, so geben die Gleichungen 87

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = H + \frac{\mu c^2}{r^2} \quad r^2 \frac{dS}{dt} = c.$$

Diese Gleichungen zeigen, daß man die Bewegung in der Richtung des Punktes P durch den Punkt P der gewöhnlichen Bewegung eines Punktes, welcher einem gleichförmigen Kraft wie der wirkliche Punkt unterworfen ist, nur da, wo der Wert der Constante μ der Constante $\mu - c^2$ geteilt ist.

Ist also $c^2 > \mu$, so ist der wirkliche Punkt von einer abstoßenden Kraft getrieben, und geht daher ins Unendliche. Ist $c^2 = \mu$, so bewegt sich der wirkliche Punkt gleichförmig oder er ruht. Der wirkliche Punkt muß dann also in das Centrum oder ins Unendliche gehen, je nachdem die Bewegung der Bewegungsgeschwindigkeit in der Richtung des Punktes P dem Centrum gegenüber ist oder nicht. Ist sie endlich Null, so bewegt sich der Körper im Kreis um das Centrum, oder in einem anderen beliebigen Punkte, insofern die kleinste Bewegung ist von anderen Bewegungen unabhängig. Der letzte Fall, wo $c^2 < \mu$, gibt uns für den wirklichen Punkt eine Umrückung. Geht dieser Punkt aber offenbar in das Centrum, wenn seine Bewegungsgeschwindigkeit Null oder auf das Centrum gerichtet ist.

Über den Fall ist noch zu untersuchen, wo der Punkt eine Anfangsgeschwindigkeit $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0$ hat, welche ihn von dem Centrum entfernt.

Dann ist also für $r = r_0$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = H + \frac{\mu - c^2}{r_0^2};$$

und wenn man diesen Ausdruck für H in die Gleichung für $\frac{dr}{dt}$ einsetzt, so sieht man, daß das nur ausgedrückt werden

$$r^2 = \frac{r_0^2}{1 - \frac{r_0^2}{\mu - c^2}} \left(\frac{dr}{dt}\right)_0^2$$

Der Punkt r_0 ist also zurück und hängt in das Continuum selbst

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_0^2 < \frac{\mu - c^2}{r_0^2}$$

von der übrigen Gleichung einen neuen Ausdruck für r gibt. Ist aber die Com-
pactheit der Bewegungseigenheit in Richtung der Enden nicht zu gleich
von größerem $\sqrt{\frac{\mu - c^2}{r_0^2}}$, so gibt der Punkt statt der Bewegung im
Handels.

I. 18. Wurfbewegung im widerstehenden Mittel.

Ein Problem, bei welchem keine der Prinzipien ein Integral liefert, gibt die
Bewegung eines Körpers in einem Widerstand im luftverfüllten Raum. Den Wider-
stand des Luft nimmt man bei schnellen Bewegungen dem Quadrat der Ge-
schwindigkeit proportional an, so wie, proportional dem Geschwindigkeit. Das
Körpern Körper. Es ist also die Wirkung und folgende Kraft durch den Widerstand des

$$\text{Widerstand} = - \epsilon q v^2,$$

wo q der Widerstand, ϵ eine constante Zahl. Die Formel XV lautet die Venticul,
abon der Bewegung, die V über dem Gewicht. Dann sind die Bewegung,

$$\text{gleichungen: } \frac{G}{g} \frac{dx^2}{dt^2} = - \epsilon q v^2 \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{G}{g} \frac{dy^2}{dt^2} = - \epsilon q v^2 \frac{dy}{dt} - G.$$

Man gibt diesen Gleichungen eine einfachere Form, wenn man die Logarithmen.

42.

Spezialität u sind die Differentialgleichungen (einfach). Wenn ist

$$v^2 = u^2 + v^2 \frac{dx}{dt} = u; \frac{dx}{dt} = v; \frac{dv}{dt} = v, \text{ also}$$

$$\frac{du}{dt} = -\alpha u \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha v \sqrt{u^2 + v^2} - g,$$

aus der Länge wegen $\alpha = \frac{g}{G}$ gesetzt ist. Auch wenn man mit der Zeit t eliminiert, so erhält man eine Differentialgleichung 2ter Ordnung.

$$g du + \alpha (v du - u dv) \sqrt{u^2 + v^2} = 0$$

Diese Gleichung ist nicht integrierbar, wenn man sich u und v direkt, n. z. gleich die Variablen

$$p = \frac{v}{u}$$

einsetzt, welche der Umgekehrte des Winkels bedeutet, dann der Umgekehrte der Länge mit der Frequenz α bezieht. Also ist

$$\frac{g}{u^2} = C - 2\alpha \int dp \sqrt{1+p^2} = C - \alpha \{p\sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2})\}$$

Auch für u erhält man unmittelbar folgende Ausdrücke der Größe u von p :

$$u = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{C - \alpha(p\sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2}))}}$$

$$v = \frac{p\sqrt{g}}{\sqrt{C - \alpha(p\sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2}))}}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{g}} \sqrt{C - \alpha(p\sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2}))}$$

$$x = \int \frac{-dp}{C - \alpha(p\sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2}))}$$

$$y = \int \frac{-p dp}{C - \alpha(p\sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2}))}$$

Diese Beispiele sind von Nutzen der Integration, jedoch, wenn man von anderen Methoden, nicht möglich. Es mag hier zeigen die Aufgabe, die die Bewegung zu bezeichnen, und p ist die Winkel, u ist die Länge der Kreis

von der freigesetzten Richtung, mit sehr geringe Entfernung. Dann kann man statt
 das, was, sondern $p \sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2})$ anstatt p setzen, und es fällt dann
 $u = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{C-2ap}} \quad v = \frac{p\sqrt{g}}{\sqrt{C-2ap}} \quad t = \int \frac{-dp}{\sqrt{g}\sqrt{C-2ap}} = \frac{1}{\alpha\sqrt{g}}(\sqrt{C-2ap} - \sqrt{C-2ap_0})$
 wenn p_0 den Abstand von p im Anfang der Bewegung bezeichnet. Ist zugleich v_0
 die Anfangsgeschwindigkeit, so hat man

$$v_0^2 = u^2 + v^2 = \frac{g(u + p_0^2)}{C - 2ap_0}$$

Man mit Annahmefähigkeit von p_0^2 für den Constanten C den Abstand:

$$C = \frac{g}{v_0^2} + 2ap_0.$$

Dann man also alle Zeit, nicht nicht weiß

$$p_0 - p = \frac{gt}{v_0} + \frac{agt^2}{2}, \quad u = \frac{1}{\frac{1}{v_0} + at}, \quad v = \frac{\frac{gt}{v_0} - \frac{agt^2}{2}}{\frac{1}{v_0} + at}$$

Endlich es fällt man, wenn man die Anfangsgeschwindigkeit der Bewegung mit dem Mittel
 Geschwindigkeit der Bewegung vergleicht:

$$x = \int_{p_0}^p \frac{-dp}{C-2ap} = \frac{1}{2a} \log \frac{C-2ap}{C-2ap_0} = \frac{1}{2a} \log(1 + atv_0)$$

$$Y = \int_{p_0}^p \frac{-pdp}{C-2ap} = \frac{p p_0}{2a} + \frac{C}{4a^2} \log \frac{C-2ap}{C-2ap_0} = -\frac{gt^2}{4v_0} - \frac{gt^2}{4} + \frac{1}{4a} \left(\frac{g}{v_0^2} + 2ap_0 \right) \log(1 + atv_0)$$

Dann man a in diesen Formeln vernachlässigt, so erhält man in der Zeit der
 Formeln für den freien Fall in luftlosem Raum.

Aus der Bewegungsgleichung zu vermittelst, hat man mit t gegeben, obigen beiden
 Gleichungen zu eliminieren. Dann es fällt man

$$Y = \frac{g}{4a^2 v_0^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{g}{v_0^2} + 2ap_0 \right) x \frac{g}{4a^2 v_0^2} C 2ax$$

Setzt man jetzt $Y = 0$, so findet man eine Gleichung für die Abstände
 x , in welchen das Geschwindigkeit der Bewegung wieder null ist:

$$\frac{C 2ax}{x} = 2a + \frac{4v_0^2 a^2 p_0}{g}.$$

44.

Will man α als sehr klein betrachten, sind nach Potenzen der Fall zu entwickeln, so kommt

$$2\alpha + \alpha^2 x + \frac{4\alpha^3 x^2}{3} \dots = 2\alpha + \frac{4v_0^2 \alpha^2 p_0}{g}$$

und daher
$$x = \frac{2v_0^2 p_0}{g} - \frac{8\alpha}{3} \quad \frac{v_0^4 p_0^2}{g^2} \dots$$

oder eine Näherung der Anfangswerte nun setzen $\frac{8\alpha}{3} \cdot \frac{v_0^4 p_0^2}{g^2}$

Dies wird die Zeit der Bewegung sein, wenn man die Gleichung, welche x nach t entwickelt folgt

$$1 + \alpha t v_0^2 = e^{\frac{\alpha x}{g}}, \text{ also hier für die Zeit der Bewegung}$$

$$T = \frac{x}{v_0} + \frac{x^2 \alpha}{2v_0} \dots = \frac{2v_0 p_0}{g} + \frac{2\alpha}{3} \cdot \frac{v_0^3 p_0^2}{g^2}$$

Die Ringsche nicht streng genommen, und sollte man einen den Anfang mit dem Ball, so wie etwas früher, ein. Man findet die so angegebene Zeit indem man in der Gleichung für P die entsprechenden lässt:

$$t = \frac{v_0 p_0}{g} - \alpha \frac{v_0^3 p_0^2}{2g^2} ; \text{ und indem man dies in}$$

die Formeln für X & Y einsetzt.

$$X = \frac{v_0^2 p_0}{g} - \alpha \frac{v_0^4 p_0^2}{g^2}$$

$$Y = \frac{v_0^2 p_0^2}{2g} - \alpha \frac{v_0^3 p_0^3}{g^2}$$

für Ball welche sich vollständig beenden lässt, ist die parabolische Bewegung. Indem man die der aufsteigenden Bewegungsgleichungen zurücklässt, welche die U. aufsteigend für die aufsteigende Bewegung übertragen in:

$$\frac{dv}{dt} = -g - \alpha v^2.$$

Es ist, wenn

$$t = -\int_{v_0}^v \frac{dv}{g + \alpha v^2} = \frac{1}{\sqrt{g\alpha}} \left\{ \arctan(v\sqrt{\frac{\alpha}{g}}) - \arctan(v_0\sqrt{\frac{\alpha}{g}}) \right\} \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg}(t\sqrt{g\alpha}) = \sqrt{\frac{\alpha}{g}} \quad \frac{v_0 v}{1 + v \frac{v_0}{g}} \text{ oder anders, wenn}$$

man ferner v bestimmt

$$v = \frac{v_0 - \sqrt{\frac{g}{a}} \operatorname{tg}(t\sqrt{ga})}{1 + v_0 \sqrt{\frac{a}{g}} \operatorname{tg}(t\sqrt{ga})} = \frac{dy}{dt}$$

Integriert man nun um das Drg zu finden von $t = 0$ an, so wird

$$Y = \frac{1}{a} \log(\cos(t\sqrt{ga}) + v_0 \sqrt{\frac{a}{g}} \sin(t\sqrt{ga})).$$

Die aufsteigende Bewegung dauert also bis v verschwindet, d. h. bis

$$t = \frac{1}{\sqrt{ga}} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(v_0 \sqrt{\frac{a}{g}}), \text{ und an diesem Stelle ist}$$

$$Y = \frac{1}{a} \log \sqrt{1 + v_0^2 \frac{a}{g}}$$

maximal die Höhe der Bewegung.

Indem aber nun die Bewegung absteigend wird, darf man sich nicht mehr derselben Differentialgleichung bedienen, sondern, da der Luftwiderstand jetzt die Coordinaten zu vermindern strebt, die folgenden:

$$\frac{dv}{dt} = -g + av^2.$$

Legmanns findet sich zuweilen, die Zeit von dem höchsten Punkte an gerechnet:

$$t = \int_0^v \frac{dv}{g - av^2} = \frac{1}{\sqrt{ag}} \log \left(\frac{v\sqrt{a} + \sqrt{g}}{v\sqrt{a} - \sqrt{g}} \right) \text{ oder}$$

$$v\sqrt{\frac{a}{g}} = - \frac{e^{t\sqrt{ag}} - e^{-t\sqrt{ag}}}{e^{t\sqrt{ag}} + e^{-t\sqrt{ag}}}.$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Geschwindigkeit absteigend ist, und so, daß sie sich der GröÙe $v = -\sqrt{\frac{g}{a}}$ zu nähern bestrebt ist, wenn sie auf dieselbe nach unendlich langer Zeit kommt, nur kann die Bewegung in eine gleichförmige übergehen. Die Geschwindigkeit ist immer negativ, da die positiven Coordinaten nach der oben Annahme gerechnet werden.

46.

Um endlich von den gewöhnlichen Dingen zu finden, muß man für v seinen
 Dmly $\frac{dy}{dt}$ setzen, und mit man wieder die Zeit von dem fassen Punkte der
 Bewegung an, und bezeichnet die oben geschilderte Höhe Y_0 , so ist

$$Y_0 - Y = \sqrt{\frac{g}{2}} \int_0^t \frac{e^{t\sqrt{ag}} - e^{-t\sqrt{ag}}}{e^{t\sqrt{ag}} + e^{-t\sqrt{ag}}} dt = \frac{1}{2} \log \frac{e^{t\sqrt{ag}} + t\sqrt{ag}}{2}$$

Um die Zeit zu finden, nach welcher der Körper von fassen Punkte wieder zurück,
 set man für $Y = 0$ zu setzen. Dann findet sich

$$t = \frac{1}{\sqrt{ag}} \log (e^{2Y_0} + \sqrt{e^{2Y_0} - 1}),$$

oder wenn man setzt für Y_0 den oben angegebenen Dmly setzt:

$$t = \frac{1}{\sqrt{ag}} \log (\sqrt{1 + v_0^2 \frac{a}{g}} + v_0 \sqrt{\frac{a}{g}}),$$

ein Dmly, nach dem, was man unter dem Ausdruck als den für die Zeit der Bewegung.

Die Geschwindigkeit, mit der sich der Körper den Boden, wieder, bewegt ist

$$v = - \frac{v_0}{\sqrt{1 + v_0^2 \frac{a}{g}}}$$

ein Dmly, nach dem, was man unter dem Ausdruck als den Anfangsgeschwindigkeit v_0 .

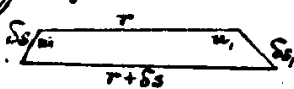
I. 19. Gleichgewicht eines Punktsystems.

1.

