

Universitätsbibliothek Karlsruhe

IV E 2344

Engesser, Friedrich

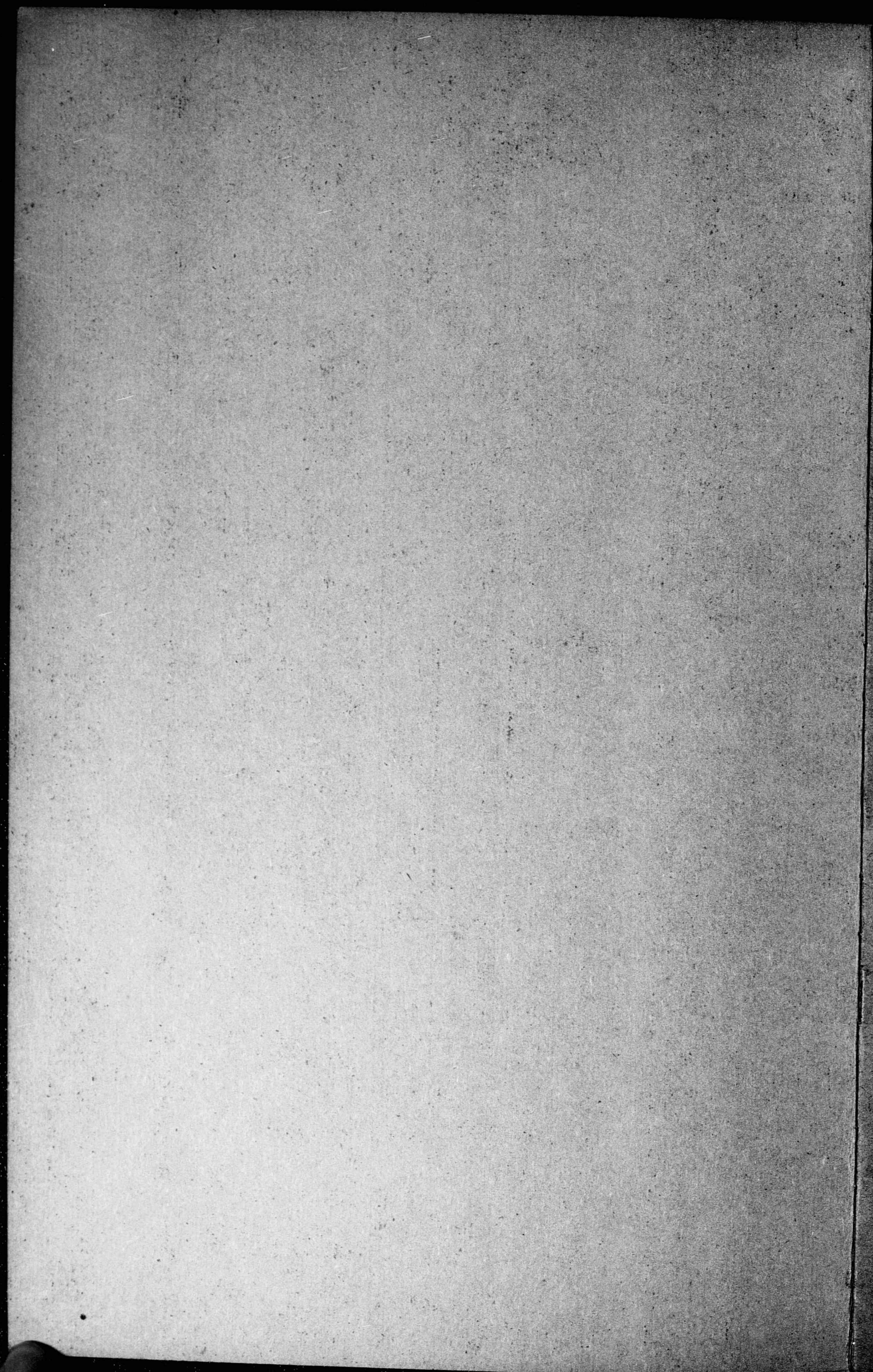
Einflusslinien

**Karlsruhe
1913**

Engesser,

Einflusslinien

IV E
2344



IV E 2344.

Einflusslinien und Zustandslinien

(von Friedrich Engesser)



Die statische Wirkung W (Moment, Querkraft, Durchbiegung etc.), welche eine Einzellast $P=1$ an einer bestimmten Stelle eines Trägers hervorruft, ist abhängig von der Abscisse α des Lastangriffs und von der Abscisse κ der Wirkungsstelle.

$$W = f(\alpha, \kappa) \quad (1.)$$

Denkt man sich α und κ veränderlich, d. h. betrachtet man die Wirkung einer wandernden Einzellast auf eine kontinuierliche Folge von Wirkungsstellen, so kann man W als Fläche darstellen. (Wirkungsfläche.)

