Engesser, Friedrich

Sammlung von Scripten

Band 1

1907/18

1

Engesser: Sammlung von Sonderabdrucken.

Sammlung von Skripten und Vorträgen

Sätze aus der Festigkeitslehre.

(1907)

Sätze aus der Festigkeitslehre.

Jeder Körper erleidet unter der Einwirkung äusserer Kräfte Formänderungen, welche nach Aufhören der Einwirkung mehr oder weniger wieder verschwinden (elastische und bleibende Formänderung). Die bleibende Formänderung ist verhältnismäßig umso kleiner, je kleiner die totale Formänderung war. Die Eigenschaft, vermöge welcher ein Körper seine ursprüngliche Gestalt nach Aufhören der Kräfteeinwirkung wieder annimmt, heisst Elastizität.

Vollkommen elastische Körper, d. h. solche, bei welchen die bleibende Formänderung = 0, finden sich in der Natur nicht vor, dagegen gibt es eine Reihe technisch wichtiger Stoffe (Eisen, Holz etc), welche innerhalb einer gewissen Grenze der totalen Formänderung (Elastizitätsgrenze) so geringe bleibende Formänderungen aufweisen, daß letztere für praktische Zwecke = 0 gesetzt werden können. (Elastische Körper im gewöhnlichen Sinne).

[Anmerkung 1. Die Elastizitätsgrenze ist hiernach keine scharfe Grenze, sondern von dem Ermessen des Beobachters abhängig. Sie ist ferner auch keine feste Grenze, da sie künstlich erhöht und erniedrigt werden kann. Belastungen über die ursprüngliche Elasticitätsgrenze hinaus erhöhen dieselbe bei Stahl und Eisen; dasselbe findet durch den Härteprocess statt. Eine Erniedrigung der Elasticitätsgrenze wird bewirkt, wenn man das Material abwechselnd im entgegengesetzten Sinne überlastet oder dasselbe ausglüht.]

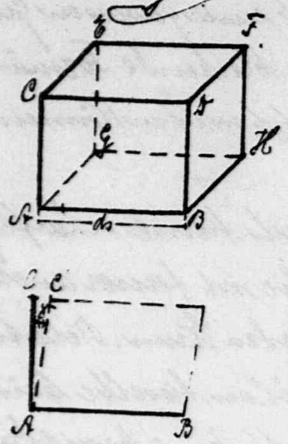
Erreicht die Formänderung eine gewisse Größe (die Festigkeitsgrenze), so wird die Widerstandsfähigkeit (Festigkeit) des Körpers an der betreffenden Stelle überwunden. In der Regel tritt hierbei eine Lösung des Zusammenhanges (Bruch des Körpers) ein; bisweilen bleibt der Zusammenhang gewahrt, wie z. B. beim Zerquetschen weicher Körper. — Die Formänderung hängt nicht nur vom Stoff des Körpers und von dem Kräfteplan (Grösse, Richtung, Angriffspunkt) der äussern Kräfte ab, sondern auch von der Art der Einwirkung der Kräfte. Wenn die Einwirkung plötzlich beginnt oder aufhört, oder wenn die Grössen der Kräfte nicht sehr allmählich sich ändern, so gerät der Körper in Schwingungen, einer periodischen Folge wechselnder Formänderungszustände entsprechend, welche allmählich abnehmen und einem Ruhezustand Platz machen. Die dem letzteren entsprechenden Formänderungen (stat. Formänderungen) sind kleiner als die bei den Schwingungen eintretenden Größtwerte der Formänderung (dynamische Formänderungen). Ferner werden die Formänderungen beeinflusst durch die Dauer der Einwirkung (nehmen mit der Dauer zu, namentlich bei organischen Stoffen) und durch oftmalige Wiederholung der Einwirkung.

Die statische Festigkeitslehre setzt den Ruhezustand des Körpers als eingetreten voraus und sieht von den Einflüssen der Dauer desselben und der oftmaligen Wiederholung der Kräfteeinwirkungen ab. Die Ergebnisse derselben müssen daher für den praktischen Gebrauch, entsprechend den abweichenden Verhältnissen der Wirklichkeit, nachträglich noch modifiziert werden.

Allgemeine Beziehungen.

Die Formänderung eines Körpers ist bestimmt, sobald die Formänderung seiner kleinsten Teile (Elemente) bekannt ist. Zu diesem Zwecke denken wir uns Elemente von parallelepipedischer Gestalt. Die Formänderung derselben äussert sich als Änderung der Seitenlängen und der ursprünglich rechten Winkel, wobei die Elemente so klein angenommen werden, daß die Seitenflächen als parallel und eben bleibend angesehen werden können.

Fig 1.



Die auf die Längeneinheit bezogene Änderung einer Kante AB wird mit ε bezeichnet und heisst Dehnung der Strecke AB oder Dehnung im Punkte A nach der Richtung AB.

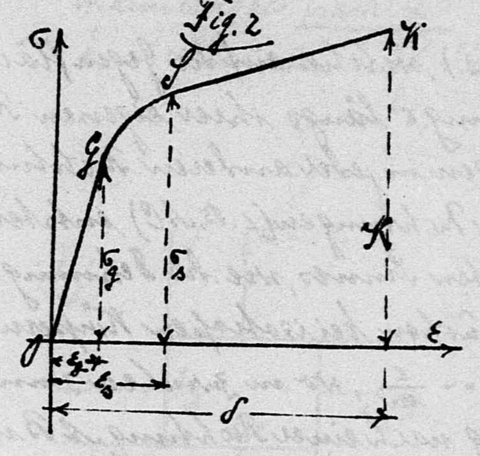
$$\varepsilon = \frac{\Delta AB}{AB} = \frac{\Delta ds}{ds} \text{ (unbenannte Zahl).}$$

Die Änderung eines Kantenwinkels CAB wird mit γ bezeichnet, $\gamma = \frac{CC'}{CA'}$, und heisst Schiebung der Fläche CAGE oder der Fläche ABHG im Punkte A. Sie gibt an, um wieviel sich zwei gegenüberliegende Flächen auf die Entfernungseinheit gegeneinander verschieben. —

Bezeichnet man mit S die Resultante der inneren Kräfte, welche von der einen Seite her auf die Fläche ACGE wirken, so nennt man die auf die Flächeneinheit bezogene Kraft $\pi = \frac{S}{ACGE} = \frac{S}{F} = \frac{klg}{cm^2}$ die Spannung der Fläche ACGE im Punkte A (bezw. im Punkte C, G oder E, welche Punkte jedoch im Grenzfall mit Punkt A zusammenfallen). Hierbei wird in der Regel die Fläche ACGE in ihrer ursprünglichen Grösse (vor der Formänderung) eingeführt. Zerlegt man die Spannung π in zwei Komponenten, senkrecht und parallel der Fläche ACGE, so heisst erstere die Normalspannung σ im Punkte A der Fläche ACGE, letztere die Tangentialspannung τ im Punkte A der Fläche ACGE. Die Normalspannung kann entweder Zugspannung (positiv) oder Druckspannung (negativ) sein, je nachdem ihr Sinn von der Fläche ab oder gegen die Fläche zu gerichtet ist. Absolutspannungen von Zug werden mit σ', von Druck mit σ'' bezeichnet. —

Erfahrungsgemäß findet zwischen der Normalspannung σ und der zugehörigen Dehnung ε eine bestimmte Beziehung statt. Wir denken uns auf zwei Gegenflächen ACGE und BDFH des Parallelepip. ds eine von Null allmählich anwachsende Normalspannung σ wirkend, wodurch die Seite AB entsprechende Dehnungen ε erleidet. Trägt man die Spannungen σ als Ordinaten zu den zugehörigen Dehnungen ε als Abscissen auf, so erhält eine die Abhängigkeit von ε und σ darstellende Linie (Arbeitslinie).

Fig. 2



Bei Schmiedeeisen (siehe Fig 2) verläuft dieselbe anfangs gerade bis G (Proportionalitätsgrenze); daran schliesst sich im allgemeinen ein steil gerichtetes Kurvenstück, welches bei S (Streckgrenze, Quetschgrenze) in ein flaches Kurvenstück oder in eine schwach geneigte Gerade übergeht. Innerhalb der Strecke OG sind σ und ε proportional (Hooke's Gesetz, Elastizitätsgesetz).

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E \qquad \sigma = E \cdot \varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \qquad 1.)$$

Die Grösse E, welche den Wert des konstanten Verhältnisses $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ angibt, heisst Elastizitätsmodul. Da ε eine unbenannte Zahl ist, bedeutet $E\left(=\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)$ eine Spannung. Bis zur Proportionalitätsgrenze sind die bleibenden Dehnungen äusserst gering, so dass man für praktische Zwecke annehmen kann, dieselbe falle mit der Elastizitätsgrenze zusammen. Der entsprechende Wert der Spannung heisst Grenzwert ($=\sigma_g$). Von der Streckgrenze an (Spannung $=\sigma_s$) wachsen die Dehnungen sehr rasch; es findet ein Übereinandergleiten (Fliessen) des Materials statt, bis mit $\varepsilon = \delta$ und $\sigma = K$ (Festigkeit) die Zerstörung eintritt. — Ähnlich wie Schmiedeeisen verhalten sich verschiedene andere Baustoffe (Stahl, Holz u. s. w.), namentlich besitzen dieselben eine Elastizitäts- bezw. Proportionalitätsgrenze. Bei Gusseisen jedoch fehlt letztere; das Verhältnis $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ ist hier durchgehends veränderlich und nimmt mit wachsendem σ ab, desgl. bei Stein und Beton. —

Der Inhalt der Arbeitsfigur gibt die Arbeit an, welche die Kubikeinheit des Materials bis zu einer bestimmten Dehnung ε bezw. Spannung σ leistet,

$$A = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon.$$

Innerhalb der Elastizitätsgrenze, wo $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, wird $A = \int_0 \frac{\sigma d\sigma}{E} = \frac{\sigma^2}{2E}$. Einer Dehnung bis zur Elastizitätsgrenze entspricht die „Grenzarbeit" $A_g = \frac{\sigma_g^2}{2E}$

Die Bruchabeit erhält man, wenn man die Integration bis zur Bruchdehnung ausdehnt:

$$A_z = \int_0^{\delta} \sigma d\varepsilon.$$

Dieselbe wird vielfach als Maß für die Zähigkeit angenommen.

Die Arbeitslinien für Zug und Druck sind im allgemeinen verschieden; innerhalb der Elastizitätsgrenze stimmen sie wenigstens bei Schmiedeeisen, Stahl und annähernd auch bei Holz miteinander überein. Der Elastizitätsmodul ist hier für Zug und Druck gleich groß.

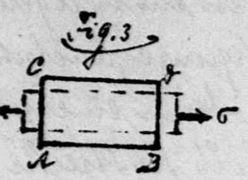
Bei isotropen Körpern hängt die Form der Arbeitslinie (d. h. auch E, σ_g, σ_s, K, δ) nur vom Material, bei homogenen Körpern vom Material und Richtung AB ab.

[Isotrope Körper = Körper, die in allen Punkten, nach allen Richtungen gleich beschaffen sind, wie gegossene Metalle, annähernd auch Bleche.

Homogene Körper = Körper, die zwar in allen Punkten gleich, aber nach verschiedenen Richtungen verschieden beschaffen sind, wie gewalzte Metallstäbe, Holz].

Die Normalspannung σ (siehe Figur 3), welche auf die Gegenflächen AC und BD wirkt, erzeugt ausser der Dehnung ε längs ihrer eigenen Richtung auch noch Dehnungen in jeder anderen Richtung.

Fig. 3



In den zu σ senkrechten Richtungen (z.B. AC) entstehen Dehnungen entgegengesetzten Sinnes, wie die Dehnung ε. Dieselben haben nach Versuchen bei isotropen Körpern innerhalb der Elastizitätsgrenze eine Grösse $-\frac{\varepsilon}{m}$, wo m zwischen 3 und 4 liegt. Hieraus folgt, dass die totale Dehnung nach einer Richtung AB nicht nur von der Spannung σ auf die zugehörigen Gegenflächen, sondern auch von den etwaigen Spannungen σ_1 und σ_2 auf die beiden andern Gegenflächenpaare abhängt. Dieselbe ist zu setzen:

$$(\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{m} = \frac{\sigma}{E} - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{E m} = \frac{1}{E}\left(\sigma - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{m}\right) \qquad 2.$$

Eine gleich grosse Dehnung könnte auch durch eine einzige, in der Richtung AB wirkende Spannung hervorgerufen werden, deren Grösse

$$(\sigma) = \sigma - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{m}$$

wäre.

Eine derartige gedachte Spannung (σ), welche die wirklichen Spannungen bezüglich der gesamten Dehnung von AB zu ersetzen geeignet wäre, heisst Ersatzspannung.

In ähnlicher Weise, wie zwischen der Dehnung und Normalspannung, findet auch zwischen Schiebung γ und Tangentialspannung τ eine bestimmte Beziehung statt, welche sich durch die Arbeitslinie für Schub darstellen lässt (Abscissen = γ, Ordinaten = τ). Dieselbe zeigt entsprechender Weise bis zur Proportionalitätsgrenze geradlinigen Verlauf. Das konstante Verhältnis zwischen τ und γ auf dieser Strecke wird Schubelastizitätsmodul genannt und mit G bezeichnet.

$$G = \frac{\tau}{\gamma}\ ; \quad \tau = G\cdot\gamma\ ; \quad \gamma = \frac{\tau}{G} \qquad 3.$$

Bei isotropem Material ist

$$G = \frac{E\cdot m}{2(m+1)}$$

und schwankt zwischen $\frac{3}{8}E$ bis $\frac{2}{5}E$, entsprechend den Werten m = 3 und m = 4.

Beziehungen zwischen den Spannungen

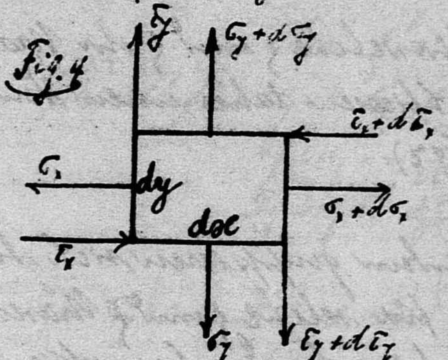
Die Seiten des betrachteten Elementarparallelepipeds im Innern eines belasteten Körpers, deren Längen dx, dy u. dz, seien parallel den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems gerichtet. Im allgemeinen wirken auf die 6 Seitenebenen desselben 6 Spannungen, bezw. nach Zerlegung derselben normal und parallel zu den Ebenen, sechs Normalspannungen und sechs Tangentialspannungen. Wir betrachten hier nur den für uns wichtigsten Fall, dass die Spannungen senkrecht zur xy Ebene = 0, dass also alle

Spannungen parallel der xy Ebene gerichtet sind. (Ebenes Kraftsystem). Es wirken nun auf die vier Seitenebenen die Spannungen (siehe Fig. 4):

σ_x und τ_y , $\sigma_x + d\sigma_x$ und $\tau_y + d\tau_y$

σ_y und τ_x , $\sigma_y + d\sigma_y$ und $\tau_x + d\tau_x$.

Fig. 4

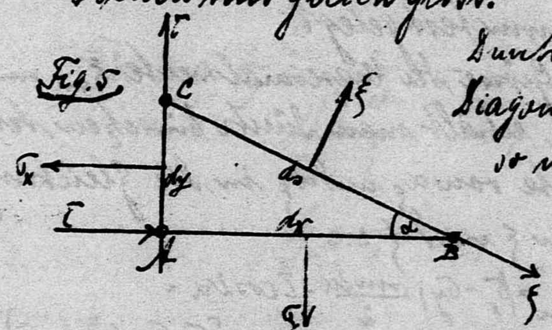


Das im Schwerpunkt des Parallelepipeds angreifende Eigengewicht kann als kleine Grösse höherer Ordnung ausser Acht bleiben. Die Seitenlänge dz wird im Folgenden gleich der Einheit gesetzt. Das Gleichgewicht der Kräfte gegen Drehung um den Mittelpunkt ergibt unter Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$(\tau_y\, dy)\, dx = (\tau_x\, dx)\, dy, \text{ d.h. } \tau_x = \tau_y = \tau \ \ldots\ldots\ldots \ 4.$$

oder: die Tangentialspannungen zweier aufeinander senkrecht stehender Ebenen sind gleich gross.

Fig. 5



Durchschneidet man das Parallelepiped durch einen Diagonalschnitt (siehe Figur 5) senkrecht zur xy Ebene, so muss zur Erhaltung des Gleichgewichts an der Schnittfläche ds eine Normalkraft ξ ds und eine Tangentialkraft ζ ds angebracht werden, wo ξ u. ζ die entsprechende Normal- und Tangentialspannung bezeichnen. Zur Bestimmung der Grössen ξ und ζ dienen die zwei Gleichgewichtsbedingungen:

a). $0 = \zeta\, ds - \sigma_x\, dy \cos\alpha + \sigma_y\, dx \sin\alpha + \tau\, dx \cos\alpha - \tau\, dy \sin\alpha$ = Summe aller Kräfte parallel ds = 0, wo unter Kraft das Produkt Spannung mal Fläche verstanden ist.

woraus, da $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{ds} = \sin\alpha$

$$\zeta = \sigma_x \sin\alpha\cos\alpha - \sigma_y \sin\alpha\cos\alpha - \tau(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$
$$= (\sigma_x - \sigma_y)\frac{\sin 2\alpha}{2} - \tau\cos 2\alpha\ ;$$

b). $0 = \xi\, ds - \sigma_x\, dy \sin\alpha - \sigma_y\, dx \cos\alpha + \tau\, dx \sin\alpha + \tau\, dy \cos\alpha$ Summe aller Kräfte normal ds = 0

woraus

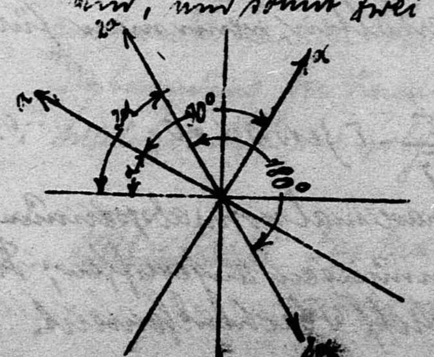
$$\xi = \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha - \tau\, 2 \sin\alpha\cos\alpha$$
$$= \sigma_x \frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \sigma_y \frac{1+\cos 2\alpha}{2} - \tau \sin 2\alpha$$

ζ wird bei variablem α zum Maximum für $\frac{d\zeta}{d\alpha} = 0$, d.h.

$$(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha + 2\tau \sin 2\alpha = 0$$

$$tg\, 2\alpha_\zeta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau} \ \ldots\ldots\ldots \ 5.$$

Hieraus folgen zwei Werte von $2\alpha_\zeta$, die um 180° von einander verschieden sind, und somit zwei Werte von α_ζ, die um 90° von einander verschieden sind.



ξ wird zum Maximum für

$$\frac{d\xi}{d\alpha} = 0$$

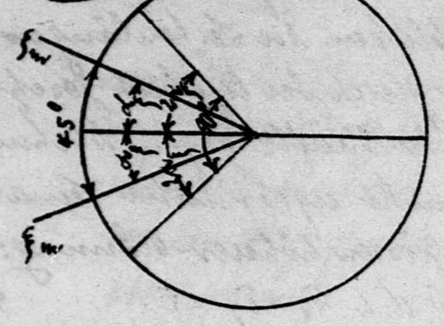
d.h. $\sigma_x \sin 2\alpha - \sigma_y \sin 2\alpha - 2\tau\cos 2\alpha = 0$

$$tg\, 2\alpha_\xi = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \ \ldots\ldots\ldots \ 6.$$

Hieraus folgen ebenfalls zwei Werte von α_ξ, die um 90° verschieden sind.