Vorstellen wir uns ein Punktsystem, welches dem Einfluß n anderer Kräfte unterworfen ist, zugleich aber unter inneren Kräften, angestrichen und abgegrenzt, in sich geschlossen liegt. Der Druckvertrieb ist es zunächst. Kann man so, als frei annehmen, indem man voraussetzt, hindernisse der freien Bewegung, aber auch diese Abgrenzung, wenn auch in der That, besteht es nicht immer gesetzmäßig, das Ziel der inneren Kräfte ganz zu verfolgen, sondern man gewöhnlich ist, zu abtönenden Verhältnissen seine Tätigkeit zu setzen, wie etwa der Leistung einer verdampfenden Antikörpernartigen Oberfläche u. s. w.

Da für das Gleichgewicht jedes Punktes die Wirkung seiner Druckverteilung auftritt, wird alle Arbeit verschwinden muß, so daß, daß, auf für ein Gleichgewicht bei, schließlich Punktsystem die Kräfte, alle inneren Arbeiten verschwinden muß, welche durch kleine Druckverteilungen, der einzelnen Punkte hervorgeht und so, sondern dieser allgemeinen Ausdruck das Prinzip der inneren Systeme im allgemeinen ergibt, die alle Gleichgewichtsbedingungen anzuordnen zu lassen.

Die Bestimmung der Arbeiten der inneren Kräfte, wird in der folgenden Untersuchung. Ist R die angestrichene Kraft, welche zwei Atome verbindet, d. h. welche jetzt, mit derselben Formel gegen das andere gesetzt, so ist die Kräfte der Kraft R gleichfalls inneren Arbeiten $R(\cos u \, \delta s + \cos u, \, \delta s)$, da aber offenbar der



Winkel von r gegen die neue Verbindungslinie $r + \delta r$ bilden. Aber wichtig ist, nicht nur $\cos$, sondern auch

Wissen der zweiten Ordnung von δ abzusehen, welche man gewöhnlich so, weiß

$$r + \delta r + \delta s \cos u + \delta s, \cos u, = r, \delta s \cos u + \delta s, \cos u, = -\delta r.$$

Die Arbeit der inneren Kräfte R ist also $-R \, \delta r$, eine Größe, welche verschwindet, wenn die gegenwärtige Bestimmung der Atome angenommen gelassen ist.

Einzelne P, P_2 --- die einzelnen äußeren Kräfte, x, y, z ihre Componenten, $\delta x, \delta y, \delta z, \delta s$, etc. die virtuellen Verschiebungen der Angriffspunkte unabhängig voneinander, so kann man dem Prinzip der virtuellen Gleichgewichte die folgenden Formeln geben:

$$1. \quad \sum P \cos(P, \delta s) \delta s - \sum R \delta r = 0, \text{ oder}$$

$$2. \quad \sum (x \delta x + y \delta y + z \delta z) - \sum R \delta r = 0.$$

Letzteren wir insbesondere diejenigen virtuellen Verschiebungen, bei denen die gegenwärtige Lage der Punkte unverändert bleibt. Die erste reduziert sich zu nichts, alle Arbeit, auf die Arbeit der äußeren Kräfte. Das Punktsystem aber ist insofern als ein starrer Körper zu betrachten. Die Verschiebungen, welche das System in diesem Sinne zulässt, beschränken sich aber auf gleichzeitige, parallele Verschiebungen sämtlicher Punkte und Verschiebungen des ganzen Systems um feste Lagen. Dies lässt sich jede Verschiebung eines Körpers auf einen bestimmten Pfad zurückführen, auf drei Verschiebungen parallel den Coordinatenachsen, aber jede Verschiebung um eine Strecke den Anfangspunkt gefasst liegt auf drei Verschiebungen um die (im Körper festen) Coordinatenachsen; und jede Verschiebung um eine nicht längs den Anfangspunkt gefasste Strecke auf eine Verschiebung auf einem bestimmten Pfad, und auf eine Verschiebung um eine parallele Strecke nach der den Anfangspunkt geht. Man kann daher jede, ganz beliebige Verschiebung eines festen Körpers aufstellen, in drei nach einander aufeinander wirkenden Verschiebungen parallel den drei Achsen, und in drei Verschiebungen um dieselben. Auf die Verschiebung 1 oder 2 werden also die Kräfte auf diese sechs Verschiebungen angewendet sein, indem immer das letzte Glied dieser Verschiebung zusammenzufassen ist. Verschiebt man alle Punkte um δx nach dem X Achse, so verschieben sich eben alle $\delta y, \delta z$, und alle δx werden gleich δa ;

und somit geht aus 2. die Gleichung hervor

$$A = \sum X = 0. \text{ Und ebenso}$$

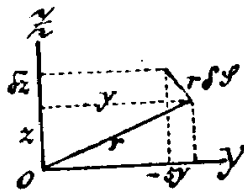
$$3 - - - B = \sum Y = 0.$$

$$C = \sum Z = 0.$$

Wacht man sich aber über die X bzw. Y bzw. Z Punkte, so ist jeder Punkt einem kleinen Längen δS gleich, was δS für alle Punkte des Körpers gleich ist, so hat man $\delta x = 0$, und aus der Bedingung der Variations folgt

$$\frac{\tau \delta S}{\delta x} = \frac{\tau}{y} = \frac{\tau \delta S}{-\delta y} = \frac{\tau}{x}, \text{ oder}$$

$$\delta y = -x \delta S \quad \delta x = +y \delta S$$



4. Indem man also ein kleines Element des Körpers betrachtet, so ist δS in der Gleichung 2. einfügt man:

$$A' = \sum (y^2 - x^2) = 0 \text{ und ebenso}$$

$$4 - - - B' = \sum (z^2 - x^2) = 0$$

$$C' = \sum (x^2 - y^2) = 0$$

Die Gleichungen 3. 4. sind also notwendig für das Gleichgewicht eines beliebigen Systems; bildet dies System aber einen festen Körper, so sind sie zugleich hinreichend, die obigen vier Bedingungen zu erfüllen. Die ersten Gleichungen zeigen, dass die Summe der Komponenten nach den Coordinatenachsen verschwinden müssen; die Gleichungen 4. lassen aber das selbe für die Summe der Abstände von einem Punkte annehmen. Anm. Durch die Gleichungen 3. 4. werden sich nicht alle auf das Gleichgewicht fester Körper bezügliche Bedingungen. Man kann aber, wenn die Punkte, um welche es geht, angenommen sind, so als die Lage der Punkte des Körpers einander kennen müssen, so hat man nur die in ihnen zu bestimmten Abstände, als man die Punkte des gegebenen Systems einzufügen, u. kann die Gleichgewichtsbedingungen zu entwickeln, als man die Körper betrachtet.

4.

Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft.

[illegible]

Die Gleichung 2 nimmt dann u. d. v. folgende Gestalt an:

$$\sum (x \delta x + y \delta y + z \delta z) = \sum R \delta r = \sum \frac{G}{g} \left(\frac{dx^2}{dt^2} \delta x + \frac{dy^2}{dt^2} \delta y + \frac{dz^2}{dt^2} \delta z \right).$$

in nachher wird man die $\delta x \delta y \delta z$ alle möglichen Combinationen bestimmen.

Wenden wir diese Gleichungen gänzlich auf diejenigen Verbindungen an, welche im
meisten Theiltheile wirklich eintreten, sind welche jetzt alle zu sein, so werden
gelöst, so hat man nur die Größen dx dy dz mit dx dy dz , dx mit dx dy dz ,
und man erhält:

$$\Sigma (Xdx + Ydy + Zdz) = \Sigma Rdr = d \cdot \Sigma \frac{G}{2g} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right)$$

$$b \dots = d. \left(\sum \frac{G \sqrt{r}}{2g} \right).$$

Es ist, daher der Zweck der gesammelten Lebensgeschichte des Hrn. Kämpf, die
 Thätigkeit, welche während dieses Zeitraums geübt ist, darzustellen, nicht, die
 Familienarbeit der innern Kräfte, auf die eine weitere Zeitraums, durch Integration in eine
 unmittelbare Lücke, durch die ungenutzte Kunst R. ist eine Funktion der letzten
 Kunst R. der ungenutzten Seele, eine R. ist, selbst eine unvollständige Differential.

Dieses ist nicht immer der Fall mit dem Arbeitsmoment der äußeren Kräfte, bezeichnen wir also den Endlag 0 als einen gewissen Anfangszustand, bezügl. d. h. es erfüllt man sich b. der Gleichung der lebendigen Kräfte:

$$\sum \frac{Cv^2}{2g} - \sum \frac{Cv_0^2}{2g} = - \sum \int R dr + \sum \int (Xdx + Ydy + Zdz) \\ 7 \text{ --- } = - \sum \int_{r_0}^r R dr + \sum \int_{\sigma_0}^{\sigma} P \cos(P, ds) ds.,$$

man sieht im Allgemeinen das zweite Integral, die Summe der Arbeiten, die sich berechnen lassen kann, falls man, selbst ohne den Weg der Zeit mitzuzählen, nur den oder die entsprechenden Zeit für integriert. Dagegen will jene neue Funktion der anal. ist, ist möglich, falls man in der Lage ist eine Funktion U aller variablen Coordinaten zu finden, welche die Kräfte X, Y, Z etc. als ihre partiellen Differentialquotienten aufweisen heißt, so daß

$$8 \text{ --- } U = f(x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots) \quad X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad X_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad Y_1 = \frac{\partial U}{\partial y_1}, \quad Z_1 = \frac{\partial U}{\partial z_1}, \dots$$

Dann eine solche Kräftefunktion existiert, wenn in der Integral der Gleichung 7 sämmtlich möglichen, und es ist

$$9 \text{ --- } \sum \frac{Cv^2}{2g} - \sum \frac{Cv_0^2}{2g} = U - U_0 - \sum \int_{r_0}^r R dr.$$

Diese Gleichung lautet das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kräfte auf ein beliebiges Massensystem, indem die lebendigen Kräfte immer denselben Werth annehmen, sobald die Coordinaten der verschiedenen Punkte des Systems

$$U - \sum \int R dr \text{ nur ein und derselbe Werth haben.}$$

Man bemerkt, daß die Gleichung 9. immer gilt, sobald keine äußeren Kräfte vorhanden sind, und in der That kann man sagen, daß die inneren Kräfte selbst stets eine Kräftefunktion zulassen, dann nennt man den Ausdruck

$$- \sum \int R dr = - \sum \int f(r) dr$$

nach den Coordinaten eines der betrachteten Punkte differenzirt, so erfüllt man

wirklich die Componenten summirter Oerziefungskräfte, welche auf diesen Punkt einwirken. Bezeichnen wir nämlich durch xyz die Coordinaten des betrachteten Punktes, durch x, y, z , etc. die Coordinaten anderer, welche ihn umgeben, so wird die $r_1 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$ etc.

$$- \frac{\partial}{\partial x} \sum \int f r. dr = - \left\{ \int_1 r_1 \frac{x - x_1}{r_1^3} + \int_2 r_2 \frac{x - x_2}{r_2^3} + \dots \right\}.$$

Da nun, aber zugleich $\frac{x - x_1}{r_1^3}$, $\frac{x - x_2}{r_2^3}$ etc. die COS. derjenigen Winkel sind, welche die Linien r_1, r_2 gegen die X Axe bilden, so ist der Ausdruck nichts anderes als die Summe der X Componenten, welche von den übrigen Kräfte hervorgehen.

Diese Betrachtungen finden z. B. auf die Lösung der Aufgabe ihre Anwendung. Auf die Bestimmung der Gleichgewichtslagen ist die Leistung einer Kräftefunktion von Wichtigkeit, kann die Gleichung 2. geht bei der Leistung in eine solche über:

$$10 - - - 0 = \delta (U - \sum \int R dr)$$

über, eine Gleichung, welche andeutet, daß Gleichgewicht nur dann eintreten kann, wenn die Kräftefunktion (die äußeren und inneren Kräfte zusammengefaßt) ein Maximum oder ein Minimum ist. Dieses Maximum oder Minimum ist, absolut, wenn das System frei beweglich ist, aber relativ, wenn irgend welche Bedingungen obwalten.

I. 21. Princip der Erhaltung des Schwerpunkts

Wenden wir uns nun der Gleichung 5. und diejenigen Bedingungen an, für welche die inneren Kräfte, ausgeübt, und zwar zunächst auf die fortbewegten, vermindert, gesetzt, daß sie gestaltet sind. Hat die ungestörten Gleichungen mit Substitution kann man auf die Gleichungen 3. das d'Alembert'sche Princip anwenden. Und dann erfüllt man:

$$\begin{aligned} \sum X &= \sum \frac{G}{g} \frac{dx^2}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum \frac{G}{g} x \right) \\ 11 - - - \sum Y &= \sum \frac{G}{g} \frac{dy^2}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum \frac{G}{g} y \right) \\ \sum Z &= \sum \frac{G}{g} \frac{dz^2}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum \frac{G}{g} z \right) \end{aligned}$$

Wenn man aber diese die Coordinaten des Systems $\xi \eta \zeta$ einführt, welche, obwohl das System seine Gestalt verändern kann, dennoch eine ganz ihre Lage zu einander beibehält, sobald man ihr höchsten Augenblick betrachtet, so erfüllt man, durch P. des Gewicht des ganzen Systems beizubehalten:

$$12 \dots P\xi = \sum Gx, P\eta = \sum Gy, P\zeta = \sum Gz, \text{ und die}$$

Gleichungen 11 geben dann in der folgenden über:

$$13 \dots \frac{P}{g} \frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum X, \frac{P}{g} \frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum Y, \frac{P}{g} \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \sum Z.$$

Dies sind aber die Bewegungsgleichungen eines Punktes von dem Gewicht P, auf welchen alle äußeren Kräfte einwirken. Und so hat man den Satz:

Der Schwerpunkt eines frei beweglichen Systems bewegt sich so, als ob alle Kräfte in ihm vereinigt wären, und als ob sämtliche Kräfte in ihm wirken.

Man kann sagen: sämtliche Kräfte überprüft, die die Körper der Komponenten aller inneren Kräfte in sich vereinigen. Wenn man aber Mittel besitzt, für jeden Augenblick die Körper der ersten Reihe von 12 zu bewegen, so können zweimal auf der Zeit integrieren und erhält man $\xi \eta \zeta$. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die Körper an sich vereinigen, oder wenn man keine äußeren Kräfte einwirken, wie dies bei der Bewegung der Himmelskörper der Fall ist. Und alsdann sei es:

$$14 \dots \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= 0 & \xi &= \alpha t + \alpha' \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= 0 & \eta &= \beta t + \beta' \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= 0 & \zeta &= \gamma t + \gamma' \end{aligned}$$

wo man $\alpha \beta \gamma$ $\alpha' \beta' \gamma'$ willkürliche Constanten bekennt. Dies gibt aber den Satz: Beibehält die Componenten des inneren Kräfte gleich Null sind, so muß der Schwerpunkt des freien Systems unversetzt bleiben, oder sich geradlinig mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen.