Für α constant ($= \alpha_0$) erhält man als Schnitt der Wirkungsfläche mit der Ebene $\alpha = \alpha_0$ die Zustandslinie für $\alpha = \alpha_0$, d. h. die gleichzeitig an allen Wirkungsstellen κ auftretende Wirkung, wenn die Last die bestimmte Lage $\alpha = \alpha_0$ einnimmt: $W_{\alpha_0} = f(\alpha_0, \kappa)$.

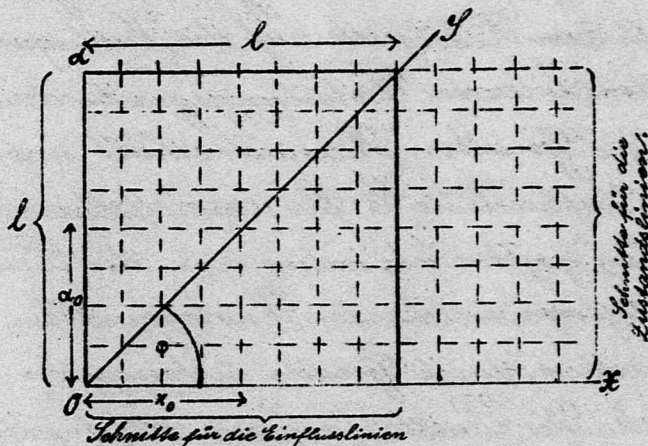
(2.)

Für κ constant ($= \kappa_0$) ergibt sich in ähnlicher Weise die Einflusslinie für $\kappa = \kappa_0$.

$$W_{\kappa_0} = f(\alpha, \kappa_0).$$

(3.)

d. h. die nach einander an der bestimmten Stelle $\kappa = \kappa_0$ auftretenden Wirkungen der wandernden Einzellast.

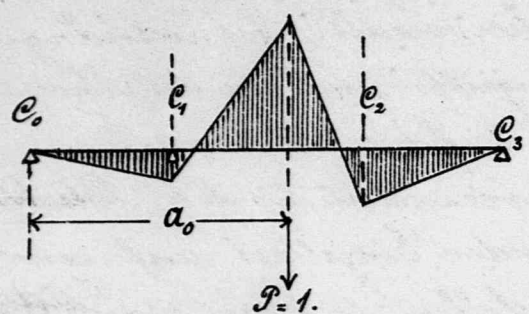


Bisocien ist $f(\alpha, \kappa)$ symmetrisch in Bezug auf α und κ ; die Einflusslinien W_{α_0} und die Zustandslinien W_{κ_0} zeigen dann für $\alpha_0 = \kappa_0$ übereinstimmende Gestalt, d. h.: $W_{\alpha_0} = W_{\kappa_0}$. Die vertikale Schnittfläche OS , welche mit den Koordinatenachsen

Winkel von 45° bildet, ist in diesem Falle eine Symmetrieebene der Wirkungsfläche W ; die entsprechende Schnittlinie $W_{\alpha = \kappa}$ enthält daher Größtwerte bzw. Kleinstwerte von W (z. B. Mo.

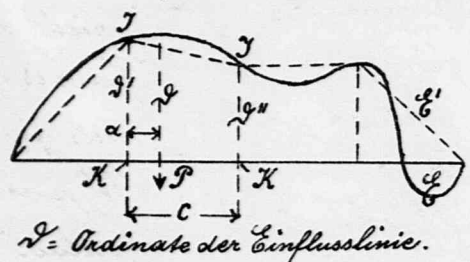
mente des freiaufliegenden Trägers). Die Zustandslinien für Momente M und Querkräfte Q sind sehr einfacher Natur; sie bilden Polygone, deren Eckpunkte an den Kraftangriffstellen (Auflager u. Lastangriff) liegen.

Beispiel: Zustandslinie der Momente eines kontinuierlichen Trägers über 3 Öffnungen für Lastlage $\alpha = \alpha_0$.



