

**Universitätsbibliothek Karlsruhe**

**IV E 73**

**Engesser, Friedrich**

**Berechnung der Rahmenträger**

**Berlin  
1913**

**VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN, BERLIN W 66**  
Wilhelmstraße 60.

**Einführung in die Berechnung der im Eisenbetonbau gehäuschten  
festen Rahmen.** Von Dipl. Ing. H. von Brunnbeck.  
Mit 113 Textabbildungen. 1913. geb. 6.— M., geb. 6,80 M.

**Der Rahmen.** Einfaches Verfahren zur Berechnung von Rahmen aus Eisen und Eisenbeton mit ausgeführten Beispielen. Von Dr.-Ing. W. Gehler, Professor an der Technischen Hochschule, Dresden. Mit rd. 150 Textabbildungen. 1913. geb. etwa 7.— M., geb. etwa 7,80 M.

**Theorie und Berechnung der im Eisenbetonbau üblichen elastischen Bogen,  
Bogenstellungen und mehrstieligen Rahmen.**  
Von Dr.-Ing. K. W. Schaeferle, Regierungsbaumeister.  
Mit 91 Textabbildungen. 1912. geb. 6.— M., geb. 6,80 M.

**Beiträge zur Theorie kontinuierlicher Eisenbetonkonstruktionen besonders der  
mehrstückigen Rahmen und durchgehenden Balken mit veränderlichem Tragheitsmoment.**  
Von Ingenieur A. Straßer.  
Mit 20 Textabbildungen und 1 Tafel. 1912. geb. 2,60 M.

**Zur Statik der Stockwerkrahmen.** Von R. Wozkewski, Ingenieur.  
Zweite neubearbeitete Auflage.  
Mit 14 Textabbildungen. 1912. geb. 1,60 M.

**Berechnung der gekreuzt armierten Eisenbetonplatten und deren Aufnahmeträger unter Berücksichtigung der Kraftwirkungen nach zwei Richtungen.**  
Von Dr.-Ing. Joh. Bapt. Bosch, städt. Bauamtmann in München.  
Mit 32 Textabbildungen. 1908. geb. 3,60 M.

**Beitrag zur Berechnung der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten und  
deren Aufnahmeträger.** Von Ingenieur A. Danusee und Dipl. Ing. H. von Brunnbeck.  
Mit 22 Textabbildungen. 1913. geb. 5,60 M., geb. 6,50 M.

**Veranschlagen von Eisenbetonbauten.** Grundlagen für den Entwurf und für die Kostenberechnung von Tief- und Hochbauten. Mit mehreren, der Praxis entnommenen Beispielen. Von Dr.-Ing. A. Kleinigel, Privatdozent an der Technischen Hochschule, Darmstadt.  
Mit Textabbildungen. 1913. geb. 3,60 M., kart. 4.— M.

**Brückenbau.** (Handbuch für Eisenbetonbau. 2. Auflage. Bd. VI.) 2. neubearbeitete Auflage.  
**Balkenbrücken.** Bearbeitet von Regierungsbaumeister Dr.-Ing. W. Gehler, Direktor der Firma Dyckerhoff u. Widmann A.-G., Privatdozent an der Königlichen Techn. Hochschule, Dresden.  
**Bogenbrücken.** Bearbeitet von Dipl.-Ing. Th. Gesteschi, Zivilingenieur in Berlin.  
**Die Anwendungen des Eisenbetons im Eisenbrückenbau.** Bearbeitet von O. Cetberg, Regierungsbaumeister a. D., Professor für das techn. Vorlesungswesen, Hamburg.  
Mit 1695 Textabbildungen. 1911. geb. 30 M., g.

Mischdruckerei Gebrüder Braun, Berlin S. W.

DIE  
**BERECHNUNG DER RAHMEN**  
MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE ANWENDUNG

von

Prof. Dr.-Ing. FR. ENGESSER

MIT 42 ABBILDUNGEN



BERLIN 1913  
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN

*gewoeh*

DIE  
**BERECHNUNG DER RAHMENTRÄGER**

MIT BESONDERER RÜKSICHT AUF DIE ANWENDUNG

—  
VON

Prof. Dr.-Ing. **FR. ENGESSER**

Alle Rechte vorbehalten.

Sonderdruck aus „Zeitschrift für Bauwesen“, Jahrgang 1913.

MIT 42 ABBILDUNGEN



BERLIN 1913  
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN

W. 1900



IV E 73

Alle Rechte vorbehalten.

Sonderdruck aus „Zeitschrift für Bauwesen“, Jahrgang 1913.

### Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Parallelträger . . . . .	2
Rahmenträger von beliebiger Gestaltung . . . . .	8
Die Stammwerte . . . . .	10
Die Zuschlagwerte . . . . .	29
Die Nebenspannungen . . . . .	39
Die Wärmespannungen . . . . .	45
Zwischenbelastungen . . . . .	45
Die Verhältnisse außerhalb Elastizitätsgrenze . . . . .	48
Bestimmung der Durchbiegung . . . . .	50

Rahmenträger mit  $n$  Feldern sind im allgemeinen  $3n$  fach statisch unbestimmt; in jedem der  $n$  Felder sind 3 Größen, als welche beispielsweise die 3 Querschnittskräfte des jeweiligen linken Pfostens in Stabmitte  $H$ ,  $V$  und  $M$  gewählt werden können, von vornherein unbekannt (Abb. 1). Zu ihrer Bestimmung sind  $3n$  Formänderungsgleichungen nötig. In den gewöhnlichen Fällen der Anwendung kommt man indessen meist mit wesentlich weniger Gleichungen aus, da hier eine Anzahl der Unbekannten teils aus Gründen der Symmetrie, teils wegen der Geringfügigkeit der maßgebenden Formänderungen

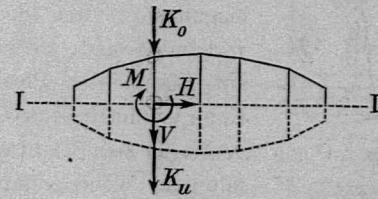


Abb. 1.

gleich Null gesetzt oder als bekannt angenommen werden kann. So sinkt beispielsweise die Zahl der Unbekannten auf  $n$ , wenn wie in Abb. 1 der Träger symmetrisch zu einer Wagerechten I-I angeordnet ist, und wenn von den sehr geringen Dehnungen der Pfosten abgesehen wird. Unter diesen Voraussetzungen werden alle Größen  $M$  gleich Null, und alle Größen  $V$  werden gleich der jeweiligen halben Knotenlastdifferenz  $= 0,5(K_u - K_o)$ ; es bleiben nur die  $n$  wagerechten Kräfte  $H$ , die genügen, um die noch verbleibenden Formänderungsbedingungen (gegenseitige Verschiebung der  $n$  Pfostenmitten gleich Null) zu erfüllen. Sind außerdem noch Anordnung und Belastung symmetrisch zur Trägermitte, dann wird auch der ganze Kräfteplan symmetrisch zur Trägermitte, und die Zahl der Unbekannten mindert sich weiter auf  $\frac{n}{2}$ .

$$V = 0,5 K_u - 0,5 K_o$$

### Parallelträger.

Die Hauptvertreter der Träger mit wagerechter Symmetrieachse sind die Parallelträger mit gleich starken Gurtungen oben und unten. Die erste Berechnung dieser Träger findet sich in dem 1893 erschienenen Buche des Verfassers: „Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken“; sie mögen hier in etwas ausführlicherer Form mit teilweise abgeänderter Bezeichnungsweise wiedergegeben werden.

Bezeichnet man das Moment der äußeren Kräfte für einen beliebigen Querschnitt des Trägers mit  $\mathfrak{M}$ , so trifft auf die eine Gurtung, falls die Pfosten gelenkartig an-

geschlossen sind und als undehnbar angesehen werden, ein Moment  $\frac{1}{2} \mathfrak{M}$ . Wenn dagegen die Pfosten biegungsfest mit den Gurtungen verbunden sind, so werden letztere auf Kosten der Pfosten entlastet. Unter symmetrischen Verhältnissen verbiegen sich die Pfosten S-förmig mit dem Wendepunkt  $W$  in Stabmitte (Abb. 2); ihre entlastende Wirkung auf die Gurtungen kann durch die in den Wendepunkten angreifenden wäge-

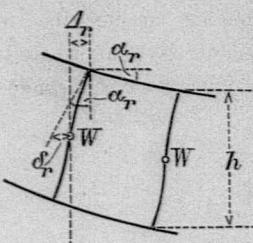


Abb. 2.

rechten Kräfte  $H$  zum Ausdruck gebracht werden (Abb. 3). Für ein beliebiges Feld  $r$  ist die Gurtkraft

$$S_r = \sum_o^r H \quad \dots \quad (1)$$

und das Moment der links gelegenen Kräfte  $H$

$$M = \frac{h}{2} \cdot \sum_o^r H = \frac{h}{2} S_r$$

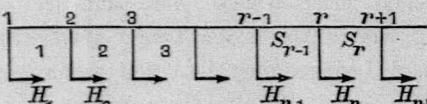


Abb. 3.

Von den auf die Gurtung entfallenden äußeren Kraftmomenten  $\frac{\mathfrak{M}}{2}$  verbleiben somit noch die Biegmomente

$$M = \frac{\mathfrak{M} - h S_r}{2} \quad (\text{in Abb. 4 schraffiert}) \quad \dots \quad (2)$$

Unter deren Einfluß verbiegt sich die Gurtung. Ihre elastische Linie hat am  $r^{\text{ten}}$  Knotenpunkt unter symmetrischen Verhältnissen einen Neigungswinkel

$$\alpha_r = \int_r^{\frac{l}{2}} \frac{M dx}{EJ} = \int_r^{\frac{l}{2}} \frac{\mathfrak{M} - h S_r}{2 EJ} dx \quad \dots \quad (3)$$

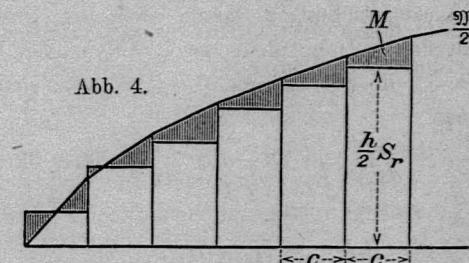


Abb. 4.

wo  $J$  das jeweilige Trägheitsmoment der Gurtung bezeichnet. Den gleichen Winkel  $\alpha_r$  bildet die Endtangente des  $r^{\text{ten}}$  Pfostens mit der ursprünglichen Richtung, der Lotrechten, und zwar ist nach Abb. 2:  $\frac{h}{2} \alpha_r = \delta_r + \Delta_r$ . Hierin ist  $\delta_r$

= Ausbiegung der Stabmitte  $W$  gegen die Endtangente unter dem Einfluß der in  $W$  angreifenden wagerechten Kraft  $\mathfrak{H}_r = \frac{H_r h^3}{24 E Y_r}$ , wo  $Y_r$  = Trägheitsmoment des Pfostens,  $\Delta_r =$

Dehnung der Gurtung, von  $r$  bis  $\frac{l}{2}$ ,  $= \sum_r^{\frac{l}{2}} \frac{Se}{EF}$ , wo  $c$  = Feldweite,  $F$  = Gurtquerschnitt. Hiermit wird

$$\alpha_r = 2 \left( \frac{\delta_r + \Delta_r}{h} \right) = \frac{H_r h^2}{12 E Y_r} + \frac{2}{h} \sum_r^{\frac{l}{2}} \frac{Se}{EF} \quad \dots \quad (4)$$