Das gebräuchlichste System führt den Namen des Prinzipes der Erhaltung d. Energie.
 Wenn die Massen eines Systems Körpern constituiert, so ist die Energie ein reelles
 Punkt, dessen Bewegung man verfolgen kann. Es lautet sich also die Energie eines
 oder Körpers reell auf die Formel, nach der die Masse eines Systems Punkte
 stellen, nicht. Aus den Gleichungen 13 folgt aber weiter

$$15 \quad - \quad - \quad - \quad \frac{P}{2g} d(v^2) = d\xi \geq X + d\eta \geq Y + d\zeta \geq \chi,$$

wo V , die absolute Geschwindigkeit des Energiepunktes bezeichnet. Es ist leicht zu zeigen
 den lebendigen Kraft des Energiepunktes, wenn man die primäre Funktion, gebildet aus
 ihm. Denken wir uns die Bewegung des Systems in einer Ebene gezeichnet, um allen Punkten
 gemeinsamen Bewegung, nach der die Energiepunkte gleichmäßig sind und weiter, bei welcher die
 Energiepunkt als fest angesehen werden darf, so ist die lebendige Kraft des Energiepunktes auf
 die lebendige Kraft eines auf sich selbst wirkenden Systems, bei welcher man allen Punkten die
 nämliche Geschwindigkeit V , erteilen muß, und die rechte Seite in 15 ist, die bei jeder
 gleichförmigen Bewegung gebildete Arbeit. Man set also nach dem Satz:

Die Summe der lebendigen Kraft der gleichförmigen Bewegung: in dem obigen
 Sinne) ist gleich der Summe der dieser Bewegung entsprechenden Arbeit.

Es ist nicht in der allgemeinen Bewegungsgleichung d. der relativen Coordi-
 naten der Punkte in Bezug auf den Energiepunkt zu setzen, wenn $x' y' z'$ die
 sind: $x = x' + \xi, y = y' + \eta, z = z' + \zeta$ so wird mit δ in dem δr , welche
 mit den relativen Verschiebungen der Punkte abhängt, nicht übereinstimmen.

$$16 \quad - \quad - \quad - \quad \left. \begin{aligned} \sum (X \delta x' + Y \delta y' + Z \delta z') - \sum R \delta r \\ + \delta \xi \sum X + \delta \eta \sum Y + \delta \zeta \sum Z \end{aligned} \right\} = \left. \begin{aligned} \sum \frac{G}{g} \left(\frac{dx'}{dt^2} \delta x' + \frac{dy'}{dt^2} \delta y' + \frac{dz'}{dt^2} \delta z' \right) \\ + \sum \frac{G}{g} \left(\delta \xi \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \delta \eta \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \delta \zeta \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \right); \end{aligned} \right\}$$

Man, aber ist über die Beziehung auf die rechte Seite wegen den Gleichungen

$$\sum G x' = 0 \quad \sum G y' = 0 \quad \sum G z' = 0,$$

nicht besagen, weil die Symmetrie der relativen Bewegungsgleichheit. der phys. 9
 aber auf 13 die in der zweiten Zeile von 16 folgenden Glieder aufbauen, so bleibt

$$17 \dots \Sigma (X \delta x' + Y \delta y' + Z \delta z') = \Sigma R \delta r = \Sigma \frac{G}{g} \left(\frac{dx'}{dt} \delta x' + \frac{dy'}{dt} \delta y' + \frac{dz'}{dt} \delta z' \right),$$

 eine Gleichung, welche gemäß der Form von 5 fast im Einklang mit der Polyinvarianz ist.
Die relative Bewegung des Systems gegen den Systemzähler reicht gemäß 16 bis
zusammen als wenn letztere vollständig im festen Bezugssystem existieren. Daraus kommt folgend:
Der Zähler an lebendigen Punkt dieser relativen Bewegung muß gebrach der
Wahrscheinlichkeit der Punkte die dieser relativen Bewegung laffen.

II. 23. Princip der Erhaltung der Flächenräume.

Als es hierher gesendet dem gegebenen System, Anfangen um die Coordinaten zu
 zu setzen, so erhalten wir Gleichungen, welche auf die der Gleichungen 4. abge,
 leicht zu sehen, können, indem man, das d' Alembert'sche Princip auf dieselben
 anwendet. Es stellen wir uns nun folgende über

$$\begin{aligned}
 \Sigma (y \ddot{z} - z \ddot{y}) &= \Sigma \frac{G}{g} (y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2}) = \frac{d}{dt} \left[\Sigma \frac{G}{g} (y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}) \right] \\
 18 \dots \Sigma (z \ddot{x} - x \ddot{z}) &= \Sigma \frac{G}{g} (z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2}) = \frac{d}{dt} \left[\Sigma \frac{G}{g} (z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}) \right] \\
 \Sigma (x \ddot{y} - y \ddot{x}) &= \Sigma \frac{G}{g} (x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2}) = \frac{d}{dt} \left[\Sigma \frac{G}{g} (x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}) \right]
 \end{aligned}$$

die linken Glieder dieser Gleichungen sind, nicht anders, als die Summe der
 Anfangsmomenten der in dem Punkte in Bezug auf die Coordinaten. Die Größe
 an welche man sich denken kann, ist die der Differenz der beiden, haben gleichfalls eine
 einfache Bedeutung. Projiziert man nämlich der kleine Kreis, welche der von Anfang
 gebildet mit gegebenem Punkt der in dem Zeitmoment dt durchläuft auf die $Y\bar{Z}$
 Ebene, so ist die Fläche (S. 2) $\frac{1}{2} (y dx - x dy)$. Die entsprechende Fläche ist also
 nicht anders als die Summe der Projektionen der von jedem Punkt der
 kleinen Kreise aus, jede durch das Zeitmoment dt durchläuft in der Ebene.

10.

Wenn man in einem Kriete auf das System wirksam, setzen dieser die
Integrale

$$\begin{aligned} \sum \frac{G}{g} (y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt}) &= a \\ 19 - - - \sum \frac{G}{g} (x \frac{dx}{dt} - x \frac{dx}{dt}) &= b \\ \sum \frac{G}{g} (x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}) &= c \end{aligned}$$

wo a, b, c willkürliche Constanten bezeichnen. Oben diese Gleichungen, gelten
nur, wenn man die Summen der Drehungsmomente, verpfeimten, oder eine der,
selbst gilt, wenn eine jener Summen Null wird. Diese Gleichungen bilden das Prinzip
der Erhaltung der Stufenmomente für ein System von Punkten, indem die Summen der projectiv
den Stufen mit den Massen multipliziert, dem Zeitmoment proportional werden. Man
kann sich die Bedeutung dieser Gleichungen noch in folgender Weise veranschaulichen. Auf eine
Ebene des Raumes vom Punkte O aus einen Punkt P betrachten. Derin die Punkte
man im Anfangspunkte ein Lot, und denken sich auf diesem einen Punkt, dessen
Abstand gleich der das rechtlichen Bewegung ist, in einem Abstand r von O ,
der z proportional dem kleinen Stufenmoment selbst. Dieser Punkt, so wie die
übrigen auf dieser Weise constructen, bilden eine gewisse Bewegung annehmen.
Da man aber das voraussetzt, dass mit den Augen dieselben Winkel bildet, wie das
Stufenmoment mit den Coordinatenachsen, so sind die Coordinaten des bewegten
Punktes jederzeit proportional den Projectionen der Punkte, d. h. proportional mit
 $y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt}, x \frac{dx}{dt} - x \frac{dx}{dt}, x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}$

Die Gleichungen 19 zeigen also, dass der Bewegungspunkt der bewegten Systemtheile
in seiner Lage bleibt, und zwar sind seine Coordinaten a, b, c proportional. Man
kann also, auf das Coordinatensystem so denken, dass die z Augen diese
Bewegungspunkte sind, so dass die, wenn die z Augen mit den festen Coordinaten,
den Winkel bildet, dann $\cos \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Wenn man den ganz bestimmten Fall mit der Gleichung 19. mischen die einfache Gestalt an:

$$\begin{aligned} \sum \frac{G}{g} (y_1 \frac{dx_1}{dt} - x_1 \frac{dy_1}{dt}) &= 0 \\ 20 - - - \sum \frac{G}{g} (x_1 \frac{dx_1}{dt} - x_1 \frac{dy_1}{dt}) &= 0 \\ \sum \frac{G}{g} (x_1 \frac{dx_1}{dt} - y_1 \frac{dy_1}{dt}) &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot f. \end{aligned}$$

Die Constante der letzten Gleichung nimmt gleich der größten Constante, dass sie bei gegebenem Anfangszustand richtig wird, indem sie der Entfernung des bewegten Punktes vom Anfangszustand proportional ist.

Bestimmen wir uns insbesondere den Fall wo die Gleichungen 14. n. 19 gleichzeitig bestehen, so sind alle die in diesem System, in jedem Augenblicke, wenn das System fest wird, die Gleichgewichte fallen werden. In diesem Fall gelten die Gleichungen 19 für jeden Anfangszustand, wenn man sich nur das Coordinatensystem sich selbst parallel, indem man setzt:

$$x = x_2 + K \quad y = y_2 + m \quad z = z_2 + n, \text{ parallel mit Hauptachsen}$$

der Gleichung 14:

$$\begin{aligned} \sum \frac{G}{g} (y_2 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dy_2}{dt}) &= a - \frac{\sum G}{g} (my - n\beta) \\ 21 - - - \sum \frac{G}{g} (x_2 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dy_2}{dt}) &= b - \frac{\sum G}{g} (n\alpha - Ky) \\ \sum \frac{G}{g} (x_2 \frac{dy_2}{dt} - y_2 \frac{dx_2}{dt}) &= c - \frac{\sum G}{g} (K\beta - m\alpha) \end{aligned}$$

man sucht geeigneten Constanten setzen. Damit man für sich nicht die Transformation 18. an, so erfüllt man für eine neue Constante F , so dass

$$22 - - - F^2 = (a - \frac{\sum G}{g} (my - n\beta))^2 + (b - \frac{\sum G}{g} (n\alpha - Ky))^2 + (c - \frac{\sum G}{g} (K\beta - m\alpha))^2.$$

Man kann nun untersuchen, für welche Anfangszustände F den grössten Werth, welche die Constante des Flächensatzes für einen bestimmten Anfangszustand annehmen können, ein Minimum wird. Untersucht man F^2 nach den Coordinaten K, m, n des neuen Anfangszustandes, so wird:

12.

$$\begin{aligned} (b - \frac{\sum G}{g}(na - \kappa y))y &= (c - \frac{\sum G}{g}(\kappa\beta - m\alpha))\beta \\ (c - \frac{\sum G}{g}(\kappa\beta - m\alpha))\alpha &= (a - \frac{\sum G}{g}(my - n\beta))y \end{aligned}$$

Gleichungen, welche nutzbar

$$(a - \frac{\sum G}{g}(my - n\beta))\beta = (b - \frac{\sum G}{g}(na - \kappa y))\alpha$$

sind durch die folgenden:

$$\begin{aligned} 23 \quad & a - \frac{\sum G}{g}(my - n\beta) = g \cdot \alpha \\ & b - \frac{\sum G}{g}(na - \kappa y) = g \cdot \beta \\ & c - \frac{\sum G}{g}(\kappa\beta - m\alpha) = g \cdot \gamma \end{aligned}$$

wo g eine willkürliche Größe ist. Es folgt aber aus diesen Gleichungen:

$$24 \quad \alpha\alpha + b\beta + c\gamma = g(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

wo g bestimmt ist, ist zugleich F , welche den Densität misst:

$$25 \quad F = \frac{(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

Die Coordinaten κ, m, n sind mit 23 nicht vollständig bestimmt, sondern man hat, wenn man eine der Gleichungen, die g bestimmt ist, mitläßt, die Gleichungen quadrieren lassen und sich, welche sich in einem gewissen Linien schneiden, die mit der Längsachse, Linien des Symmetrie Punktes zusammen ist, weil die Gleichungen 21. sich in die folgenden auflösen:

$$\begin{aligned} 26 \quad & \kappa = g(c\beta - b\gamma) + s\alpha \\ & m = g(a\gamma - c\alpha) + s\beta \\ & n = g(b\alpha - a\beta) + s\gamma \end{aligned}$$

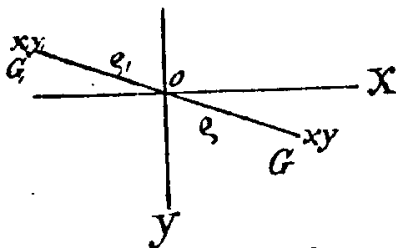
wo s eine willkürliche Größe ist und $g = \frac{g}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \sum G}$

Man hat also folgenden Satz: die Ebene, die durch den größten Densität der Constante der Gleichungen ein Minimum ist, liegt punktförmig genau der Linie in welcher sich der Symmetrie Punkt bewegt, und der zugehörige Schwerpunkt liegt auf einer Linie, welche dieser Linie parallel ist. Daraus kann man sich leicht überzeugen, wenn man jede beliebige Länge annimmt.

Man nennt sie die invariablen Ebenen der Bewegung. Es ist zu bemerken, daß wenn man den Anfangspunkt verlagern würde, nach dem man die Linie vorbestimmt, aus der Bewegungslinie des Massenpunktes, die anderen Ebenen der invariablen Ebenen, gemäß der Lage, sind die Schwerpunkte für die Projectiva auf diese Ebenen nicht mehr invariant, weil die in 21. mit α & β bezeichneten Größen dann veränderlich wären. Bei der Bewegung der Massen auf den invariablen Ebenen ist also die Lage des Anfangspunktes gleichgültig, aber nur für den Fall, daß gegebenen Anfangspunkt sind der natürlichen Schwerpunkte vorhanden.

§. 24. Bewegung zweier Massenpunkte welche einander anziehen.

Das einfachste Beispiel der obigen Betrachtungen bildet die Bewegung zweier frei beweglicher, sich einander anziehender Massen. Aber auch die relative Bewegung gegen den Schwerpunkt beider Massen, als wenn dieser fest, so wird zugleich diese relative Bewegung in einer Ebene vor sich gehen. Denn im ersten Augenblick müssen die



relativen Anfangsgeschwindigkeiten mit dem Centrum

schwerpunkts auf dem Schwerpunkt in einer Ebene bleiben, damit dieser aber fest bleibt, später aber nicht kleine Kraft mehr auf, welche die Bewegungslinien ändern.