Die Einflusslinien zeigen nur dann eine ähnliche einfache Form, wenn es sich um statisch bestimmte Träger handelt; bei

statisch unbestimmten Trägern bilden sie Curven. Unter Umständen ist es dann einfacher, statt sie direkt zu ermitteln, sie mit Hilfe der geradlinigen Zustandslinien zu konstruieren. Die Konstruktion ergibt sich einfach, wenn man bedenkt, dass jeder Punkt einer Einflusslinie gleichzeitig auch Punkt einer Zustandslinie ist und somit der betreffenden Zustandslinie entnommen werden kann. (Anwendung bei den kontinuierlichen Trägern). Die Einflusslinien zeigen i. St. für $\alpha = x$ (d. h. wenn die Last am Querschnitt steht) eine stetigkeitsunterbrechung, da das Gesetz von W für $\alpha < x$ & $\alpha > x$ verschieden ist. Unstetigkeit der Tangente (Eckbildung wie bei den Momenten), oder auch der Ordinate (Stufenbildung wie bei den Querkraften). Bei mittelbarem Lastangriff ist die Einflusslinie stets zwischen zwei Knotenpunkten gerade, falls man die gebräuchliche Voraussetzung macht, dass sich eine zwischen zwei Knotenpunkten befindliche Last nach dem Hebelgesetz auf die Knotenpunkte verteilt. Es folgt dies direkt aus dem linearen Verteilungsgesetz der Last. $P \cdot x = P' \cdot x' + P'' \cdot x'' = \left[\frac{c-\alpha}{c} x' + \frac{\alpha}{c} x'' \right] = \text{Gerade}$. Hiernach erhält man die betr. Einflusslinie E' , wenn die Einflusslinie E für unmittelbare Belastung gegeben ist, indem man die Punkte I der letzteren, welche den Knotenpunkten K entsprechen, durch Gerade miteinander verbindet. Die Punkte I müssen selbstverständlich beiden Einflusslinien gemeinsam sein, da für die Knotenpunkte ein Unterschied zwischen mittelbarer und unmittelbarer Belastung nicht besteht.



x = Ordinate der Einflusslinie.

Bestimmung von Totalwirkungen mit Hilfe der
Bei gegebener Lage einer Reihe von Einzellasten P ist

deren Gesamtwirkung:

$$W = \sum P \cdot I \quad (4.)$$

wo I jeweils die Ordinate der Einflusslinie an der Laststelle bezeichnet. Bei stetiger Belastung von α_1 bis α_2 wird $W = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p \cdot dx \cdot I$. Für p constant wird

$$W = p \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} I \cdot dx = p \cdot F_{I-2} \quad (5.)$$

d. h. = p mal Fläche zwischen den Verticalen durch α_1 und α_2 . Bei totaler gleichmässiger Belastung (Eigengewicht) wird $W = p \cdot F$ (6.) wo F = totaler Inhalt der Einflussfläche. Liegt ein Teil von F unterhalb der Abscissenachse, so ist derselbe als negativ in Rechnung zu stellen.

Bestimmung der ungünstigsten Belastungsfälle.

Bei stetiger Belastung sind für $\max(+W)$ die Strecken, welche den positiven Ordinaten I , für $\max(-W)$ die den negativen I entsprechen, zu belasten.

$$\max(+W) = p \cdot \int (+I) \cdot dx = p \cdot F_1; \quad \max(-W) = p \cdot \int (-I) \cdot dx = -p \cdot F_2$$

wo F_1 und F_2 die positiven bzw. die negativen Einflussflächen bezeichnen.



Lastenzug: Die Einflusslinie sei ein Polygon, (was stets bei mittelbarer Belastung der Fall ist). Für jede Last P ist der Einfluss

$= P \left\{ \frac{c-\alpha}{c} \cdot I' + \frac{\alpha}{c} \cdot I'' \right\}$, wenn I' und I'' die Ordinaten am linksseitigen bzw. rechtsseitigen Knotenpunkte, α und $\beta = (c-\alpha)$ die Abstände der Last P von den betr. Knotenpunkten bezeichnen. Die Gesamtwirkung ergibt sich zu:

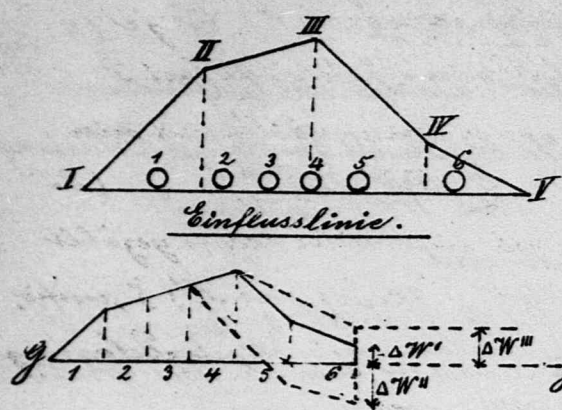
$$W = \sum P \left\{ \frac{c-\alpha}{c} I' + \frac{\alpha}{c} I'' \right\}.$$