Da $tg\, 2\alpha_\zeta$ und $tg\, 2\alpha_\xi$ reciproke Werte sind und verschiedenes Vorzeichen haben, so sind $2\alpha_\zeta$ und $2\alpha_\xi$ Komplementwinkel, sie bilden zusammen 90°.

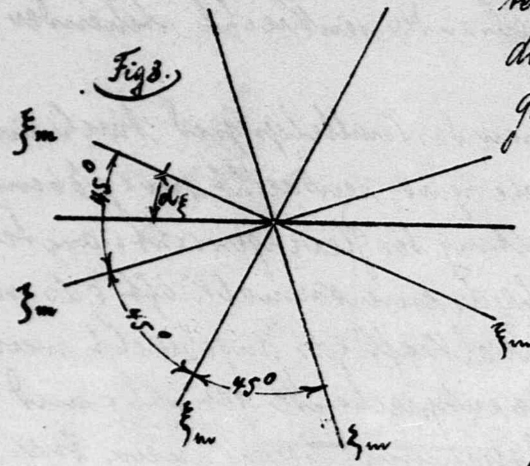
Fig. 7.



Die Flächenelemente, für welche ζ und ξ ihr Maximum erreichen, schliessen daher einen Winkel von 45° ein (vgl. Fig. 7).

Nach Vorstehendem gruppieren sich die Flächenelemente, für welche ζ und ξ Maximalwerte erreichen, entsprechend neben skizziertem Diagramm (Fig. 8). Ist für eines derselben der zugehörige Winkel α berechnet, so ist das ganze Diagramm festgelegt.

Fig. 8.



Die Grösse der Maximalwerte ζ_m und ξ_m erhält man durch Einsetzen der Werte von α_ζ und α_ξ in die Gleichungen von ζ und ξ:

$$\zeta_m = (\sigma_x - \sigma_y)\frac{\sin 2\alpha}{2} - \tau \cos 2\alpha = \cos 2\alpha\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} tg\, 2\alpha - \tau\right]$$

oder, da $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + tg^2 2\alpha}} = \dfrac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4}}}$

$$\zeta_m = \pm\sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 7.$$

Es ergeben sich hiernach für die beiden Werte von α_ζ zwei dem Absolutwert nach gleich grosse Maximaltangentialspannungen ζ_m.

$$\xi_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau \sin 2\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \cos 2\alpha\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \tau \cdot tg\, 2\alpha\right]$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\tau^2}{(\sigma_x - \sigma_y)^2}}}$$

$$\xi_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau^2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \zeta_m \quad \ldots\ldots\ 8.$$

Hiernach erhält man für ξ_m zwei verschieden grosse Werte, welche den zwei Werten von α_ξ entsprechen und mit ξ_1 und ξ_2 bezeichnet werden sollen. Derjenige Wert von ζ, welcher ξ_m entspricht, wird erhalten, wenn man für α den Wert α_ξ nach Gleichung 6. einführt.

$$\zeta' = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} tg\, 2\alpha - \tau\right)\cos 2\alpha = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} - \tau\right)\cos 2\alpha = 0 \ \ldots\ldots\ 9.$$

d. h. diejenigen Flächenelemente, welche die Maximalnormalspannung ξ_m erleiden, werden durch keine Tangentialspannungen angegriffen; die Gesamtspannung steht senkrecht auf dem betreff. Flächenelement.

Derjenige Wert von ξ, welcher ζ_m entspricht, ergibt sich nach Einsetzen von α_ζ nach Gleichung 5. zu:

$$\xi' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \cos 2\alpha\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \tau \cdot tg\, 2\alpha\right] = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\tau}{\sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau^2}}\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \tau\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau}\right]$$

$$\text{also } \xi' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 10.$$

Speciell für $\sigma_y = 0$, $\sigma_x = \sigma$ wird:

$$\left.\begin{aligned} tg\, 2\alpha_\zeta &= -\frac{\sigma}{2\tau}\ ; \quad \zeta_m = \pm\sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \\ tg\, 2\alpha_\xi &= \frac{2\tau}{\sigma}\ ; \quad \xi_m = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} = \frac{\sigma}{2} \pm \zeta_m \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ 11.$$

Für $\sigma_y = 0$ und $\sigma_x = 0$ wird

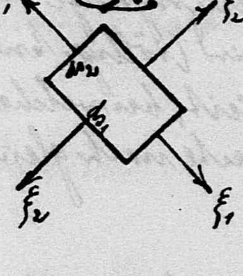
$$\left.\begin{aligned} tg\, 2\alpha_\zeta &= 0\ ; \quad \alpha_\zeta = \begin{cases} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{cases} ; \quad \zeta_m = \tau \\ tg\, 2\alpha_\xi &= \infty\ ; \quad \alpha_\xi = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} \end{cases} ; \quad \xi_m = \pm\tau \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ 12.$$

Für $\tau = 0$, $\sigma_y = 0$, $\sigma_x = \sigma$ wird:

$$\left.\begin{aligned} tg\, 2\alpha_\zeta &= -\infty\ ; \quad \alpha_\zeta = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} \end{cases} ; \quad \zeta_m = \frac{\sigma}{2} \\ tg\, 2\alpha_\xi &= 0\ ; \quad \alpha_\xi = \begin{cases} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{cases} ; \quad \xi_m = \begin{cases} \sigma \\ 0 \end{cases} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ 13.$$

Die Maximalwerte ξ_m werden <u>Hauptspannungen</u> genannt.

Fig. 9.



Denken wir uns nun ein Parallelepiped (siehe Figur 9), dessen parallel der x y Ebene gelegene Seiten ds_1 und ds_2 die Richtungen der Hauptspannungen ξ_1 und ξ_2 besitzen mögen, so erleidet, wenn $\xi_1 > \xi_2$, die Seite ds_1 die größte Dehnung.

$$(\varepsilon) = \frac{1}{E}\left[\xi_1 - \frac{\xi_2}{m}\right]$$ dem entspricht eine Ersatzspannung:

$$(\sigma) = \xi_1 - \frac{\xi_2}{m} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\tau^2 + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4}} - \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2m} + \frac{1}{m}\sqrt{\tau^2 + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4}}$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \sqrt{\tau^2 + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4}}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

$$= \frac{3}{8}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{5}{8}\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2} \text{ für } m = 4 \ \ldots\ 14.$$

(Schmiedeeisen innerhalb Elastizitätsgrenze)

$$= \frac{3}{8}\sigma + \frac{5}{8}\sqrt{4\tau^2 + \sigma^2} \text{ für } \sigma_y = 0,\ \sigma_x = \sigma \ \ldots\ldots\ 15.$$

Was die Größen σ_x, σ_y und τ d. h. die Spannungen von zwei beliebigen zueinander senkrechten Flächenelementen anbelangt, so bedarf es zu deren Bestimmung der Kenntnis von Belastungsart und Körperform, und ist hierüber auf die folgenden Sonderfälle zu verweisen.

<u>**Festigkeit**</u>. Das Material wird zerstört, sobald die Formänderung (Dehnung oder Schiebung) die Festigkeitsgrenze überschreitet.

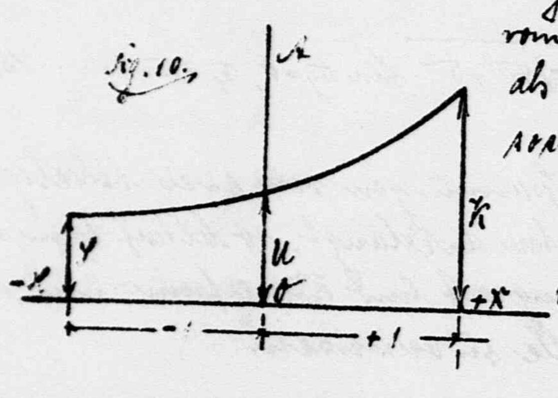
die entsprechende Spannung bezw. Ersatzspannung heisst Festigkeit des Materials. Insbesondere nennt man diejenige Tangentialspannung, welche ein Abscheeren bewirkt, Schubfestigkeit, diejenige Normalspannung, welche für sich allein ein Zerreissen oder Zerdrücken des Materials hervorruft, Zug- oder Druckfestigkeit. Bei isotropem Material sind die Festigkeiten in jedem Punkte nach jeder Richtung gleich gross, bei homogenem Material nach der Richtung verschieden. Ausserdem hängt die Grösse der Festigkeit auch noch von der Wirkungsweise der äusseren Kräfte ab. Am grössten ist dieselbe bei allmählich einwirkender, kurz andauernder ruhiger Belastung; die entsprechenden Werte für K' (Zug), K'' (für Druck), T (für Schub) werden Tragfestigkeit genannt. Der Bruch des wird jedoch nicht nur durch einmalige ruhige Belastung, welche K und T überschreitende Spannungen erzeugt, hervorgerufen, sondern auch durch vielfach wiederholte Belastung und Entlastung, wobei keine der entsprechenden Spannungen die Tragfestigkeit erreicht. Je grösser hierbei die Differenzen der Spannungen im belasteten und unbelasteten Zustand (Spannungswechsel) sind, desto geringer ist die absolute Grösse der Spannung, welche nunmehr den Bruch herbeiführt. (Wöhlers Gesetz; Versuche in den Jahren 1859–1870).

Am geringsten ist die absolute Grösse der Spannung (d.h. die Festigkeit), wenn die Spannungen zwischen positiven und negativen wechseln. (Abbrechen von Draht durch Hin- und Herbiegen.)

Man nennt die Festigkeiten bei unendlich oft wiederholtem Spannungswechsel die Arbeitsfestigkeiten A des Materials. Speziell diejenige Arbeitsfestigkeit, bei welcher die untere Spannungsgrenze = 0 wird (völlige Entlastung), heisst Ursprungsfestigkeit U. Diejenige Arbeitsfestigkeit, bei welcher die untere Spannungsgrenze negativ und ihrem Absolutwerte nach gleich der oberen Grenze wird, heisst Schwingungsfestigkeit S.

Nach den wenigen Untersuchungsresultaten ist bei Schmiedeeisen U = ca 0,55 K, bei Gussstahl U = ca 0,44 K, d.h. annähernd U = 0,5 K. Für die Schwingungsfestigkeit ist bei Schmiedeeisen S = ca 0,3 K. Das Gesetz, nach welchem die Arbeitsfestigkeit vom Spannungswechsel (Spannungsgrösse) abhängt, lässt sich auf Grund der Versuchsresultate in folgender Weise annähernd darstellen (Fig. 10):

Fig. 10.



Trägt man als Abscisse x jeweils das Verhältnis vom Minimum zum Maximum der Spannung, als Ordinate y die zugehörige Arbeitsfestigkeit A auf, so erhält man eine Parabel, deren Gleichung:

$$A = \left(0{,}5 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{6}\right) K \text{ lautet.}$$

mit $x = +1$ folgt hieraus $A = K$

" $x = 0$ " " $A = U = 0{,}5\,K$

" $x = -1$ " " $A = S = \frac{1}{3} K$.

Bezüglich der Grössen U und S sind z. Zt. nur sehr wenige Versuchsresultate vorhanden; fast alle bisher angestellten Festigkeitsversuche beziehen sich auf Tragfestigkeit. Auch die Dauer der Belastung ist von Einfluss auf die Festigkeit, insofern bei ständiger Belastung schon kleinere Spannungen als die Tragfestigkeit des Materials mit der Zeit zerstören können.

Desgleichen ist bei plötzlich einwirkender Belastung die Festigkeit geringer als bei allmählich einwirkender Belastung (wie sie der Tragfestigkeit entspricht), infolge der früher erwähnten Schwingungserscheinung. Experimentell sind die vorgenannten Verhältnisse noch weniger erforscht.

Tabelle der Elastizitäts- und Festigkeitsgrössen in kg u. cm für Eisen und Stahl

		E (im Mittel)	K'	K''	T	Elast.-Grenze σ_z σ_d
Schweisseisen;	Stäbe u. Bleche	2 000000 ‖ / 1 800000 ⊥	3300–4000;	3300–4500;	2600–3200;	1400–1700;
	Draht	2000000;	5000–8000;	—	—	—
Flusseisen;	Stäbe und Bleche	2 150 000;	3600–4500;	3600–4500;	3100–3800;	1100–2700;
	Draht:	2 150 000;	6500–8500;	—	—	—
Flussstahl;	Stäbe und Bleche	2200000;	4500–6500; 4500–14000;	4500–10000; (Tiegelstahl)	3600–5200;	2500–4200
	Draht	2 200 000;	6500–25000;	—	—	4200–24000; —
Gusseisen		1000000;	1200–2000;	5000–10000;	1200–3200;	750; 1500

Bei Schweisseisen beziehen sich K', K'' und E auf Beanspruchungen parallel der Walzfaser, T auf Beanspruchungen senkrecht zur Walzfaser. Bei Blechen sind K' und K'' senkrecht zur Walzfaser nur ca 0,9 mal so gross; bei Stabeisen noch geringer, etwa 0,8 mal so gross. E ist senkrecht zur Walzfaser etwas geringer als parallel derselben. Bei Flussmaterial ist ist der Einfluss der Hauptwalzrichtung von geringem Belang. — Von den angegebenen Zahlenwerten sind die für K' am zuverlässigsten. Die Grösse der Druckfestigkeit K'' wird wesentlich durch die Gestalt des Probestücks, namentlich dessen Höhe, beeinflusst; bei plattenförmigen Körpern ist dieselbe grösser als bei säulenförmigen; für die Versuche erhalten die Probestücke in der Regel würfelförmige Gestalt.

[Anmerkung. Wird die mit der Längsausdehnung verbundene Querausdehnung verhindert, so kann die Widerstandsfähigkeit gegen Druck bis ins Ungemessene steigen; vergl. das analoge Verhalten von Wasser in der hydraulischen Presse]

Gusseisen besitzt nach dem Früheren streng genommen keine Proportionalitätsgrenze. Der angegebene Wert von E (= 100000) entspricht sehr kleinen Spannungen; mit wachsender Spannung nimmt das Verhältnis $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ ab, innerhalb der praktischen Verwendung etwa bis 70000. Die als Elastizitätsgrenzen angegebenen Werte von 750 und 1500 sind ziemlich willkürlich; innerhalb derselben werden die bleibenden Dehnungen als von keiner praktischen Bedeutung angenommen.

Für die Anwendung sollen die Formänderungen ε und γ bezw. die Spannungen σ und τ eines belasteten Körpers gewisse Werte k', k'', t (die Spannungszahlen, zulässigen Beanspruchungen) nicht überschreiten; die nicht nur unter der Festigkeitsgrenze, sondern auch womöglich unterhalb der Elastizitätsgrenze liegen, um bleibende Formänderungen zu vermeiden. Die Werte k', k'' und t werden je nach der Art der Belastung verschieden gross angenommen. In der Regel setzt man für Schmiedeeisen $k' = k'' = k$, $t = 0{,}8k$. Näheres über die Werte von k und t folgt später.

NB. In gewissen Fällen der Anwendung genügt es nicht, dass die Einzeldeformationen ε und γ, bezw. die Spannungen σ und τ innerhalb bestimmter Grenzen bleiben, es darf auch die Gesamtdeformation (Durchbiegung) eine vorgeschriebene Grösse nicht überschreiten.

Da die Spannungen nach Vorstehendem unterhalb der Elastizitätsgrenze bleiben sollen, so sind hierfür die Elastizitätsgleichungen 1.) 2.) und 3.) anwendbar. Die ganze Festigkeitslehre ist im wesentlichen auf diese Gleichungen aufgebaut; ihre Ergebnisse sind daher nur für die Verhältnisse innerhalb der Elastizitätsgrenze zutreffend, ausserhalb, namentlich in der Nähe des Bruches, sind sie im allgemeinen nicht mehr gültig. Desgleichen sind auch bei Materialien, welche, wie z. B. Gusseisen, eine eigentliche Elastizitätsgrenze bezw. Proportionalitätsgrenze nicht besitzen, die Formeln der Festigkeitslehre, soweit dieselben die Gleichungen 1–3 zur Grundlage haben, nur näherungsweise richtig. — Im Folgenden wird, sofern nichts anders bemerkt wird, in der Regel die Gültigkeit der Elastizitätsgesetze 1–3 vorausgesetzt.

Bei Trägern, welche aus verschiedenen Eisenstäben (Flacheisen L, ⊥ etc.) zusammengesetzt sind, kann hierbei ohne wesentlichen Fehler E durchgehends gleich gross, gleich dem betreffenden Mittelwerte angenommen werden. —

Ferner wird vorausgesetzt, dass die Formänderungen gegenüber den Körperdimensionen als kleine Grössen höherer Ordnung angesehen werden können.

Sonderfälle.

Es wird ein stabförmiger Körper mit gerader Achse vorausgesetzt. Die belastenden äusseren Kräfte liegen alle in einer Ebene, der Belastungsebene, welche durch die Stabachse geht. Denkt man sich den Stab in einem beliebigen Querschnitt F durchschnitten (siehe Fig. 11). und betrachtet den einen Stabteil (z. B. den linksseitigen) so müssen die der Schnittfläche entsprechenden inneren Kräfte (Normal- und Tangentialspannungen) im Gleichgewicht stehen mit den am Stabteil wirkenden äusseren Kräften. Diese äusseren Kräfte lassen sich im allgemeinen ersetzen:

Fig. 11.

1). durch eine in der Stabachse normal zum Querschnitt wirkende Normalkraft N.

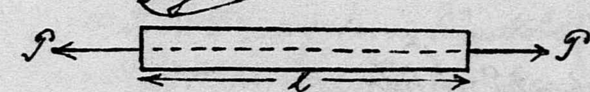
2). durch eine im Querschnitt senkrecht zur Achse wirkende Querkraft Q

3). durch ein Kräftepaar (Moment) M, dessen Achse senkrecht zur Stabachse steht.

Es mögen nun der Reihe nach die verschiedenen Beanspruchungen eines Stabes behandelt werden.

a). Beanspruchung auf Zug.

Fig. 12.



Der Stab (Fig. 12). wird durch die äusseren Kräfte P in der Richtung der Achse gezogen. Es wird dann für sämtliche Querschnitte $N = P$, $Q = 0$, $M = 0$. Es wird angenommen, daß die Normalkraft N sich gleichmäßig auf alle Punkte des Querschnittes verteile (eine Annahme, welche bei der Einwirkung von Einzelkräften P in der nächsten Nähe der Endquerschnitte nicht vollkommen erfüllt ist). Die Spannung ergibt sich dann konstant zu

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 16.$$

Der Stab besitzt genügenden Querschnitt, wenn $\sigma \leqq k'$ bezw. $F \geqq \frac{P}{k'}$ … 16a.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Die totale Verlängerung des Stabes ist } \Delta l = \int_0^l \varepsilon\, dl \\ \text{Innerhalb der Elastizitätsgrenze ist } \Delta l = \int_0^l \frac{\sigma}{E}\, dl = \frac{P}{E}\int_0^l \frac{dl}{F} \\ \text{Bei konstantem Querschnitt wird } \Delta l = \frac{P}{E}\cdot\frac{l}{F} = \frac{\sigma \cdot l}{E}.\end{array}\right\} \ldots 17.$$

Da in allen Punkten des Querschnitts die Normalspannung die gleiche Größe, nämlich $\frac{P}{F}$, hat, so dehnen sich die Längsfasern alle gleichmäßig aus; es findet keine gegenseitige Verschiebung derselben statt.

d.h. in den zur Stabachse parallelen Ebenen ist keine Schubspannung vorhanden. Wird die x Achse eines Koordinatensystems in die Stabachse gelegt, so sind die Beziehungen 13) direkt anwendbar.

Die Schubspannung parallel und demnach auch diejenige senkrecht zur Stabachse ist $\tau = 0$.

Die Hauptspannungen sind $\xi_1 = \sigma$ parallel der Achse,
$\xi_2 = 0$ senkrecht zur Achse.