Es könnte. Ist also die XY Ebene die der Bewegung, so gibt der Satz der relativen Bewegungen Kraft (§. 22. von Ende)

$$27 \quad \frac{G}{2g} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{G}{2g} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{G}{2g} \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \frac{G}{2g} \left(\frac{dy_1}{dt} \right)^2 = - \int R dr + C$$

wobei R die anziehende Kraft, r die gegenseitige Entfernung beider Punkte von einander bedeutet. Aus der Gleichung der Schwerpunkte ergibt

$$28 \quad \frac{G}{g} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) + \frac{G}{g} \left(x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt} \right) = C.$$

Da aber der Anfangspunkt der Schwerpunkt bleibt, so ist nach dem

14

$$29 \dots Gx + G_1 x_1 = 0 \quad Cy + G_1 y_1 = 0.$$

Jetzt kann man aus 27. 28. die Gleichungen ableiten:

$$\frac{G}{2g} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right) = \frac{G_1}{G+G_1} (C - \int R dr)$$

$$30 \dots \frac{G}{g} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \frac{G}{G+G_1} C$$

$$31 \dots \frac{G}{2g} \left(\left(\frac{d(x-x_1)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(y-y_1)}{dt} \right)^2 \right) = \frac{G+G_1}{G_1} (C - \int R dr)$$

$$\frac{G}{g} \left((x-x_1) \frac{d(y-y_1)}{dt} - (y-y_1) \frac{d(x-x_1)}{dt} \right) = \frac{G+G_1}{G_1} C$$

Die Gleichungen 30 zeigen, daß jeder der beiden Punkte sich um den gemeinsamen Schwerpunkt bewegt, wie wenn derselbe ein einziges Centrum wäre, wenn man diese Gleichungen mit den Gleichungen des § 15 vergleicht, - $\frac{G}{G+G_1} \int R dr$ in Stelle der Kräftefunktion einsetzt. Ist also g. l. Bewegungsgesetz des Newton'schen, also $-\int R dr = \frac{\kappa G G_1}{r}$, so ist die Kräftefunktion hier $\frac{\kappa G G_1}{r(G+G_1)} = \frac{\kappa G G_1}{g}$, d. h. dieselbe, als wenn der Schwerpunkt die Masse des anderen Punktes in sich enthält, und das nämliche Gesetz gültig bleibt. Die anderen Gleichungen (31) zeigen aber, daß der eine Punkt sich um den anderen bewegt, als wäre die Kräftefunktion $-\int R dr \cdot \frac{G+G_1}{G_1}$. Dies ist für jedes beliebige Bewegungsgesetz gültig, als wenn der andere Punkt in sich das Centrum wäre, welches die Massen beider Punkte in sich vereinigt, voraussetzt die Bewegungsfunktion unverändert bleibt. Die gesamte Lösung der Aufgabe ist also mit § 15. 16. unmittelbar zu entnehmen.

Bewegung starrer Körper.

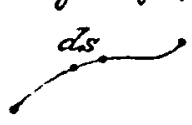
§ 25. Bestimmung des Schwerpunkts für einige Körper.

Die Gleichungen ergaben den Schwerpunkt eines Massenpunktes bestimmen:

$$32 \dots \xi = \frac{\sum Gx}{\sum G}, \quad \eta = \frac{\sum Gy}{\sum G}, \quad \zeta = \frac{\sum Gz}{\sum G},$$

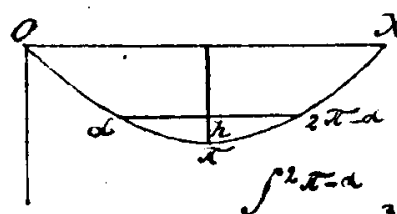
was man auf Integralen darstellt, sobald man sie auf einen kontinuierlichen

Ringer moment. Ist der betrachtete Ring ein Stück vom geringen Alter, so wird, da Materie, die jetzt in ihm vorliegt, erst vorhin verfliegen, so ist das Element G eines Elements seiner Länge ds proportional. Man kann nun mit S die Länge des Stücks bezeichnen, nur die Coordinaten x, y, z durch S angedeutet denkt,

 gegen die Gleichungen 32 über in

$$33 \quad \xi = \frac{\int_0^S x ds}{S}, \quad \eta = \frac{\int_0^S y ds}{S}, \quad \xi = \frac{\int_0^S z ds}{S}$$

Vollg. L. der Dynamik eines Geleitenbogens braucht man, nachher dass ein der Oberfläche zuwärtlich hin abgegriffen wird, so ist ξ offenbar gleich der halben Länge des Bogens, d. h. a . Länge des Bogen ist aber $2a$ von dem Anfangs- und Endpunkt des Bogen, d. h. $2a$. Länge des Bogen ist aber $2a$ von dem Anfangs- und Endpunkt des Bogen, d. h. $2a$.



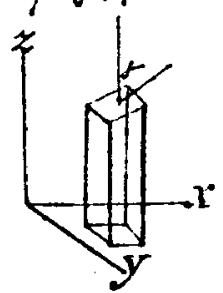
das Bogen gleiches Stück von S (32), so wird

$$\eta = + \frac{\int_0^{2\pi} a \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi}{\int_0^{2\pi} a d\varphi} = 2a \frac{[\cos \frac{\varphi}{2}]_0^{2\pi}}{[2\pi]} = 2a \frac{[\cos \frac{\varphi}{2}]_0^{2\pi}}{[2\pi]}$$

und man mit $h = a(1 + \cos \alpha) = 2a \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ den Bogen des Geleitenbogens bezieht, mit:

$$\eta = 2a - \frac{h}{3}$$

so ist der Dynamik des Bogen Bogen so weit, und ist, wie von dem Bogen der Bogen. Man kann den Dynamik des Bogen Bogen so weit, und ist, wie von dem Bogen der Bogen. Man kann den Dynamik des Bogen Bogen so weit, und ist, wie von dem Bogen der Bogen.



das Element selbst ist $\frac{dx dy}{\cos \gamma}$, wo γ der Winkel zwischen der Ebene des Elements gegen die xy Ebene, oder seine Projektion gegen die z Achse ist. Es wird aber: nach 32. so mit $z = f(x, y)$ an die Stelle von $f(x, y, z)$ zu setzen ist)

$$\cos \gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

16.

Umrechnung auf ein Koordinatensystem

$$\xi = \frac{\iint x \, dx \, dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\iint dx \, dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}, \quad \eta = \frac{\iint y \, dx \, dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\iint dx \, dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}, \quad \zeta = \frac{\iint z \, dx \, dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\iint dx \, dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$$

Ist die Oberfläche der Oberfläche einer Fläche, so geht die Koordinatengleichung in 1 über, indem man die xy Ebene zur Ebene der Projektion stellt. - Eig. L. der Differenzial für denjenigen Teil einer Rotationsparabel, welche durch einen Punkt p gehen die xy Ebene geschnitten wird in der Entfernung C vom Ursprung abgetrennt wird. Ist der Abstand, den die Oberfläche $z = \frac{r^2}{2p}$, beträgt der folgende Differenzial, offenbar muß der z Wert nicht als ist, daher nur die Koordinaten zu berechnen:

$$\xi = \frac{\iint x \, dx \, dy \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{p^2}}}{\iint dx \, dy \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{p^2}}}$$

Setzt man nun statt der Koordinaten xy Polarkoordinaten r ein, so drückt sich das Element der xy Ebene durch $r \, dr \, d\varphi$ aus, wobei man die Gleichung der



Oberfläche $r \, dr = p \, dz$, durch $p \, dz \, d\varphi$, und indem man, wenn

$x^2 + y^2$ durch $r^2 = 2pz$ ersetzt, wird

$$\xi = \frac{\iint p \, z \, d\varphi \, dz \sqrt{1 + \frac{2z}{p}}}{\iint p \, d\varphi \, dz \sqrt{1 + \frac{2z}{p}}}$$

Integration nach φ von 0 bis 2π zu integrieren sein, nach z aber von 0 bis C und die selbst wegen der konstanten Grenzen für die Doppelintegration in einfache, welche nur nach $\int dz$ 2π ist, so bleibt

$$\xi = \frac{\int_0^C x \, dz \sqrt{p+2z}}{\int_0^C dz \sqrt{p+2z}}$$

Es bleibt nun statt z oben $\frac{p+2z}{p}$, prominent unter

$$\xi = \frac{\int_0^C \frac{1}{2} \sqrt{p+2z}^3 - \frac{p}{2} \int_0^C \frac{1}{2} \sqrt{p+2z}}{\int_0^C dz \sqrt{p+2z}} = \frac{\frac{1}{10} [\sqrt{p+2z}]^5 - \frac{p}{6} [\sqrt{p+2z}]^3}{\frac{1}{3} [\sqrt{p+2z}]^3 - \frac{1}{3} \sqrt{p}} = \frac{\frac{1}{10} \sqrt{p+2z}^5 - \frac{p}{6} \sqrt{p+2z}^3}{\frac{1}{3} \sqrt{p+2z}^3 - \frac{1}{3} \sqrt{p}}$$

Umschließ der Cykloiden mit einem rechteckigen Kugels zu bestimmen
 ist G mit dem Volumenmoment $dx dy dz$ proportional mit der Cykloiden,
 koordinaten bestimmung auf einer derartigen Integration, welche über den Kugeln
 mitgeführt sind.

$$\xi = \frac{\iiint x dx dy dz}{\iiint dx dy dz} \quad \eta = \frac{\iiint y dx dy dz}{\iiint dx dy dz} \quad \zeta = \frac{\iiint z dx dy dz}{\iiint dx dy dz}$$

Da die Kugeln symmetrisch ist gegen die XY Ebene, so ist $\eta = 0$,
 da ξ und ζ sich aufheben, indem die Cykloiden symmetrisch der XZ Ebene ist. Es bleibt also
 nur

$$\xi = \frac{\iiint x dx dy dz}{\iiint dx dy dz}$$

Das ist, indem wir zunächst x als constant betrachten, $\iint dy dz$ mit dem Kugeln,
 die Fläche einer Cykloiden, welche durch die Kugeln in der Ebene x von der
 Kugeln begrenzt gegen die XZ Ebene ist. Da die Kugeln symmetrisch
 gegen die XZ Ebene ist, so ist $\xi = \frac{\int F(x) dx}{\int dx}$, wobei $F(x)$ die Fläche einer
 Cykloiden ist.

$$\xi = \frac{\int F(x) dx}{\int dx}$$

Das ist g. l. unannehmlich auf der Oberfläche einer Kugel, welche die Kugeln
 durchschneidet gegen eine Ebene abgeteilt wird. Die Gleichung der Kugel ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und x_0 die Gleichung der Cykloiden von dem Mittelpunkte der Kugel. Da die
 Kugeln symmetrisch sind, so ist $\xi = \frac{\int F(x) dx}{\int dx}$, wobei $F(x)$ die Fläche einer
 Cykloiden ist.

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}, \text{ oder } \frac{y^2}{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} + \frac{z^2}{c^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} = 1.$$

Das ist die Gleichung einer Ellipse, welche die Kugeln in der Ebene x von der Kugel begrenzt.

Das ist also die Fläche $F = bc(1 - \frac{x^2}{a^2})$, und somit wird der Ausdruck von ξ :

$$18) \int_{x_0}^a \frac{x(1-\frac{x^2}{a^2})dx}{a(1-\frac{x^2}{a^2})} = \frac{[\frac{a^2-x^2}{4a^2}]^2}{[\frac{a^2-x^2}{4a^2}]} = \frac{3}{4} \frac{(a^2-x_0^2)^2}{2a^3-3x_0a^2+x_0^3} = \frac{3}{4} \frac{(a+x_0)^2}{2a+x_0}$$

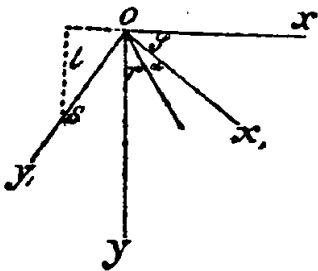
Setzt man wieder die Größe des abgepfiffenen Fils ein, so kommt endlich

$$\xi = \frac{3}{4} \frac{(2a-h)^2}{3a-h},$$

wo bei einem Kugel einen Radius a ist.

§. 26. Bewegung um eine feste Axe.

Die einfachste Bewegung eines Körpers bei welcher er sich nicht, wie wir im §. 25. gesehen, ist seine Drehung um eine feste Axe. In der Beschreibung dieser Bewegung führt die letzten Gleichungen §. 25. 18. für deren Richtigkeit abwie die Beweglichkeit des Systems um die z Axe bedingt, für alle diese die feste Axe des Körpers. Wenden wir uns ein Koordinatensystem X, Y , im Körper,



zu setzt, und bildet denselben zur Zeit t den Winkel $I + \alpha$ um die z Achse.

Es ist für irgend einen Punkt des Körpers, dessen ursprüngliche Lage x, y gegeben ist, Radius r und Winkel α bildet,

$$x = r \cos(I + \alpha) \quad y = r \sin(I + \alpha); \text{ mitsein}$$

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{dI}{dt};$$

sind die Gleichungen des umgedrehten §. geht über in:

$$36) \dots \sum (xY - yX) = \frac{d^2 I}{dt^2} \sum \frac{G}{g} r^2 = M \frac{d^2 I}{dt^2},$$

wo M das Trägheitsmoment des bewegten Körpers bedeutet. Da die beiden Seiten sich abheben, und I nicht mit t veränderlich, so gibt es eine Differentialgleichung für I , welche die Lage des Körpers zu jeder Zeit angibt. Ist ein System von wenig punktförmigen Körpern, so kann man sich das Gewicht jedes Körpers im Schwerpunkt vereinigt denken, und wenn zur Lösung $I = 0$ man, so liegt der Schwerpunkt auf

dem Azs OY , in S . Einsetzen liefert das Drehmoment $Pl \sin I$,
 mit 36 geht über in

$$37 \quad \frac{d^2 I}{dt^2} = -\frac{Pl}{M} \sin I,$$

die Gleichung, welche mit der des Pendels vollkommen übereinstimmt, und
 für kleine Ausschläge die Drehungsdauer gibt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{Pl}}. \quad (39).$$

Setzt man $\frac{Pl}{M} = \frac{g}{\lambda}$, so erhält die Gleichung 37 genau die Bewegung eines
 Punktes, der an einem fadenförmigen Pendel von der Länge λ befestigt ist,
 so gibt λ die dem Körper entsprechende Länge des äquivalenten Pendels, $\lambda = \frac{gM}{Pl}$.

§ 24. Theorie der Trägheitsmomente.

Bestimmen wir das Trägheitsmoment für eine Masse, welche sich um einen Aufhängepunkt
 der Lage O dreht, und gehen die Koordinaten des Punktes α, β, γ bildet. Es
 gibt man sich dm das Massenelement des Punktes x, y, z , mit r die
 Entfernung dieses Punktes von der Aufhängeachse, so ist
 das Trägheitsmoment ausgedrückt durch

$$M = \int r^2 dm,$$

das Integral ausgedrückt über den ganzen Körper.