Aus Gleichung 3 u. 4 folgt

$$\int_r^{\frac{l}{2}} \frac{\mathfrak{M} - h S_r}{2 J} dx = \frac{H_r h^2}{12 E Y_r} + \frac{2}{h} \sum_r^{\frac{l}{2}} \frac{Se}{F} \quad \dots \quad (5)$$

1\*

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{b}{E} = \frac{P}{F}$$

$$\Delta l = \frac{l P}{F}$$

Das Glied  $\Sigma \frac{Sc}{EF}$ , welches von der Dehnung der Gurtstäbe herrührt, ist auf die Größe der Kräfte  $H$  und  $S$  von sehr geringem Einfluß und kann gewöhnlich vernachlässigt werden. Gleichung 5 nimmt dann die einfachere Gestalt an

$$\int_r^{\frac{l}{2}} \frac{\mathfrak{M} - hS}{2J} dx = \frac{H_r h^2}{12Y_r} \quad \dots \quad (6)$$

Durch die Gleichungen 5 bzw. 6 ist die Aufgabe grundsätzlich gelöst. Sie können so oftmal aufgestellt werden, als Unbekannte vorhanden sind. Durch Auflösung der betreffenden Einzelgleichungen lassen sich die Unbekannten leicht ermitteln. Zieht man zwei aufeinander folgende Gleichungen 6, die  $r^{\text{te}}$  und die  $(r+1)^{\text{te}}$ , von einander ab, so erhält man

$$\begin{aligned} \int_r^{\frac{l}{2}} \frac{\mathfrak{M} - hS}{2J} dx - \int_{r+1}^{\frac{l}{2}} \frac{\mathfrak{M} - hS}{2J} dx &= \frac{\mathfrak{M}_r + \mathfrak{M}_{r+1}}{4J_r} c \\ - \frac{S_r hc}{2J_r} &= \left( \frac{H_r}{Y_r} - \frac{H_{r+1}}{Y_{r+1}} \right) \frac{h^2}{12} \quad \dots \quad (7) \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt nicht nur für symmetrische, sondern auch für unsymmetrische Verhältnisse. Die Größen  $S$  und  $H$  sind durch Gleichung 1,  $S_r = \sum_o H_o$ , miteinander verbunden.

Durch Einsetzen dieses Wertes von  $S$  in Gleichung 7 geht diese über in

$$\frac{\mathfrak{M}_r + \mathfrak{M}_{r+1}}{4J_r} c = \frac{hc}{2J_r} \sum_o H_o + \left( \frac{H_r}{Y_r} - \frac{H_{r+1}}{Y_{r+1}} \right) \frac{h^2}{12} \quad (8)$$

Die  $(n+1)$  Größen  $H$  sind durch die Gleichung  $\sum_o H_o = 0$  miteinander verknüpft, die bei symmetrischen Verhältnissen von selbst erfüllt ist. Außerdem sind in diesem Falle die  $H$  paarweise einander gleich, wodurch die Zahl der Unbekannten auf  $\frac{n}{2}$  sinkt.

Einfacher gelangt man zum Ziel, wenn man als Unbekannte die Gurtkräfte  $S$  einführt und  $H_r$  durch  $S_r - S_{r-1}$  ersetzt. Gleichung 7 geht dann über in

$$\frac{\mathfrak{M}_r + \mathfrak{M}_{r+1}}{4J_r} c = \frac{S_r hc}{2J_r} + \left( \frac{S_r - S_{r-1}}{Y_r} - \frac{S_{r+1} - S_r}{Y_{r+1}} \right) \frac{h^2}{12} \quad (9)$$

Für konstantes  $J$  und konstantes  $Y$  wird

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{M}_r + \mathfrak{M}_{r+1}}{2} &= S_r \left( h + \frac{h^2}{3c} \frac{J}{Y} \right) - S_{r-1} \frac{h^2}{6c} \frac{J}{Y} \\ &\quad - S_{r+1} \frac{h^2}{6c} \frac{J}{Y} \quad \dots \quad (9^*) \end{aligned}$$

Die Auflösung der  $n$  Gleichungen 9 bzw. 9<sup>\*</sup> liefert die  $n$  Unbekannten  $S$ . Bei symmetrischen Verhältnissen sinkt die Zahl der Unbekannten auf  $\frac{n}{2}$ .

Nach Ermittlung der Gurtkräfte  $S$  erhält man die Pfostenkräfte zu  $H_r = S_r - S_{r-1}$  und die Gurtmomente zu

$$M = \frac{\mathfrak{M} - Sh}{2}.$$

Wie Abb. 4 erkennen läßt, sind letztere an den Knoten am größten. Für vollständig starre Pfosten,  $Y = \infty$ , erhält man das selbstverständliche Ergebnis  $S_r = \frac{\mathfrak{M}_r + \mathfrak{M}_{r+1}}{2h}$ ,

bzw.  $\frac{S_r h}{2} = \frac{\mathfrak{M}_r + \mathfrak{M}_{r+1}}{4}$ ; die Stufen der Linie  $\frac{Sh}{2}$  gehen jeweils in Feldmitte durch die Momentenlinie  $\frac{\mathfrak{M}}{2}$  (Abb. 5).

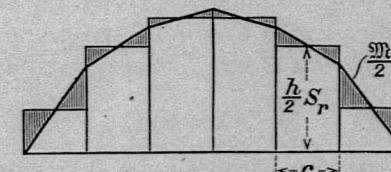


Abb. 5.

Die größten Momente des  $r^{\text{ten}}$  Gurtstabs, die an den Knoten auftreten, sind  $\pm \frac{\mathfrak{M}_r - \mathfrak{M}_{r-1}}{4} = \pm \frac{\mathfrak{Q}_r c}{4}$ , wo  $\mathfrak{Q}_r$  die Querkraft des  $r^{\text{ten}}$  Feldes bezeichnet.

Im Einzelfall nähert sich die Gurtkraft  $S_r$  um so mehr dem Werte  $\frac{\mathfrak{M}_r + \mathfrak{M}_{r+1}}{2h}$ , je größer  $\frac{Y}{J}$ , d. h. je kräftiger die

Pfosten gegenüber den Gurtungen sind. Einen raschen Überblick über die Abhängigkeit der Werte  $S$  von dem Verhältnis der Trägheitsmomente  $\frac{Y}{J}$  erhält man durch folgendes Näherungsverfahren.

Man denkt sich die Trägheitsmomente  $Y$  der Pfosten stetig über die Trägerlänge verteilt, wobei auf die Länge  $dx$  das Element  $dY = \frac{Ydx}{c}$  kommt. Die Elemente sind überall gleich groß, wenn die Endpfosten nur halb so kräftig wie die übrigen Pfosten ausgebildet sind. Die Gegenkräfte  $dH$  der Pfostenelemente können näherungsweise proportional den jeweiligen Querkräften angenommen werden. Bei gleichmäßiger Gesamtbelastung ergibt dies  $dH = C \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) dx$ .

Man erhält hiermit

$$S_x = \int_0^x dH = \int_0^x C \left(\frac{l}{2} - x\right) dx = \frac{Cx(l-x)}{2}.$$

Das Gurtmoment bei  $x$  beträgt

$$M_x = \frac{\mathfrak{M}_x}{2} - \frac{S_x h}{2} = \frac{px(l-x)}{4} - \frac{Cx(l-x)h}{4} = \frac{p-Ch}{4} x(l-x).$$

Die Neigung der elastischen Linie für  $x=0$  ergibt sich aus

$$\alpha_o = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{Md x}{EJ} = \frac{p-Ch}{4EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} (lx - x^2) dx = \frac{p-Ch}{48EJ} l^2$$

für  $J$  konstant.

Anderseits ist aber auch, wie die Betrachtung des elementaren Endpfostens zeigt,

$$\alpha_o = \frac{dH_o h^2}{12EdY} = \frac{dH_o h^2 c}{12EYdx} = \frac{Clh^2 c}{24EY}.$$

Durch Gleichsetzung der Werte von  $\alpha_o$  erhält man die Konstante  $C = \frac{p}{h} : \left(1 + \frac{2hcJ}{l^2 Y}\right)$  und sodann die Stabkraft

$$S_x = \frac{Cx(l-x)}{2} = \frac{px(l-x)}{2h} : \left(1 + \frac{2hcJ}{l^2 Y}\right) = \frac{\mathfrak{M}_x}{h} : \left(1 + \frac{2hcJ}{l^2 Y}\right) \quad (10)$$

Die Abweichung dieses Wertes  $S_x$  von demjenigen Werte  $\bar{S}_x$ , der bei unendlich starren Pfosten auftreten würde, ist

$$\begin{aligned} \Delta S &= \bar{S}_x - S_x = \frac{\mathfrak{M}_x}{h} - \frac{\mathfrak{M}_x}{h} : \left(1 + \frac{2hcJ}{l^2 Y}\right) \\ &= \frac{\mathfrak{M}_x}{h} \cdot \frac{2hcJ}{2hcJ + l^2 Y} = \frac{\mathfrak{M}_x}{h} \cdot \gamma = S_x \cdot \gamma \end{aligned} \quad (11)$$

und für starke Pfosten annähernd  $\Delta S = S_x \cdot \frac{2hcJ}{l^2 Y}$ . (11a)

Diese Gleichungen lassen die Abhängigkeit der Größe  $\Delta S$  von  $\frac{Y}{J}$  klar erkennen.

Beispielsweise sind für  $h = c = \frac{l}{8}$ ,  $\Delta S = \bar{S} : \left(1 + 32 \frac{Y}{J}\right)$

und  $\gamma = 1 : \left(1 + 32 \frac{Y}{J}\right)$ ,

$$\begin{array}{ccccccc} Y:J = \infty & 10 & 5 & 2 & 1 & 0,7 & 0,5 \\ \gamma = 0 & 0,0031 & 0,0062 & 0,0154 & 0,030 & 0,042 & 0,059 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Y:J & = 0,2 & 0,1 & 0 \\ \gamma & = 0,135 & 0,238 & 1,0. \end{array}$$

Hierach sind die Abweichungen  $\Delta S$  von den Werten  $\bar{S} = \mathfrak{M}:h$  nicht bedeutend, solange die Pfosten nicht wesentlich schwächer als die Gurtungen ausgeführt werden. Für  $Y=J$  beträgt die Abweichung nur 3 vH.