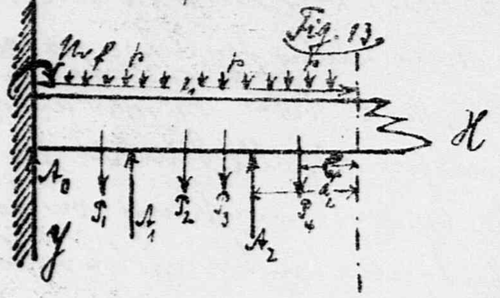
Die grössten Schubspannungen ξ bilden den Winkel $\alpha_\xi = \pm 45^\circ$ mit der Achse, ihr Wert ist $\xi = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + 0} = \frac{\sigma}{2} = \frac{P}{2F}$

b.) Beanspruchung auf Biegung.

Sämtliche äusseren Kräfte sind parallel und senkrecht zur Achse gerichtet; der Stab besitze eine Symmetrieebene, welche mit der Belastungsebene zusammenfällt.

Die ursprünglich gerade Achse krümmt sich unter der Belastung in der Symmetrieebene und bildet dann die elastische Linie. Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatenkreuz in die Symmetrieebene, die x Achse in die ursprüngliche gerade Achse; in der Regel werden die positiven x nach rechts, die positiven y nach unten gerechnet. (Fig. 13).

Unter den gemachten Voraussetzungen ist für einen beliebigen Querschnitt F, dessen Abscisse $= x_1$:



$$N = 0$$
$$Q = \Sigma A - \Sigma P - \int_0^{x} p\,dx$$
$$M = \Sigma A a - \Sigma P e + M_0 - \int_0^{x_1} p(x_1 - x)\,dx.$$

wo p stetige Belastung pro Längeneinheit bezeichnet.

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\frac{dM}{dx} = \Sigma A \frac{da}{dx} - \Sigma P \frac{de}{da} - \int_0^{x} p\,dx, \text{ oder da}$$

$$\frac{da}{dx} = \frac{de}{dx} = 1, \qquad \frac{dM}{dx} = \Sigma A - \Sigma P - \int_0^{x} p\,dx = Q \quad \ldots\ldots\ldots \quad 18)$$

Ebenso erhält man durch Differentiation von Q die Gleichung:

$$\frac{dQ}{dx} = -p, \quad \text{und} \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -p \quad \ldots\ldots\ldots \quad 19.)$$

Die Gleichungen 18.) und 19.) lassen sich auch auf folgende Weise ableiten, wenn man das Gleichgewicht an einer Scheibe von der Breite dx betrachtet (Fig. 14):

Fig. 14.

Summe aller Momente = 0 liefert: $M + Q dx - p\frac{dx^2}{2} = M + dM$, woraus mit Vernachlässigung des unendlich kleinen 2ter Ordnung:

$$Q = \frac{dM}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 18.)$$

Zwischen zwei Lastangriffsstellen ist Q konstant (falls $p = 0$), man erhält dann durch Integration von Gleichg 18).

$$M_2 - M_1 = \int_1^2 Q\,dx = Q(x_2 - x_1) = Q \cdot c;$$

$$Q = \frac{M_2 - M_1}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 18^a)$$

Summe aller Vertikalkräfte liefert:

$$Q - p\,dx = Q + dQ$$

$$\frac{dQ}{dx} = -p \quad \ldots\ldots\ldots \quad 19.)$$

In der Regel setzen wir, wie vorstehend, bei Betrachtung des linksseitigen Stabteils Q positiv, wenn es nach oben gerichtet ist, M positiv, wenn es wie der Uhrzeiger dreht. Bei andern Vorzeichenannahmen können Gleichungen 18.) und 19.) andere Vorzeichen erhalten; z.B. für Q positiv nach unten wird:

$$\frac{dM}{dx} = -Q \; ; \quad \frac{dQ}{dx} = +p.$$

Aus Gleichung 18.) folgt, dass M sein Maximum für $Q = 0$ erreicht. — Die inneren Spannungen des Querschnitts F müssen nun im Gleichgewicht mit M und Q stehen. Diese Bedingungen genügen jedoch noch nicht, um σ und τ in jedem Punkte des Querschnitts zu bestimmen.

Man macht zu diesem Zwecke noch die weitere Annahme, dass die ursprünglich ebenen Querschnitte auch nach der Biegung noch eben und senkrecht zur elastischen Linie seien; hiermit können σ und τ in jedem Punkte berechnet werden.

Es seien F und F_1 (Fig. 15.) zwei um ds von einander entfernte, ursprünglich parallele Querschnitte. Nach der Biegung schneiden sich deren Ebenen in der Krümmungsachse C. Der Krümmungsradius der Achse ist dann $\varrho = OC$. Teilt man den Querschnitt durch Linien parallel der Krümmungsachse C in horizontale Lamellen dF (Fig. 16), so müssen für jeden Punkt derselben die Dehnungen ε und somit auch die Spannungen σ konstant sein. Diejenige Linie U, für deren Punkte ε und $\sigma = 0$ sind, heisst die neutrale Achse des Querschnitts. Wir legen in den Querschnitt ein Koordinatensystem, dessen Abscissenachse U mit der neutralen Achse zusammenfällt, und dessen Ordinatenachse V in der Symmetrieebene liegt. Für eine Lamelle im Abstande v von U hat die Änderung der Entfernung von der

Fig. 15

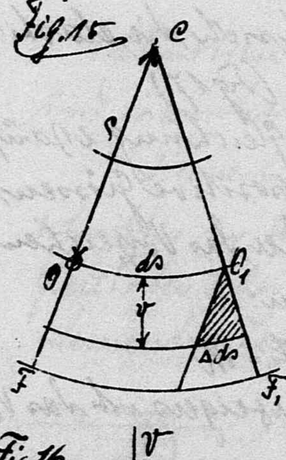
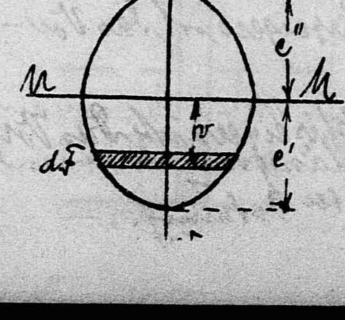


Fig. 16.



homologen Lamelle des Querschnitts F den Betrag Δds.
Aus ähnlichen Dreiecken folgt:

$$\frac{\Delta ds}{v} = \frac{ds}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{v}{\varrho}$$

somit

$$\varepsilon = \frac{v}{\varrho}\ ; \ \sigma = \frac{E \cdot v}{\varrho} \ \dots\dots\dots\dots \ 20)$$

Die totale auf dF wirkende innere Kraft (Normalkraft) ist sodann

$$\sigma dF = \frac{E \cdot v \cdot dF}{\varrho}$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung: „Summe aller Horizontalkräfte $= 0$" folgt:

$$\int \sigma dF = 0 \quad \text{d.h.} \int \frac{E \cdot v \cdot dF}{\varrho} = \frac{E}{\varrho} \int v\, dF = 0 \quad \text{oder} \quad \int v \cdot dF = 0$$

d.h. mit andern Worten: die Abscissenachse geht durch den Schwerpunkt, oder die <u>neutrale Achse</u> geht durch den Schwerpunkt.

Die Bedingung: „Summe aller Momente $= 0$" gibt

$$M = \int \sigma \cdot dF \cdot v = \frac{E}{\varrho} \int v^2 dF = \frac{E \cdot J}{\varrho} \ \dots\dots\dots\dots \ 21)$$

wo J = Trägheitsmoment des Querschnitts bezüglich der neutralen Achse ist. Hieraus lässt sich bei gegebenem Moment, E und J der zugehörige Krümmungsradius ϱ und somit auch σ nach Gleichung 20) berechnen.
Ist nun $\varrho = \pm \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} : \frac{d^2y}{dx^2}$, oder da es sich um sehr schwache Krümmungen, also um sehr kleine $\frac{dy}{dx}$ handelt, genau genug $\varrho = \pm \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$; setzt man diesen Wert in Gleichung 21) ein, so folgt als Differentialgleichung der elastischen Linie:

$$\pm EJ \frac{d^2y}{dx^2} = M \ \dots\dots\dots\dots \ 22.)$$

Das Vorzeichen hängt davon ab, welche Richtungen man für y und M als die positiven annimmt. Wir wählen y positiv nach unten, M positiv im Sinne des Uhrzeigers. Hierbei krümmt sich die elastische Linie konkav nach oben, und $\frac{d^2y}{dx^2}$ wird negativ. (Fig. 17.)

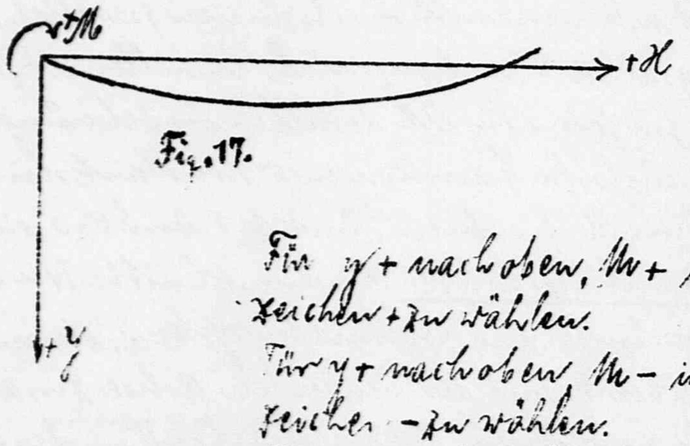


Fig. 17.

Damit nun in Gleichung 21) auf beiden Seiten positive Grössen stehen, muss daher das Vorzeichen – gewählt werden:

$$-EJ \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

Für y + nach oben, M + im Sinne des Uhrzeigers ist das Vorzeichen + zu wählen.
Für y + nach oben, M – im Sinne des Uhrzeigers ist das Vorzeichen – zu wählen.
Für y + nach unten, M – im Sinne des Uhrzeigers ist das Vorzeichen + zu wählen.

Allgemein gesprochen:
Das positive Zeichen ist gültig, wenn durch das positive Moment die Konkave nach dem positiven y hingerichtet ist.
Würde man, statt wie vorstehend angenommen den linksseitigen Trägerteil, den rechtsseitigen der Betrachtung zu Grunde legen, so wären jeweils die entgegengesetzten Vorzeichen anzuwenden.
Sind J und M als Funktionen von x gegeben, so liefert Gleichung 22. durch zweimaliges Integrieren die Gleichung der elastischen Linie. In Verbindung mit Gleichung 18) und 19.) liefert Gleichung 22.):

$$\pm M = EJ \frac{d^2y}{dx^2}\ ; \ \pm Q = EJ \frac{d^3y}{dx^3}\ ; \ \mp p = EJ \frac{d^4y}{dx^4}.$$

[<u>Anmerkung 2.</u> Streng genommen üben ausser den Momenten M auch die Querkräfte Q einen Einfluss auf die Deformation bezw. auf die Gestalt der elastischen Linie aus. Dieser Einfluss ist bei gewöhnlichen massiven Balken ohne Bedeutung; nur bei Trägern mit dünner Wand kann derselbe in Betracht kommen, worüber später noch an geeigneter Stelle gesprochen wird.]

Nach Gleichung 20) ist $\sigma = \frac{E \cdot v}{\varrho}$, und wenn man nach Gleichung 21.) $\frac{E}{\varrho} = \frac{M}{J}$ setzt, so ist

$$\sigma = \frac{M \cdot v}{J} \ \dots\dots\dots\dots \ 23)$$

σ wächst sonach proportional der Ordinate v und erreicht seine grössten Werte für die äussersten Fasern e' und e'', und zwar ist die

$$\left.\begin{array}{l} \text{grösste Zugspannung } \sigma' = \frac{M e'}{J} \\ \text{grösste Druckspannung } \sigma'' = \frac{M \cdot e''}{J} \\ \text{Für } e' = e'' = e \text{ sind } \sigma' \text{ und } \sigma'' \text{ einander gleich und zwar } \sigma = \frac{M \cdot e}{J} \end{array}\right\} \dots 24.)$$

Die Quotienten $\frac{J}{e}$, $\frac{J}{e'}$ und $\frac{J}{e''}$ bezeichnet man häufig mit W, W', W'' und nennt sie <u>Widerstandsmomente.</u>

Die verticale Schubspannung τ eines Flächenelements des Querschnittes in der Entfernung v von der neutralen Achse ist nach Gleichung 7) gleich der Schubspannung τ eines dazu normalen horizontalen Flächenelements. Letztere lässt sich bestimmen, wenn man den Gleichgewichtszustand eines Scheibenstücks betrachtet, welches durch homologe Stücke der zwei Querschnitte x und x_1 und durch einen Horizontalschnitt in der Tiefe v begrenzt wird. (Fig. 18).

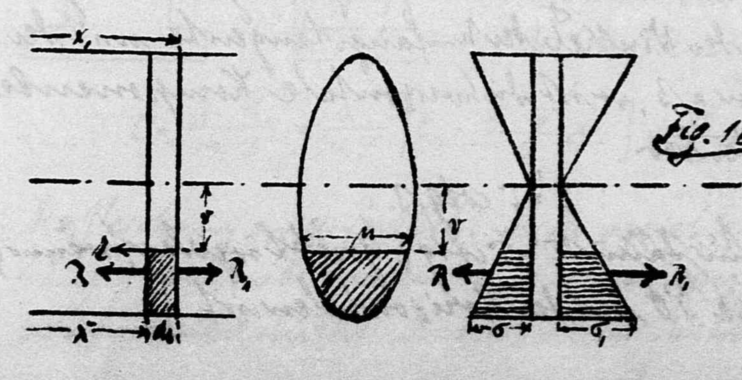


Fig. 18

Es wirken am Scheibenstück die Kräfte:

$$R = \int_v^e \sigma\, dF = \int_v^e \frac{M}{J} v\, dF = \frac{M}{J}\int_v^e v\, dF = \frac{M}{J}\, St_v^e$$ (wobei St_v^e = statisches Moment des schraffierten Flächenstücks um die neutral Achse)

$$R_1 = \int_v^e \sigma_1\, dF_1 = \frac{M_1}{J_1}\cdot St_v^e$$

$r = \tau \cdot \mu \cdot dx$, wenn man annimmt, daß sich τ gleichmäßig auf die Breite μ verteile. (NB. Dies ist bei plötzlicher Änderung von μ nicht mehr vollkommen richtig!).

$r = R_1 - R$, d.h. $\tau \cdot \mu \cdot dx = \frac{M_1}{J_1}\cdot St_v^e - \frac{M}{J}\cdot St_v^e = d\left(\frac{M\, St}{J}\right)$, woraus

$$\tau = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{M\, St}{J}\right) = \frac{1}{\mu}\left[\frac{dM}{dx}\cdot\frac{St}{J} + M\frac{d}{dx}\left(\frac{St}{J}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\mu}\left[\frac{Q\cdot St}{J} + M\frac{d}{dx}\left(\frac{St}{J}\right)\right] \quad \ldots\ldots\ldots 25.)$$

da nach Gleichung 18.) $\frac{dM}{dx} = Q$. Zur Abkürzung wurde St statt St_v^e gesetzt.

Für konstanten Querschnitt ist $\frac{d}{dx}\left(\frac{St}{J}\right) = 0$, also $\tau = \frac{Q\cdot St}{\mu\cdot J}$ ...... 26.)

Für langsam sich ändernde Querschnitte kann näherungsweise τ ebenfalls $= \frac{Q\, St}{\mu\cdot J}$ gesetzt werden.

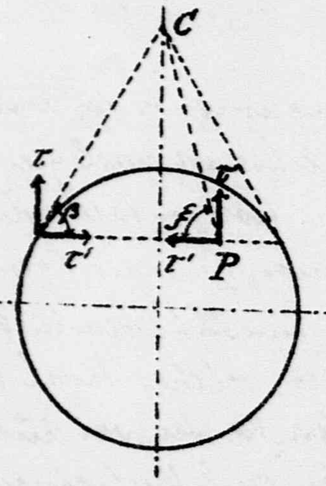
[**Anmerkung 3.** Die dritte Gleichgewichtsbedingung: „Summe aller verticalen Kräfte = 0" ist von selbst erfüllt.

Es soll sein $Q = \int_{-e}^{+e} \tau\cdot\mu\cdot dv = \int_{-e}^{+e} \frac{Q\cdot St_v^e\cdot dv}{J}$, d.h. $J = \int_{-e}^{+e} St_v^e\, dv$.

$$J = \left[St\cdot v\right]_{-e}^{+e} - \int_{-e}^{+e} v\cdot d\,St = 0 - \int_{-e}^{+e} v(-v\, dF) = \int_{-e}^{+e} v^2\, dF = J$$

Man erhält also die identische Gleichung $J = J$].

[**Anmerkung 4.**



Für den Fall, dass die seitliche Begrenzung des Querschnittes nicht vertical ist, werden die Querschnittselemente ausser durch die in Gleichung 26.) bestimmten verticalen Schubspannungen τ auch noch durch horizontale Schubspannungen τ' angegriffen, weil die totalen Schubspannungen der Randelemente in der Richtung der Umfangstangente liegen müssen. Ist der Winkel der Umfangstangente mit der Horizontalen $= \beta$, so ist die horizontale Komponente offenbar

$$\tau' = \tau \operatorname{cotg}\beta.$$

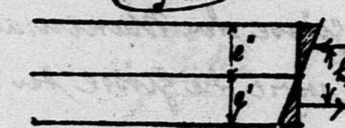
Für Zwischenelemente P kann dann $\tau' = \tau \operatorname{cotg}\xi$ gesetzt werden, wenn ξ der Winkel der Verbindungslinie PO mit der Horizontalen ist.]

Nach Gleichung 26.) ist die Tangentialspannung τ proportional der Grösse $\frac{St}{\mu}$; für die äusserste Faser ist $St = 0$, also auch $\tau = 0$. In der Regel wird τ am grössten in der neutralen Achse, da hier St am grössten. Der betreffende Wert von $\tau_0 = \frac{Q}{\mu}\cdot\frac{St_0^e}{J}$ lässt sich noch etwas umformen: die positiven und negativen σ lassen sich zu je einer Mittelkraft R, deren Entfernung mit h_s bezeichnet werden möge, zusammenfassen.

Man hat dann: $M = R\cdot h_s = h_s\int_0^e \sigma\, dF = h_s\int_0^e \frac{M\cdot v}{J}\, dF = \frac{h_s\cdot M}{J}\, St_0^e$

Hieraus folgt: $h_s = \frac{J}{St_0^e}$ und $\tau_0 = \frac{Q}{\mu_0}\cdot\frac{St_0^e}{J} = \frac{Q}{\mu_0\cdot h_s}$ .... 27.)

Fig. 20



h_s heisst **Entfernung der Stossmittelpunkte** und ist stets grösser als die Entfernung der Schwerpunkte der Querschnitthälften und kleiner als die Trägerhöhe h. (Fig 20.)