Wir haben $r^2 = R^2 (1 - \cos^2 \nu)$, mit $\cos \nu = \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{R}$, so ist auch

$$38 \quad r^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2,$$

$$39 \quad M = \int [(x^2 + y^2 + z^2) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2] dm.$$

Wenn wir für m nur $(x^2 + y^2 + z^2)$ den Ausdruck $(x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$

setzen, welcher genau jenen gleich ist, so ist M eine symmetrische Funktion zweier

Ordnung, wobei die Integrationen über die Winkel α, β, γ ,

und man kann daher den Ausdruck in Form geben:

$$40 \quad M = a_{11} \cos^2 \alpha + a_{22} \cos^2 \beta + a_{33} \cos^2 \gamma + 2a_{12} \cos \alpha \cos \beta + 2a_{13} \cos \alpha \cos \gamma + 2a_{23} \cos \beta \cos \gamma.$$

20

wobei die Ringen wegen gesetzt ist:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int (y^2 + z^2) dm & a_{23} &= - \int y z dm \\ 41 - - - & a_{22} &= \int (x^2 + z^2) dm & a_{31} &= - \int z x dm \\ & a_{33} &= \int (x^2 + y^2) dm & a_{12} &= \int x y dm \end{aligned}$$

Wenn wir uns nun durch den Ursprungspunkt alle nur möglichen Aufhängungen gegeben, und hängen auf jedem denselben, von 0 aus der Punkte $g = \sqrt{\frac{1}{M}}$ aus, so bilden die Endpunkte eine Oberfläche, deren Gleichung mit 40. zusammengefaßt man mit $g^2 = \frac{1}{M}$ multipliziert, und bemerkt, daß $g \cos \alpha, g \cos \beta, g \cos \gamma$ die Coord. sind von x, y, z , so erhalten wir mit 40:

$$42 - - - 1 = a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{23} yz + 2a_{31} zx + 2a_{12} xy.$$

Dies ist die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt im Ursprungspunkte der Coordinaten liegt. Da aber der Radius Vector $g = \sqrt{\frac{1}{M}}$ nimmt, notwendig ist, daß nicht imaginäre werden kann, weil das Trägheitsmoment M immer positiv ist, so muß diese Oberfläche notwendig ein Ellipsoid sein. Man nennt sie das Centralellipsoid des Punktes, welcher zum Ursprung der Coordinaten gewählt ist. Und so erfüllt man den Satz: Ein jeder Punkt repräsentiert ein Ellipsoid, welches jenem Punkt zum Mittelpunkt hat und dessen Radius Vektoren, als Aufhängungen betrachtet, zugleich die Schwerachsen des dreiwertigen Trägheitsmoments dieses Körpers bilden. Die Gleichungen dieses Ellipsoids werden die Symmetriengleichungen des Körpers sein, wenn man den Punkt bestimmt.

Wollte man diese zu den Coordinaten, rufen, so würde das Ellipsoid 42. nur nach der Gleichung der x, y, z ausfallen, d. h. man müßte die Gleichungen erfüllen haben:

$$43 - - - \int yz \, dm = 0 \quad \int zx \, dm = 0 \quad \int xy \, dm = 0.$$

Es gibt also für jeden Körper gewisse drei gegenseitig senkrechte Richtungen für welche die Größen 43. verschwinden, diese Richtungen sind die symmetrischen Achsen. Bezeichnet man endlich durch A, B, C , die Werte, welche a_{11}, a_{22}, a_{33} für die Coordinatensysteme annehmen, so daß ABC gleich die Trägheitsmomente der symmetrischen Kräfte sind, so geht die Gleichung des Trägheitsmoments in die einfache Gestalt über:

$$44 - - - M = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma, \text{ nebst}$$

$$45 - - - 1 = A x^2 + B y^2 + C z^2$$

die Gleichung des Schwerpunktes ist.

Um die symmetrischen und die Richtung derselben wirklich zu finden, set man be-
kannlich nur diejenigen Richtungen aufzusuchen, in welchen der Radius Vector einen
größten oder kleinsten Wert hat oder, da $\rho = \sqrt{\frac{1}{M}}$, nur das Trägheitsmoment
einen kleinsten oder größten Wert annimmt. Man kann also M als Funktion
der Größen $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ betrachten und den größten oder kleinsten Wert auf-
suchen, welchen der Ausdruck 40 annimmt, nebst zugehörig die identische Gleich-
ung

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

erfüllt ist. Diese Aufgabe des relativen Maximums kommt aber zurück auf
die Aufgabe, das absolute Maximum von

$$M - m (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 1)$$

zu bestimmen, wo m einen unbestimmten Factor bedeutet. Setzt man also die partiellen Ableitungen dieses Ausdrucks nach $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, verschwinden, so
erfüllt man die Gleichungen:

$$46 - - - \begin{aligned} a_{11} \cos \alpha + a_{12} \cos \beta + a_{13} \cos \gamma &= m \cos \alpha \\ a_{12} \cos \alpha + a_{22} \cos \beta + a_{23} \cos \gamma &= m \cos \beta \\ a_{13} \cos \alpha + a_{23} \cos \beta + a_{33} \cos \gamma &= m \cos \gamma \end{aligned}$$

22.

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ und addiert sie so kommt

$$M = m$$

es stellt also der unbekannte Factor M selbst das Trägheitsmoment dar, welches der gegebenen Richtung entspricht. Dann kann man die Gleichungen 46. in der Form darstellen

$$\begin{aligned} 46. & (a_{11} - m) \cos \alpha + a_{12} \cos \beta + a_{13} \cos \gamma = 0 \\ 47. & a_{12} \cos \alpha + (a_{22} - m) \cos \beta + a_{23} \cos \gamma = 0 \\ & a_{13} \cos \alpha + a_{23} \cos \beta + (a_{33} - m) \cos \gamma = 0, \end{aligned}$$

so bemerkt man, daß dieselben nur die Aufhänger der $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ enthalten, und die Elimination dieser Größen führt zugleich mit der für m eubische Gleichung:

$$48. \dots (a_{11} - m)(a_{22} - m)(a_{33} - m) - a_{12}^2(a_{33} - m) - a_{21}^2(a_{22} - m) - a_{13}^2(a_{33} - m) + 2a_{12}a_{23}a_{31} = 0$$

deren drei Wurzeln die drei Trägheitsmomente $A B C$ angeben. Aus der Natur der Sache folgt, daß dieselben notwendig auch alle positiv sein müssen.

Die zwei Wurzeln sind immer gleich, so wird das Centralträgheitsmoment Rotationsachsen, fließt. In diesem Falle ist also die Richtung nur für eine Hauptachse bestimmt, während zugleich jede Lage, welche senkrecht gegen diese gerichtet ist, die Eigenschaft einer Hauptachse erfüllt. Gilt die Gleichung 48. drei gleiche Wurzeln, so ist das Centralträgheitsmoment einer Kugel, denn ist also das Trägheitsmoment für alle durch den betrachteten Punkt gezogenen Ebenen gleich, jede beliebige Ebene kann eine Hauptachse genannt werden.

Dann man auf diese Weise die Hauptachsen für den Symmetriepunkt des Körpers bestimmen, so ist es leicht die Hauptachsen, und für jeden anderen Punkt anzufinden. Man merke nur, daß sich die oben gegebenen Formeln auf den Symmetriepunkt beziehen, und daß man die Hauptachsen des Körpers nicht zu verwechseln darf, wie es nicht sind, die Gleichungen 39. 44. das Trägheitsmoment jedes Massenelementes

angeben, welche Linie den Symmetriepunkt galte ist. Dann wir man das Trägheitsmoment für eine Linie bestimmen wollen, welche nicht durch den Symmetriepunkt geht, sondern durch einen Punkt dessen Coordinaten a, b, c , so set man das Coordinatensystem man gewollt zu verschieben, d. h. statt x, y, z zu schreiben $x-a, y-b, z-c$, um mit der Gleichung 39. das neue Trägheitsmoment zu erhalten. Dann wir das, falls M_1 , so ist also

$$49. \quad M_1 = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - (x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma]^2 dm$$

benutzen wir, daß für a, b, c von der Integration unabhängig sind, und daß, weil die Coordinaten x, y, z mit dem Symmetriepunkt bezogen sind,

$$50. \quad \int x dm = 0 \quad \int y dm = 0 \quad \int z dm = 0.$$

Dann findet sich M_1 in einem Ueile, welches unter dem Integralzeichen ein zweites Dimensionen der x, y, z enthält, das unabhängig M ist, in einem zweiten, welches die ersten Dimensionen enthält, und wegen der Gleichungen 50. verschwindet, und endlich in dem Ueile:

$$51. \quad [a^2 + b^2 + c^2 - (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)^2] \int dm.$$

Der letzte Factor gibt aber (nach 38.) das Quadrat der Entfernung d des Symmetriepunktes von der neuen Ursprungs-Linie, oder die Entfernung der Ursprungs-Linie von einem gewollt durch den Symmetriepunkt gelaufen. Bezeichnen wir also den Abstand des neuen Ringes mit M so ist

$$52. \quad M_1 = M + Md^2, \text{ d. h.}$$

Belegt man die Ursprungs-Linie selbst parallel mit dem Symmetriepunkt in der Entfernung d von ihrem früheren Orte, so wird das Trägheitsmoment um $M \cdot d^2$ vergrößert. Bezeichnen wir nun durch l die Entfernung des Punktes a, b, c von dem Symmetriepunkt, so daß

$$53. \quad l^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

44.

Es ist nun das Skalarprodukt für ein Vektorsystem zu berechnen. Das Skalarprodukt ist gegeben durch:

$$54 \quad M_1 = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma + M [L^2 - (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma)^2]$$

$$= (A + M L^2) \cos^2 \alpha + (B + M L^2) \cos^2 \beta + (C + M L^2) \cos^2 \gamma - M (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma)$$

Wir setzen nun die Komponenten dieses Vektors in die Gleichungen 46. folgendes mit a, b, c setzen:

$$55 \quad \begin{aligned} a_{11} &= A + M(L^2 - a^2) & a_{21} &= -Mbc \\ a_{22} &= B + M(L^2 - b^2) & a_{31} &= -Mca \\ a_{33} &= C + M(L^2 - c^2) & a_{12} &= -Mab \end{aligned}$$

und die Gleichungen 47 werden:

$$56 \quad \begin{aligned} (A + M L^2 - m) \cos \alpha &= a M (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) \\ (B + M L^2 - m) \cos \beta &= b M (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) \\ (C + M L^2 - m) \cos \gamma &= c M (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) \end{aligned}$$

Wir dividieren nun jede Gleichung mit dem Nenner der linken Seite, multiplizieren beidseitig mit a, b, c , und addieren, so erhält man die Gleichung $a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma$ multipliziert

$$57 \quad \frac{1}{M} = \frac{a^2}{A + M L^2 - m} + \frac{b^2}{B + M L^2 - m} + \frac{c^2}{C + M L^2 - m}$$

Man kann zeigen, daß wenn $A > B > C$, die drei Nenner dieser Gleichung positiv sind, daß ein Nenner von M kleiner ist als $C + M L^2$, ein zweiter größer als $C + M L^2$ und ein dritter größer als $B + M L^2$ und ein vierter größer als $A + M L^2$. Hieraus folgt, daß es solche Punkte geben wird, die für zwei Grenzfallkomponenten gleich werden, und daß für die anderen entweder $m = B + M L^2$ oder $m = C + M L^2$ eine Lösungsmöglichkeit ist. Im ersten Fall muß dann b , im zweiten c verschwinden, und diese Punkte müssen also den Gleichungen genügen:

$$58 \quad \begin{aligned} b = 0, \quad \frac{1}{M} &= \frac{a^2}{A - B} + \frac{c^2}{C - B}, \text{ oder} \\ c = 0, \quad \frac{1}{M} &= \frac{a^2}{A - C} + \frac{b^2}{B - C}. \end{aligned}$$

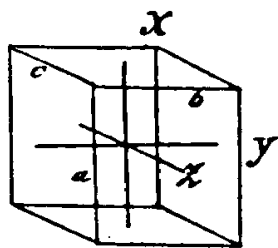
Das erste ist die Gleichung eines Kugels in der x Ebene, das zweite der einer Ellipse in der xy Ebene. Es folgt aber sofort, daß wenn alle drei Ebenen gleich sein sollen zugleich

$$m = B + Ml^2 = C + Ml^2, \text{ d. h. } B = C, \text{ sein muß,}$$

die beiden kleinsten Trägheitsmomente des Kugelschnittes müssen gleich sein. n. Somit die Gleichung 57 einen Kreis sein, muß zugleich $b = 0$ $c = 0$ $a = \sqrt{\frac{A-B}{M}}$ werden, d. h. die betrachteten Punkte liegen dann auf dem größten Kreise des Kugelschnittes in der Entfernung $\sqrt{\frac{A-B}{M}}$ vom Mittelpunkte.