Die Biegungsmomente  $M$  der Gurtstäbe ändern sich gegenüber denjenigen Werten  $\bar{M}$ , die für  $Y=\infty$  auftreten würden, um einen innerhalb des Feldes konstanten Betrag

$$\Delta M = \frac{\Delta S \cdot h}{2}.$$

Um diesen Betrag wird der Größtwert von  $M$  größer als der von  $\bar{M}$ .  $\Delta M$  wird am größten in Trägermitte und zwar

$$\begin{aligned} \Delta M &= \frac{\Delta S \cdot h}{2} = \frac{\bar{S} \gamma h}{2} = \frac{\mathfrak{M} \gamma}{2} = \frac{pl^2}{16} \gamma = \frac{pl^2}{16} \frac{2hcJ}{l^2 Y + 2hcJ} \\ &= \frac{p hc J}{8Y} : \left(1 + \frac{2hcJ}{l^2 Y}\right) = \frac{KhJ}{8Y} : \left(1 + \frac{2hcJ}{l^2 Y}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

wo  $K$  = Knotenlast =  $pc$ . Annähernd wird

$$\Delta M = \frac{KhJ}{8Y} \quad \dots \quad (12a)$$

Werden die Endpfosten, entgegen der gemachten Voraussetzung, ebenso stark oder gar noch stärker als die übrigen Pfosten ausgeführt, so treten Änderungen ein, die sich jedoch nur im Endfeld stärker bemerkbar machen. Hier wird jetzt  $\Delta S_1$  negativ, d. h.  $S_1$  wird größer als  $\bar{S}_1$ . Sein Absolutwert ist nicht wesentlich verschieden von dem  $\Delta S$  in Trägermitte. Näheres hierüber später. Für die Anwendung genügt es im allgemeinen, bei Hauptträgern, wo  $Y$  nicht wesentlich kleiner als  $J$  ist, die Gurtkräfte  $S$  und die wagerechten Pfostenkräfte  $H$  unter der Annahme  $Y = \infty$  zu berechnen; man erhält etwas zu große Werte. Die Gurtmomente  $M$  dagegen werden in Wirklichkeit größer als für  $Y = \infty$ . Man berücksichtigt dies einfach und ausreichend dadurch, daß man den Werten  $\bar{M}$  für  $Y = \infty$  in jedem Felde noch den konstanten Betrag  $\Delta M = \frac{KhJ}{8Y}$  zuschlägt.

#### Rahmenträger von beliebiger Gestaltung.

Im Anschluß an die vorstehende, bereits vor 20 Jahren in ihren Grundzügen veröffentlichte Theorie des symmetrischen Parallelträgers soll im folgenden nun auch die Berechnung bei beliebiger Gestaltung des Rahmenträgers durchgeführt und dabei näher auf die verschiedenen maßgebenden Punkte eingegangen werden, wobei die Vorträge des Verfassers über Eisenbetonbau als Grundlage dienen. Das zuletzt angegebene Näherungsverfahren läßt deutlich erkennen, daß bei den gewöhnlichen Parallelträgern, wo die Pfosten nicht wesentlich schwächer als die Gurtungen sind, die Stabkräfte und Stabmomente  $S, H, M$  nur wenig von den für  $Y = \infty$  gültigen Werten abweichen.

Noch weniger ist dies der Fall bei Trägern mit Vieleckgurtungen (Vieleckträgern). Es liegt nun nahe, die Berechnung in der Weise stufenweise vorzunehmen, daß man zunächst nur den Haupteinfluß, die Verbiegung der Gurtungen in Rechnung stellt und alle anderen Formänderungen (Verbiegung der Pfosten, Dehnung der Stäbe) außer Betracht läßt. Die so erhaltenen Werte seien Stammwerte genannt.

$Y = \infty$

Auf der zweiten Stufe werden weiter die Verbiegungen der Pfosten berücksichtigt; die hierdurch entstehenden Abweichungen von den Stammwerten werden Zuschlagwerte genannt.

Auf der dritten Stufe wird dem Einfluß der Stabdehnungen Rechnung getragen. Die entsprechenden Spannungen sind die Nebenspannungen (Zwängungsspannungen); sie sind von gleicher Art wie die Zwängungsspannungen der Fachwerkträger. Durch dieses stufenweise Vorgehen erhält man einfache und durchsichtige Formeln, die den Einfluß und die Wichtigkeit der einzelnen Faktoren klar erkennen lassen. Man kann den Genauigkeitsgrad dem jeweiligen Bedürfnis anpassen und nach Bedarf auf einer der drei Stufen haltmachen.

Die Stammwerte lassen sich bequem in aller Schärfe berechnen. Die genaue Bestimmung der Zuschlagwerte und Nebenspannungen ist zwar ziemlich umständlicher; da es sich bei ihnen aber nur um kleinere Werte handelt, die den Charakter von Korrektionswerten tragen, so kann man hier in der Regel von einer scharfen Bestimmung absehen und einfache Näherungsverfahren anwenden.

Für die Stammwerte sind die Einflußlinien, wie bei den gewöhnlichen Fachwerken, geradlinige Zweiseite oder Dreiseite. Mit ihrer Hilfe lassen sich in einfachster Weise die ungünstigsten Laststellungen und die zugehörigen Größtwerte ermitteln. Die Berechnung der Zuschlagwerte und der Nebenspannungen kann auf diese Laststellungen beschränkt und nachträglich beigelegt werden. Es kommen hier hauptsächlich die Gurtstäbe in Betracht, die meist beim gleichen Belastungszustand (Vollbelastung) ihre ungünstigsten Spannungswerte erreichen, so daß für sie die Berechnung der Zuschlagkräfte und Nebenspannungen in der Regel auf diesen einen Belastungszustand beschränkt werden kann. Für die Pfosten ist die Berechnung der Zuschlagwerte und Nebenspannungen selten erforderlich; sie sind hier sehr klein, und außerdem sind die Zuschlagwerte den Stammwerten entgegengesetzt, und daher günstig wirkend. Nur bei den Endpfosten wirken die Zuschlagwerte in der Regel ungünstig.

### Die Stammwerte.

Bei der Bestimmung der Stammwerte sollen, wie dies bei derartigen Untersuchungen allgemein üblich ist, nur die Formänderungen durch die Gurtmomente  $M$ , nicht aber auch die durch die Gurtquerkräfte  $Q$  berücksichtigt werden. Der hierdurch begangene Fehler ist im allgemeinen äußerst gering, bei symmetrischen Gurtungen sogar genau gleich Null. Da die Pfosten unendlich starr angenommen werden, sind die Formänderungen und somit auch die Kräftepläne der einzelnen Felder vollständig unabhängig voneinander; ferner besteht eine einfache Beziehung zwischen den Verbiegungen der beiden Gurtungen und zwischen ihren Biegmommenten, die zunächst aufgestellt werden soll.

In Abb. 6 ist ein beliebiges Feld des Trägers dargestellt. Der eine Gurtstab, hier der untere, sei zunächst wagerecht angenommen, der andere um den Winkel  $\omega$  gegen die Wagerechte geneigt. Verschiebt sich der untere Eckpunkt  $A$  bei festgehaltenem rechten Pfosten  $BD$  infolge der Verbiegung des unteren Gurtstabs  $AB$  um den Betrag  $\delta$  lotrecht nach oben, so muß sich der obere Eckpunkt  $C$  senkrecht zu  $CD$  nach  $C'$  um den Betrag  $\delta_0 = \delta : \cos \omega$  verschieben.

Die wagerechte Komponente von  $\delta_0$  ist  $\delta_0 \sin \omega = \delta \tan \omega$ . Infolge dieser Verschiebungen drehen sich die einzelnen Stäbe, und zwar  $AB$  um  $\psi = \frac{\delta}{c}$ ;  $CD$  um  $\psi_0 = \frac{\delta_0}{s} = \frac{\delta}{s \cos \omega} = \frac{\delta}{c} = \psi$ ;  $AC$  um  $\psi_1 = \frac{\delta \tan \omega}{h'} = \frac{\delta(h'' - h')}{h' \cdot c}$ . Das entsprechende Formänderungsbild des unteren Gurtstabs ist in Abb. 7 dargestellt. Er ist bei  $B$  wagerecht, bei  $A$  unter dem Winkel  $\psi_1$  eingespannt und daselbst um  $\delta$  gehoben. Die Beziehungen zwischen diesen geometrischen Verhältnissen und den Ein-

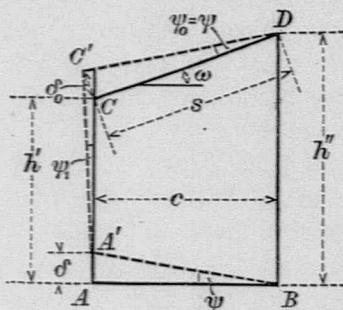


Abb. 6.

spannungsmomenten  $M'$  und  $M''$  (siehe Abb. 7) lauten bekanntlich

$$\underbrace{EJ_u \delta}_{\text{I}} = (2M_u'' - M_u') \frac{c^2}{6} \quad \text{und} \quad EJ_u(\delta + c\psi_1) = EJ_u \delta \left(1 + \frac{h'' - h'}{h'}\right) = \underbrace{EJ_u \delta \left(1 + \frac{c\psi_1}{h'}\right)}_{\text{II}} = EJ_u \delta \left(1 + \frac{c\psi_1}{h'}\right) = EJ_u \delta \left(1 + \frac{c\psi_1}{h'}\right)$$

$$= EJ_u \delta \frac{h''}{h'} = (2M_u' - M_u'') \frac{c^2}{6},$$

woraus sich ergibt aus I & II

$$M_u' = \frac{2EJ_u \delta}{c^2} \frac{h' + 2h''}{h'} \quad \text{und} \quad M_u'' = \frac{2EJ_u \delta}{c^2} \frac{2h' + h''}{h'} \quad (13)$$

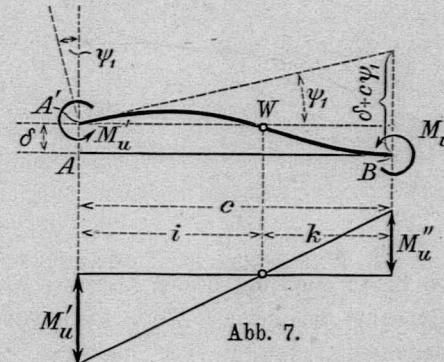


Abb. 7.

spannungsmomenten  $M'$  und  $M''$  (siehe Abb. 7) lauten bekanntlich

$$\begin{aligned} EJ_u \delta (1 + \frac{c\psi_1}{h'}) &= EJ_u \delta (1 + \frac{c\psi_1}{h'}) \\ (1 + \frac{c\psi_1}{h'}) &= \frac{h' + h''}{h'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EJ_u \delta (1 + \frac{c\psi_1}{h'}) &= \frac{M' c^2}{6} - \frac{M'' c^2}{6} \\ &= \frac{c^2}{6} (2M' - M'') \end{aligned}$$

$$\frac{M_u'}{M_u''} = \frac{2EJ_u \delta (h' + 2h'') c^2 h'}{c^2 \delta + 2EJ_u \delta (2h' + h'')}$$

Das Verhältnis dieser beiden Einspannungsmomente ist

$$\frac{M_u'}{M_u''} = \frac{h' + 2h''}{2h' + h''}.$$

Das gleiche Verhältnis besteht zwischen den beiden Abszissen  $i$  und  $k$  des Wendepunkts  $W$

$$\frac{i}{k} = \frac{M_u'}{M_u''} = \frac{h' + 2h''}{2h' + h''}, \quad \text{woraus sich, da } i + k = c \text{ ist, ergibt}$$

$$i = c \frac{h' + 2h''}{3(h' + h'')} \quad \text{und} \quad k = c \frac{2h' + h''}{3(h' + h'')} \quad (14)$$

Hiernach liegt der Wendepunkt näher dem höheren Pfosten.