Für **I** = Querschnitt mit dünner Mittelrippe ist:

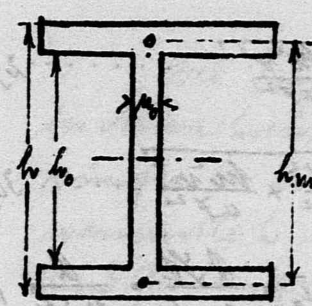


Fig. 21.

$$h_s = \frac{J}{St} = \frac{2i + 2f\frac{h_m^2}{4} + \frac{\mu_0 h_0^3}{12}}{f\cdot\frac{h_m}{2} + \frac{\mu_0 h_0^2}{3}}, \text{ annähernd}$$

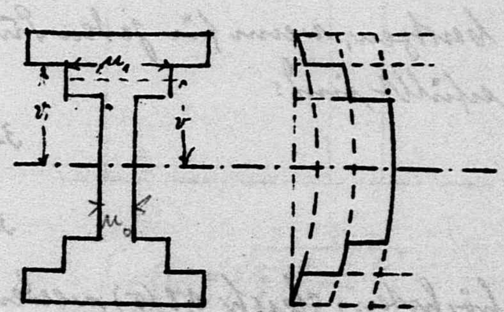
$$= h_m\frac{12f + 2h_m\mu_0}{12f + 3h_m\mu_0}$$

Hierin bedeutet f den Querschnitt *einer* Gurtung, i das Trägheitsmoment derselben um ihre eigene Achse, h_m den Abstand der Gurtschwerpunkte, μ_0 die Stegdicke, h_0 die Steghöhe. Es ist also h_s etwas kleiner als h_m und kann bei dünnem Steg genau genug gleich der Steghöhe h_0 gesetzt werden; somit

$$\tau_0 = \frac{Q}{\mu_0 h_0} = \frac{Q}{f_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 28.)$$

wenn der Stegquerschnitt $\mu_0\cdot h_0 = f_0$ gesetzt wird.

Ist der Querschnitt aus einzelnen Rechtecken zusammengesetzt, so entspricht der sprungweisen Änderung der Breite μ eine plötzliche Änderung des Wertes τ, wie aus Gleichung 26.) direkt hervorgeht.



Innerhalb eines Rechtecks variiert τ nach den Ordinaten einer Parabel mit horizontaler Achse. (Fig. 22.) Ist μ_1 die Breite eines der Rechtecke, v_1 die Ordinate der oberen Horizontalseite, C_1 das statische Moment der oberhalb gelegenen Rechtecke, so ist innerhalb des betreff. Rechtecks:

$$\tau = \frac{Q\cdot St_v^e}{\mu_1 J} = \frac{Q}{\mu_1 J}\left[C_1 + \frac{v_1^2 - v^2}{2}\mu_1\right] = \frac{Q}{\mu_1 J}\left[C_1 + \frac{v_1^2\mu_1}{2}\right] - \frac{Qv^2}{2J}, \text{ d. i.}$$

die Gleichung einer Parabel. Da der variable Teil von τ, nämlich $\frac{Qv^2}{2J}$, unabhängig von den Ordinaten μ_1, v_1 eines speziellen Rechtecks ist, so unterscheiden sich die Parabelstücke der einzelnen Rechtecke nur durch die Konstanten,

d. h. durch die Scheitelordinate; sie gehören sämtliche der gleichen Parabel an, die jeweils nur um ein gewisses Stück, gleich der Differenz der Konstanten, verschoben sind. Bei dünner Mittelrippe nimmt τ innerhalb derselben nur wenig von der Mitte aus nach oben oder unten ab.

Nach Vorstehendem kann für jedes Element eines Querschnittes die Normalspannung σ und die Tangentialspannung τ bestimmt werden, wenn Belastung und Trägerform gegeben sind. In den Flächenelementen senkrecht zum Querschnitt (horizontale Elemente) herrscht die gleiche Tangentialspannung τ; die Normalspannung σ_y derselben kann bei konstantem Querschnitt ohne grosse Fehler $=0$ gesetzt werden. Man hat hiernach das Material zur Hand, um mit Hilfe der Gleichungen 5.) bis 15.) Richtung und Grösse der Maximalspannungen ξ und ζ in einem beliebigen Punkte, sowie die Grösse der Ersatzspannungen (σ) bestimmen zu können.

Für einen <u>Träger konstanten Querschnitts</u> erhält man

da $\sigma_y = 0$, $\sigma_x = \sigma = \frac{M \cdot v}{J}$, $\tau = \frac{Q \cdot S}{\mu \cdot J}$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\zeta = -\frac{\sigma}{2\tau} = -\frac{M v \mu}{2 Q \cdot S} \; ; \; \zeta_m = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sqrt{\frac{Q^2 S^2}{\mu^2 J^2} + \frac{M^2 v^2}{4 J^2}} \quad \ldots\ldots 29.)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\xi = \frac{2\tau}{\sigma} = \frac{2 Q S}{M v \cdot \mu} \; ; \; \xi_m = \frac{\sigma}{2} \pm \zeta_m = \frac{M v}{2 J} \pm \sqrt{\frac{Q^2 S^2}{\mu^2 J^2} + \frac{M^2 v^2}{4 J^2}} \quad \ldots\ldots 30.)$$

Für die <u>neutrale Achse</u> ist $v = 0$; $\alpha_\zeta = 0$ und $\frac{\pi}{2}$; $\zeta_m = \tau_0 = \frac{Q \cdot S}{\mu_0 \cdot J} = \frac{Q}{\mu_0 \cdot h_0}$;

$$\alpha_\xi = \frac{\pi}{4} \text{ und } \frac{3\pi}{4} \; ; \; \xi_m = \pm \zeta_m = \pm \frac{Q}{\mu_0 h_0}$$

Für die <u>äusserste Faser</u> ist $v = e$; $\tau = 0$; $\alpha_\zeta = \frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$; $\zeta_m = \frac{\sigma}{2} = \frac{M e}{2 J}$

$$\alpha_\xi = 0 \text{ u. } \frac{\pi}{2} \; ; \; \xi_m = \sigma = \frac{M e}{J} \text{ und } = 0.$$

Nach Gleichung 15.) erhält man

$$(\sigma) = \frac{3}{8}\sigma + \frac{5}{8}\sqrt{4\tau^2 + \sigma^2} = \frac{3 M v}{8 J} + \frac{5}{8}\sqrt{\frac{4 Q^2 S^2}{\mu^2 J^2} + \frac{M^2 v^2}{J^2}} = \frac{3\sigma}{8} + \frac{5}{4}\zeta_m \quad \ldots 31.)$$

Für $v = 0$:

$$(\sigma) = \frac{5}{4}\tau_0 = \frac{5 Q S}{4 \mu_0 J} = \frac{5 Q}{4 \mu_0 h_0} \; ; \quad \text{für } v = e : \; (\sigma) = \sigma = \frac{M e}{J}$$

Der Träger wird nun genügende Festigkeit besitzen, wenn für jeden Punkt desselben die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

$$\xi_m \leqq A \quad \ldots 32.)$$

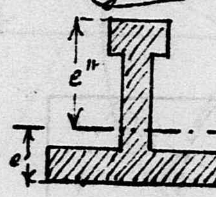
$$(\sigma) \leqq K \quad \ldots 33.)$$

Aus Gleichung 31.) ersieht man, daß ξ_m höchstens gleich 0,8 (σ) werden kann. Da nun bei Schmiedeeisen A in der Regel $\geqq 0{,}8\,K$, so folgt, dass für dieses Material Gleichung 32.) erfüllt ist, wenn dies bei Gleichung 33.) der Fall ist. Es ist also <u>in der Regel</u> nur Gleichung 33.) in Betracht zu ziehen; ausnahmsweise für $A < 0{,}8\,K$ kann auch Gleichung (32) in Betracht kommen.

Bei <u>Trägern mit nicht zu dünner Mittelrippe</u> wird (σ) in normalen Fällen am grössten in den äussersten Fasern $(\sigma) = \sigma' = \frac{M e'}{J} \leqq k'$ und $(\sigma) = \sigma'' = \frac{M e''}{J} \leqq k''$. Bei Schmiedeeisen ist $k' = k'' = k$. Soll $\sigma' = \sigma''$ werden, so muss $e' = e'' = e$ werden, d. h. die Schwerpunktsachse muss gleichviel von den äussersten Fasern abstehen. Man hat dann $(\sigma) = \frac{M e}{J} \leqq k$ oder $\frac{M}{W} \leqq k$, $\frac{M}{F w} \leqq k$, wenn man $\frac{J}{e} = W$ = Widerstandsmoment, und $w = \frac{W}{F} = W : F$ = Widerstandshalbmesser setzt.

J ist eine Größe 4° Ordnung ($=cm^4$), W eine solche 3° Ordnung ($=cm^3$), w eine solche 1° Ordnung ($=cm$).

Fig. 23.



Ist für einen gewissen Stoff $k' = \frac{1}{w} k''$ und soll gleichzeitig $\sigma' = \frac{M e'}{J} = k'$ und $\sigma'' = \frac{M e''}{J} = k''$ werden, so muss $\frac{e'}{e''} = \frac{k'}{k''} = \frac{1}{w}$ sein. Andernfalls wird das Material in der einen äussersten Faser nicht vollständig ausgenützt.

Bei <u>Trägern mit dünner Mittelrippe</u> können infolge des Anwachsens der Schubspannungen τ die grössten Ersatzspannungen (σ) auch innerhalb der äussersten Fasern stattfinden, namentlich in der neutralen Achse, und dort wo Mittelrippe und Gurtung aneinander stossen.

<u>Graphische Darstellung der Werte von σ, τ, ζ_m, (σ).</u>

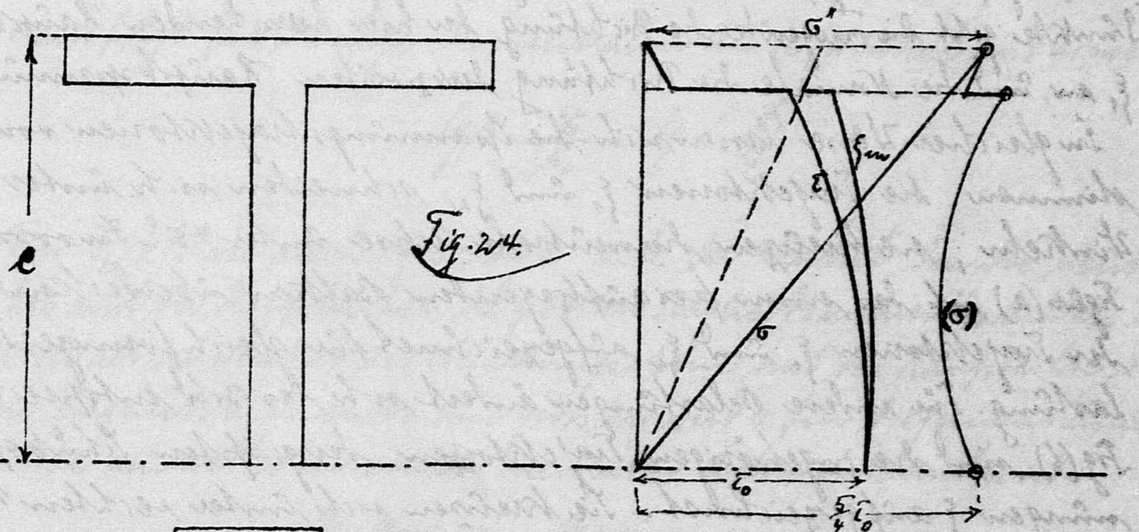


Fig. 24.

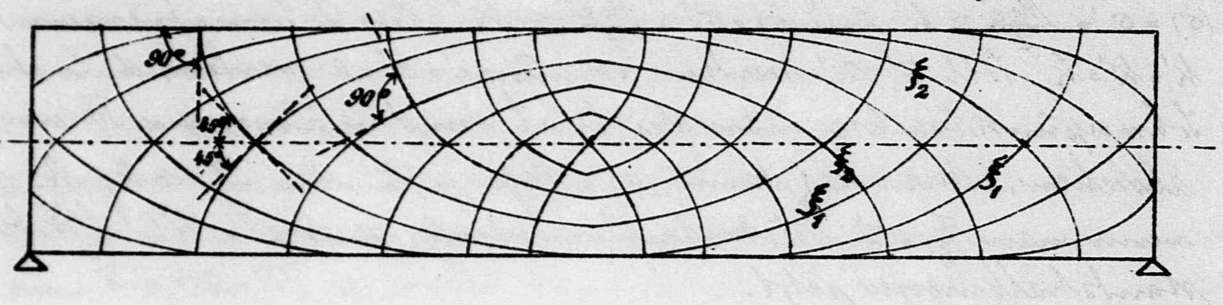
$$\zeta_m = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\xi_m = \frac{\sigma}{2} + \zeta_m$$

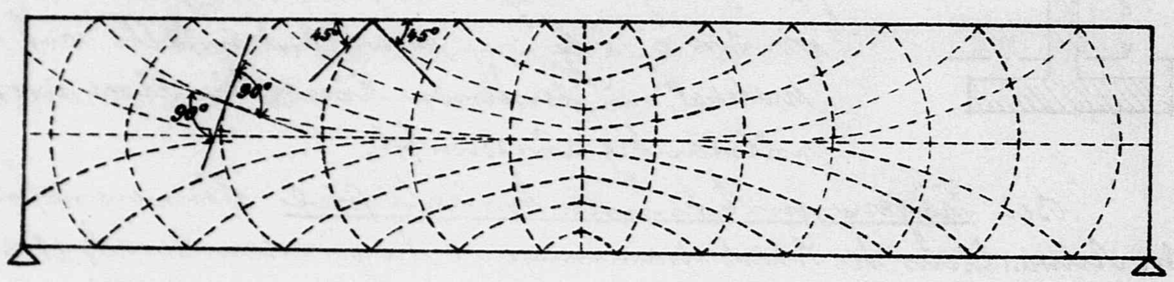
$$(\sigma) = \frac{3}{8}\sigma + \frac{5}{4}\zeta_m.$$

[Anmerkung 5. Spannungstrajektorien

(a) Trajektorien der grössten Zug- und Druckspannungen, ξ_1 und ξ_2.



(b). Trajektorien der grössten Schubspannungen ξ.

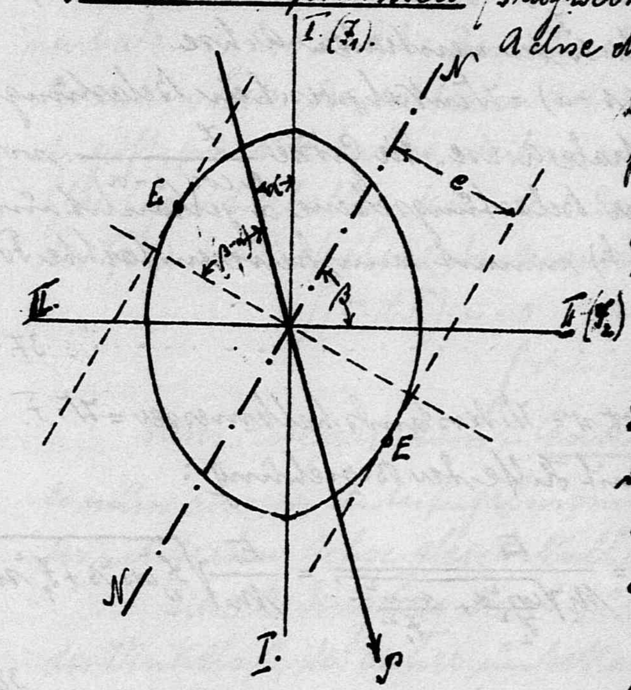


Schreitet man von einem beliebigen Punkte 0 eines Balkens in der Richtung der daselbst herrschenden Hauptspannung ξ_1 vor bis zu dem un[end]lich entfernten Punkte 1, geht dann in der hier herrschenden Richtung von ξ_1 unendlich weiter bis zum Punkte 2, und in dieser Weise immer weiter, indem man in jedem neu erreichten Punkte jeweils die Richtung des neuen ξ_1 einschlägt, so erhält man eine Spannungstrajektorie der Hauptspannung ξ_1 (z.B. Zugspannung). Dieselbe hat folgende Eigenschaften: In jedem ihrer Punkte gibt die Tangente die Richtung der hier herrschenden Hauptspannung ξ_1 an, und die Normale die Richtung der zweiten Hauptspannung ξ_2.

In gleicher Weise lassen sich die Spannungstrajektorien von ξ_2 bestimmen. Die Trajektorien ξ_1 und ξ_2 schneiden sich unter rechten Winkeln; sie kreuzen die neutrale Achse unter 45°. In vorstehender Figur (a) ist das einen freiaufliegenden Balken überdeckende Netz der Trajektorien ξ_1 und ξ_2 aufgezeichnet für gleichförmige Totalbelastung. Für andere Belastungen ändert sich das Bild entsprechend. In Fig. (b). sind die zugehörigen Trajektorien der grössten Schubspannungen ξ aufgezeichnet. Sie kreuzen sich unter rechten Winkeln und bilden mit den begegnenden Trajektorien ξ_1 und ξ_2 Winkel von 45°. Die Trajektorien ξ_1 und ξ_2 sind gleichzeitig die Trajektorien für $\xi = 0$, da neben den Hauptspannungen keine Schubspannungen auf die betreffenden Flächenelemente einwirken.]

Belastungsebene nicht mit einer Symmetrieebene zusammenfallend.

Vorstehende Formeln, die für symmetrisch geformte und symmetrisch belastete Stäbe aufgestellt wurden, gelten auch für Stäbe unsymmetrischen Querschnitts, falls die Belastungsebene durch eine der beiden Querschnittshauptachsen (Trägheitshauptachsen) hindurch geht. Die neutrale Achse des Querschnitts steht auch in diesem Falle senkrecht auf der Belastungsebene, d.h. sie fällt mit der zweiten Hauptachse zusammen. Geht die Belastungsebene nicht durch eine der Hauptachsen, so steht die neutrale Achse nicht mehr zu ihr senkrecht. Ist der Winkel, den die Belastungsebene mit der einen Hauptachse bildet, gleich α, so zerlegt man die Lasten P nach den 2 Hauptachsen in 2 Komponenten $P \cdot \cos\alpha$ und $P \cdot \sin\alpha$, für welche die bisherigen Formeln gültig sind. Die Momente derselben sind entsprechend $M \cdot \cos\alpha$ und $M \cdot \sin\alpha$. Die Normalspannung σ eines beliebigen Punktes (u, v) des Querschnitts ist:



$$\sigma = \frac{M \cdot \cos\alpha \cdot v}{J_2} + \frac{M \sin\alpha \cdot u}{J_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 34.)$$

Für die neutrale Achse, deren Koordinaten mit u_0 und v_0 bezeichnet werden mögen, muss sein:

$$\sigma = 0 = \frac{M \cdot \cos\alpha \cdot v_0}{J_2} + \frac{M \cdot \sin\alpha \cdot u_0}{J_1}\,; \quad v_0 = -\frac{J_2}{J_1} \cdot tg\alpha \cdot u_0\,;$$

Hieraus folgt für die Lage der neutralen Achse (Winkel mit Achse I = β).

$$tg\beta = -\frac{v_0}{u_0} = tg\alpha \cdot \frac{J_2}{J_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 35.)$$

Für $J_2 > J_1$ ist auch $tg\beta > tg\alpha$, d.h. der Winkel, den die neutrale Achse mit der Hauptachse des grössten Trägheitsmomentes bildet, ist stets grösser als der Winkel der Belastungsebene mit der Hauptachse des kleinsten Trägheitsmomentes. Am grössten wird σ für diejenigen Punkte E, welche am weitesten von der neutralen Achse entfernt sind:

$$\sigma' = \frac{M \cdot \cos\alpha \cdot v'}{J_2} + \frac{M \cdot \sin\alpha \cdot u'}{J_1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 36.)$$

wo u' und v' die Koordinaten von E bezeichnen.