S. 28. Bestimmung einiger Trägheitsmomente.

Die Kugeln sind rechtwinkligen Parallelepipeden mit den Kanten abc in Bezug auf einen Kugelmittelpunkt parallel. Wenn man also die Trägheitsmomente für jede dieser Kugeln, wenn man für diese Seiten bestimmt. Es ist aber, wenn M das Masse des Kugels bezeichnet,



$$dm = \frac{M}{abc} dx dy dz \text{ also}$$

$$\int x^2 dm = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} x^2 dx dy dz = \frac{M}{abc} \cdot \frac{a^3}{12} \cdot bc = \frac{Ma^2}{12}$$

Bildet man also die parallelepipeden auf der Analogie, so erhalten wir die Kugelmittelpunkte für den

Kugelmittelpunkt:

$$A = \frac{M(b^2 + c^2)}{12}, B = \frac{M(c^2 + a^2)}{12}, C = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}.$$

Obwohl auch die Kugeln eines Ellipsoids in Bezug auf einen Kugelmittelpunkt zusammen mit den geometrischen Kugeln in das Kugelnetz. Haben diese die Länge a, b, c , so daß $\frac{4}{3} abc$ das Volumen des Kugels ist, n. ist M sein Masse so wird.

$$dm = \frac{3M}{4abc} dx dy dz. \text{ also}$$

$$\int x^2 dm = \frac{3M}{4abc} \iiint x^2 dx dy dz. \text{ Auf der schon in S. 25.}$$

eingemachten Massenkraft für $\iint \Delta y dx$ die Fläche nimmt in dem Abstand x vom Mittel
punkt gelegenen Element, also (siehe oben)

$$F = bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \pi. \text{ Also so nimmt}$$

$$\int x^2 dm = \frac{3M}{4a} \int_a^{-a} x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{3M}{4a} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5a^2} \right] = \frac{Ma^2}{5}.$$

Bilden wir ebenso die anderen Integrale, so nimmt endlich

$$A = M \frac{b^2 + c^2}{5}, B = M \frac{c^2 + a^2}{5}, C = M \frac{a^2 + b^2}{5}.$$

Wenn wir unsere Voraussetzungen auf eine Rotationskörper an. In der
2. Abs. der Vorlesung, so können wir statt xy die Polarcordinaten $r \sin \varphi$
setzen, so daß

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi,$$

und daß $r dr d\varphi$ an der Stelle von $dx dy$ tritt. Vergleiche die Gleichung der
Oberfläche $r = f(x)$, von φ frei ist, so ist nur φ die Integration (von 0 bis 2π)
immer mitzuführen. Es reicht also wenn M die Masse, V das Volumen des Körpers
ist, $dm = \frac{M}{V} dx dy dz$ oder $= \frac{M}{V} r dr d\varphi dz$, und

$$\int x^2 dm = \frac{M}{V} \iiint x^2 r dr d\varphi dz = \frac{2\pi M}{V} \int x^2 r dr dz.$$

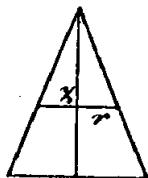
$$\int x^2 dm = \int y^2 dm = \frac{1}{2} \int (x^2 + y^2) dm = \frac{M}{2V} \iiint r^3 dr d\varphi dz = \frac{\pi M}{V} \int r^3 dr dz.$$

Die Hauptträgheitsmomente für einen Punkt der Rotationsachse sind also

$$C = \frac{2\pi M}{V} \int r^3 dr dz, A = B = \frac{\pi M}{V} \int (r^2 + 2x^2) r dr dz.$$

Ist z. B. die gegebene Oberfläche ein Rotationskörper der Kreisseite des Quers q , die
Höhe h der Umfang der Circulierten der Zylinder. Dann ist also $V = \frac{1}{2} q^2 \pi h$, und
man muß r integrieren, von 0 bis zu dem Radius $r = \frac{qz}{h}$:

$$\int x^2 dm = \frac{6M}{q^2 h} \int_0^h \frac{q^2 z}{2h^2} \cdot x^2 dz = \frac{3}{5} h^2 M.$$



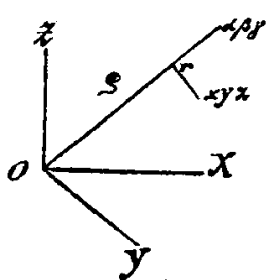
$$\int x^4 dm = \int y^4 dm = \frac{3M}{5^2 h} \int_0^h \frac{q^2 z^2}{4h^2} dz = \frac{3}{20} q^2 M.$$

Außer den Hauptträgheitsmomenten für die Achsen des Körpers:

$$C = \frac{2}{10} g^2 M, \quad A - B = \frac{2}{5} M (h^2 + \frac{g^2}{4}).$$

§. 29. Bestimmung der Centrifugalkraft.

Die Bewegung um eine feste Achse ist gewisser Centrifugalkräfte mit sich, welche gegen die Masse einen Druck ausüben, der sie aus ihrer Lage zu bringen be-
strebt sind; nachhersehen wir im Nächstem, wie die Verschiebung nicht soll,
kommen soll ist, dieselbe fortwährend verändern müssen. Bildet die Verschiebung
mit dem im Körper festen Koordinatensystem ein Winkel $\alpha/\beta/\gamma$, den Winkel,
gesamtheit sei w . In einem Punkte xyz wirkt dann eine Centrifugalkraft
Kraft $dm \cdot w^2 \cdot r$ nach r seine Entfernung von der Achse bezeichnet, und welche



gleiche Richtung mit r hat. Sind die Komponenten
dieser Kraft xyz , so kann man das ganze System an
Centrifugalkräften aufsetzen durch drei Kräfte:

$$\sum X \quad \sum Y \quad \sum Z$$

nachdem Ursprungspunkt umgerufen, und durch drei Kräfte:

ingebunden

$$\sum (yZ - zY) \quad \sum (zX - xZ) \quad \sum (xY - yX),$$

nachdem den Körper um die Achse zu drehen bestrahlt sind. Bildet r mit der
Achse den Winkel λ u. μ , so ist alle die w^2 für alle Punkte des Körpers der,
selben gleich:

$$\sum X = w^2 \int r \cos \lambda \, dm \quad \sum (yZ - zY) = w^2 \int r (y \cos \nu - z \cos \mu) \, dm.$$

$$59 \quad \sum Y = w^2 \int r \cos \mu \, dm \quad \sum (zX - xZ) = w^2 \int r (z \cos \lambda - x \cos \nu) \, dm$$

$$\sum Z = w^2 \int r \cos \nu \, dm \quad \sum (xY - yX) = w^2 \int r (x \cos \mu - y \cos \lambda) \, dm.$$

Bezeichnet man aber das von r auf der Verschiebungslinie abgesetzene Stück
durch g , so erfüllt man durch Projection von g auf die Achsen:

$$60 \quad g \cos \alpha + r \cos \lambda = x \quad g \cos \beta + r \cos \mu = y \quad g \cos \gamma + r \cos \nu = z;$$

sind zu gleichzeit r mit g bestimmt ist, also

$$61 \quad \dots \cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu = 0,$$

so geben die Gleichungen 60 durch Multiplikation mit $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$:

$$62 \quad \dots g = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$$

wobei die Größen $r \cos \lambda, r \cos \mu, r \cos \nu$ nun vollständig bestimmt sind. Derselben wie man insbesondere das Koordinatensystem so, daß es die Hauptachsen des Anfangspunktes darstellt, nennt und ξ, η, ζ die Coordinaten des Endpunktes sein. Dann ist

$$\int x \, dm = \xi M, \int y \, dm = \eta M, \int z \, dm = \zeta M, \int xy \, dm = \int yz \, dm = \int zx \, dm = 0, \text{ und} \\ \int (y^2 + z^2) \, dm = A, \int (x^2 + z^2) \, dm = B, \int (x^2 + y^2) \, dm = C.$$

Die Gleichungen 59 aber werden sich, wenn man $r \cos \lambda$ etc. aus 60 - 62 ausdrückt, auf:

$$\sum x = w^2 M / (\xi - \cos \alpha (\xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma)) \sum (y^2 - z^2) = w^2 \cos \beta \cos \gamma \int (x^2 - y^2) \, dm = w^2 \cos \beta \cos \gamma (B - C)$$

$$63 \quad \dots \sum y = w^2 M / (\eta - \cos \beta (\xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma)) \sum (z^2 - x^2) = w^2 \cos \gamma \cos \alpha \int (x^2 - z^2) \, dm = w^2 \cos \gamma \cos \alpha (C - A)$$

$$\sum z = w^2 M / (\zeta - \cos \gamma (\xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma)) \sum (x^2 - y^2) = w^2 \cos \alpha \cos \beta \int (y^2 - x^2) \, dm = w^2 \cos \alpha \cos \beta (A - B)$$

Die letzten drei Sätze entsprechen nur dann $\xi = m \cos \alpha$ etc. d.h. f. wenn der Endpunkt auf der Drehungsaxe liegt, die Drehungsmomente hingegen entsprechen nur dann genau den Größen $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ entsprechend, d.h. wenn die Drehungsaxe für den Anfangspunkt (welcher der aufsteigenden Kraft am nächsten sein soll) eine Hauptaxe ist. Ist also der Punkt in einem Punkt, der Anfangspunkt befreit, so wird für nur dann sich nicht selbst unterstützen, wenn für den selben eine Hauptaxe ist. Ist für aber gar nicht unterstützt, so wird für nur dann Drehungsaxe bleiben, wenn zugleich der Endpunkt auf ihr liegt.

Dies kann man gesehen, wenn für für den Punkt eine Hauptaxe ist;
 (d.h. f. wenn)

30

nachfolgend die Gleichungen dargestellt ist:

$$\begin{aligned} 66 \quad & A \frac{dp}{dt} = qr (B - C) \\ & B \frac{dq}{dt} = rp (C - A) \\ & C \frac{dr}{dt} = pq (A - B) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden integrabel, wenn man sie mit p, q, r oder mit Ap, Bq, Cr , multipliziert und addiert. Man set dann

$$\begin{aligned} 67 \quad & Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h^2 \\ & A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = K^2 \end{aligned}$$

Setzt man diese Gleichungen der Reihe nach

$$68 \quad p^2 + q^2 + r^2 = w^2$$

so kann man p, q, r durch w ausdrücken, und erhält

$$69 \quad p^2 = \frac{K^2 - h^2(B+C) + BCw^2}{A-B \cdot A-C} \quad q^2 = \frac{K^2 - h^2(C+A) + CAw^2}{B-C \cdot B-A} \quad r^2 = \frac{K^2 - h^2(A+B) + ABw^2}{C-A \cdot C-B}$$

Setzt man diese in eine der Gleichungen 66 ein, so erhält man die Gleichung

$$70 \quad t = \int \frac{ABCw \, dw}{\sqrt{[K^2 - h^2(B+C) + BCw^2][K^2 - h^2(C+A) + CAw^2][K^2 - h^2(A+B) + ABw^2]}}$$

nach der reellen Wurzelgrößen w durch die Zeit mit Hilfe der elliptischen Funktionen ausgedrückt. Man kann die Bewegungsdauern der Bewegung berechnen, wenn die Bewegung des Schwerpunktes bekannt, nachfolgend fasten Punkt angegeben, und dessen Gleichung ist:

$$71 \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Entsprechend wie gewöhnlich, nach der Position des Schwerpunktes der Erde auf der Erde, man nennt. Man nennt den Endpunkt des Punktes den Pol der Bewegung, so müssen sich die Koordinaten des momentanen Pols zu ändern. Es gelten die cos. der Bewegungswinkel, d. h. die $p:q:r$:

Die Gleichung von $\mathcal{H}$. mit der ersten Gleichung $\mathcal{G}$ zeigt aber, daß dann die Koordinaten des $\mathcal{P}$ el sind:

$$\mathcal{H}2 \text{ --- } x = \frac{p}{h}, \quad y = \frac{q}{h}, \quad z = \frac{r}{h}.$$

Ähnlich gibt die zweite Gleichung $\mathcal{G}$ über in.

$$\mathcal{H}3 \text{ --- } A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2 = \frac{K^2}{h^2}$$

Das $\mathcal{P}$ el bewegt sich also auf dem Durchschnitt des Centralellipsoids mit dem Ellipsoid $\mathcal{H}3$ in einem geschlossenen Curve. Bildet man aus $\mathcal{H}$ u. $\mathcal{H}3$ die Gleichung

$$\mathcal{H}4 \text{ --- } A(Ah^2 - K^2)x^2 + B(Bh^2 - K^2)y^2 + C(Ch^2 - K^2)z^2 = 0,$$

so ist dies die Gleichung eines Kugels, welcher der Durchschnitt zweier Oberflächengleichungen entspricht. Die Werten des h müssen dann die entsprechenden folgenden Gleichungen selbst durchfallen. Die Verschiebungen beschreiben also im Kugelraum eine Kurve zweiter Ordnung. Die Tangentialebene des Centralellipsoids in dem unbekannten $\mathcal{P}$ el ist durchgestellt durch die Gleichung

$$Ax(x-x) + By(y-y) + Cz(z-z) = 0 \text{ oder } AxX + ByY + CzZ = 1.$$

Vergleicht man diese Form mit der Form der Gleichung der Ebene

$$X \cos a + Y \cos b + Z \cos c = d$$

so d den Abstand der Ebene vom Anfangspunkt bedeutet, so findet sich:

$$Ax.d = \cos a, \quad By.d = \cos b, \quad Cz.d = \cos c, \quad 1 = (A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2) d^2 = d^2 \frac{K^2}{h^2}$$

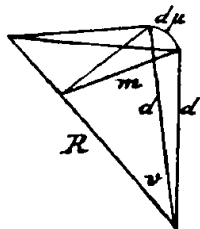
Die Tangentialebene des $\mathcal{P}$ els hat daher einen Abstand $\frac{h}{K}$ vom Anfangspunkt.

Der $\cos$ des Winkels, welchen das Normale dieser Ebene mit der z -Achse bildet nennt man $\cos c$

$$\mathcal{H}5 \text{ --- } \cos a = \frac{Axh}{K}, \quad \cos b = \frac{Byh}{K}, \quad \cos c = \frac{Czh}{K}$$

Ähnlich sind die $\cos$ für die anderen beiden Tangentialebenen:

$$\mathcal{H}6 \text{ --- } \cos a' = \frac{A(x+dx)h}{K}, \quad \cos b' = \frac{B(y+dy)h}{K}, \quad \cos c' = \frac{C(z+dz)h}{K}.$$



beginnt folgt, daß beide Loffe mit der augenblicklichen
 Aufhängung R , deren $\cos \frac{x}{R} \frac{y}{R} \frac{z}{R}$ sind, gleiche Winkel bilden.
 Denn in der Δ ist der $\cos$ dieser Winkel:

$$77 \dots \cos v = \frac{Ax^2h}{KR} + \frac{By^2h}{KR} + \frac{Cz^2h}{KR} = \frac{h}{KR}, \text{ und}$$

$$\frac{Ax(x+dx)h}{KR} + \frac{By(y+dy)h}{KR} + \frac{Cz(z+dz)h}{KR},$$

welches immer gleich ist, das nach 73. $Ax dx + By dy + Cz dz = 0$.

beginnt folgt, daß die Fußpunkte beider Loffe von der Aufhängung denselben
 Entfernung

$$78 \dots m = d \sin v = \frac{h}{K} \sqrt{1 - \frac{h^2}{K^2 R^2}}$$

haben. Die Herleitung liegt nahe, daß der Schwerpunkt des Ringes von der Höhe
 R mit dem einen dieser Punkte um die Stelle des Schwerpunktes, und dieser Ort heißt
 d und die Tangentialbewegung des Pols eine im Räume ungewinkelte Länge sein.
beginnt ist es mir nötig anzugeben, daß nicht der Bogen ds von
 dem Punkte m mit der Winkelgeschwindigkeit ω in der Zeit dt zurückgelegt
 wird d. h. daß

$$79 \dots m \omega dt = d\mu$$

Aus den Gleichungen 72 folgt nun, indem man ω für $\frac{d\mu}{m dt}$ substituiert:

$$80 \dots R = \frac{\omega}{h},$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist dem Radius des augenblicklichen Pols proportional.
 Der nun zugehörige für $d\mu$ die Entfernung der beiden Fußpunkte von einander
 gesetzt werden kann, so wird nach 75. 76.

$$d\mu^2 = d^2 [(\cos a - \cos a')^2 + (\cos b - \cos b')^2 + (\cos c - \cos c')^2] = \frac{h^2}{K^2} (A^2 dx^2 + B^2 dy^2 + C^2 dz^2),$$

oder wenn man die Gleichungen 72. und 66 zu Hilfe nimmt,

$$= \frac{h^2}{K^2} (A^2 dp^2 + B^2 dq^2 + C^2 dr^2) = \frac{h^2 dt^2}{K^2} ((B-C)^2 q^2 r^2 + (C-A)^2 r^2 p^2 + (A-B)^2 p^2 q^2).$$

dem letzten Ausdruck aber gibt man leicht die Form:

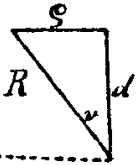
$$\begin{aligned} d\mu^2 &= \frac{h^2 dt^2}{K^2} (p^2 + q^2 + r^2) (A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2) - (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)^2 \\ &= \frac{h^2 dt^2}{K^2} (w^2 K^2 - h^2) \end{aligned}$$

Ausdruck ist aber nach 78. $m^2 = \frac{h^2 K^2 R^2 - h^2}{K^2 R^2} = h^2 \frac{K^2 w^2 - h^2}{K^2 w^2}$, und so folgt endlich

$$d\mu^2 = m^2 w^2 dt^2$$

was zu beweisen war.