Für den oberen Gurtstab erhält man ähnlich (Abb. 8)

$$EJ_0 \delta_0 = (2M_0'' - M_0') \frac{s^2}{6}$$

$$\text{und} \quad \frac{EJ_0(\delta_0 + \psi_1 s)}{s^2} = 6EJ_0 \delta_0 \frac{h''}{h'} = (2M_0' - M_0'') \frac{s^2}{6},$$

$$\begin{aligned} i + x &= (c - i)x = cx - ix \\ i + ix &= cx \\ i(1+x) &= cx \\ i &= \frac{cx}{1+x} \\ 1+x &= \frac{cl' + l'' + l' + cl''}{2l' + l''} \\ &= \frac{3(l' + l'')}{2l' + l''} \\ i &= c \frac{(l' + l'') \cdot 2l' + l''}{(2l' + l'') \cdot 3(l' + l'')} \end{aligned}$$

woraus sich, da  $\delta_0 = \delta : \cos \omega = \frac{\delta s}{c}$  ist, ergibt,

$$M_o' = \frac{2EJ_o\delta}{cs} \frac{h' + 2h''}{h'} \text{ und } M_o'' = \frac{2EJ_o\delta}{cs} \frac{2h' + h''}{h'} \quad (15)$$

$$\frac{M_o'}{M_o''} = \frac{h' + 2h''}{2h' + h''} = \frac{M_o'}{M_o''}.$$

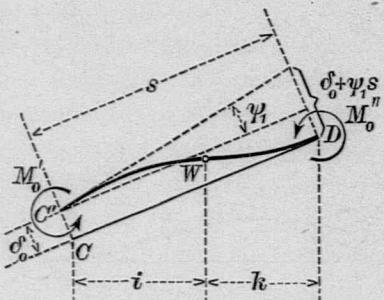


Abb. 8.

Hier nach haben auch die beiden Abszissen  $i$  und  $k$  des oberen Wendepunkts die gleichen Werte wie die des unteren; beide Wendepunkte liegen in der gleichen Lotrechten.<sup>1)</sup> Dieser Satz gilt allgemein, auch für den Fall, daß beide

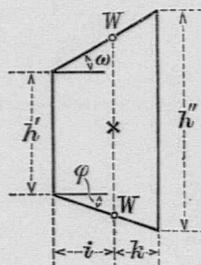


Abb. 9.

Gurtstäbe gegen die Wagerechte geneigt sind (Abb. 9). Die gemeinsamen Abszissen  $i$  und  $k$  berechnen sich nach Gl. 14.

1) Diese Lotrechte geht durch den Schwerpunkt des trapezförmigen Feldes („Feldschwerlinie“).

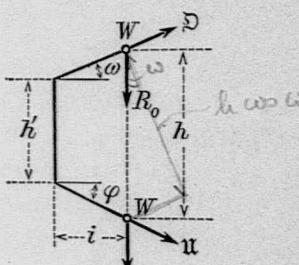


Abb. 10.

Das Verhältnis der linken Einspannungsmomente beider Gurtstäbe ist

$$\frac{M_u'}{M_o'} = \frac{2EJ_u\delta}{c^2} \frac{h' + 2h''}{h'} : \frac{2EJ_o\delta}{cs} \frac{h' + 2h''}{h'} = \frac{J_u s_o}{J_o c} = \frac{J_u}{J_o \cos \omega}.$$

Ist auch die untere Gurtung geneigt, um den Winkel  $\varphi$  gegen die Wagerechte, so wird  $\frac{M_u'}{M_o'} = \frac{J_u \cos \varphi}{J_o \cos \omega}$ .

Das gleiche Verhältnis herrscht auch an jeder anderen Stelle zwischen den beiden Gurtmomenten; allgemein ist

$$\frac{M_u}{M_o} = \frac{J_u \cos \varphi}{J_o \cos \omega} = \frac{J_u s_o}{J_o s_u}. \quad \dots \quad (16)$$

Nachdem nun die Abszissen der Wendepunkte und das Verhältnis der Gurtmomente ganz allgemein durch die Gl. 14 und 16 festgelegt sind, lassen sich die Stabkräfte und Stabmomente bei beliebiger Belastung durch einfache statische Gleichungen bestimmen.

Legt man einen lotrechten Schnitt durch die Wendepunkte  $W$  des betrachteten Feldes (Abb. 10), so können die zerstörten Stabkräfte durch die in den Stabrichtungen liegenden Komponenten  $D$  und  $U$  und durch die lotrechten Komponenten  $R_o$  und  $R_u$ , welche sich zu einer einzigen Kraft  $R$  („Wandquerkraft“) vereinigen lassen, ersetzt werden. Zur Bestimmung von  $D$ ,  $U$  und  $R$  dienen die drei allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen.

Es bezeichne:  $h$  die Trägerhöhe an den Wendepunkten,  $M_o$  und  $M_u$  die Momente der äußeren Kräfte um die Gegenpunkte von  $D$  und  $U$ , d. h. um den unteren und den oberen Wendepunkt. Für lotrechte Belastungen ist  $M_o = M_u = M$ .  $D$  die Summe der links gelegenen lotrechten äußeren Kräfte („Querkraft“).

Das Dreh-Gleichgewicht um die beiden Gegenpunkte ergibt

$$D = -\frac{M_o}{h \cos \omega}; \quad U = \frac{M_u}{h \cos \varphi}. \quad \dots \quad (17) \quad (18)$$

Summe der lotrechten Kräfte gleich Null ergibt

$$R = D - \frac{M_o \tan \omega + M_u \tan \varphi}{h}. \quad \dots \quad (19)$$

$$\omega \cos \omega = \frac{h'}{h}, \quad h' = h \cos \omega$$

$$D \cos \omega = -R \cos \omega$$

$$\frac{D}{R} = \frac{\cos \omega}{\cos \omega} = \frac{M_o \cos \omega}{M_u \cos \omega} = \frac{M_o \cos \omega}{J_u \cos \varphi}$$

Für lotrechte Belastungen wird

$$R = \mathfrak{D} - \frac{\mathfrak{M}(\operatorname{tg} \omega + \operatorname{tg} \varphi)}{h} = \mathfrak{D} - \frac{\mathfrak{M}}{r}, \quad (19^a)$$

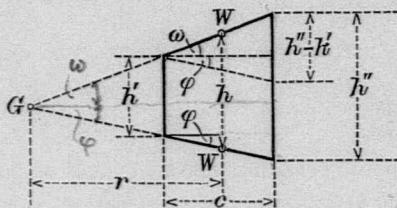


Abb. 11.

da nach Abb. 11  $\frac{\operatorname{tg} \omega + \operatorname{tg} \varphi}{h} = \frac{1}{r}$  ist, wo  $r$  gleich der Entfernung des Schnittpunkts  $G$  der beiden Gurtstäbe („Feld-Gegenpunkt“) von der Lotrechten durch die Wendepunkte  $W$ .

$R$  wird in der Regel am größten für Parallelträger,  $R = \mathfrak{D}$ . Es wird gleich Null, wenn  $r = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{D}}$ , d. h., wenn die Resultierende der äußeren Kräfte ( $= \mathfrak{D}$ ) durch den Gegenpunkt  $G$  hindurchgeht. Dies ist der Fall bei Schwedlerform für ungünstigste einseitige Belastung, und bei reiner Parabelform für totale gleichmäßige Belastung.

Für einseitige Belastung mit  $p$  für das Meter von  $x$  bis  $l$ , wo  $x$  = Abszisse der Wendepunkte, und für gerade untere Gurtung wird annähernd

$$R = A \left(1 - \frac{x \operatorname{tg} \omega}{h}\right) = \frac{p(l-x)^2}{2l} \left(1 - \frac{x}{h} \frac{dh}{dx}\right).$$

Bei einem Parabelträger ist  $h = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$ , wo  $f$  = Parabelfeil, und

$$R = \frac{p(l-x)x}{2l} = \frac{plh}{8f}.$$

Die ungünstigste Wandquerkraft  $R$  ist hier nach proportional der jeweiligen Feldhöhe  $h$  und nimmt gegen die Trägerenden bis nahezu Null ab.

Von der Wandquerkraft  $R$  treffen nun auf die beiden Gurtstäbe die beiden Teil-

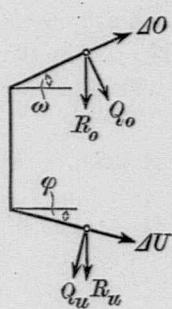


Abb. 12.

kräfte  $R_o$  und  $R_u$ , die im gleichen Verhältnis zueinander stehen wie die von ihnen verursachten Gurtmomente  $M_o$  und  $M_u$ . Man hat daher unter Benutzung der Gl. 16

$$\begin{aligned} R_o &= R \frac{J_o \cos \omega}{J_o \cos \omega + J_u \cos \varphi} = R v_o \\ R_u &= R \frac{J_u \cos \varphi}{J_o \cos \omega + J_u \cos \varphi} = R v_u \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{wo } v_o = \frac{J_o \cos \omega}{J_o \cos \omega + J_u \cos \varphi} \text{ und } v_u = \frac{J_u \cos \varphi}{J_o \cos \omega + J_u \cos \varphi} \quad (21)$$

die Verteilungsbewerte bezeichnen.

Zerlegt man  $R_o$  und  $R_u$  in ihre beiden Komponenten längs und quer zu den Stabachsen (Abb. 12), so erhält man

$$\begin{aligned} \Delta O &= -R_o \sin \omega = -R v_o \sin \omega, \\ \Delta U &= R_u \sin \varphi = R v_u \sin \varphi \end{aligned} \quad (22)$$

$$Q_o = R_o \cos \omega = R v_o \cos \omega, \quad Q_u = R_u \cos \varphi = R v_u \cos \varphi \quad (23)$$

Die gesamten in den Gurtstäben wirkenden Längskräfte sind schließlich

$$O = \mathfrak{D} + \Delta O = -\left(\frac{M_o}{h \cos \omega} + R v_o \sin \omega\right) \quad (24)$$

$$U = \mathfrak{U} + \Delta U = \frac{M_u}{h \cos \varphi} + R v_u \sin \varphi \quad (25)$$

Für Näherungsrechnungen können  $\Delta O$  und  $\Delta U$  vernachlässigt werden.<sup>2)</sup>

Die Gurtmomente in einer wagerechten Entfernung  $x$  von den Wendepunkten sind

$$\begin{aligned} M_o &= R_o x = R v_o x \\ M_u &= R_u x = R v_u x \end{aligned} \quad \Sigma M = M_o + M_u = R(v_o + v_u)x = Rx \quad (26)$$

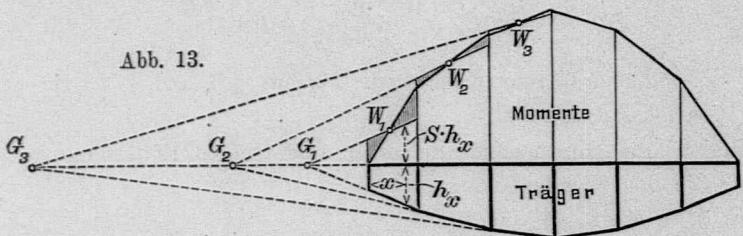
Die Abszissen sind positiv, wenn der betreffende Gurtquerschnitt rechts vom Wendepunkte liegt. Die Momente  $M$  sind positiv, wenn sie den Gurtstab hohl nach oben biegen.

2)  $\Delta O$  und  $\Delta U$  werden genau gleich Null bei Parallelträgern und bei gleichmäßig belasteten Parabelträgern, wo  $R = 0$ . Der Größtwert von  $\Delta O$  wird aus  $\frac{d \Delta O}{d \omega} = 0$  erhalten. Setzt man dabei  $\varphi = 0$ , so ergibt diese Bedingung  $2 \operatorname{tg} \omega + \operatorname{tg} \omega^3 = \mathfrak{D}h : \mathfrak{M}$ , woraus der entsprechende Neigungswinkel  $\omega$  bestimmt werden kann. Annähernd ist  $\operatorname{tg} \omega = \mathfrak{D}h : 2 \mathfrak{M}$ .

$$\begin{aligned} \frac{M_u}{M_o} &= \frac{J_u \cos \varphi}{J_o \cos \omega} = \frac{R_u}{R_o} \\ R_v &= R_o x = (R - R_u)x \\ R + R_o K &= Rx \\ R_u &= R \frac{x}{1+x} = R \frac{J_u \cos \varphi}{J_o \cos \omega + J_u \cos \varphi} \end{aligned}$$

Ihre an den Knoten liegenden Größtwerte erhält man für  $z = k$  und  $z = -i$ .