Verschiebt man den ganzen Lastenzug um $\Delta\alpha$ nach rechts, so ändert sich W um ΔW . Es ist: $\Delta W = \sum \frac{P}{c} (I'' - I') \cdot \Delta\alpha = \Delta\alpha \cdot \sum P \cdot \tan \psi$, wenn ψ den jeweils zu P gehörigen Neigungswinkel der Einflusslinie bezeichnet. Ist ΔW positiv, so ist die Verschiebung so lange fortzusetzen, bis dadurch, dass irgend ein Rad P in ein anderes Feld tritt, $\sum P \tan \psi$ einen negativen Wert annimmt. Die ungünstigste Laststellung ist somit dadurch charakterisiert, dass:

1, ein Rad P über einem Knotenpunkt steht

2, $\sum P \tan \psi$ positiv oder negativ wird, je nachdem man P in

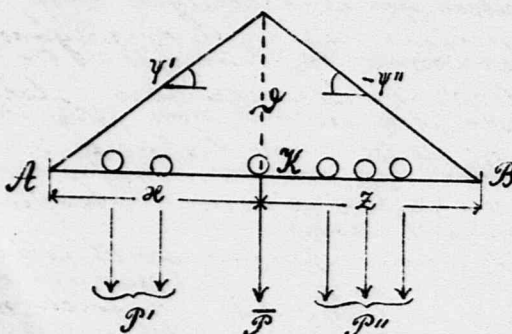
das links oder rechts gelegene Feld rechnet.



Graphisch lässt sich $\sum P \cdot \eta$ wie nebenstehend darstellen, wobei die Lasten P auf der horizontalen Geraden $G-G$ aufgetragen sind, und sodann ein Linienzug parallel den jeweils entsprechenden Polygonseiten der Einflusslinie gezogen wird. Je nach dem hierbei Last 4 nach links oder rechts gerechnet wird, erhält man die positive Endordinate $\Delta W'$ oder die negative $\Delta W''$. Last 4 auf Knotenpunkt II entspricht somit der ungünstigsten Belastung. Es ist ferner aus der Figur ersichtlich, dass P nur auf einen solchen Knotenpunkt stehen kann, für welchen die Einflusslinie ein ausspringendes Eck (wie bei II) aufweist. Bei einem einspringenden Eck (Punkt IV) würde durch weiteres Rechtschieben (wobei z.B. Last 5 in Feld II-V gelangte) der positive Wert von $\Delta W'$ nur noch vergrößert, ein Negativwerden desselben daher unmöglich ($\Delta W''$).

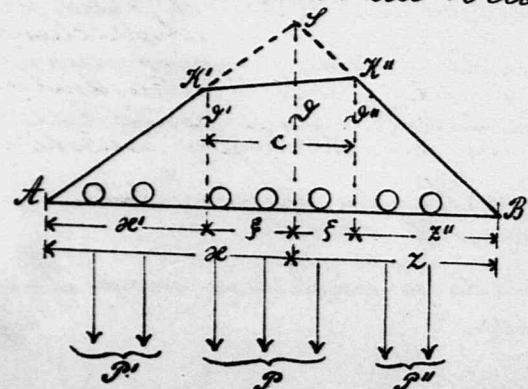
Zu den einspringenden Ecken gehören naturgemäß auch die Endpunkte I und V; Durch- bzw. Abrollen von Rädern wird daher in unserem Falle der Sinn von ΔW nicht geändert.

Für den einfachsten Fall, dass das Polygon ein Dreieck ist, wird



$$\sum \frac{P'}{x} \geq \sum \frac{P''}{z} \quad \text{oder} \quad \sum \frac{P'}{x} \geq \sum \frac{P' + P''}{l} \quad (7)$$

d. h. wenn die Belastung auf die Längeneinheit von A-K und K-B oder A-B möglichst einander gleich werden.