Das Contactellipsoid bewegt sich also so, daß seine zu gleiten auf einer festen Tangentenebene bleibt, indem die Polstrahlen auf dieselben in Drehungszentren bilden. Man kann diese Bewegung stellen in eine Drehung um



das im Raum unvariablen feste Lot d , und um eine Linie, welche senkrecht ist mit g , d. h. mit der Linie, welche den Mittelpunkt des Lotes d mit dem augenblicklichen Pol verbindet.

Die Richtungsabweichungen dieser Drehungen sind dann $w \cos v$ und $w \sin v$; und da $w \cos v$ nach 77. und 80. $= \frac{w h}{K R} = \frac{h^2}{K}$, so findet sich, daß der Richtungsabweichung eine constante Componente besitzt, deren Drehungswinkel das Lot auf der im Raum festen Tangentenebene bildet.

Daß der feste Ebene entspricht der wellen Polstrahlen unvariablen Curven, die von Punkten mit dem festen Anfangszentrum verbunden, die entsprechenden Längen der Drehungswinkel im Raum umgeben. Man die Gleichung dieser Curven zu bilden da man nur, daß ihr Logarithmus gleich dem Logarithmus des der wellen Polstrahlen ist. Nennt man also g den Radius Vector, so kann man vom



Mittelpunkt des Lotes d auf dem augenblicklichen Pol geht und da der von diesem Radius Vector g ,

bestimmten Winkel, so ist das Quadrat des Logarithmus:

$$d\varphi^2 + \varphi^2 d\chi^2 = ds^2, \quad d\chi^2 = \frac{ds^2 - d\varphi^2}{\varphi^2}$$

Da ferner $\varphi^2 = R^2 - d^2 = R^2 - \frac{h^2}{R^2}$ setzen, man in dieser Gleichung weißt, alle φ R oder χ φ mit einander nur erfüllt die Differentialgleichung der gekrümmten Linien, welche durch elliptische Funktionen darstellbar ist.

Besondere Beachtung verdient der Fall, wo zwei konjugiert imaginäre Werte gleich sind, B. C. Setzt man noch $\frac{A-C}{C} = \varepsilon$, wo ε positiv oder negativ, je nachdem das Centraellipsoid ein rechteckiges oder rechteckiges ist, so lassen die Gleichungen über in:

$$\frac{dp}{dt} = 0 \quad \frac{dq}{dt} = -\varepsilon p r \quad \frac{dr}{dt} = \varepsilon q p,$$

und deren Integration hervorragt:

$$p = \text{Const.} \quad q = C \cos(t\varepsilon p) \quad r = C \sin(t\varepsilon p),$$

Die Zeit von dem Augenblick an, wo die Bewegung in der XY Ebene liegt. Beist die Elliptizitätswahl eine constante Konstante für die Ellipse der des Ellipsoids und sie ist selbst constant $= \sqrt{C^2 + p^2}$, der Radius-Vektor der Polen der beiden Punkte ist gleich, daher die Polen selbst ein Kreis, aber die Bahn, welche sie auf der festen Ellipse zurücklegt.

P.31. Von den Momentenkräften und den Störungen der Bewegung.

Kräfte von großer Intensität, welche eine sehr kurze Zeit einwirken, können nur durch die Gesetzmäßigkeit der Bewegung gemessen werden, welche sie in einem Körper von einer gewissen Masse hervorbringen. Das Maß einer solchen Momentenkraft ist daher das Produkt $M v$, wo v die Gesetzmäßigkeit der Bewegung bezeichnet, welche die fertige Kraft der Wirkung mitteilen würde.

Wenn man aber die Wirkung in Komponenten auf diese Kräfte zerlegt, findet man, daß die Wirkung eine solche Kraftsysteme, welche zeitlich auf einen Punkt wirkt, nur zusammensetzen kann unter

Einzelnen Bedingungen, welche für ein gemeinschaftliches Kräftesystem gelten, nämlich, wenn X, Y, Z die Systemkomponenten sind, so hat

$$81 \quad \dots \quad X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0,$$

vor $\delta x, \delta y, \delta z$ irgendwelche beliebige Kräfteabhängigkeiten bestehen. Die gleichzeitige Berücksichtigung der gemeinschaftlichen Kräfte kann man dabei übergehen, weil diese in der sehr kleinen Zeit des Versuchs als unendlich kleiner Systemzeit, Gleichgewichtseinstellungen vorausgesetzt werden.

Dieser wird nun die Wirkungslosigkeit der Momentenkräfte, welche im System von Punkten wirken, ausgedrückt sein durch:

$$82 \quad \dots \quad \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0,$$

die Summe nun als Angriffspunkte bezogen. Wenn man aber auf diese Gleichung das d'Alembert'sche Prinzip anwendet, so sieht man das Datz in: Die Wirkungslosigkeit eines Systems von Momentenkräften wird vorausgesetzt, wenn man solche Momentenkräfte hinzufügt, welche in jedem Punkte ein der Wirkungslosigkeit gleiches und entgegengesetztes Systemzeitgleichgewichtseinstellung hervorbringen werden.

Sind nun U, V, W die Systemzeitgleichgewichtskomponenten eines Punktes vor dem Einsetzen der Momentenkräfte, u, v, w nachher, so sind die hinzugefügten Momentenkräfte

$$-m(u, -u_0), -m(v, -v_0) - m(w, -w_0),$$

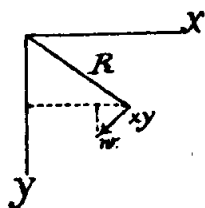
und die Gleichung 82. gibt nun die Beziehung derselben, das folgende System. Welches Ausdruck zur Auffindung der wirklichen Systemzeitgleichgewichtskomponenten.

$$83 \quad \dots \quad \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \sum m[(u, -u_0)\delta x + (v, -v_0)\delta y + (w, -w_0)\delta z]$$

Man kann nun diesen Ausdruck auf die Bestimmung der wirklichen Systemzeitgleichgewichtskomponenten anwenden.

36) nimmt Krümmung an, welche in der Richtung von Drehmomenten angriffen wird. Ist der Krümmung allein nur eine feste $U_{yz}(X)$ gegeben, so nimmt an der Richtung dieser eine Winkelgeschwindigkeit w an, und man hat daher

$$84 \quad u_0 = v_0 = w_0 = 0, \quad u_1 = -w y, \quad v_1 = w x, \quad w_1 = 0.$$



Der zugehörig die einzig möglichen Drehbewegungen greiffen in einer Drehung um einen kleinen Winkel $\delta\varphi$ besteht, so ist nach §. 19:

$$85 \quad \delta x = -x \delta\varphi, \quad \delta y = x \delta\varphi. \quad \text{Anso geht 83 über in} \\ \sum (x y - y x) = w \sum m R^2 = w M.$$

Die Winkelgeschwindigkeit nimmt also gleich dem Drehmomentum der Kraftkräfte, die einen Drehungsdrehmoment.

Ist Krümmung der Krümmung um einen Punkt beweglich, und nimmt man das System seiner Hauptachsen zum Coordinatensystem, so stellt eine Drehung um eine U_{yz} , welche mit jenen die Winkel α, β, γ bilden mag, und deren Winkelgeschwindigkeit w sei, oder es entstehen die drei Winkelgeschwindigkeiten um die Hauptachsen:

$$p = w \cos \alpha, \quad q = w \cos \beta, \quad r = w \cos \gamma.$$

Drei solche Drehungen aber geben nach §. 4. für die successive Drehung des Krümmung um die Hauptachsen die Linienangestrichenheiten:

$$\text{Drehung um die } X \text{ Achse: } \overset{u_x}{\delta} \quad \overset{v_x}{-p x} \quad \overset{w_x}{p y}$$

$$\text{Drehung um die } Y \text{ Achse: } q x \quad 0 \quad -q x$$

$$\text{Drehung um die } Z \text{ Achse: } -r y \quad r x \quad 0$$

so daß die wirklich wirkenden Linienangestrichenheiten des Punktes xyz sind:

$$u_1 = q x - r y \quad v_1 = r x - p x \quad w_1 = p y - q x.$$

Der ferner nichtnullen die u, v, w aufeinander folgen, ergiebt die Gleichung
 83 $\sum m \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = p \sum m (y \dot{x} - x \dot{y}) + q \sum m (x \dot{x} - x \dot{z}) + r \sum m (x \dot{y} - y \dot{x})$

Setzen wir jetzt die rechtlichen Ausdrücke ein, welche in den Gleichungen 81
 die Gleichungen bezeichnen, so müssen wir setzen (nach 85).

$$\begin{aligned} \text{Bei der Bewegung um die } X \text{ Achse: } \dot{x} = 0 \quad \dot{y} = -x \dot{\varphi} \quad \dot{z} = y \dot{\varphi} \\ \text{„ „ „ „ } Y \text{ Achse: } \dot{y} = x \dot{\varphi} \quad \dot{y} = 0 \quad \dot{z} = -x \dot{\varphi} \\ \text{„ „ „ „ } Z \text{ Achse: } \dot{z} = -y \dot{\varphi} \quad \dot{y} = x \dot{\varphi} \quad \dot{z} = 0 \end{aligned}$$

Man bemerkt nun dann, daß wegen der Natur des Coordinatensystems
 $\sum mxy = \sum myx = \sum mxz = 0$, so resultirt man:

$$\begin{aligned} \sum (y \dot{z} - z \dot{y}) &= p \sum m (y^2 + z^2) = p A \\ \sum (x \dot{x} - x \dot{z}) &= q \sum m (x^2 + z^2) = q B \\ \sum (x \dot{y} - y \dot{x}) &= r \sum m (x^2 + y^2) = r C, \end{aligned}$$

Wenn ABC die Hauptträgheitsmomente bezeichnen. Setzt man das Flächenelement
 system ABC in den Punkt irgendwunders Repetition, und dann ein
 willkürliches Punkt, so sind die Coordinaten dieses der Coordinaten des Punktes.
 Ist also M das Gewicht dieses Punktes, und sind a, b, c die cos seiner Lage,
 gegen die Gleichungen 86 muß über in:

$$M \cos a = p A, \quad M \cos b = q B, \quad M \cos c = r C.$$

Der nun aber p, q, r selbst die Coordinaten desjenigen Punktes im Coordinatensystem
 sind proportional sind, dessen Radius Vector die ursprüngliche Lage
 bildet, so sind pA, qB, rC die cos. der Normale jenes Punktes proportional,
 oder der Winkel a, b, c sind die Winkel jener Normale selbst, der Tangentialebene
 ist $\therefore$

Der Strom des reflektierten Jovers parallel. Betrachtet man den Ort:
 Ein Körper, welcher sich einem Punkt beweglich ist, beginnt seine Bewegung
 im leuchtigen Punktstrahl des Centrallichts, dessen Bewegung
 der Strom des reflektierten Jovers parallel ist.

Dieser Strom ist es also, welcher bei der Bewegung des Körpers die im Raum
 seiner Bewegung bestimmt.

Ist nicht das System beweglich, so kann man sich die Bewegung 83 gegen
 die Lichtstrahlen des J. L. vorstellen, und man gelangt zu dem Resultat:

Die Bewegungsbewegung des Systempunktes ist dieselbe, als wenn alle Körperkräfte
 in ihm wirkten, und die ganze Masse des Systems in sich vereinigte. Die
 relative Bewegung des Systempunktes aber, nicht gegen dieselbe, wie wenn
 der Systempunkt ein fester Punkt wäre.

Ein unter Annahme der Bewegung 83 bildet das Carnot'sche System.

Wenn in dem bewegten System, welches mit einem fester Körper besetzt ist,
 wird, einige Körper zusammenstoßen, so entsteht immer eine Bewegung
 des bewegten Körpers. Hiermit ist das Prinzip nicht nur an der Bewegung,
 sondern auch die Körper zwei gleiche und entgegengesetzte Körperkräfte ein,
 welche die Geschwindigkeiten der Bewegungszentren unterscheiden. Sind
 also $X Y Z$ die Bewegungszentren eines festen Körpers für den einen der
 Bewegungszentren, so sind für $X - Y - Z$ für den anderen. Setzen
 wir also in 83.

$$\delta x = dx = u, dt, \quad \delta y = dy = v, dt, \quad \delta z = dz = w, dt,$$

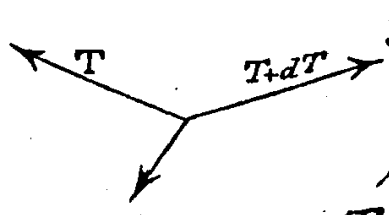
so gehen wir in der Summe links immer die zu große Bewegungszentren
 zentren zugehörigen Ortsvektoren, und es kommt:

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum m [(u, -u_0) u, + (v, -v_0) v, + (w, -w_0)] \text{ oder} \\
 0 &= \sum m [(u, -u_0)(u, + u_0) + \dots] + \sum m [(u, -u_0)(u, + u_0) + \dots] \text{ oder multipl.} \\
 0 &= \sum m [(u, -u_0)^2 + (v, -v_0)^2 + (w, -w_0)^2] + \sum m (u,^2 + v,^2 + w,^2) - \sum m (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2).
 \end{aligned}$$

Legt man $u, -u_0$ etc. die Komponenten der resultierenden Geschwindigkeiten, und die resultierende Bewegung ist die dieser Geschwindigkeiten entsprechende lebendige Kraft. Diese Gleichung zeigt sehr schön, daß die lebendige Kraft auf dem Pfad ($\sum m$) ($u,^2 + v,^2 + w,^2$) konstant ist wie die lebendige Kraft der resultierenden Geschwindigkeiten.

§ 32. Von Leitkurven.