Nennt man den Abstand des Punktes E von der neutralen Achse e und führt diesen Wert $e = u' \sin\beta + v' \cos\beta$ in Gleichung 36.) ein, so erhält man

$$\sigma' = \frac{M \cdot \cos\alpha \cdot e}{J_2 \cdot \cos\beta} = \frac{M \sin\alpha \cdot e}{J_1 \cdot \sin\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 37.)$$

oder, je nachdem man α oder β mittels Gleichung 35.) eliminiert:

$$\sigma' = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{J_2^2} + \frac{\sin^2\alpha}{J_1^2}} \cdot M \cdot e = \frac{Me}{\sqrt{J_2^2\cos^2\beta + J_1^2\sin^2\beta}} \quad \ldots\ldots\ldots 37.^{a})$$

Eine weitere Umformung ergibt:

$$\sigma' = \frac{M \cdot e \cdot \cos(\beta-\alpha)}{J} \quad \ldots\ldots\ldots 37.^{b})$$

wo J = Trägheitsmoment bezüglich der neutralen Achse d.h. $J = J_1 \sin^2\beta + J_2 \cos^2\beta$, und $(\beta-\alpha)$ = Winkel zwischen Belastungsebene und Normalen auf die neutrale Achse. Die Grösse $\frac{J}{e\cos(\beta-\alpha)}$ wird Widerstandsmoment bezüglich der Belastungsebene α genannt und mit W bezeichnet. Gleichung 37.^{b}) nimmt dann die vereinfachte Form an:

$$\sigma' = \frac{M}{W} = \frac{M}{F \cdot w} \quad \ldots\ldots\ldots 37.^{c})$$

wo w = Widerstandshalbmesser = $W : F$.

Der Krümmungsradius folgt mit Hilfe der Beziehung:

$$\sigma' = \frac{E \cdot e}{\varrho} \text{ zu } \varrho = \frac{E \cdot e}{\sigma'} = \frac{E}{M\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{J_2^2} + \frac{\sin^2\alpha}{J_1^2}}} = \frac{E}{M}\sqrt{J_2^2\cos^2\beta + J_1^2\sin^2\beta}.$$

$$\varrho = \frac{E \cdot J_2 \cos\beta}{M\cos\alpha} = \frac{E \cdot J}{M \cdot \cos(\beta-\alpha)} \quad \ldots\ldots\ldots 38.)$$

[**Anmerkung 6.** Die Gleichung 38.) kann auf direktem Wege folgendermassen abgeleitet werden:

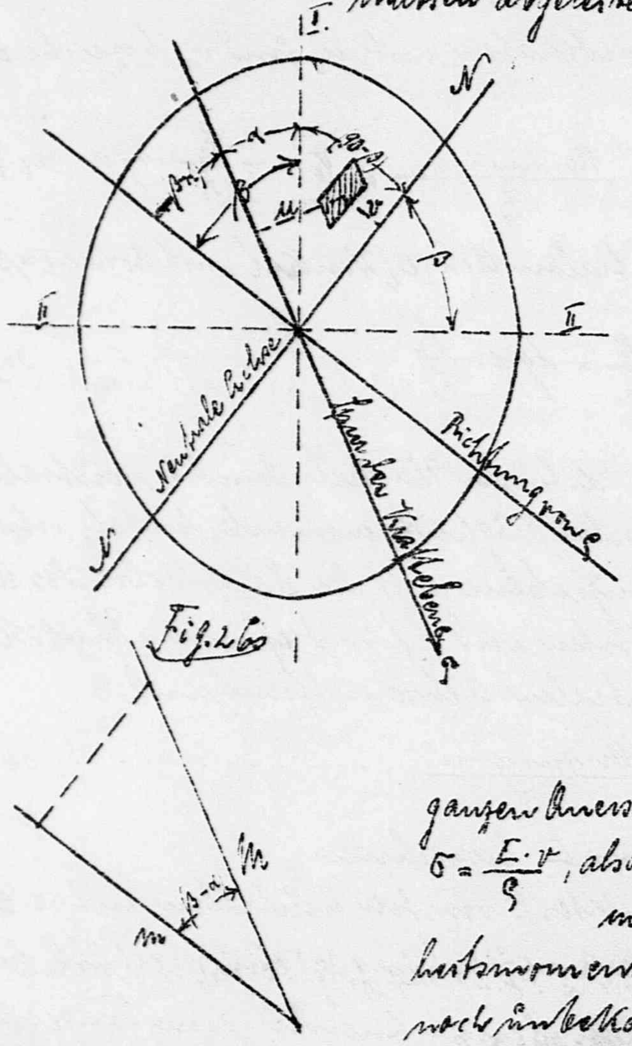


Fig. 26

In der Kraftebene wirkt das äussere Moment M; dieses Moment hat nach der noch unbekannten Richtung des Krümmungsradius die Komponente

$$m = M\cos(\beta-\alpha).$$

Es ist also m derjenige Teil des äusseren Moments, der um die noch unbekannte neutrale Achse drehend wirkt. Mit diesem m müssen demnach die Momente der inneren Elementarkräfte $\sigma \cdot dF$, genommen um die neutrale Achse, gerade im Gleichgewicht sein, d.h. es ist

$m = \int(\sigma \cdot dF) \cdot v$, genommen für den ganzen Querschnitt. Nun ist nach Formel 20). allgemein $\sigma = \frac{E \cdot v}{\varrho}$, also ist hier

$m = \frac{E}{\varrho}\int v^2 dF$ und $\int v^2 dF$ ist das Trägheitsmoment J des Querschnitts, genommen um die noch unbekannte neutrale Achse. Demnach

$m = \frac{E}{\varrho} \cdot J = M\cos(\beta-\alpha)$ Hieraus die

Gleichungen

$$\varrho = \frac{E \cdot J}{M \cdot \cos(\beta-\alpha)} \; ; \quad \sigma = \frac{M \cdot \cos(\beta-\alpha)}{J} \cdot v$$

$$\sigma' = \frac{M\cos(\beta-\alpha)}{J} \cdot e' = \frac{M}{W'} = \frac{M}{F \cdot w'} \quad \ldots\ldots\ldots 37^{b})$$

Die Resultante der inneren Elementarkräfte $[\sigma \cdot dF]$ auf der einen Seite der neutralen Achse und die Resultante der inneren Elementarkräfte $[\sigma \cdot dF]$ auf der anderen Seite der neutralen Achse müssen in der Spur der Kraftebene ihre Angriffspunkte haben, weil sie sonst dem äusseren Momente nicht das Gleichgewicht halten könnten. Da hiernach die Elementarkräfte bezüglich der Spur der Kraftebene das Moment 0 haben, muss sein:

$$\int(\sigma \cdot dF) \cdot \mu = 0 \quad \text{oder da} \quad \sigma = \frac{E \cdot v}{\varrho},$$
$$\int v \cdot \mu \cdot dF = 0$$

Dieses Integral heisst <u>Centrifugalmoment (μ, v)</u>.

Es muss also das Centrifugalmoment bezüglich der Kraftebenenspur und der neutralen Achse gleich Null sein.

Diese Bedingung dient zur Auffindung der neutralen Achse bezw. des Winkels β, der bisher unbekannt war, und liefert die Gleichung 35.) Ist die Spur der Kraftebene identisch mit einer Trägheitshauptachse, so ist die neutrale Achse identisch mit der andern Trägheitshauptachse, denn nur dann kann das Centrifugalmoment $\int \mu \cdot v \cdot dF = 0$ sein].

Wird der Stab durch konstruktive Mittel gezwungen, sich in der Belastungsebene durchzubiegen, so steht die neutrale Achse (Trägheitsmoment $= J$) senkrecht zu letzterer und die grösste Spannung ergibt sich zu

$$\sigma' = \frac{M \cdot e}{J} \quad \ldots\ldots\ldots 37.^{d})$$

Es kommt hierbei soviel Reaktionskraft zur Belastung hinzu, dass die Lage der Resultanten von Belastung und Reaktionskraft der Durchbiegung <u>in</u> der Belastungsebene resp. der Biegung um die zu dieser senkrechten Schwerachse entspricht.

[**Anmerkung 7.**

Man kann $\sphericalangle\beta$ auch mit Hilfe der Centralellipse erhalten, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, wobei $a = \frac{1}{\sqrt{J_2}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{J_1}}$, oder auch $a = \frac{1}{i_2}$, $b = \frac{1}{i_1}$. Hierbei bedeuten i_1 und i_2 die Trägheitsradien $i_1 = \sqrt{J_1 : F}$, $i_2 = \sqrt{J_2 : F}$.

Zieht man im Punkte S (siehe Fig. 27 auf folg. Seite), in welchem die Zentralellipse die Belastungsebene schneidet eine Tangente ST,

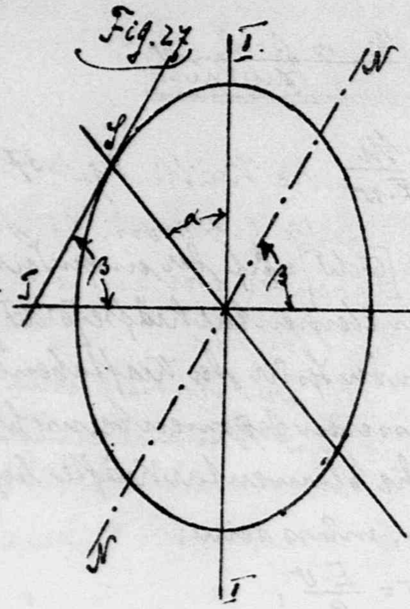


Fig. 27

so bildet dieselbe den Winkel β mit der Hauptachse II. Es ist nämlich die Gleichung der Tangente im Punkte $S (x_1\, y_1)$

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad y = \frac{b^2}{y_1} - x\,\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2}$$

also $$tg\,\beta = \frac{x_1 b^2}{y_1 a^2} = tg\,\alpha\,\frac{b^2}{a^2} = tg\,\alpha \cdot \frac{J_2}{J_1},$$

d.h. der gleiche Ausdruck wie oben in Gleichung 35.)]

[Anmerkung 8. Die bei Ableitung der Gleichung 23) und 24) bezw. 36), 37.) gemachte Voraussetzung, dass die Querschnitte auch nach der Biegung eben bleiben, bezw. dass die Dehnungen und Spannungen proportional dem Abstand von der neutralen Achse wachsen, stimmt bei Eisen und Holz innerhalb der Elastizitätsgrenze genügend mit der Wirklichkeit überein. Ausserhalb dieser Grenzen nehmen die Spannungen langsamer zu als die Dehnungen und die Entfernungen von der neutralen Achse. Die inneren Fasern werden stärker

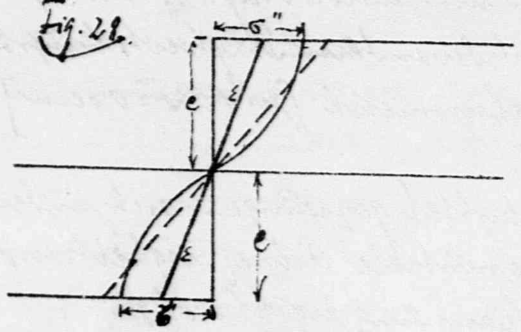


Fig. 28.

in Mitleidenschaft gezogen, so dass σ' und σ'' sich in Wirklichkeit kleiner ergeben als nach 24) (siehe punktierte Linie), und zwar um so mehr, je mehr Material in der Nähe der neutralen Achse angeordnet ist. Ausserdem wird das Verhältnis $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ ausserhalb der Elastizitätsgrenze für Zug und Druck verschieden gross. —

Berechnet man die Zugfestigkeit mit Hilfe der eigentlich nicht mehr gültigen Gleichung 24) aus Bruchversuchen ($= K$), so ist dieselbe nach Vorstehendem im allgemeinen grösser als die aus direkten Zugversuchen ($= K'$).

Nach Bach's Versuchen kann man für Gusseisen setzen:

$$K = \mu \cdot \sqrt{\frac{z}{e}} \cdot K'$$

wo

z = Abstand des Zugflächenschwerpunktes von der neutralen Achse

e = Abstand der äussersten Faser von der neutralen Achse

$\mu = 1{,}2$, wenn im Abstande e eine Gerade (e e) liegt.

$= 1{,}5$, wenn im Abstande e nur ein Punkt (e e) liegt.

Bei dünnem, hohem Steg (Normalprofile für Walzeisen) ist nach Tetmajer's Versuchen annähernd $K = K'$

Die Gleichungen für die Formänderung, bezw. die elastische Linie (Gl 21 und 22) sind ausserhalb der Elastizitätsgrenze unbrauchbar; die Formän-

derungen sind hier in Wirklichkeit grösser, als der Formel entspricht.]

c). Beanspruchung auf Druck oder auf Knickung.

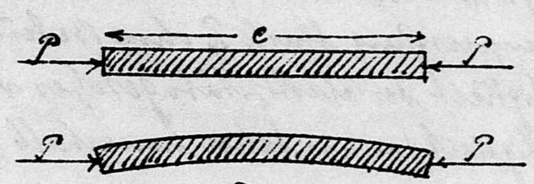


Fig. 29.

Ein achsial durch die Kräfte P gedrückter Stab kann je nach der Grösse von P entweder mit gerade bleibender oder mit ausgebogener Achse Widerstand leisten.

Im ersten Fall wird der Stab nur auf Druck beansprucht; die Formeln für Spannung und Formänderung sind analog denen bei Zugbeanspruchung:

$$N = -P \; ; \; Q = 0 \; ; \; M = 0 \; ; \; \sigma = -\frac{P}{F} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 39)$$

Verlängerung $$\Delta l = \int_0^l \frac{\sigma}{E}\,dl = -\frac{P}{E}\int_0^l \frac{dl}{F}$$ bezw. bei $F = const.$

$$\Delta l = -\frac{Pl}{EF} = \frac{\sigma l}{E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 40)$$

Genügende Sicherheit ist vorhanden, wenn

$$\sigma'' \leqq k'' \quad \text{d.h.} \quad F \geqq \frac{P}{k''} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 39^a)$$

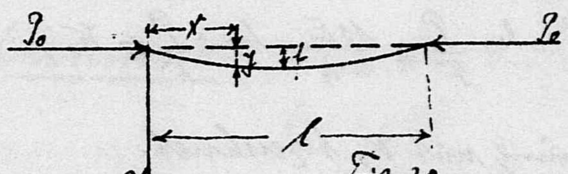


Fig. 30.

Im zweiten Falle, wo P eine gewisse Grösse P_0 erreicht haben muss, kommt zur Beanspruchung auf Druck noch eine solche auf Biegung hinzu. Wir denken uns den Stab um einen beliebigen kleinen Pfeil f seitlich herausgebogen, und suchen nun diejenige Kraft P_0, welche imstande ist, den Stab in der Ausbiegung zu erhalten. Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet:

$$E \cdot J \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -M = -P_0\, y,$$ woraus bei konstantem J durch Integration folgt

$$y = f \cdot \cos\left[\sqrt{\frac{P_0}{E \cdot J}}\left(\frac{l}{2} - x\right)\right],$$ unter Berücksichtigung, dass

$$y = f, \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{für } x = \frac{l}{2}.$$

Für $x = 0$ muss ferner $y = 0$ sein, d.h. $\cos\left(\sqrt{\frac{P_0}{EJ}} \cdot \frac{l}{2}\right) = 0$, somit $\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P_0}{EJ}} = \frac{\pi}{2}$

woraus

$$P_0 = \frac{\pi^2 E J}{l^2} = \text{rund } \frac{10 \cdot E \cdot J}{l^2} = 10 \cdot E \cdot F\left(\frac{i}{l}\right)^2 = \frac{10\, E F}{\lambda^2} \quad \text{(Eulersche Formel)} \ldots \quad 41)$$

wo $i = \sqrt{\frac{J}{F}}$ = Trägheitshalbmesser

$\lambda = \frac{l}{i}$ = spezifische Länge.

Hiernach ist die Kraft P_0 (Knickkraft), welche den Stab in einer gewissen

Ausbiegung f zu erhalten imstande ist, unabhängig von der Grösse der Ausbiegung f. Selbstverständlich gilt dies nur innerhalb derjenigen Grenzen, die für die Differentialgleichung (Gl 23) massgebend sind, d.h. solange f so klein ist, dass $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ gegenüber 1 vernachlässigt werden kann, und der Einfluss der Längenänderung infolge der Zusammenpressung durch P_0 ohne Bedeutung ist. Ausserdem setzt Gleichung 41.) die Gültigkeit des Elastizitätsgesetzes voraus; die Spannung $\frac{P_0}{F} = 10 \cdot \frac{E}{\lambda^2} = K_0$ (Knickfestigkeit) muss daher innerhalb der Elastizitätsgrenze liegen. 41.a)

Überschreitet P den Wert der Gleichung 41.) (d.h. P_0), so wächst die Ausbiegung rasch ins Ungemessene, die Formänderungen nehmen unzulässige Werte an, wobei in der Regel der Bruch des Stabes eintritt, d.h. der Stab knickt aus. Ist dagegen P kleiner als P_0, so vermag es den Stab nicht in der Ausbiegung zu erhalten, der Stab schnellt in die Gerade zurück. Der Gleichgewichtszustand der Gleichung 41.) kann hiernach als eine Art labilen Gleichgewichts betrachtet werden. Für die Anwendung darf $\frac{P}{F}$ niemals so gross werden, dass dieser zweite Gleichgewichtszustand eintreten kann, so dass man es also nur mit gerade bleibendem Stab, d.h. mit einfacher Druckfestigkeit zu tun hat. Für Sicherheit wählt man derartige Dimensionen, dass erst die n-fache Belastung P das Ausknicken bewirken würde. Es muss daher ausser der Bedingung Gleichung 39a.) $\sigma' \leqq k''$, auch die folgende erfüllt sein:

$$n \cdot P \leqq \frac{10EJ}{l^2} \quad \text{oder} \quad J \geqq \frac{n \cdot P \cdot l^2}{10E} \quad \text{oder} \quad \frac{P}{F} \leqq \frac{10E}{n \cdot \lambda^2} \quad \text{bezw.} \quad \frac{P}{F} \leqq K_0, \quad \ldots 42)$$

wenn man die zulässige Knickspannung mit K_0 bezeichnet.

Ist der Stab an den Enden nicht frei beweglich, wie bis jetzt vorausgesetzt worden war, sondern mehr oder minder eingespannt, so ist in den vorstehenden Formeln für l nicht die Stablänge (s), sondern die freie Länge, die sich zwischen den Inflexionspunkten F der elastischen Linie befindet, einzusetzen. Für beiderseits fest eingespannten Stab ist $l = \frac{s}{2}$.

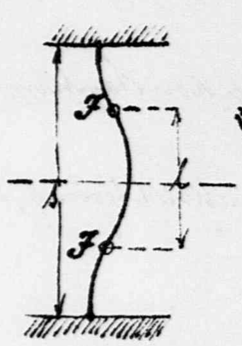


Fig. 31.

$$P \leqq \frac{10EJ}{n \cdot l^2} \leqq \frac{40EJ}{n \cdot s^2} \quad \ldots\ldots 43.)$$

Für einerseits eingespannten, andrerseits frei geführten (in der Achsenrichtung!) Stab (Fig. 32.) ist: $l = \text{ca } 0{,}7\, s$.

$$P \leqq \frac{10 \cdot EJ}{n \cdot l^2} \leqq \frac{20EJ}{n \cdot s^2} \quad \ldots\ldots 44.)$$

Für einerseits eingespannten, andrerseits frei beweglichen Stab ist $l = 2s$.

$$P \leqq \frac{10EJ}{n \cdot l^2} \leqq \frac{2{,}5EJ}{n \cdot s^2} \quad \ldots\ldots 45.)$$

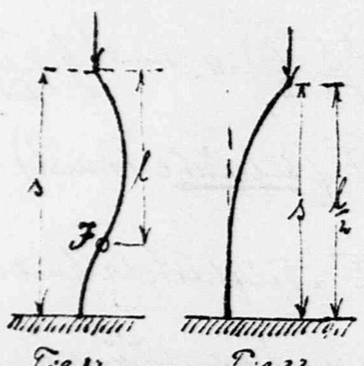


Fig. 32. Fig. 33.

Fig. 33.

[Anmerkung 9. Ist J derart veränderlich, dass es jeweils proportional

dem Moment M ($= P_0 \cdot y$) wird, so ergibt die Gleichung $M = \frac{EJ}{\varrho}$ für ϱ einen konstanten Wert, d.h. der Stab krümmt sich nach einem Kreisbogen vom Radius $\varrho = \frac{E \cdot J}{M} = \frac{E \cdot J_1}{M_1} = \frac{E \cdot J_1}{P_0 \cdot f}$, wo sich J_1 und M_1 auf Stabmitte beziehen.