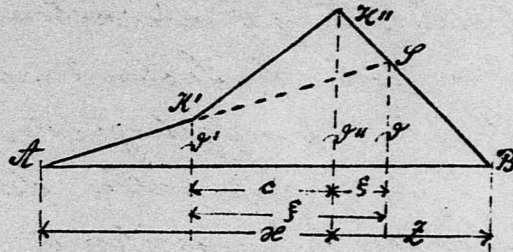
Für ein Viereck wird:

$$\frac{\Delta W}{\Delta \alpha} = \sum P' \cdot \eta' + \sum P'' \cdot \eta'' - \sum P'' \cdot \eta''$$

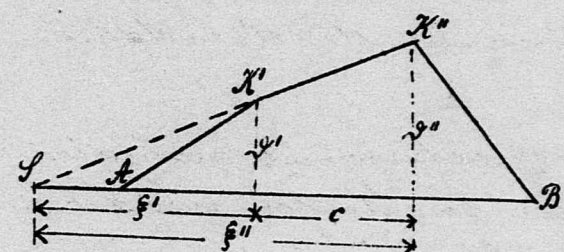
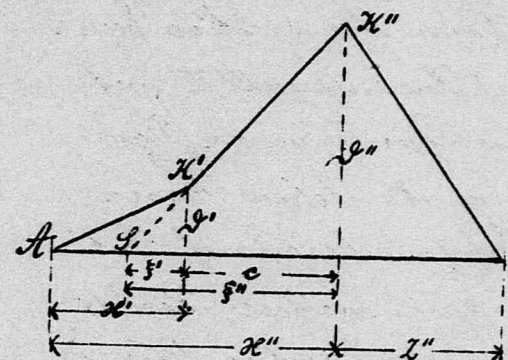
Nun ist:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\eta'}{x} &= \frac{x'}{x} = \frac{x - \xi}{x} \\ \frac{\eta''}{z} &= \frac{z''}{z} = \frac{z - \xi}{z} \end{aligned} \right\} \text{daher} \quad \frac{\eta' - \eta''}{x} = 1 - \frac{\xi}{x} - \left(1 - \frac{\xi}{z}\right)$$

$$\text{daher: } \frac{\Delta W}{\Delta \alpha} = \sum P' \cdot \eta' + \frac{\xi}{x} \sum P' - \sum \frac{P''}{z} - \frac{\xi}{z} \sum P''$$



W wird zum Maximum, wenn $\Delta W \geq 0$, je nachdem eine auf K' oder K'' stehende Last P zu den Lasten links oder rechts gezählt wird oder wenn $\sum P' + \frac{\xi}{x} \sum P' \geq \sum \frac{P''}{z} + \frac{\xi}{z} \sum P''$ (8.)



je nachdem P nach links oder rechts gezählt wird. Hierbei ist ξ positiv, wenn Schnittpunkt S rechts von K' ; ξ positiv, wenn S links von K'' liegt. Die Bedingung für die ungünstigste Belastung lässt sich auch noch, wenn man

$$\eta' = \eta'' \cdot \frac{(x'' - c)}{x''} = \frac{\eta'' \cdot x'}{x''} \text{ setzt, folgendermassen ausdrücken:}$$

$$\sum P' \cdot \frac{x'}{x''} + \sum P' \cdot \frac{x'}{x''} \geq \sum P'' \cdot \frac{x''}{x''}; \text{ oder} \quad \sum P' \cdot \frac{x'}{x''} + \sum P' \geq \sum \frac{P''}{x''} \quad (9)$$

Diese Form ist namentlich bei einspringenden Winkel bei K' (bzw. K'') bequem.

Für $\xi' = 0$ und $\xi'' = x'$ bzw. $\xi' = c$ und $\xi'' = x''$ geht das Viereck in ein Dreieck über.

Gleichung (9.) vereinfacht sich sodann in: $\sum \frac{P'}{x} \geq \sum \frac{P''}{z}$; bzw. $\sum P' + \sum P' \geq \sum \frac{P''}{z}$

in Übereinstimmung mit Gleichung (7).

Bei komplizierten Formen der Einflusslinie erhält man die ungünstigste Laststellung in der Regel am schnellsten durch Probieren. Man stellt schätzungsweise die schwerste Partie des Zuges dahin, wo die Werte von η am grössten sind, wobei eines der Räder auf irgend einem Knotenpunkt stehen muss (gewöhnlich ein schwerstes Rad an den Knotenpunkt mit der grössten Ordinate η), und bildet dann $\sum P \cdot \eta$. Ein Vergleich mit den entsprechenden Werten $\sum P \cdot \eta$ der etwa sonst noch in Betracht kommenden Laststellungen liefert direkt den Wert von max. W .

Ist die Einflusslinie krummlinig, so muss für max. W auch hier die Bedingung $\sum P \cdot \eta = 0$ erfüllt sein; die entsprechende Laststellung kann durch Probieren gefunden werden. Ein anderes Verfahren besteht darin, dass man der Kurve ein Polygon substituiert und auf dieses dann die früheren Regeln anwendet.

Nach den Vorträgen von
Hochsch. Prof. Dr. ing. Engesser.