Die Gurtkräfte  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{U}$  haben bei lotrechter Belastung gleich große wagerechte Komponenten,  $S = \mathfrak{D} \cos \omega = \mathfrak{U} \cos \varphi = \frac{\mathfrak{M}}{h}$ . Dieselben bilden in jedem Trägerquerschnitt  $x$  ein Kräftepaar  $= Sh_x$ , wo  $h_x$  die Trägerhöhe im betr. Querschnitt bezeichnet. Die Werte von  $Sh_x$  bilden eine Stufenlinie, deren einzelne Gerade in den betreffenden Feldern durch die jeweiligen Wendepunkte  $W$  und Gegenpunkte  $G$  gehen (Abb. 13). Der Unterschied zwischen der Stufenlinie  $Sh_x$  und der Linie der äußeren Kraftmomente  $\mathfrak{M}$  (in Abb. 13 schraffiert) stellt die Gurtmomente  $\Sigma M = \mathfrak{M} - Sh_x$  dar. Es ist hieraus deutlich der Einfluß der Neigung der Gurtstäbe auf die Größe von  $\Sigma M$  ersichtlich. Geht die Resultierende der äußeren Kräfte ( $= \mathfrak{Q}$ ) durch  $G$ , so fällt für das betr. Feld die Stufenlinie mit der Momentenlinie  $\mathfrak{M}$  zusammen, die Gurtmomente  $\Sigma M$  werden gleich Null. In den gewöhnlichen Fällen werden die Gurtmomente am größten bei den wagerechten Stufen des Parallelträgers.



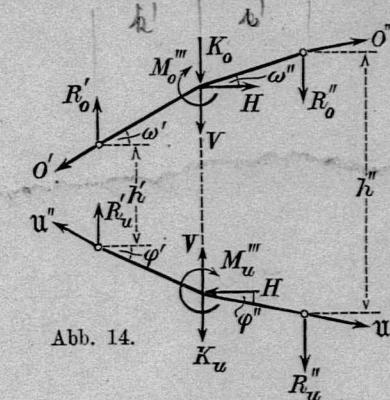
Um die in einem Zwischenpfosten wirkenden Stammkräfte zu erhalten, betrachtet man ein zwischen den Wendepunkten der Nachbaufelder herausgeschnittenes Trägerstück (Abb. 14). Summe aller lotrechten Komponenten = Null ergibt Längskraft  $V = -K_o - \mathfrak{D}' \sin \omega' + \mathfrak{D}'' \sin \omega'' + R'_o - R''_o$

$$= -K_o + \frac{M'_o \operatorname{tg} \omega'}{h'} - \frac{M''_o \operatorname{tg} \omega''}{h''} + R'_o v'_o - R''_o v''_o \quad (27)$$

oder auch  $= K_u - \mathfrak{U}' \sin \varphi' + \mathfrak{U}'' \sin \varphi'' - R'_u + R''_u$

$$= K_u - \frac{M'_u \operatorname{tg} \varphi'}{h'} + \frac{M''_u \operatorname{tg} \varphi''}{h''} - R'_u v'_u + R''_u v''_u$$

Für Parallelträger werden alle Neigungswinkel gleich Null und  $R = \mathfrak{Q}$ ; man erhält  $V = -K_o + \mathfrak{D}' v'_o - \mathfrak{D}'' v''_o$ .



Sind außerdem, wie gewöhnlich, die Verteilungsbeiwerte  $v_o$  in allen Feldern gleich groß, so wird

$$\left. \begin{aligned} V &= -K_o + (\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}'') v_o = -K_o + (K_o + K_u) v_o \\ &= -K_o (1 - v_o) + K_u v_o = -K_o v_u + K_u v_o \end{aligned} \right\} \quad (27a)$$

und wenn beide Gurtungen gleich stark sind,

$$V = \frac{K_u - K_o}{2} \quad \dots \quad (27b)$$

Hierach sind die Längskräfte der Zwischenpfosten sehr gering.

Das Biegungsmoment des Zwischenpfostens am oberen Knoten ergibt sich zu

$$\left. \begin{aligned} M'_o &= R'_o k' + R''_o i'' = R' v'_o k' + R'' v''_o i'' \\ M''_u &= R'_u k' + R''_u i'' = R' v'_u k' + R'' v''_u i'' \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Der Verlauf der Biegungsmomente über den ganzen Pfosten hin ist in Abb. 15 dargestellt. Die Ordinaten des Momenten-Nullpunkts  $W$  ergeben sich aus  $t_o : t_u = M'_o : M''_u$  zu

$$t_o = \frac{R' v'_o k' + R'' v''_o i''}{R' k' + R'' i''} t \quad \text{und} \quad t_u = \frac{R' v'_u k' + R'' v''_u i''}{R' k' + R'' i''} t \quad (29)$$

wo  $t =$  Pfostenhöhe.

Die Querkraft des Pfostens ist

$$H = \frac{M_o'' + M_u''}{t} = \frac{R' h' + R'' i''}{t} \quad \dots \quad (30)$$

angenähert

$$= \frac{(R' + R'')c}{2t} \quad \dots \quad (30a)$$

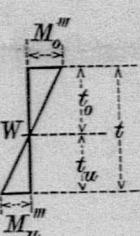


Abb. 15.

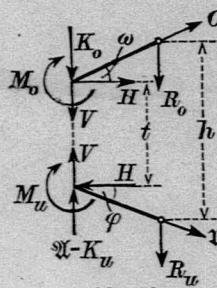


Abb. 16.

Für den Endpfosten (Abb. 16) erhält man in ähnlicher Weise

$$\left. \begin{aligned} V &= -K_o + \mathfrak{D} \sin \omega - R_o = -K_o - \frac{M_o \operatorname{tg} \omega}{h} - R v_o \\ &= -\left( \mathfrak{A} - K_u - \frac{M_u \operatorname{tg} \varphi}{h} \right) v_o - \left( K_o + \frac{M_o \operatorname{tg} \omega}{h} \right) v_u \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$M_o = R_o i = R v_o i; \quad M_u = R_u i = R v_u i. \quad \dots \quad (32)$$

$$t^o = v_o t; \quad t_u = v_u t. \quad \dots \quad (33)$$

$$H = \frac{R i}{t} \quad \dots \quad (34)$$

Zeichnerische Bestimmung der Stammwerte. Der Einfluß einer beliebigen lotrechten Belastung auf die innern Kräfte eines Feldes kann ersetzt werden durch den von zwei an den Auflagern wirkenden lotrechten Kräften  $A''$  und  $-B'$ , wo

$A''$  = Linker Auflagerdruck der rechts vom Feld gelegenen Knotenlasten,

$B'$  = Rechter Auflagerdruck der links vom Feld gelegenen Knotenlasten.

$A''$  und  $-B'$  sind nun nach den 3 Richtungen  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{U}$  und  $R$  (lotrecht durch die Wendepunkte) zu zerlegen. Verlängert man in Abb. 17 die beiden Gurtstäbe bis zu den

Auflagerlotrechten, so stellen in dem Kraftviereck 1 2 3 4 die Strecken 1 2 ( $= r''$ ), 2 3 ( $= o''$ ), 1 4 ( $= u''$ ) die Kräfte  $R''$ ,  $\mathfrak{D}''$ ,  $\mathfrak{U}''$  dar, die durch  $A''$  hervorgerufen werden, wenn  $A''$  durch die Trägerhöhe  $h$  an den Wendepunkten dargestellt wird.

Es ist also  $\mathfrak{D}'' = -\frac{A'' o''}{h}$ ,  $\mathfrak{U}'' = \frac{A'' u''}{h}$ ,  $R'' = \frac{A'' r''}{h}$  (nach unten gerichtet).

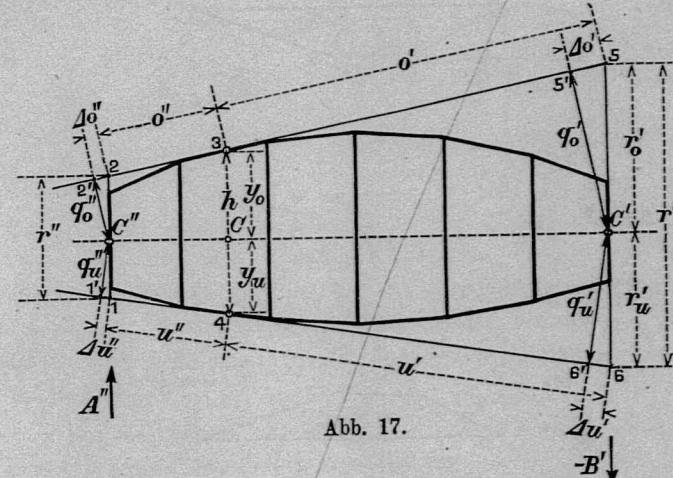


Abb. 17.

Ebenso sind die der linksseitigen Belastung entsprechenden Kräfte

$$\mathfrak{D}' = -\frac{B' o'}{h}, \quad \mathfrak{U}' = \frac{B' u'}{h}, \quad R' = \frac{B' r'}{h} \quad (\text{nach oben gerichtet}).$$

Um nun noch die Kräfte  $R'$  und  $R''$  auf beide Gurtstäbe zu verteilen, lege man die Punkte  $C'$  und  $C''$  in den Auflagerlotrechten derart, daß sie die Strecken  $r'$  und  $r''$  im Verhältnis  $\frac{v_o}{v_u} = \frac{J_o \cos \omega}{J_u \cos \varphi}$  teilen. Die Teilstrecken  $r'_o r'_u r''_o r''_u$  entsprechen sodann den Kräften  $R'_o R'_u R''_o R''_u$ . Dieselben sind noch parallel und senkrecht zu den Richtungen der Gurtstäbe zu zerlegen, wie dies in Abb. 17 geschehen ist. Man erhält die Strecken  $\Delta o' \Delta o'' \Delta u' \Delta u'' q'_o q''_o q'_u q''_u$ , die den Stabkräften  $\Delta O' \Delta O'' \Delta U' \Delta U'' Q'_o Q''_o Q'_u Q''_u$  entsprechen.

Die Verhältnisse der einzelnen Strecken zur Höhe  $h$  stellen diejenigen Kräfte  $\alpha$  und  $\beta$  dar, die durch  $A''=1$  bzw.  $B''=-1$  in den Stäben hervorgerufen werden.

Schließlich erhält man die gesamten Stabkräfte durch Addition der beiden Teilkräfte,  $O=O'+O''$ ,  $U=U'+U''$   $R=R'+R''$  usw.

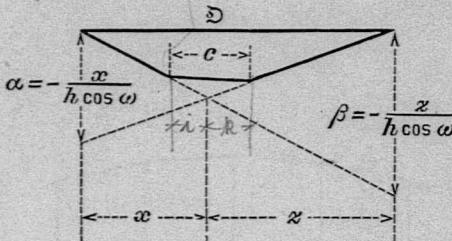


Abb. 18.