Aus der Kreisgleichung folgt genähert $f = \frac{l^2}{8 \cdot \varrho}$ und somit schliesslich nach Elimination von ϱ:

$$P_0 = \frac{8 \cdot E \cdot J_1}{l^2} \quad \ldots\ldots 46.)$$

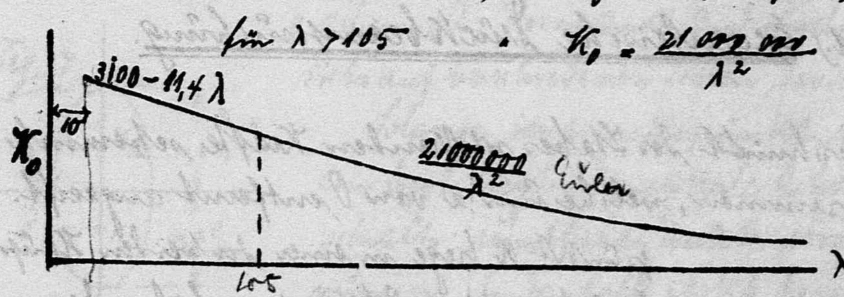
d.h. die Knickkraft P_0 ist in diesem Fall nur 0,8 mal so gross wie bei einem Stab von konstantem Trägheitsmoment J_1.]

<u>Die vorstehenden Euler'schen Formeln</u> sind nur solange gültig, als die Knickfestigkeit K_0 ($= 10 \cdot \frac{E}{\lambda^2}$) innerhalb der Elastizitätsgrenze liegt. Ausserhalb derselben ist die Euler'sche Gleichung nicht mehr zutreffend; sie ergibt dann zu günstige Resultate. — Formeln, welche auch dann zu verwenden sind, wenn die Knickfestigkeit K_0 ausserhalb der Elastizitätsgrenze liegt, hat Tetmajer durch Versuche ermittelt. Es sind dies die folgenden Formeln:

<u>Holz</u>: Von $\lambda = 1{,}8$ bis $\lambda = 100$ ist $K_0 = 293 - 1{,}94\lambda$ in kg/cm²
für $\lambda > 100$ ist $K_0 = \frac{1\,000\,000}{\lambda^2}$ in kg/cm² } ......47.)

<u>Schweisseisen</u>: Von $\lambda = 10$ bis $\lambda = 112$ ist $K_0 = 3030 - 12{,}9\lambda$ in kg/cm²
für $\lambda > 112$ ist $K_0 = \frac{20\,000\,000}{\lambda^2}$ " " } ......48.)

<u>Weiches Flusseisen</u> (für welches die Zugfestigkeit K' kleiner als 4000 kg/cm²):
Von $\lambda = 10$ bis $\lambda = 105$ ist $K_0 = 3100 - 11{,}4\lambda$ in kg/cm²
für $\lambda > 105$ " $K_0 = \frac{21\,000\,000}{\lambda^2}$ " " } ......49.)



<u>Hartes Flusseisen</u> (für welches die Zugfestigkeit K' > 4000 kg/cm²):
Von $\lambda = 10$ bis $\lambda = 105$ ist $K_0 = 3210 - 11{,}6\lambda$ in kg/cm²
für $\lambda > 105$ " $K_0 = \frac{22\,000\,000}{\lambda^2}$ " " } ......49a.)

<u>Graues Gusseisen</u> (in roher Annäherung)
Für $\lambda < 80$ ist $K_0 = 0{,}53\lambda^2 - 120\lambda + 7760$ in kg/cm²
für $\lambda > 80$ " $K_0 = \frac{10\,000\,000}{\lambda^2}$ " " } ......50.)

Für die Praxis soll die Spannung den n-ten Teil der Knickfestigkeit nicht überschreiten. Die Grösse von n ist den Verhältnissen des Einzelfalls entsprechend zu wählen. Bei sehr rasch vorübergehender Lasteinwirkung, wo die Zeit

Zur Bildung schädlicher Formänderungen fehlt, kann n kleiner gewählt werden als bei andauernder Belastung; bei langen, dünnen Stäben ist mit Rücksicht auf möglichst geringe Formänderung ein grosses n erwünscht. Ferner ist auch der Grad der Genauigkeit, mit welchem die theoretischen Voraussetzungen (zentrische Belastung, Art der Befestigung der Stabenden etc.) in praxi erfüllt sind, bei Bemessung der Grösse n in Betracht zu ziehen.

Im Brückenbau genügt es in den meisten Fällen, bei kurzen Stäben n ebensogross zu wählen, wie für reine Druckfestigkeit, bei sehr langen Stäben etwa n = 5. Diesen Sicherheitsgraden entsprechen folgende Formeln für die Beziehung zwischen spezifischer Länge λ und zulässiger Pressung k_0 pro cm^2:

Bei <u>Schweisseisen</u> für $\lambda < 100$; $k_0 = 1000 - 6\lambda \; kg/cm^2$
" $\lambda > 100$ $k_0 = \frac{4000000}{\lambda^2}$ " " ....51.)

Bei <u>Flusseisen</u> für $\lambda < 100$ $k_0 = 1200 - 7{,}8\lambda \; kg/cm^2$
" $\lambda > 100$ $k_0 = \frac{4200000}{\lambda^2}$ " " ....51a.)

Während vorstehend die Beziehung zwischen λ und k_0 durch je zwei Gleichungen gegeben wird, ist in der Annäherungsformel von Laissle und Schübler diese Beziehung in der einen Formel ausgedrückt:

$$k_0 = \frac{k''}{1 + 0{,}00015 \cdot \lambda^2} \;\text{..................} \; 51b.)$$

worin k'' die zulässige Beanspruchung auf reinen Druck bedeutet, während k_0 die mit Rücksicht auf die Knickgefahr abgeminderte zulässige Pressung bezeichnet.

d.) <u>Excentrische Druckbeanspruchung.</u>

Die auf einen Querschnitt des Stabes wirkenden Kräfte setzen sich zu einer Resultierenden P zusammen, welche um a von O entfernt angreift. Der Angriffspunkt A liege in einer der beiden Hauptachsen (I Achse oder v-Achse). Man hat sodann $N = -P$, $Q = 0$, $M = +P \cdot a$.

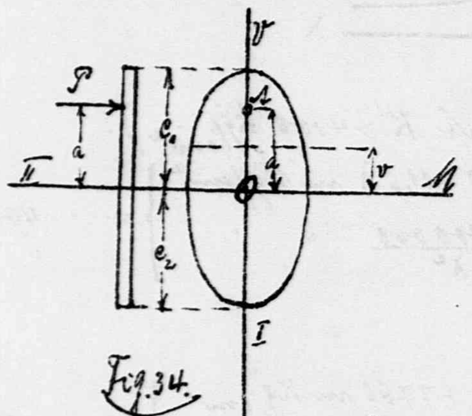


Fig. 34.

Die Spannung in einem Punkte, dessen Ordinate = v ist, ist sodann innerhalb der Elastizitätsgrenze:

$$\sigma = -\frac{P}{F} - \frac{M \cdot v}{J} = -P\left(\frac{1}{F} + \frac{a \cdot v}{J}\right), \text{ wo sich } J \text{ auf} \;\text{.........} \; 52).$$

Achse II bezieht.

Für die äussersten Punkte $v = +e_1$ und $v = -e_2$ folgt hieraus:

$$\sigma_1 = -\frac{P}{F} - \frac{M \cdot e_1}{J} = -\frac{P}{F}\left(1 + \frac{a}{w_1}\right)$$
$$\sigma_2 = -\frac{P}{F} + \frac{M \cdot e_2}{J} = -\frac{P}{F}\left(1 - \frac{a}{w_2}\right) \;\text{..........}\; 53)$$

wenn man $J = F \cdot i^2$; $\frac{i^2}{e_1} = w_1$; $\frac{i^2}{e_2} = w_2$ setzt.

$w_1 = \frac{i^2}{e_1} = \frac{W_1}{F}$ und $w_2 = \frac{i^2}{e_2} = \frac{W_2}{F}$ heissen Widerstandshalbmesser.

Für die Schwerpunktsfaser ist v = 0, und somit $\sigma_0 = \frac{P}{F}$.
Den Abstand der neutralen Achse erhält man aus $\sigma = 0$ zu

$$n = -\frac{J}{a \cdot F} = -\frac{F \cdot i^2}{a \cdot F} = -\frac{i^2}{a} \;\text{..................}\; 54.)$$

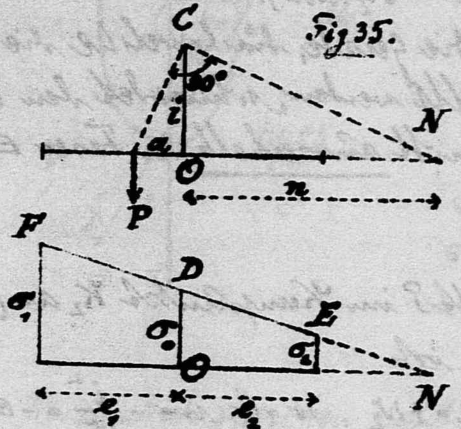


Fig 35.

Hiernach lässt sich n wie nebenstehend angegeben konstruieren. Man trage im Schwerpunkt O die Lotrechte OC = i auf, verbinde C mit dem Kraftangriffspunkt P und ziehe dann CN ⊥ CP. Die Strecke ON stellt sodann n dar.

Ist die Lage N der neutralen Achse auf diese Weise bestimmt, so lassen sich die Spannungen σ_1 und σ_2 der äussersten Fasern leicht ermitteln. Man trage im Schwerpunkt die dortige Spannung $\sigma_0 = \frac{P}{F}$ auf und verbinde den Endpunkt D mit dem Punkt N durch die Linie NEDF. Durch die Ordinaten dieser Linie werden die Spannungen in den einzelnen Querschnittsfasern dargestellt. Insbesondere gehören zu den Abscissen e_1 und e_2 der äussersten Fasern als Ordinaten die Spannungen σ_1 und σ_2.

Die neutrale Achse geht durch die äusserste Faser e_2, wenn $n = -e_2$; die Kraft P muss dann im Abstand $a = \frac{i^2}{e_2} = w_2$ angreifen. Der entsprechende Angriffspunkt heisst <u>Kernpunkt</u>, dessen Abstand w_2 der <u>Kernradius</u>. Es ist also der Kernradius identisch mit dem Widerstandshalbmesser. In gleicher Weise erhält man den Kernradius w_1, wenn die neutrale Achse durch die äusserste Faser e_1 gehen soll. Kernpunkt und zugehörige neutrale Achse liegen stets auf verschiedenen Seiten der Schwerpunktsachse.

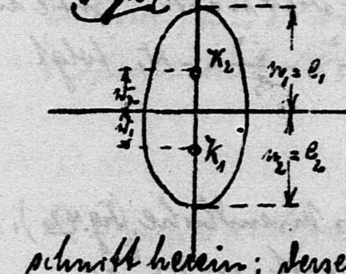


Fig. 37.

Solange der Angriffspunkt A zwischen den Kernpunkten liegt, liegt die neutrale Achse ausserhalb des Querschnitts; sämtliche Punkte desselben erhalten Druckspannungen. Andernfalls rückt die neutrale Achse in den Querschnitt herein; derselbe erhält teils Druck-, teils Zugspannungen. —

Greift P im Schwerpunkt S an, so ist a = 0, und infolgedessen $n = -\frac{i^2}{0} = \infty$, die neutrale Achse rückt ins Unendliche; die Gerade, durch welche die σ dargestellt werden, ist dem Querschnitt parallel.

Siehe Fig. 38.

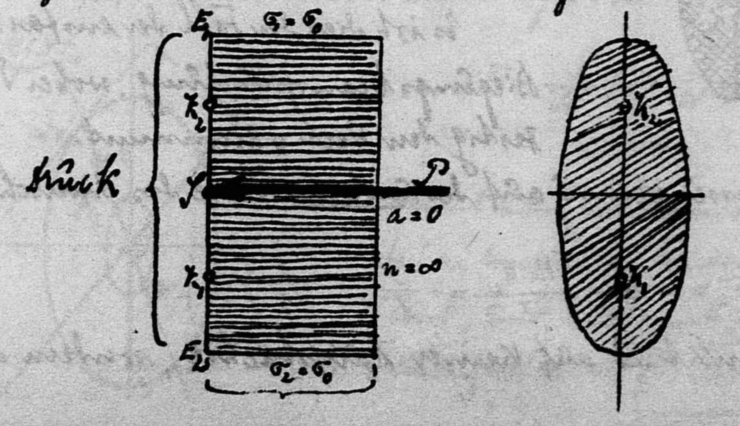


Fig. 38.

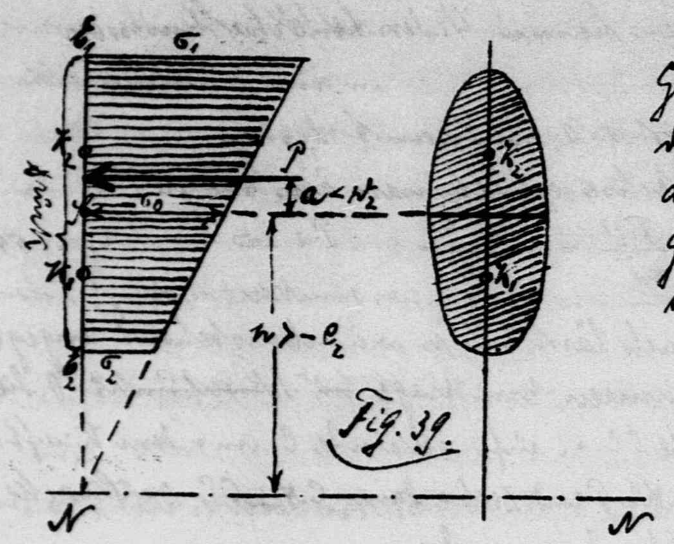


Fig. 39.

Greift P zwischen dem Schwerpunkt S und dem Kernpunkt K_2 an (Figur 39), d. h. ist $a < +w_2$, so ist $u > -\frac{i^2}{w_2}$, d. h. $u > -e_2$ (wo das Grösser- oder Kleinersein sich auf den Absolutwert bezieht).

Die Gerade, durch welche die σ dargestellt werden, schneidet den Querschnitt <u>ausserhalb</u> der Faser E_2.

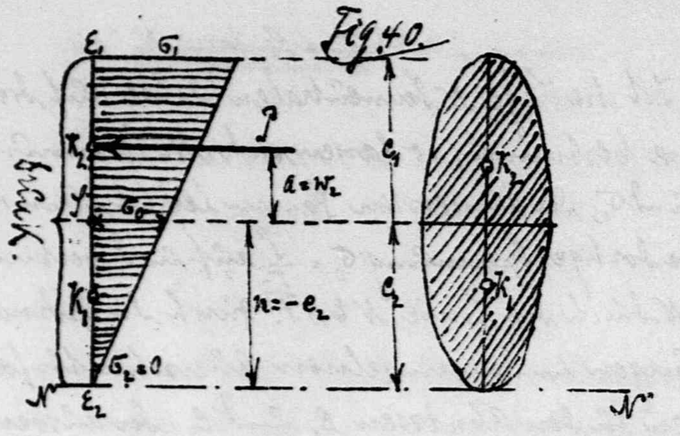


Fig. 40.

Greift P im Kernpunkt K_2 an (Fig. 40), d. h. ist

$a = +w_2$, so ist $u = -\frac{i^2}{w_2} = -e_2$

Die Gerade, durch welche die σ dargestellt werden, schneidet den Querschnitt <u>in</u> der Faser E_2.

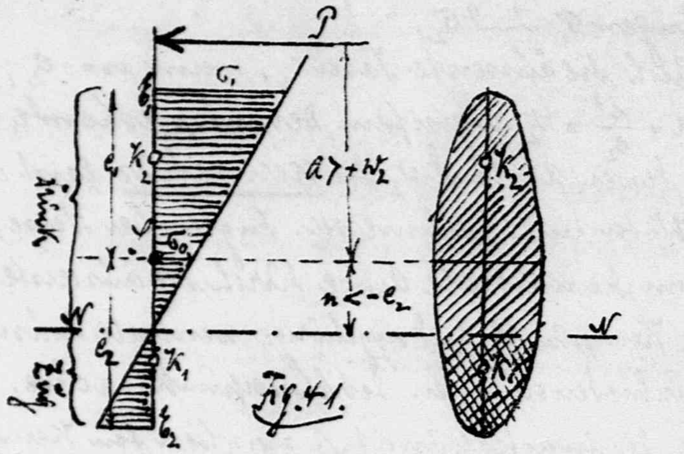


Fig. 41.

Greift P ausserhalb des Kernpunktes K_2 an, d. h. ist
$a > +w_2$ so ist $u < -\frac{i^2}{w_2}$, d. h. $u < -e_2$ absolut genommen. (Fig. 41.).

Die Gerade, welche die σ darstellt, schneidet den Querschnitt zwischen E_2 und S. Wird $a = e$, so wird $u = -w_1$, wie aus

$u = -\frac{i^2}{a} = -\frac{i^2}{e_1} = -w_1$ folgt.

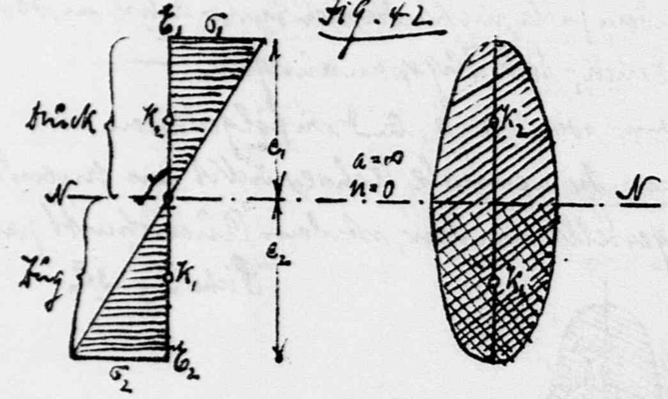


Fig. 42.

Rückt P ins Unendliche (Fig. 42), d. h. wird $a = \pm\infty$, so ist $u = \pm\frac{i^2}{\infty} = 0$.
Die Gerade, welche die σ darstellt, schneidet den Querschnitt im Schwerpunkte S.

Es ist dies der Fall der einfachen Biegungsbeanspruchung, wobei P gleichzeitig den Wert 0 annimmt.

Analog liegen die Verhältnisse, wenn P auf der <u>unteren</u> Seite des Querschnittes angreift.