Wenn wir irgend einen Punkt in jedem seiner Punkte einer Kurve vor, gegeben sind, so ist seine Gleichgewichtslage durch die Wirkung bestimmt, daß in je. dem Element der Kurve auf beiden Seiten der resultierenden Kräfte wirken. Die mit den resultierenden Kräften der Gleichgewichtslage. Will der Punkt eine stetige Kurve bilden, so kann in jedem Punkt die Kraft nur einseitig sein, weil sonst die benachbarten Kräfte einen ungleichen Winkel bilden müßten. Kann also die Komponenten der resultierenden Kraft nicht getrennt durch:



$X ds, Y ds, Z ds$. Diese müssen den Anforderungen zwischen den Komponenten der benachbarten Kräfte genügen. Es sind aber die Komponenten der Spannung T $T \frac{dx}{ds}, T \frac{dy}{ds}, T \frac{dz}{ds}$; mit der die wir müssen:

$$T \frac{dx}{ds} + d(T \frac{dx}{ds}), T \frac{dy}{ds} + d(T \frac{dy}{ds}), T \frac{dz}{ds} + d(T \frac{dz}{ds}).$$

Also so fort nun zur Bestimmung der Gleichgewichtslage der Teil der Gleichungen:

$$d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = X ds$$

$$87 \text{ --- } d\left(T \frac{dy}{ds}\right) = Y ds$$

$$d\left(T \frac{dz}{ds}\right) = Z ds$$

zu verstehen nach als wirte fingeit:

$$88 \text{ --- } \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

um die drei Gleichungen x, y, z T bestimmen zu lassen. Mächtigliciren wir die Gleichungen mit $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, so kommt, weil nach 88.

$$\frac{dx}{ds} \cdot d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} \cdot d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} \cdot d\frac{dz}{ds} = 0, \text{ die Gleichung:}$$

$$89 \text{ --- } dT = X dx + Y dy + Z dz,$$

verstehen wir, wenn wir die drei Kräfte eine Kräftefunction zu lassen, die Form annimmt

$$90 \text{ --- } dT = dU, T = U + h$$

In diesem Fall drückt das Prinzip der virtuellen Gesehnindigkeiten den Grundsatz aus, dass die Form U geben. Dann drückt es aus in

$$91 \text{ --- } \int (X dx + Y dy + Z dz) ds = \delta \int U ds = \delta U ds = 0,$$

d. h. das Integral der Kräftefunction, ausgedrückt über die ganze Kurve, wird immer ein Minimum. Daraus kann man folgern die Gleichungen 87 werden ableiten kann.

Daher sind die Gleichungen 87 nur für einige bestimmte Aufgaben aus. Daraus sind gewisse Punkte, dass man irgendwelche Elemente einer

Gemeinschaft bezeichnen sind, welche die horizontalen projectionen der Elemente horizontal sind. Es ist also wenn b die ganze Breite der Curve, C die ganze Länge angibt, $X=0, Y=0, Z ds = + \frac{G}{\rho} ds$,

indem man die Krümmung in der XZ Ebene gegeben findet. Es setze man dann

$$87 \text{ --- } d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = 0 \quad d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = \frac{G}{\ell} dx, \text{ oder durch Integration:}$$

$$T \frac{dx}{ds} = \alpha \quad T \frac{dx}{ds} = \frac{Gx}{\ell} + \gamma.$$

Die Gleichung oben kann man durch die folgende ersetzen:

$$T^2 = \alpha^2 + \left(\frac{Gx}{\ell} + \gamma\right)^2, \quad \alpha dx = \left(\frac{Gx}{\ell} + \gamma\right) dx, \text{ d.h. } \alpha x = \frac{Gx^2}{2\ell} + \gamma x + C.$$

Da sowohl die Krümmung eine Parabel mit vertikalem Osz. liegt man den Anfangspunkt in den Ursprung, so ist zugleich $x=0$ mit $x=0$ und $dx=0$ daher $C=0$ und $\gamma=0$; und man set dann einfacher

$$x^2 = \frac{2\ell\alpha}{G} x, \quad T^2 = \alpha^2 + \frac{G\alpha}{\ell} x.$$

Die Konstante α bezeichnet die Spannung im Ursprung, der selber den kleinsten Wert annimmt.

Von größter Wichtigkeit ist die Krümmung, welche durch das eigene Gewicht des Seiles hervorgerufen wird. Dieselbe ist nicht anders, und nennt man die ganze Länge des Seiles, G sein Gewicht bezeichnet, so ist wiederum

$$x=0, \quad x ds = \frac{G ds}{\ell}. \text{ Also mit 87:}$$

$$d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = 0 \quad d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = \frac{G ds}{\ell},$$

Indem man beide Gleichungen integriert, findet sich:

$$93 \text{ --- } T \frac{dx}{ds} = c \quad T \frac{dx}{ds} = \frac{Gs}{\ell},$$

Den Logarithmus nimmt man Ursprung gemacht nur $dx=0$. da man gewöhnlich für $s=0$

$$94 \text{ --- } T^2 = c^2 + \frac{G^2 s^2}{\ell^2} = c^2 (1 + \alpha^2 s^2)$$

indem $\alpha = \frac{G}{\ell c}$ gesetzt ist so setzen die Gleichungen 93. über in:

$$x = \int \frac{c ds}{T} = \int \frac{ds}{\sqrt{1 + \alpha^2 s^2}} = \frac{1}{\alpha} \log(\alpha s + \sqrt{1 + \alpha^2 s^2}),$$

$$z = \frac{G}{\ell} \int \frac{s ds}{T} = \alpha \int \frac{s ds}{\sqrt{1 + \alpha^2 s^2}} = \frac{1}{\alpha} (\sqrt{1 + \alpha^2 s^2} - 1)$$

49.

Die Integrationskonstanten sind dabei so bestimmt, daß S & Z die zugehörigen Anfangswerte als im Ursprung der Kurven liegt. Da nun die beiden Differentialgleichungen der beiden folgenden mit sich erfüllt:

$$\sqrt{1+\alpha^2 S^2} + \alpha S = e^{\alpha x}, \quad \sqrt{1+\alpha^2 S^2} - \alpha S = e^{-\alpha x}, \quad \text{so wird}$$

$$\frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2\alpha} = S, \quad \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} = \alpha x + 1, \quad \text{oder vielmehr}$$

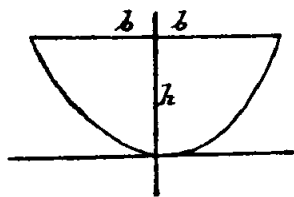
$$Z = \frac{1}{2\alpha} \left(e^{\frac{\alpha x}{2}} - e^{-\frac{\alpha x}{2}} \right)^2.$$

Es ist also die Gleichung der Kurven, welche Kettenlinie genannt wird.

Dieser ist durch eine einzige Konstante α charakterisiert.

Um die Aufgabe vollständig lösen zu können, muß man die Lage des Anfangspunktes auf vorgegebenen Elementen bestimmen können. Die z. B. die Länge l der Ketten sind die gegenseitige Entfernung der Aufhängepunkte bestimmt, welche letztere beide in derselben Höhe gehoben liegen müssen. Dann ist der Ursprung der Kurven offenbar gegen die Aufhängepunkte symmetrisch gelegen und die jeweiligen x Koordinaten sind b und $-b$, woraus in $S = \pm \frac{l}{2}$. Also hat man nach 96:

$$e^{\alpha b} - e^{-\alpha b} = 2\alpha,$$



welche eine transcendente Gleichung zur Bestimmung von α ist. Die Länge der Kettenlinie wird zugehörig, da die z Koordinaten der Aufhängepunkte $= h$ ist nach 95. u. 96:

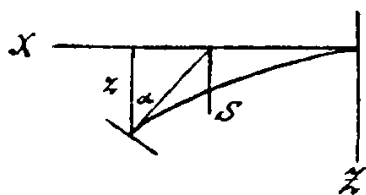
$$h = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 l^2}{4}} - 1 \right) = \frac{1}{2\alpha} \left(e^{\frac{\alpha b}{2}} - e^{-\frac{\alpha b}{2}} \right)^2$$

Der mechanische Zustand dieser Kettenkurve wird der Gleichung 91.

$$\text{Denn da } Z = \frac{G}{l}, \quad \text{so wird } U = \frac{G}{l} Z, \quad \text{und}$$

$$\int U ds = \frac{G}{l} \int Z ds = 0.$$

Es war es ist die 2. Coordinaten des Brennpunktes der Kurve $\frac{x ds}{ds} = \frac{1}{2} \int x ds$,
und somit folgt die obige Gleichung, daß die vertikale Coordinaten des
Brennpunktes ein Minimum ist, d. h. die Kurve mit steigender Gestalt
um für welche ihr Brennpunkt die tiefste Lage einnimmt.



Eine andere Eigenschaft der Kurve soll aufeinander
folgen. Will man einen gegebenen Lagen so wählen,
so, daß er in jedem seiner Punkte einen dem
gegebenen Winkel mit sich selbst macht, das heißt, daß er zu
sich selbst senkrecht ist, so muß die im tiefsten Punkte einwirkende horizontale Kraft sich
mit der Tangentialkraft einer beliebigen Stelle immer zu einer constanten
Verhältnisse zusammensetzen, welche der Gewicht des Lagers gleich
müßig ist, d. h. welche durch den Brennpunkt des Lagers geht.

Es ist also notwendig, daß der Brennpunkt beiden Tangenten
perpendiculär über dem Brennpunkt liegt, oder daß die 2. Coordinaten beider Punkte
übereinstimmen. Nun ist die 2. Coordinaten jenseits Brennpunktes

$$x - z \tan \alpha = x - z \frac{dx}{dz}; \text{ und man hat also die Gleichung}$$

$$x - z \frac{dx}{dz} = \frac{\int_0^s x ds}{s}$$

Multipliziert man diese mit s und differenziert dann, so kommt:

$$s \cdot d \frac{dx}{dz} + ds \cdot \frac{dx}{dz} = 0 \text{ oder } s \frac{dx}{dz} = K, dx = \frac{s ds}{K}$$

Wenn mit der Gleichung 93. folgt $dx = \frac{C s}{C} ds$, so daß also beide
Gleichungen übereinstimmen, wenn $K = \frac{1}{C}$ gesetzt wird.

44.

die geprüfte Kurve ist also eine Kettenlinie.

Wenden wir die Gleichung 87 auf die Gleichgewichtsfiguren eines rotierenden, unelastischen Seils an. Ist ω die konstante Winkelgeschwindigkeit, und die X die Seilablenkung, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, so wirkt das Element des Seils der Centrifugalkraft $\frac{Gds}{lg}$, $\omega^2 r$ entgegen, davon Compens. unter sich:

$$Xds = -\frac{Gds}{lg} \omega^2 x, Yds = -\frac{Gds}{lg} \omega^2 y, Zds = 0, U = \frac{G\omega^2}{lg} \int (x dx + y dy) = \frac{G\omega^2 r^2}{2lg}$$

Die Gleichung 91 zeigt also daß

$$\int r^2 ds = 0$$

d. h. die Gestalt des Seils nimmt eine solche, daß sein Flächmoment ein Minimum wird. Die Gleichungen 87 werden zugleich:

$$d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = -\alpha x ds \quad T \frac{dx}{ds} = c$$

$$d\left(T \frac{dy}{ds}\right) = -\alpha y ds, \quad \text{wobei } \alpha = \frac{G\omega^2}{lg}$$

Um den ersten beiden Gleichungen folgt noch

$$0 = y d\left(T \frac{dx}{ds}\right) - x d\left(T \frac{dy}{ds}\right), \quad \text{oder } T\left(y \frac{dx}{ds} - x \frac{dy}{ds}\right) = K.$$

Setzt man nun Polarcordinaten ein, so wird diese letzte Gleichung

$$T r^2 \frac{d\varphi}{ds} = K.$$

Verbindet man diese mit $T \frac{dx}{ds} = c$ und mit $T = U + h = h - \frac{\alpha r^2}{2}$ wie mit

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1 \quad (88),$$

so findet man leicht, alle mittels elliptischer Integrale der 3. Art.

Man bemerkt aber, daß die Spannung mit dem Abstand des Aufhanges abnimmt, und daß die tg der Steigung der Elemente gegen die Aufhängeaxe dieser Spannung umgekehrt proportional ist, also nur das kleine Stücksstück $r^2 ds$, welche die Projection des von ds nach den benachbarten Ruhemächten gebildeten Winkels auf die XY Ebene darstellt. Die aufeinander wirkenden Elemente müssen sich daher in einem Maße der Richtung der Absikulen.

Die letzte Voraussetzung gibt ein Fund, welche über eine Oberflächenspannung ist. In diesem Falle wirkt in jedem Punkt ein Normalelement von unbekannter Größe. Man nehme aber an S. 3. umgekehrten Zusammenhang kann man seine Komponenten ausdrücken durch:

$$X ds = m f' x \cdot ds, Y ds = m f' y \cdot ds, Z = m f' z \cdot ds,$$

wo m eine unbekannte Größe, und $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Oberfläche ist. Hiermit folgt mit Hilfe von 89.:

$$dT = m (f' x dx + f' y dy + f' z dz) = m df = 0,$$

da die Spannung ist constant über den ganzen Fund. Man kann daher in den Gleichungen 87 T als Constante bezeichnen und ihnen die Form geben

$$T \frac{d^2 x}{ds^2} = m f' x$$

$$97--- \quad T \frac{d^2 y}{ds^2} = m f' y$$

$$T \frac{d^2 z}{ds^2} = m f' z$$

46.

Nun man gibt statt $\frac{m}{T}$ den Bruchteil λ , und t für S setzt, so misst man die Gleichungen der Bewegung eines Punktes auf der Oberfläche $f=0$, oder Gleichung des freien Randes, welche in § 14 bestimmt ist. Die dort gegebene Bewegungsgleichung gibt den Verlauf des f , und man bemerkt leicht, daß diese Kurve eindeutig charakteristisch, daß ihre Oscillationsdauer immer durch die Formeln der Oberfläche geht.

In der That ist die mit zwei nächsten Elementen punktete Linie mit der Formeln punktirt. Dann sind α, β, γ der Winkel jener Linien gegen die Ox , so ist die Bedingung definiert daß

$$0 = dx \cos \alpha + dy \cos \beta + dz \cos \gamma, \quad 0 = d(x+dx) \cos \alpha + d(y+dy) \cos \beta + d(z+dz) \cos \gamma.$$

Die letzte Gleichung reducirt sich auf

$$0 = d^2 x \cos \alpha + d^2 y \cos \beta + d^2 z \cos \gamma, \quad \text{oder nach § 7. } f'' x \cos \alpha + f'' y \cos \beta + f'' z \cos \gamma = 0$$

d. h. die tangente Linie stellt sich der Normalen punktirt und diese liegt also mit zwei nächsten Elementen der Curve in einer Ebene, d. h. in der Oscillationsebene derselben.