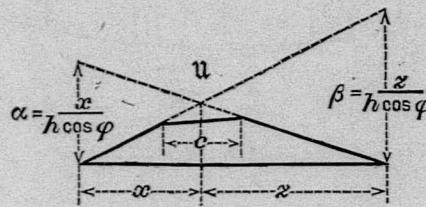


Abb. 19.

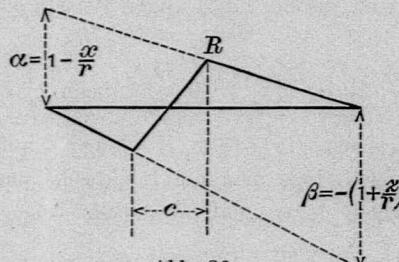


Abb. 20.

Die Einflußlinien der verschiedenen Stabkräfte und Stabmomente setzen sich aus denen der drei Urkräfte  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{U}$  und  $R$  zusammen. Letztere sind in den Abb. 18, 19 u. 20 dargestellt.

Hierin bezeichnen  $x$  und  $z$  die Abszissen der Wendepunkte des betr. Feldes,  $h$  die Trägerhöhe daselbst,  $r$  die

Entfernung des Feldgegenpunkts von den Wendepunkten (siehe Abb. 11),  $\alpha$  und  $\beta$  diejenigen Kräfte, die durch die Auflagerkräfte  $A=1$  und  $B=-1$  in den betr. Stäben hervorgerufen werden.

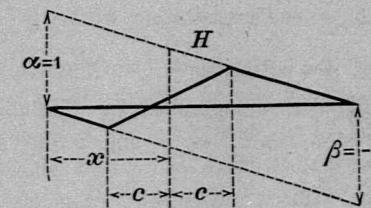


Abb. 21.

Abb. 21 zeigt die Einflußlinie der Pfostenquerkraft  $H$  eines Parallelträgers;  $x$  bezeichnet hierbei die Abszisse des Pfostens. Nach Ermittlung der maßgebenden Längskräfte  $S$ , Querkräfte  $Q$  und Biegemomente der einzelnen Stäbe lassen sich die zugehörigen Spannungen in bekannter Weise bestimmen.

Bei elastischem Material ist die größte Normalspannung der äußersten Fasern

$$\sigma = \frac{S}{F} + \frac{M}{W} = \frac{1}{F} \left( S + \frac{M}{w} \right)$$
, wo  $F$  = Querschnitt,  $W$  = Widerstandsmoment,  $w = \frac{W}{F}$ ; und die Schubspannung der Schwerpunktfasern  $\tau = \frac{Q}{\gamma F}$ , wo  $\gamma$  ein von der Querschnittsform abhängiger Beiwert. Für Querschnitte mit dünner Mittelrippe wird genau genug  $\gamma F = f$  = Querschnitt der Mittelrippe.

Die Schubspannungen sind unter gewöhnlichen Verhältnissen meist ohne größere Bedeutung, desgleichen die schiefen Wandspannungen  $\xi = \frac{3}{8} \sigma + \frac{5}{8} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ . Bei den Pfosten überwiegt in der Regel der Einfluß des Moments  $M (= Hy)$  den der Längskraft  $S (= V)$ , insbesondere bei Parallelträgern bedeutend. Hier treten dementsprechend nach Abb. 21 die größten Beanspruchungen bei einseitiger Belastung auf.

Bei den Gurtstäben kommen im allgemeinen beide Einflüsse in Betracht. Näheren Aufschluß hierüber gibt die Einflußlinie von  $S + \frac{M}{w}$  für den ungünstigsten Querschnitt nächst dem Knoten. Für einen Parallelträger wird  $S + \frac{M}{w} = \frac{\mathfrak{M}}{h} + \frac{\Omega a}{2w}$ , wo  $a$  = Abstand des betrachteten Querschnitts von Feldmitte.

Die Gestalt der entsprechenden Einflußlinie ist aus Abb. 22 u. 23 zu ersehen, wo  $x$  und  $z$  die Abszissen des

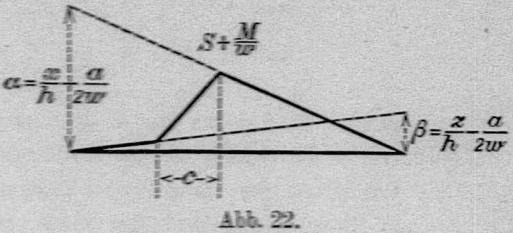


Abb. 22.

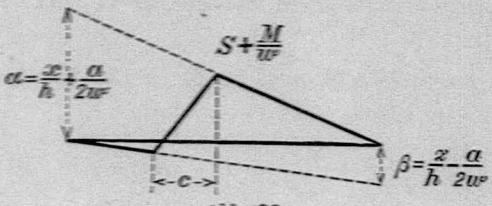


Abb. 23.

Wendepunktes des betreffenden Feldes bezeichnen. Wenn, wie in Abb. 22,  $\beta = \frac{z}{h} - \frac{a}{2w}$  positiv ist, dann wirkt Vollbelastung am ungünstigsten; andernfalls (Abb. 23) einseitige Belastung. Der Grenzfall ergibt sich für  $\beta = 0$ , d. h.  $\frac{w}{a} = \frac{h}{2z}$ . In Trägermitte wird der Grenzwert  $\frac{w}{a} = \frac{h}{l}$ , am Trägerende  $\frac{w}{a} = \frac{h}{2l}$ . In den meisten Fällen der Anwendung wird  $\frac{w}{a} > \frac{h}{2z}$  und somit Vollbelastung maßgebend sein. Noch mehr ist dies der Fall bei den Vieleckträgern, wo die Stab-

momente  $M$  kleiner und die Stabkräfte  $S$  größer sind als bei Parallelträgern.

Setzt man in der Gleichung  $\sigma = \frac{S}{F} + \frac{M}{W}$  die für einen Querschnitt  $a$  des unteren Gurtstabes gültigen Werte nach Gl. 25 und 26 ein, so erhält man

$$\sigma_u = \left[ \frac{\mathfrak{M}_u}{h \cos \varphi} + R v_u \sin \varphi \right] : F_u + \frac{R v_u a}{W_u}. \quad (35)$$

Das Glied  $R v_u \sin \varphi$  ist sehr klein, bei Parallelträgern und gleichförmig belasteten Parabelträgern gleich Null; es soll für die folgende Untersuchung außer acht bleiben. Bei lotrechter Belastung ist  $\mathfrak{M}_u = \mathfrak{M}_o = \mathfrak{M}$  = äußeres Kraftmoment bezüglich der Lotrechten durch die Wendepunkte des Feldes.

Der Verteilungsbeiwert  $v_u$  ist nach Gl. 21:  $v_u = \frac{J_u \cos \varphi}{J_o \cos \omega + J_u \cos \varphi}$ . Ferner ist  $W_u = \frac{J_u}{e_u}$ . Unter Berücksichtigung dieser Angaben geht Gl. 35 über in

$$\sigma_u = \frac{\mathfrak{M}}{h F_u \cos \varphi} + \frac{R a e_u}{J_o \cos \omega + J_u \cos \varphi} \quad (35a)$$

In ähnlicher Weise erhält man für die obere Gurtung

$$\sigma_o = \left[ \frac{\mathfrak{M}_o}{h \cos \omega} + R v_o \sin \omega \right] : F_o + \frac{R v_o a}{W_o} \text{ bzw. } = \frac{\mathfrak{M}}{h F_o \cos \omega} + \frac{R a e_o}{J_o \cos \omega + J_u \cos \varphi} \quad (36, 36a)$$

$\sigma_u$  wird gleich  $\sigma_o$ , wenn  $F_u \cos \varphi = F_o \cos \omega = F$  und  $e_u = e_o = e$ ,

$$\sigma_u = \sigma_o = \frac{\mathfrak{M}}{h F} + \frac{R a e}{J_o \cos \omega + J_u \cos \varphi} \quad (37)$$

$$= \frac{\mathfrak{M}}{h F} + \frac{R a e}{2 J}, \quad (37a)$$

wenn gleichzeitig auch  $J_o \cos \omega = J_u \cos \varphi = J$

Werden die Querschnittsgrößen des einen Gurtstabs, z. B. des unteren, vergrößert, so wird hierdurch nicht nur die gesamte Spannung dieses Gurtstabs (reine Zugspannung + Biegungsspannung) gemindert, sondern auch die Biegsbeanspruchung der anderen Gurtung. Bezeichnet man die

betreffenden Vergrößerungen mit  $\Delta F$  und  $\Delta J$ , so erhält man für Parallelträger, wo  $R = \Omega$ ,

$$\sigma_u = \frac{\mathfrak{M}}{h(F + \Delta F)} + \frac{\Omega a e_u}{2J + \Delta J}, \quad \sigma_o = \frac{\mathfrak{M}}{hF} + \frac{\Omega a e_o}{2J + \Delta J} \quad (38)$$

Vorstehende Gleichungen zeigen, daß der Querschnittszuwachs  $\Delta F$  nur bei dem betreffenden Gurtstab wirksam wird, daß dagegen die Vermehrung des Trägheitsmoments  $\Delta J$  beiden Gurtstäben in gleicher Weise zugute kommt. Die Biegungsbeanspruchungen fallen bei gleichbreiten Gurtungen ( $e_u = e_o$ ) gleich groß aus; sie werden bei der schwächeren Gurtung sogar geringer, wenn dieselbe schmäler ist ( $e_o < e_u$ ).

Durch die Vergrößerung des Trägheitsmoments der einen Gurtung wird gleichzeitig auch die Biegungsbeanspruchung der Pfosten vermehrt, da nunmehr der Momenten-Nullpunkt aus der Pfostenmitte heraustritt und sich von der verstärkten Gurtung entfernt. Das betreffende Maß berechnet sich zu

$\Delta t = \frac{t \Delta J}{2(2J + \Delta J)}$ . Für  $\Delta J = \infty$  wird  $\Delta t = \frac{t}{2}$ , d. h. der Nullpunkt rückt in die andere Gurtung. In der Entfernung  $a$  von Pfostenmitte wird das Biegunsmoment

$$\left. \begin{aligned} M_a &= H(\Delta t + a) = H\left(\frac{t \cdot \Delta J}{2(2J + \Delta J)} + a\right); \\ &= Ht \text{ für } a = \frac{t}{2} \text{ und } \Delta J = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Die einseitigen Verstärkungen sind hiernach nur für die Gurtstäbe von Vorteil, für die Pfosten jedoch von Nachteil.

Derartige Verstärkungen der einen Gurtung werden in größerem Maßstab durch die Mitwirkung der anschließenden, mit ihr fest verbundenen Fahrbahnkonstruktion verursacht. Insbesondere ist dies bei Eisenbetonbrücken der Fall. Wieviel von dem Querschnitt der Fahrbahnkonstruktion (Platte oder Plattenbalken) dem Gurtquerschnitt zuzurechnen ist, ist im gegebenen Falle angemessen abzuschätzen. Dabei wird man, soweit es sich um die Gurtbeanspruchung handelt, lieber zu wenig annehmen; soweit es sich aber um die Pfosten handelt, den hier ungünstigsten Fall, daß der volle Fahrbahnquerschnitt

zur Mitwirkung kommt, in Rechnung stellen. Bei eisernen Brücken wäre das ganze Trägheitsmoment der durchlaufenden Fahrbahnlangsträger als  $\Delta J$  zu rechnen, wenn die Querträger unendlich steif wären. In Wirklichkeit ist jedoch nur ein Bruchteil wirksam, infolge der bei der Kraftübertragung eintretenden Formänderung der Querträger. Sind die Längsträger als freiaufliegende Einzelträger ausgebildet, so wird naturgemäß  $\Delta J = 0$ . Der Betrag  $\Delta F$ , der durch die Längsträger den Gurtungen geliefert wird, ist im allgemeinen sehr gering und wird am besten vollständig vernachlässigt.