Liegt der Angriffspunkt A auf keiner Hauptachse, sondern auf der

beliebigen Achse OA, welche mit Achse I den Winkel α bildet, so denke man sich das Kraftmoment $P \cdot a$ in seine 2 Komponenten parallel der Hauptachsen zerlegt:

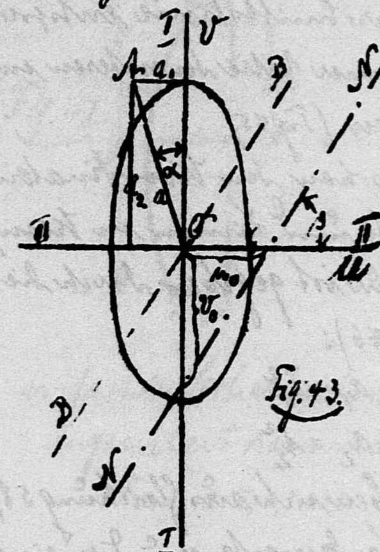


Fig. 43.

$$M_1 = M \cdot \sin\alpha = P \cdot a \cdot \sin\alpha = P \cdot a_1 \quad \text{und}$$
$$M_2 = M \cdot \cos\alpha = P \cdot a \cdot \cos\alpha = P \cdot a_2 .$$

Die Beanspruchung eines Punktes (u, v) ist sodann:

$$\sigma = -\frac{P}{F} - \frac{P \cdot a \cdot \cos\alpha \cdot v}{J_2} - \frac{P \cdot a \cdot \sin\alpha \cdot u}{J_1} \quad \ldots\ldots 55.)$$

Die Gleichung der neutralen Faser erhält man aus $\sigma = 0$ zu:

$$0 = \frac{1}{F} + \frac{a \cdot \cos\alpha \cdot v}{J_2} + \frac{a \cdot \sin\alpha \cdot v}{J_1} \quad \ldots\ldots 56.)$$

Der Winkel zwischen neutraler Achse und Achse III folgt hieraus:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v}{u} = \operatorname{tg}\alpha \frac{J_2}{J_1} \text{ (in Übereinstimmung mit Gleichung 55)} \quad \ldots\ldots 57.)$$

Die Abschnitte auf den Hauptachsen zu:

$$u_0 = -\frac{J_1}{F \cdot a \cdot \sin\alpha} = -\frac{i_1^2}{a_1} \quad \text{und} \quad v_0 = -\frac{J_2}{F \cdot a \cdot \cos\alpha} = -\frac{i_2^2}{a_2} \quad \ldots\ldots 58.)$$

Umgekehrt erhält man bei gegebener neutraler Achse (u_0, v_0) die Koordinaten des entsprechenden Angriffspunktes zu

$$a_1 = -\frac{i_1^2}{u_0} \quad \text{und} \quad a_2 = -\frac{i_2^2}{v_0} \quad \ldots\ldots 59.)$$

Die Grösstwerte der Spannungen erhält man in denjenigen Fasern, welche am weitesten (um e) von der zur neutralen Achse parallelen Biegungsachse BB entfernt sind (Koordinaten u', v') (Abb. 44.):

$$\sigma = -\frac{P}{F} - \frac{P \cdot a_2 \cdot u'}{J_2} - \frac{P \cdot a_1 \cdot v'}{J_1} \quad \ldots\ldots 60.)$$

bezw. nach entsprechender Umformung (siehe Gleichung 37ª).

$$\sigma = -\frac{P}{F} - \frac{P \cdot a \cdot e \cos(\beta - \alpha)}{J} = \frac{P}{F}\left(\frac{1 + a \cdot e \cos(\beta - \alpha)}{i^2}\right) = -\frac{P}{F}\left(1 + \frac{a}{\omega}\right) \quad \ldots 60^a.)$$

wo J = Trägheitsmoment für die Biegungsachse BB, $i^2 = \frac{J}{F}$, $\omega = \frac{i^2}{e \cos(\beta - \alpha)} = 0K$

Der erforderliche Querschnitt ergibt sich zu

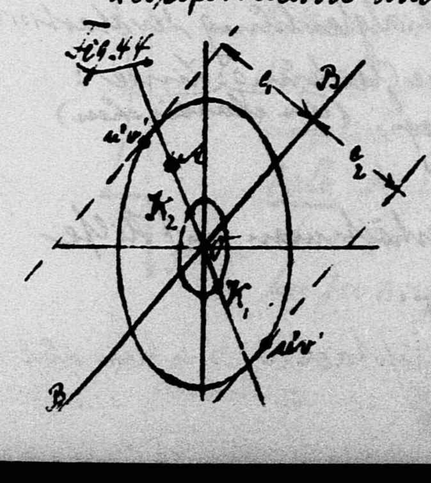
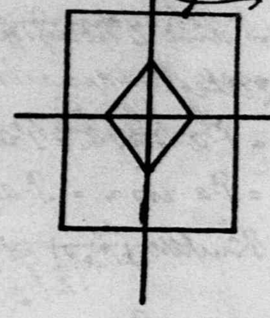


Fig. 44.

$$F = \frac{P}{k}\left(1 + \frac{a}{w}\right) \quad \ldots\ldots 59^a.)$$

Denkt man sich die neutrale Achse nach und nach mit sämtlichen Umhüllungstangenten des Querschnitts zusammenfallend, und bestimmt jeweils die zugehörigen Koordinaten des Angriffspunktes mit Hilfe der Gleichungen 59.) und 59ª.)

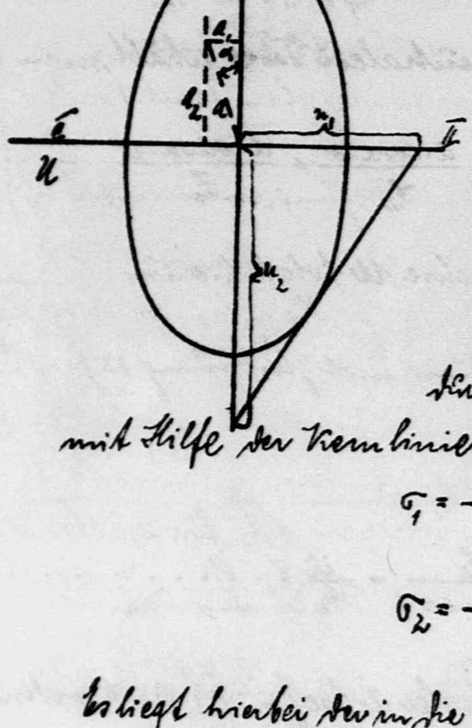
Fig 45



so erhält man die Kernlinie des Querschnitts (Fig 44)
Einer Geraden der Querschnittslinie entspricht eine Ecke der Kernlinie; einer Ecke der ersteren entspricht eine Gerade der letzteren. (Fig 45)

Die Beziehungen zwischen den Koordinaten sich entsprechender Punkte und Linien in Kernfigur und Umhüllungsfigur ist gegeben durch die Gleichungen (siehe Fig. 46):

Fig 46



$$u_1 \cdot a_1 = i_1^2$$
$$u_2 \cdot a_2 = i_2^2$$

Diese Gleichungen ergeben sich aus Gleichung 58, indem man für u_0 und v_0 die Sonderwerte u_1 und u_2 einführt.

Innerhalb des Kernes angreifende Kräfte erzeugen nur Druckspannungen im Querschnitt.

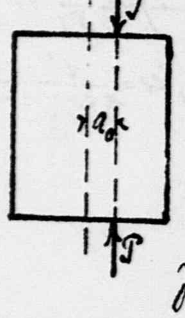
Die Beanspruchung der äussersten Fasern e_1 und e_2 durch die im Abstande $OA = a$ angreifende Kraft P kann mit Hilfe der Kernlinie ausgedrückt werden durch (Fig 44):

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{P}{F}\left(1+\frac{OA}{OK_1}\right) = -\frac{P}{F}\cdot\frac{AK_1}{OK_1} \\ \sigma_2 &= -\frac{P}{F}\left(1-\frac{OA}{OK_2}\right) = +\frac{P}{F}\cdot\frac{AK_2}{OK_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 60.)$$

Es liegt hierbei der in die Gleichung einzuführende Kernradius OK_1 oder OK_2 jeweils auf der entgegengesetzten Seite wie die betrachtete äussere Faser e_1 oder e_2. Da der Kernradius OK_1 gleichzeitig auch den Widerstandsradius w_1 darstellt, folgt daraus, dass $\sigma_1 = \frac{P}{F}\left(1+\frac{a}{w_1}\right)$ gleich Null wird, falls P im Punkte K_1 angreift. Man hat dann $a = OK_1 = -w_1$.

Betrachten wir nun einen Stab, dessen Endflächen durch die um a_0 excentrischen Kräfte P gedrückt werden, so ist für die zwischenliegenden Stabquerschnitte die Excentricität a ebenfalls gleich a_0, wenn der Einfluss der Stabbiegungen auf a vernachlässigt werden kann, wie das bei kurzen Stäben der Fall ist.

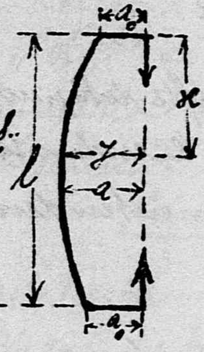
Fig 47



Hierfür sind die bisher entwickelten Formeln direkt anwendbar. Der Stab muss einen derartigen Querschnitt haben, dass $\sigma_{max} \leq k$.
Bei längeren Stäben muss die Vergrösserung der Excentrizität durch die Verbiegung berücksichtigt werden. Innerhalb der Elastizitätsgrenze lautet die Differentialgleichung der elastischen Linie: $E\cdot J\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = -P\cdot y$, woraus die Gleichung (der elastischen) Linie: $y = a\cdot\cos\left(\frac{l}{2}-x\right)\sqrt{\frac{P}{E\cdot J}}$ folgt. ~~Den Bieg~~

Den Biegungspfeil in der Mitte (=a) erhält man mit Hilfe der Bedingung $y = a_0$ für $x = 0$ zu $a = \frac{a_0}{\cos\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{E\cdot J}}}$.

Fig. 48.



Wirkt P in einer Hauptebene, so erhält man aus Gleichung 53) den Absolutwert der grössten Druckspannung zu $\sigma'' = \frac{P}{F}\left(1+\frac{a}{w}\right)$. P erreicht seinen Maximalwert P_1 im Augenblick des Bruches, wo σ'' = Druckfestigkeit K''. Derselbe ergibt sich zu:

$$P_1 = F\cdot K'' : \left(1+\frac{a}{w}\right) = F\cdot K'' : \left(1+\frac{a_0}{w\cdot\cos\left(\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{E\cdot J}}\right)}\right) \ldots 61.)$$

aus welcher Gleichung P_1 durch Probieren zu ermitteln ist. Bei n-facher Sicherheit ist dann die zulässige Druckkraft $P = \frac{1}{n}\cdot P_1$.
Angenähert kann man den erforderlichen Querschnitt F setzen:

$$\left.\begin{aligned} F = F_0 + F_1,\ \text{wo}\ F_0 &= \frac{P}{k_0}\ \text{entsprechend einer zentrischen Druckkraft}\ P \\ F_1 &= \frac{P\cdot a_0}{w\cdot k}\ \text{entsprechend einem Biegungsmoment}\ P\cdot a_0 \end{aligned}\right\} \ldots 62.)$$

wenn k_0 die zulässige spezifische Knickpressung, k die zulässige Biegungsspannung ist. Es ist dann schliesslich:

$$F = P\left(\frac{1}{k_0}+\frac{a_0}{w\cdot k}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots 63.)$$

Diese Formel ist genau richtig an den beiden Grenzen, d.h. für $a_0 = 0$ (centrischer Druck) ist $F = \frac{P}{k_0}$ und für $M = P\cdot a_0$ (reine Biegung) ist $F = \frac{M}{w\cdot k} = \frac{P\cdot a_0}{w\cdot k}$.

Zwischen den Grenzen gibt die Formel mit genügender Annäherung den erforderlichen Querschnitt. Setzt man $\frac{1}{k} = \frac{k_0}{k\cdot k_0}$, so hat man:

$$F = \frac{P}{k_0}\left(1+\frac{k_0}{k}\,\frac{a_0}{w}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots 64.)$$

worin das Verhältnis $\frac{k_0}{k}$ etwa nach der Formel 51 b.) genommen werden kann. Nimmt man $\frac{k_0}{k} = 1$, so erhält man etwas zu ungünstig:

$$F = \frac{P}{k_0}\left(1+\frac{a_0}{w}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots 65.)$$

e. Excentrische Zugbeanspruchung.

Fig. 49

Hierfür sind die Gleichungen 52–60 mit Berücksichtigung des geänderten Spannungssinnes direkt verwendbar. Die ungünstigsten Querschnitte sind die Endquerschnitte, für welche die Excentrizität bekannt ist $a = a_0$. Bei den mittleren Querschnitten wird die Excentrizität durch die Biegung des Stabes verringert, somit deren Beanspruchung gegenüber den Endquerschnitten vermindert. Ausserhalb der Elastizitätsgrenze ergeben die fraglichen Gleichungen etwas zu ungünstige Werte für die Spannungen, aus den früher bei der Biegungsbeanspruchung erörterten Gründen.

f. Beanspruchung auf Schub (abscheeren)

Die auf den Stabquerschnitt wirkenden äusseren Kräfte reduzieren sich auf die Querkraft Q, welche in den einzelnen Punkten des Querschnitts Tangentialspannungen τ_1 erzeugt. Bezeichnet man die Komponenten derselben parallel Q mit τ, so muss sein

$$Q = \int \tau \, dF \quad \cdots\cdots 66)$$

Bezüglich des Verteilungsgesetzes von τ_1 nimmt man bei Berechnung von Nieten, Schrauben, Keilen etc. in der Regel an, dass τ_1 in allen Punkten des Querschnitts gleichgross und parallel Q gerichtet sei, sodass also $\tau = \tau_1$, $Q = \tau \cdot F$; $\tau = \frac{Q}{F}$ ..67) eine Annahme, welche gut mit den Festigkeitsversuchen übereinstimmt. —

Die Gleichung 26) $\tau = \frac{Q \cdot S_t}{M \cdot F}$, welche bei gleichzeitiger Biegungsbeanspruchung das Verteilungsgesetz von τ angibt, ist hier, wo $M = 0$, nicht mehr zutreffend. Sie beruht auf der Annahme, dass die Querschnitte eben bleiben, bezw. dass die Normalspannungen σ proportional dem Abstand von der Schwerpunktsachse zunehmen. Diese Annahme ist umso weniger richtig, je mehr der Einfluss von Q gegenüber dem von M überwiegt, und daher im Grenzfall $M = 0$ unzulässig.

Nietverbindungen.

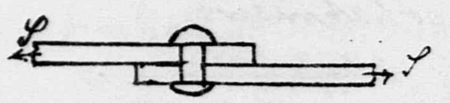


Fig. 50.

Der warm eingezogene Niet erhält beim Erkalten Längsspannungen und presst die Bleche aufeinander, wodurch Reibung zwischen denselben entsteht (ca. 800–1000 kg pro qcm Nietquerschnitt.) Solange die zu übertragende Kraft S kleiner als diese Reibung R ist, wird der Niet nicht auf Abscheeren in Anspruch genommen. Erst wenn $S > R$, wird der Rest $S - R$ durch Schubspannungen des Niets übertragen. In der Anwendung ist S meist kleiner als R bei gutgeschlagenen neuen Nieten; es treten daher in denselben keine Schubspannungen infolge der Kräfte S auf. Da jedoch auf durchgehends tadellose Nietarbeit nicht gerechnet werden kann, ausserdem einzelne Nieten durch Erschütterung los werden können, so sieht man beim Berechnen der Nieten in der Regel von der Wirksamkeit der Reibung ab, und nimmt an, die ganze Kraft S werde durch Schubspannungen des Niets übertragen. Die Reibung bildet dann noch eine Art Reserve für sonstige nicht in Rechnung geführte Einflüsse.

Einschnittiger Niet.

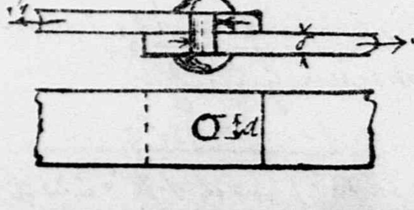


Fig. 51.

Soll die Schubspannung des Niets die zulässige Spannung t nicht überschreiten, so kann ein einschnittiger Niet höchstens eine Kraft $S_1 = \frac{\pi d^2}{4} t$ übertragen. Soll der Druck auf die Nietlochwand

den Betrag K'' nicht überschreiten, so kann der Niet höchstens die Kraft $S_1 = \delta \cdot d \cdot K''$ übertragen.

Hinsichtlich der Werte von t und K'' muss zwischen Schweisseisen und Flusseisen unterschieden werden.

Schweisseisen	Flusseisen.
Nach Vorstehendem kann mit Rücksicht auf die bessere Qualität des Nietmaterials gesetzt werden a) $t = 0{,}9 K$	Ein wesentlicher Unterschied in der Qualität des Materials der Nieten und der zu verbindenden Konstructionsteile besteht hier nicht. b) $t = 0{,}8 K$

wo K der zulässige Spannungscoefficient für die Beanspruchung der betr. Eisenart auf Zug oder Druck ist.

Für den Druck auf die Nietlochwand ist zu setzen:

a) $K'' = 2{,}5 t = 2{,}25 K$ b) $K'' = 2{,}8 t = 2{,}25 K$

Das hohe Maß von K'' ist in der besonderen Form der gedrückten Körper begründet. — Bei gleicher Sicherheit gegen Druck und Schub muss sein:

a) $\frac{\pi d^2}{4} t = d \cdot \delta \cdot 2{,}5 t$ b) $\frac{\pi d^2}{4} \cdot t = d \cdot \delta \cdot 2{,}8 t$

68a) d rund $= 3{,}2 \delta$ 68b) d rund $= 3{,}6 \delta$

Für $d < 3{,}2 \delta$ gilt:

69a) $S_1 = \frac{\pi d^2}{4} t = 0{,}7 d^2 K$

Für $d < 3{,}6 \delta$ gilt:

69b) $S_1 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot t = 0{,}63 d^2 K$

Für $d > 3{,}2 \delta$ gilt:

70a) $S_1 = d \cdot \delta \cdot K'' = 2{,}25 d \delta K$

Für $d > 3{,}6 \delta$ gilt:

70b) $S_1 = d \delta K'' = 2{,}25 d \cdot \delta \cdot K$

In der Regel ist $d < 3{,}2 \delta$ resp. $3{,}6 \delta$, also sind bei einschnittigen Nieten in der Regel Gleichungen 69a resp. 69b massgebend.

Zweischnittiger Niet.

Fig. 52

Ein zweischnittiger Niet kann ohne Überanstrengung übertragen entweder:

$$S_1 = \frac{2 \pi d^2}{4} \cdot t = \frac{\pi d^2}{2} \cdot t \text{ oder } S_1 = \pi \cdot \delta \cdot K''$$

Beide Gleichungen liefern dasselbe Resultat für:

a). $\frac{\pi d^2}{2} t = d \cdot \delta \cdot 2{,}5 t$ b) $\frac{\pi d^2}{2} t = d \cdot \delta \cdot 2{,}8 t$.

71a) d rund $= 1{,}6 \delta$ 71b) d rund $= 1{,}8 \delta$

Für $d < 1{,}6 \delta$ gilt:

72a) $S_1 = \frac{\pi d^2}{2} \cdot t = 1{,}4 d^2 \cdot K$

Für $d < 1{,}8 \delta$ gilt:

72b). $S_1 = \frac{\pi d^2}{2} t = 1{,}26 d^2 K$.

Für $d > 1{,}6 \delta$ gilt:

73a) $S_1 = d \cdot \delta \cdot K'' = 2{,}25 d \cdot \delta \cdot K$

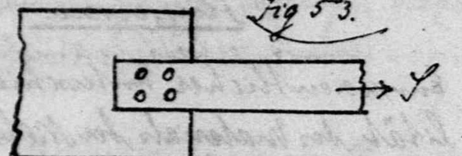
Für $d > 1{,}8 \delta$ gilt:

73b) $S_1 = d \cdot \delta \cdot K'' = 2{,}25 d \cdot \delta \cdot K$.

meist ist $d > 1{,}6\,\delta$ resp. $1{,}8\,\delta$; also sind bei zweischnittigen Nieten meist die Gleichungen 73a) und 73b) maßgebend.

Annieten eines Stabes an einen andern.

Fig 53.



Sind n Niete vorhanden, und nimmt man an, dass sich die Stabkraft gleichmäßig auf dieselben verteile, so kann man setzen: $S = n \cdot S_1$; $n = \frac{S}{S_1}$, wo S_1 den vorstehenden Gleichungen zu entnehmen ist; man erhält sodann die erforderliche Nietzahl.

I. Einschnittige Nieten.

wenn $d < 3{,}2\,\delta$

74a) $n = \frac{S}{0{,}7 d^2 K} = \frac{F}{0{,}7 d^2}$

wenn $d < 3{,}6\,\delta$

74b) $n = \frac{S}{0{,}63 d^2 K} = \frac{F}{0{,}63 d^2}$

wenn $d > 3{,}2\,\delta$

74a)* $n = \frac{S}{2{,}25 d \delta K} = \frac{F}{2{,}25 d \delta}$

wenn $d > 3{,}6\,\delta$

74b)* $n = \frac{S}{2{,}25 d \delta K} = \frac{F}{2{,}25 d \delta}$

II. Zweischnittige Nieten.

wenn $d < 1{,}6\,\delta$

75a) $n = \frac{S}{1{,}4 K d^2} = \frac{F}{1{,}4 d^2}$

wenn $d < 1{,}8\,\delta$

75b) $n = \frac{S}{1{,}26 K d^2} = \frac{F}{1{,}26 d^2}$

wenn $d > 1{,}6\,\delta$

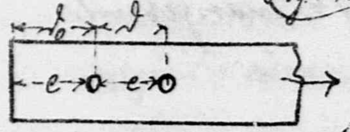
75a)* $n = \frac{S}{2{,}25 d \delta K} = \frac{F}{2{,}25 d \delta}$

wenn $d > 1{,}8\,\delta$

75b)* $n = \frac{S}{2{,}25 d \delta K} = \frac{F}{2{,}25 d \delta}$

wo F gleich dem nutzbaren Stabquerschnitt $= \frac{S}{K}$ ist.

Fig 54.



Damit die Nieten nicht aus dem Stabe ausschlitzen, muss deren Abstand in der Kraftrichtung so gross gewählt werden, dass die in den eventuellen Schlitzflächen auftretenden Schubspannungen unter dem zulässigen Maße t_1 bleiben.

Rechnet man zur Sicherheit die Länge der Schlitzfläche nur gleich dem lichten Abstande e, so muss sein:

Bei einschnittigen Nieten: $S_1 = \frac{\pi d^2}{4} t = 2 e \delta t_1$; t_1 für Stäbe aus Schweisseisen längs der Walzfaser etwa $0{,}7\,t$, wo t die für die Nieten zulässige Schubbeanspruchung ist. Bei schweisseisernen Blechen und bei Flusseisen lässt sich setzen $t_1 = 0{,}9\,t$.

Für Schweisseisenstäbe hat man nun $\frac{\pi d^2}{4} t = 2 e \delta \cdot 0{,}7 t$; $e = \frac{\pi d^2}{5{,}6 \delta} = 0{,}56 \frac{d}{\delta} \cdot d$

Für Bleche und Flusseisen " $e = 0{,}44 \frac{d}{\delta} \cdot d$ } 76)

Bei zweischnittigen Nieten: $S_1 = d \cdot \delta \cdot 2{,}5 t = 2 e \delta t_1$,

Für Schweisseisen folgt .... $e = 1{,}8 d$
Für Bleche und Flusseisen .... $e = 1{,}4 d$ } .... 77)

die Nietteilung $\mathfrak{d}$ und den Nietabstand $\mathfrak{d}_0$ vom Rande erhält man dann schliesslich aus den Gleichungen:

$$\mathfrak{d} = e + d\,;\quad \mathfrak{d}_0 = e + \frac{d}{2} \quad \ldots\ldots\ldots 78)$$

Zu bemerken ist, dass bei Festigkeitsversuchen die Nieten stets in einer, nicht wie wir oben angenommen in 2 Flächen ausschlitzen, was durch das Auftreten starker Biegungsspannungen zu erklären ist. Doch liefern vorstehende Gleichungen im allgemeinen ausreichende Dimensionen. Bei Blechen ist nach Tetmajer's Versuchen ausreichende Sicherheit vorhanden, wenn $\mathfrak{d}_0 = 2d$ (einreihige Anordnung vgl. Fig. 55) bezw. $\mathfrak{d}_0 = 1{,}6d$ (mehrreihige Anordnung, vgl. Fig. 56.)

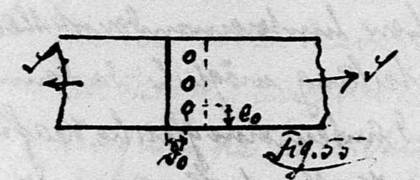


Fig. 55

$\mathfrak{d}$ wählt man für die Ausführung nicht unter $3d$, max $\mathfrak{d} = 10d$ oder auch 16δ. Für die Randentfernung e_0 senkrecht zur Kraftrichtung kann man setzen min $e_0 = 1{,}5d$, max $e_0 = 2{,}5d$; in Ausnahmefällen bis $4d$.

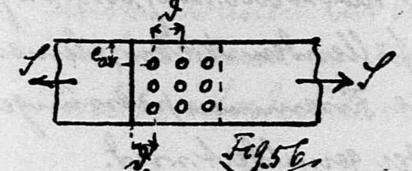
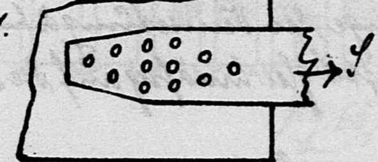


Fig. 56.

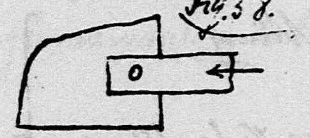
Die Nieten sind möglichst symmetrisch zur Stabachse zu gruppieren, zum mindesten jedoch derart, dass ihre Schwerlinie mit der Stabachse zusammenfällt. Andernfalls verteilt sich die Kraft S ungleichmäßig auf die einzelnen Nieten.

Fig. 57.



Bei Flacheisen empfiehlt sich nebenstehende (Fig. 57) Dreiecksgruppierung, da bei derselben der Stabquerschnitt nur um einen Nietquerschnitt geschwächt wird. — Bei Druckkräften findet theoretisch keine Nietverschwächung statt, da die Kraft direkt in den Niet übergeht. Man bringt trotzdem in der Regel die Nietlöcher in Abzug, um für Druckstäbe keine kleineren Querschnitte zu erhalten als für die entsprechenden Zugstäbe.

Fig. 58.



Um bei grösseren Nietzahlen die Gruppierung entsprechend zu entwerfen, wendet man häufig nebenskizziertes graph. Verfahren an, indem man sich den Stab in n Bänder zerlegt denkt, welche um die n Nieten geschlungen sind. Bandbreite $\beta = \frac{b}{2n}$, wo b = nutzbare Stabbreite $= \frac{F}{K \delta}$. Hinter den Nieten verdickt sich jeweils das Band auf die früher berechnete Breite e.

Fig. 59.

In gewissen Fällen ist die Annahme einer gleichmäßigen Verteilung der Kraft S

auf alle n Nieten ziemlich ungenau. Wird ein schwacher Stab an einen sehr starken mit hintereinander stehenden Nieten angenietet, so kann sich derselbe zwischen 1 und 3 nur wenig, und zwar soviel, als die Deformation der Nieten erlaubt, verlängern, da der starke Stab sich verhältnismäßig nur wenig ausdehnt. Die Länge $\overline{13}$ bleibt daher ziemlich unverändert, die zugehörige Dehnung ε ist sehr klein, und somit auch die Spannung σ der betreffenden Strecke. Der größte Teil der Kraft S muss daher durch Niet 1 gehen, 2 und 3 erhalten nur wenig.

Fig. 60.

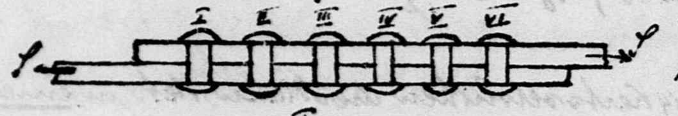
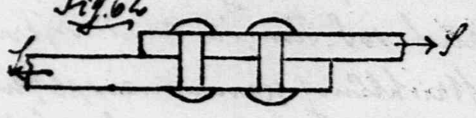


Fig. 61.

Ähnliche Verhältnisse treten auch bei gleich starken Stäben auf, falls viele Nieten hintereinander angeordnet sind. Bei 6 Nieten z.B. und gleichmäßiger Verteilung der Kraft S auf dieselben müsste auf der Strecke I II unten eine Kraft $\frac{5}{6}S$ und auf der Strecke I II oben eine Kraft $\frac{1}{6}S$ wirksam sein, was jedoch mit Rücksicht auf die hierbei auftretende ungleiche Dehnung der betr. Stabstrecken nicht möglich ist. Es muss daher in Wirklichkeit eine andere, ungleichmäßige Kraftverteilung stattfinden. —

Fig. 62.



Nur bei zwei Nietreihen hintereinander ist theoretisch eine gleiche Kraftverteilung möglich, da dann zwischen den Nieten oben und unten eine gleiche Kraft $\frac{S}{2}$ wirksam ist. Bei mehr Nietreihen tritt eine ungleiche Kraftverteilung ein, die jedoch durch das Nachgeben der das Loch nicht völlig ausfüllenden Nieten, kleines Rutschen der Bleche aufeinander und durch stärkere Zusammenpressungen der stärker beanspruchten Nieten mehr oder minder gemildert wird.

Günstig wirkt auch hier die früher erwähnte Dreiecksgruppierung der Nieten, da hierbei die Stabquerschnitte annähernd proportional den in denselben wirkenden Kräften sind, somit über die ganze Länge der Vernietung ähnliche Dehnungen in beiden Stäben entstehen, falls sich die Kraft S gleichmäßig auf die Nieten verteilt.

Stossverbindung von Blechen und Stabeisen.

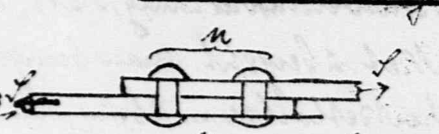
Fig. 63.  Überplattung

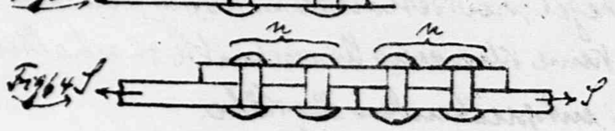
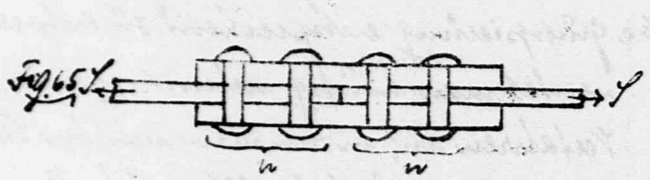
Fig. 64.  Einseitige Verlaschung

Fig. 65.  Doppelte Verlaschung

} direkte Stossdeckung

Die Nietzahl ist bei vorstehenden Stossdeckungen nach den früheren Regeln zu berechnen, da es sich auch hier um Annietung eines Stabes an einen andern handelt. Wenn möglich, ist doppelte Verlaschung anzuwenden, um die Kraft S nicht aus ihrer Richtung abzulenken und Biegungen zu vermeiden. Ausserdem ist dieselbe meist billiger, weil sie weniger Nieten (zweischnittige) erfordert. Einseitige Verlaschung wird dann

angewandt, wenn für eine doppelte der Platz fehlt. Überplattungen werden meist nur bei Kesseln und Reservoirs ausgeführt. Bei Baukonstruktionen sind sie möglichst zu vermeiden. Selbstverständlich müssen die Laschenquerschnitte der zu übertragenden Kraft entsprechen.

Indirekte Stossdeckung (verdeckter Stoss) findet statt, wenn die Stossdeckung nicht direkt auf dem Stoss liegt, sondern durch dazwischenliegende Konstruktionsteile von demselben getrennt wird. (In nebenstehender Skizze m = 2).

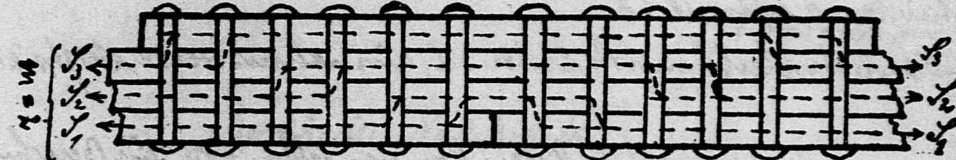


Fig. 66.a

Die in der gestossene Platte I wirksame Kraft S muss durch die m Zwischenplatten hindurch in die Stosslasche IV übergeführt werden; sieht man wie bisher von der Nietreibung ab, so kann dies nur dadurch geschehen, dass successive die einzelnen Stabkräfte S von Platte zu Platte versetzt werden; unter Beanspruchung der Nieten auf Abscheren (siehe punktierte Linien der Skizze.) Eine direkte Versetzung des unteren S in die Stosslasche ist nicht möglich, da die Nieten keinen Biegungswiderstand, sondern nur Scherwiderstand leisten können. Zur Versetzung der (m+1) Kräfte S sind aber (m+1)·n Nieten erforderlich, wenn n = Nietzahl bei direkter Stossdeckung. Es ist dies dieselbe Nietzahl, welche erforderlich wäre, wenn ausser Platte I auch die zwischenliegenden Platten in nebenskizzierter Weise gestossen wären, wobei jeweils die überstehende obere Platte als direkte Stossdeckung der darunterliegenden dienen würde.

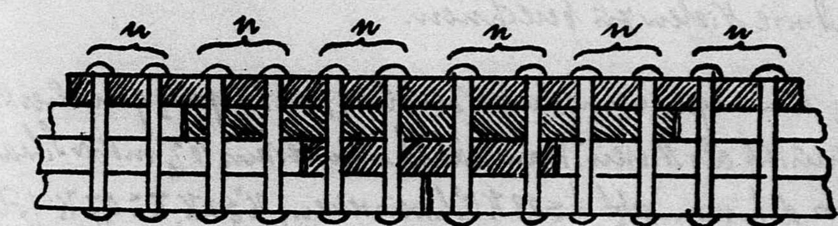
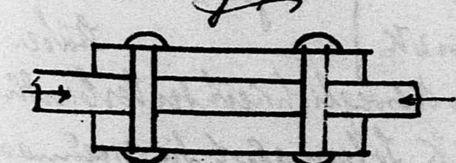


Fig. 66.b

Da in Wirklichkeit jedoch die Verhältnisse günstiger liegen, weil nur eine Stossfuge vorhanden ist, und mit Rücksicht auf den günstigen Einfluss der Nietreibung begnügt man sich meist mit einer geringeren Nietzahl

$$n_1 = \text{ca}\; n\,(1+0{,}3\,m) \quad\ldots\ldots\quad 79)$$

Fig. 67.



Bei Druckstäben könnte die Druckübertragung durch direkte Berührung der Stossflächen hergestellt werden; die Verlaschung würde dann nur zur Sicherung des Stosses gegen seitliche Kräfte dienen, und bedürfte dementsprechend nur wenig Nieten. Da jedoch auf exakte Berührung der Stossflächen in praxi nicht sicher gerechnet werden kann, so macht man in der Regel die Verlaschung stark genug zur Übertragung des vollen Druckes, und lässt höchstens beim verdeckten Stoss eine noch weitere Reduktion der Nietzahl n_1 zu. — Bei amerikanischen Brücken ist bisweilen die ganze Druckübertragung durch direkte Berührung bewerkstelligt.

Die Laschen sind sehr kurz und dienen dann nur zur Sicherung gegen zufällige seitliche Kräfte. Die Zahl der Nieten wird dabei schätzungsweise angenommen.

Die Grösse des Durchmessers d wird bei Brückenkonstruktionen in der Regel nach empirischen Formeln gewählt.

Häufig $d = 2\delta$, besser $d = \delta + 1$, wo δ die Blechstärke . . . . 8a)

δ variiert im Brückenbau unter normalen Verhältnissen etwa zwischen 0,6 bis 2,0 cm, d von 1,6 – 3,0 cm. Für ein und dieselbe Brücke wendet man aus praktischen Gründen nur wenig Nietsorten an, deren Durchmesser den am häufigsten vorkommenden Eisenstärken δ entsprechen.

Die Schaftlänge des Niets bleibt meist unter 3d, ausnahmsweise steigt sie bis 5d.

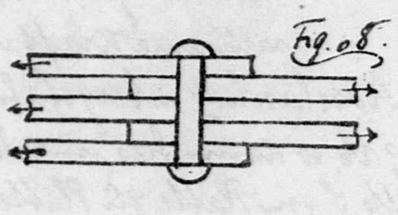
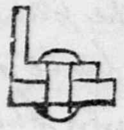


Fig. 68.

Mehrschnittige Nieten kommen selten vor; zur Berechnung sind dieselben in eine entsprechende Zahl ein- und zweischnittiger Nietstücke aufzulösen. Die sich hierbei ergebenden Maximalwerte sind maßgebend. –
Bei Reservoirnieten wählt man, falls die Festigkeitsverhältnisse keine ungünstigeren Resultate ergeben, aus praktischen Gründen folgende Dimensionen:

Fig. 69.



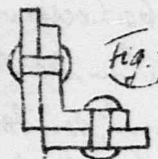


Fig. 70.

δ = 3 – 4 mm	d = 10 mm	Nietteilung e = 37 mm (wasserdicht).
5 – 6 "	= 12 "	= 45 "
7 – 8 "	= 15 "	= 52 "

Konische Schrauben sind wie Nieten zu berechnen.

Gewöhnliche Schrauben sind wegen mangelnder Reibung, nicht ganz genauer Berührung etc. ungünstiger beansprucht als Nieten. Man wählt mindestens 10 % mehr Schrauben als Nieten gleichen Durchmessers, d. h. man setzt $\tau \leq 0{,}8\,K$ (Schweisseisen), $K'' \leq 2K$, $\tau \leq 0{,}7\,K$ (Flusseisen).

Bei verdecktem Stoss ist die Schraubenzahl etwa $n_1 = n(1 + 0{,}5\,m)$ bis $n(1 + m)$.

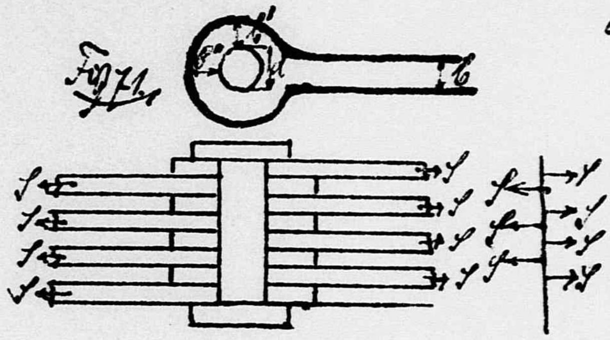
Keile Schmiedeeisen $\tau = 0{,}8\,K$; Stahl $\tau_1 = 1{,}2\,K^0$; $K'' = 1{,}5 - 2\,K^0$. Berechnung der Keile nach den gleichen Grundsätzen wie die der Nieten bezw. Gelenkbolzen.
K^0 bedeutet hierbei die Zugspannung für Schmiedeeisen.

Gelenkbolzen:

Schmiedeeisen:	$\tau = 0{,}8\,K$		K = Zugfestigkeit der zugehörigen schmiedeeisernen Stäbe.
Stahl	$\tau_1 = 1{,}2\,K$		
Lochwand	$K'' = K$ bis $2K$		

je nachdem man mehr oder weniger Wert auf die Beweglichkeit der Verbindung legt.
Gewöhnlich liegt K'' zwischen den Grenzen 1,2 bis 1,5 K. Sofern auch die Biegungsfestigkeit des Bolzens in Betracht kommt, ist für Stahl $K_1 = 1{,}5\,K$ zu wählen.

Fig. 71.



Bei Bolzenaugen soll sein nach Winkler:

$$b' = \frac{1}{2} b + \frac{1}{3} d \; ; \; b'' = \frac{1}{2} b + \frac{2}{3} d.$$

Bei guter Herstellung des Auges kann $b' = b''$ gesetzt werden.

Bei Berechnung der Bolzen auf Biegung kann man zur Sicherheit annehmen, daß die belastenden Kräfte S jeweils in Stabmitte wirken.

Revidierter Neudruck. November 1907.