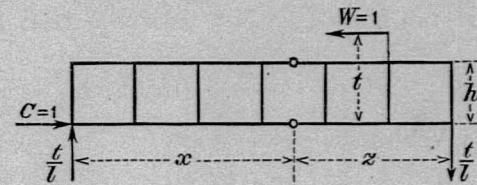


Abb. 24.

Mit der Unterstützung der Hauptträger durch die Fahrbahnkonstruktion ist selbstverständlich eine entsprechende Mehrbeanspruchung der letzteren verbunden, die bei der Dimensionierung berücksichtigt werden sollte.

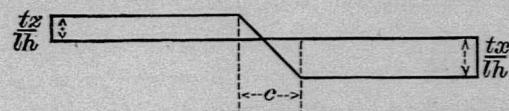


Abb. 25.

**Wagerechte Belastungen.** Auch hierfür sind die allgemeinen Gl. 17 bis 34 gültig. Für eine in der Höhe  $t$  über den Auflagern wandernde wagerechte Einzellast  $W = 1$  (Abb. 24) erhält man, Parallelträger vorausgesetzt, folgende Einflußlinien:

$$\text{Obergurtstab } O = \frac{t_z}{l_h} \text{ (Last links vom Feld),}$$

$$O = -\frac{tx}{l_h} \text{ (Last rechts vom Feld) (Abb. 25).}$$

Ungünstigste Laststellung von  $0 - x$  oder von  $x - L$ . Bei einer gleichmäßigen wagerechten Belastung  $w$  für die Längeneinheit wird  $\max O = \text{rund } \pm w \frac{txz}{lh}$ .



Abb. 26.

Für Vollbelastung wird  $O = 0$ .

Untergurtstab  $U = -\frac{tz}{lh}$  (Last links vom Feld) (Abb. 26),

$$U = -\left(1 - \frac{tx}{lh}\right) \text{ (Last rechts vom Feld),}$$

$\max U$  bei Vollbelastung  $= -wx$ .

Wandquerkraft  $R = Q = \frac{t}{l}$ , für jedes Feld und für jede Lastlage.

Von dieser Wandquerkraft trifft auf jeden oberen Gurtstab der Betrag  $Q_o = \frac{t}{l} v_o$  und auf jeden unteren Gurtstab der Betrag  $Q_u = \frac{t}{l} v_u$ .

Bei gleich starken Gurtungen wird  $v_o = v_u = \frac{1}{2}$  und  $Q_o = Q_u = \frac{t}{2l}$ .

Die Querkraft der Endpfosten ist  $H = \frac{tc}{2lh}$ , die der Zwischenpfosten  $H = \frac{tc}{lh}$ .

Bei entgegengesetzter Lastrichtung drehen sich die Vorzeichen um. Für die Anwendung ist zu beachten, daß, wenn es sich bei den wagerechten Belastungen um Bremsschrauben handelt, stets gleichzeitig auch lotrechte Belastungen vorhanden sind, die an den gleichen Punkten, den Schwerpunkten der Fahrzeuge, angriffen. Es ist in diesem Falle eine kombinierte Einflußlinie beider Belastungsarten aufzugeben, wobei die Einflußlinie der Bremsschraube nur mit  $\frac{1}{2}$  in Rechnung zu stellen ist. Da hierauf der Einfluß der lot-

rechten Belastungen weit überwiegt, so wird die ungünstigste Stellung der kombinierten Belastung in der Regel mit der der lotrechten Belastung übereinstimmen.

Einfluß der Anschlußverstärkungen (Abrundungen, Abschrägungen, Abb. 27). a) Bei Bestimmung der Wendepunkte (Gl. 14) und der Lastverteilung auf beide Gurtungen (Gl. 16) war die übliche Voraussetzung gemacht worden, daß sich die einzelnen Stäbe mit konstantem Trägheitsmoment von Knotenpunkt zu Knotenpunkt erstreckten. In Wirklich-

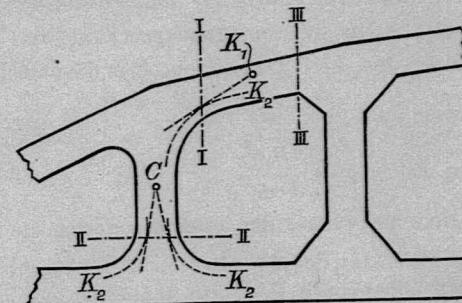


Abb. 27.

keit ist dies nicht der Fall; infolge der Anschlußverstärkungen nehmen die Trägheitsmomente gegen die Knoten hin zu, und wegen der Nachbarpfosten werden die wirksamen Stablängen um die entsprechenden Pfostenbreiten gegenüber den Netzlängen (Knotenpunktsentfernung) gemindert. Hierdurch werden jedoch in den Fällen der Anwendung die Ergebnisse entweder gar nicht (symmetrischer Parallelträger) oder nur ganz unwesentlich beeinflußt, so daß die gemachte Voraussetzung beibehalten werden darf. Bei schärferer Rechnung wären, statt  $J_o$  und  $J_u$  der Mittelstrecken, Mittelwerte  $J_{om}$  und  $J_{um}$  der Gesamtstrecken einzuführen, die sich genau

genug aus  $\frac{1}{J_m} = \frac{24}{c_1^2} \int_0^{c_1/2} \frac{x^2 dx}{J}$  ergeben, wo  $x$  = Entfernung der

Querschnitte von Feldmitte,  $c_1$  = theoretische Feldweite weniger Pfostenbreite ( $= c - b$ ). Wenn  $\frac{J_{mo}}{J_{mu}} = \frac{J_o}{J_u}$  wird, erhält man genau die alten Gleichungen (14) u. (16).

Ungünstigste Laststellung von  $0 - x$  oder von  $x - l$ . Bei einer gleichmäßigen wagerechten Belastung  $w$  für die Längeneinheit wird  $\max O = \text{rund } \pm w \frac{txz}{lh}$ .

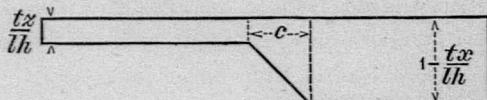


Abb. 26.

Für Vollbelastung wird  $O = 0$ .

Untergurtstab  $U = -\frac{t_z}{lh}$  (Last links vom Feld) (Abb. 26),

$$U = -\left(1 - \frac{tx}{lh}\right) \text{ (Last rechts vom Feld)},$$

$\max U$  bei Vollbelastung  $= -wz$ .

Wandquerkraft  $R = Q = \frac{t}{l}$ , für jedes Feld und für jede Lastlage.

Von dieser Wandquerkraft trifft auf jeden oberen Gurtstab der Betrag  $Q_o = \frac{t}{l} v_o$  und auf jeden untern Gurtstab der Betrag  $Q_u = \frac{t}{l} v_u$ .

Bei gleich starken Gurtungen wird  $v_o = v_u = \frac{1}{2}$  und  $Q_o = Q_u = \frac{t}{2l}$ .

Die Querkraft der Endpfosten ist  $H = \frac{tc}{2lh}$ , die der Zwischenpfosten  $H = \frac{tc}{lh}$ .

Bei entgegengesetzter Lastrichtung drehen sich die Vorzeichen um. Für die Anwendung ist zu beachten, daß, wenn es sich bei den wagerechten Belastungen um Bremskräfte handelt, stets gleichzeitig auch lotrechte Belastungen vorhanden sind, die an den gleichen Punkten, den Schwerpunkten der Fahrzeuge, angreifen. Es ist in diesem Falle eine kombinierte Einflußlinie beider Belastungsarten maßgebend, wobei die Einflußlinie der Bremskraft nur mit  $\frac{1}{l}$  in Rechnung zu stellen ist. Da hiernach der Einfluß der lot-

rechten Belastungen weit überwiegt, so wird die ungünstigste Stellung der kombinierten Belastung in der Regel mit der der lotrechten Belastung übereinstimmen.

Einfluß der Anschlußverstärkungen (Abrundungen, Abschrägungen, Abb. 27). a) Bei Bestimmung der Wendepunkte (Gl. 14) und der Lastverteilung auf beide Gurtungen (Gl. 16) war die übliche Voraussetzung gemacht worden, daß sich die einzelnen Stäbe mit konstantem Trägheitsmoment von Knotenpunkt zu Knotenpunkt erstreckten. In Wirklich-

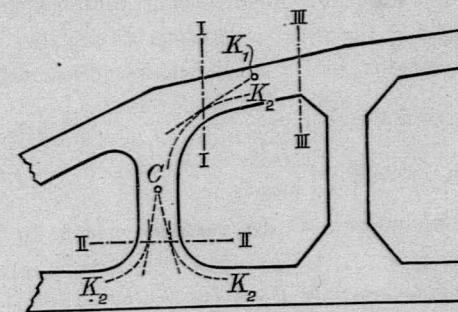


Abb. 27.

keit ist dies nicht der Fall; infolge der Anschlußverstärkungen nehmen die Trägheitsmomente gegen die Knoten hinzu, und wegen der Nachbarpfosten werden die wirksamen Stablängen um die entsprechenden Pfostenbreiten gegenüber den Netzlängen (Knotenpunktsentfernung) gemindert. Hierdurch werden jedoch in den Fällen der Anwendung die Ergebnisse entweder gar nicht (symmetrischer Parallelträger) oder nur ganz unwesentlich beeinflußt, so daß die gemachte Voraussetzung beibehalten werden darf. Bei schärferer Rechnung wären, statt  $J_o$  und  $J_u$  der Mittelstrecken, Mittelwerte  $J_{om}$  und  $J_{um}$  der Gesamtstrecken einzuführen, die sich genau

genug aus  $\frac{1}{J_m} = \frac{24}{c_1^2} \int_0^{c_1/2} x^2 dx / J$  ergeben, wo  $x$  = Entfernung der

Querschnitte von Feldmitte,  $c_1$  = theoretische Feldweite weniger Pfostenbreite ( $= c - b$ ). Wenn  $\frac{J_{mo}}{J_{mu}} = \frac{J_o}{J_u}$  wird, erhält man genau die alten Gleichungen (14) u. (16).

b) Durch die Anschlußverstärkungen werden die Biegsungsspannungen der Stäbe wesentlich verringert. Der ungünstigste Querschnitt liegt nicht mehr beim Knoten, sondern innerhalb oder beim Beginn der Verstärkung, wo das Biegungsmoment geringer ist als am Knoten. Handelt es sich um eine Abrundung (Abb. 27 links), so liegt der ungünstigste Querschnitt I-I etwa dort, wo eine Tangente vom Kernpunkt  $K_1$  des Wendekernquerschnitts aus die Kernlinie  $K_2$  berührt. Zur Bestimmung des ungünstigsten Pfostenquerschnitts II-II ist die Tangente an die Kernlinien  $K_2$  vom Pfostenwendepunkt  $C$  aus zu ziehen. Die Biegsungsbeanspruchung der äußersten geraden Faser des um  $\alpha$  von dem Wendekernquerschnitt entfernten Querschnitts I-I ist  $\sigma = \frac{R_o \cdot ae}{J}$ , die der äußersten gekrümmten Faser  $\sigma = \frac{R_o ae}{J \cos^2 \alpha}$ , . . . . . (40)

wo  $\alpha$  den Neigungswinkel der Tangente gegen die Stabachse bezeichnet.

Für den Querschnitt II-II ist ähnlich  $\sigma = \frac{Hae}{Y \cos^2 \alpha}$ , wo  $Y$  = Trägheitsmoment des Querschnitts.

Bei Abschrägungen (Abb. 27 rechts) liegt der ungünstigste Querschnitt III-III in der Regel beim Beginn derselben; ausnahmsweise, bei sehr flacher Abschrägung, am Ende derselben, am Knoten. Infolge der plötzlichen Richtungsänderung beim Querschnitt III-III tritt hier eine etwas andere Spannungsverteilung ein, als wie die gewöhnliche Rechnungsweise voraussetzt; Gl. (40) ergibt zu geringe Werte für die größte Spannung  $\sigma$ . Es besteht die Gefahr von Überanstrengung bzw., bei sprödem Material, von Rißbildung. Dieser Mißstand wird durch Einlegen einer kleinen Abrundung vermieden.

Bei Bestimmung der Spannungen  $\sigma$ , die im Querschnitt I-I durch die Stabkraft  $O$  hervorgerufen werden, ist zu berücksichtigen, daß dieser Querschnitt größer ist als der Querschnitt  $F$  der mittleren Stabstrecke, und daß die Stabkraft  $O$  außerhalb des Schwerpunkts angreift. Diese beiden Umstände sind von entgegengesetztem Einfluß auf die Spannung der äußersten geraden Faser. In den meisten Fällen kann man

genau genug annehmen, daß sie sich aufheben und einfach  $\sigma = \frac{O}{F}$  setzen.

Was die Spannungen innerhalb der Knoten anbelangt, so ist eine genaue theoretische Bestimmung derselben nicht durchführbar, ebensowenig wie bezüglich der Spannungen in den Knoten von Fachwerkträgern. Hier kann nur von sorgfältig angestellten Versuchen näherer Aufschluß erwartet werden. Für die Praxis genügt es, wenn auf Grund der bisherigen Erfahrungen und allgemeiner Überlegungen Dimensionen ausgeführt werden, welche zum mindesten die gleiche Sicherheit bieten wie die Querschnitte der freien Strecken. Dieser Gegenstand liegt außerhalb des Rahmens dieser Abhandlung; es wird daher hier nicht näher darauf eingegangen.

#### Die Zuschlagwerte.

Es wird zunächst ein zur wagrechten Längsachse symmetrischer Parallelträger vorausgesetzt, wobei  $J_o = J_u$ . Man denke sich die Pfosten in ihrer Mitte C durchschnitten

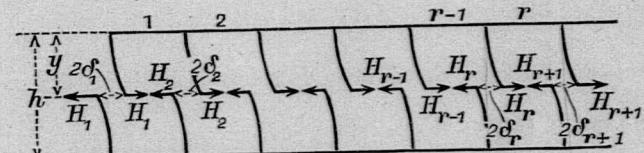


Abb. 28.

und die Stammwerte V und H daselbst angebracht. Bei unendlich großen Trägheitsmomenten der Pfosten blieben die Schnittflächen aufeinander; bei den vorhandenen endlichen Werten  $Y$  dieser Größen verschieben sich jedoch die Schnittflächen infolge der Pfostenverbiegung in ihrer Ebene gegeneinander, indem sie sich von der ursprünglichen Lage um die Beträge  $\delta = \frac{Hy^3}{3EY}$ , wo  $y = \frac{h}{2}$ , nach entgegengesetzten Seiten hin bewegen (Abb. 28). Änderungen ihrer gegenseitigen Neigung und ihres senkrechten Abstands treten hierbei der Symmetrie wegen nicht auf. Die Entfernungänderung zweier

aufeinanderfolgenden Pfostenmittelpunkte  $C_r$  und  $C_{r+1}$  beträgt  $\delta_r - \delta_{r+1} = \frac{H_r y^3}{3 E Y_r} - \frac{H_{r+1} y^3}{3 E Y_{r+1}}$ .

Diese Entfernungsänderungen müssen nun durch die „Zuschlagwerte“ wieder rückgängig gemacht werden. Es genügt zu diesem Zweck, in den Pfostenmitten  $C$  wagrechte Kräfte  $Z$  anzubringen, die im allgemeinen den Stammkräften  $H$  entgegengesetzt gerichtet sind (Abb. 29). Hierdurch entstehen in den Gurtstäben Zuschlagsmomente  $X$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Im } r^{\text{ten}} \text{ Feld ist } X_r = y \sum_0^r Z; \\ \text{im } (r-1)^{\text{ten}} \text{ Feld ist } X_{r-1} = y \sum_0^{r-1} Z; \end{array} \right\} \quad (41)$$

$\sum Z_y - \sum Z_y = Z_r y$

durch Subtraktion folgt

$$Z_r = \frac{X_r - X_{r-1}}{y} \quad \dots \quad (42)$$

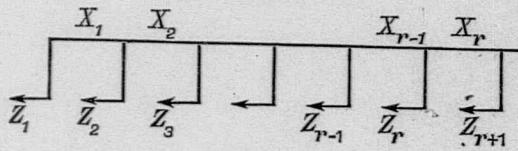


Abb. 29.

Durch die Wirkung der  $Z$  und  $X$  ändert sich die Entfernung der Punkte  $C_r$  und  $C_{r+1}$  um  $\frac{X_r c y}{E J_r} + \frac{Z_r y^3}{3 E Y_r} - \frac{Z_{r+1} y^3}{3 E Y_{r+1}}$ . Indem man diesen Betrag gleich der durch die Stammkräfte bewirkten Entfernungsänderung  $\delta_r - \delta_{r+1}$  setzt, erhält man nach Multiplikation mit  $\frac{E}{y}$  die Grundgleichung

$$\frac{X_r c}{J_r} + \frac{Z_r y^2}{3 Y_r} - \frac{Z_{r+1} y^2}{3 Y_{r+1}} = \frac{H_r y^2}{3 Y_r} - \frac{H_{r+1} y^2}{3 Y_{r+1}} \quad (43)$$

und nach Ersatz der  $Z$  durch die  $X$  nach Gl. (42)

$$\frac{X_r c}{J_r} + \frac{X_r - X_{r-1}}{y} \cdot y - \frac{X_{r+1} - X_r}{3 Y_{r+1}} y = \frac{H_r y^2}{3 Y_r} - \frac{H_{r+1} y^2}{3 Y_{r+1}} \quad (44)$$

Vorstehende Grundgleichung 44 kann man  $n$  mal, d. h. ebenso oftmal aufstellen, als unbekannte  $X$  vorhanden sind; man erhält die Gleichungsgruppe

$$\left. \begin{array}{l} \frac{X_1 c}{J_1} + \frac{X_1 y}{3 Y_1} - \frac{(X_2 - X_1) y}{3 Y_2} = \frac{H_1 y^2}{3 Y_1} - \frac{H_2 y^2}{3 Y_2} \\ \frac{X_2 c}{J_2} + \frac{(X_2 - X_1) y}{3 Y_2} - \frac{(X_3 - X_2) y}{3 Y_3} = \frac{H_2 y^2}{3 Y_2} - \frac{H_3 y^2}{3 Y_3} \\ \frac{X_3 c}{J_3} + \frac{X_3 - X_2}{3 Y_3} y - \frac{(X_4 - X_3) y}{3 Y_4} = \frac{H_3 y^2}{3 Y_3} - \frac{H_4 y^2}{3 Y_4} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array} \right\} \quad (44)$$

$$A = \frac{(R' + R'') c}{2 t} \quad (30a)$$

$$4_A = \frac{R'' c}{2 t} \quad R.f. \text{ Parallelogramm}$$

$$t = 2y \quad 4_A = \frac{Q_A c}{4 y}$$

Für lotrechte Belastung wird

$$H_1 = \frac{\mathfrak{Q}_1 c}{4 y}; \quad H_2 = \frac{(\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2) c}{4 y}; \quad H_r = \frac{(\mathfrak{Q}_{r-1} + \mathfrak{Q}_r) c}{y},$$

und Querkraft  $\mathfrak{Q}_r = A - \sum_0^r K$ , wo  $K$  = Knotenlast.

Führt man diese Werte in die Gleichungsgruppe 44 ein und setzt  $Y_1 = Y_2 = Y_r = Y$ , so erhält man

$$\left. \begin{array}{l} \frac{X_1 c}{J_1} + \frac{X_1 y}{3 Y_1} - \frac{(X_2 - X_1) y}{3 Y_2} = \frac{\mathfrak{Q}_1 c y}{12 Y_1} \\ - \frac{(\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2) c y}{12 Y_2} = - \frac{\mathfrak{Q}_2 c y}{12 Y} = - \frac{(A - K_1 - K_2) c y}{12 Y} \\ \frac{X_2 c}{J_1} + \frac{(X_2 - X_1) y}{3 Y_2} - \frac{(X_3 - X_2) y}{3 Y_3} = \frac{(\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2) c y}{12 Y_3} \\ - \frac{(\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_3) c y}{12 Y_3} = \frac{(\mathfrak{Q}_1 - \mathfrak{Q}_3) c y}{12 Y} = \frac{(K_2 + K_3) c y}{12 Y} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \frac{X_r c}{J_r} + \frac{(X_r - X_{r-1}) y}{3 Y_r} - \frac{(X_{r+1} - X_r) y}{3 Y_{r+1}} = \frac{(\mathfrak{Q}_{r-1} + \mathfrak{Q}_r) c y}{12 Y_r} \\ - \frac{(\mathfrak{Q}_r + \mathfrak{Q}_{r+1}) c y}{12 Y_{r+1}} = \frac{(\mathfrak{Q}_{r-1} - \mathfrak{Q}_{r+1}) c y}{12 Y} = \frac{(K_r + K_{r+1}) c y}{12 Y} \end{array} \right\} \quad (45)$$

Handelt es sich um die Bestimmung der Einflußlinien  $X$ , so werden jeweils alle Knotenlasten bis auf die eine  $K_r$  gleich Null, und es erhalten nur vier Gleichungen der Gruppe 45, die 1<sup>te</sup>, (r-1)<sup>te</sup>, r<sup>te</sup>, n<sup>te</sup>, eine rechte Seite. Es gestattet dies eine einfachere Auflösung der Gleichungen, nach Art des bekannten Winklerschen Verfahrens bei durchgehenden Trägern, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll.

Eine genaue Bestimmung der Größen  $X$  ist in den gewöhnlichen Fällen der Anwendung, wo  $J:Y$  nicht über-

mäßig groß ist, nicht erforderlich, da es sich bei diesen Zuschlagwerten nur um verhältnismäßig kleine Größen handelt; es genügen in der Regel Näherungsverfahren. Einfache Näherungswerte von ausreichender Größe erhält man, wenn man in Gleichung 43 die Glieder mit  $Z$ , die sich zum großen Teil aufheben, wegläßt. Es entspricht dies einer Vernachlässigung der Pfostenverbiegung bei der Wirkung der Zuschlagkräfte. Letztere werden dadurch im allgemeinen etwas zu groß erhalten; die Genauigkeit wächst mit zunehmender Pfostenstärke. Die Näherungswerte lauten

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{J_1 y^2}{3c} \left( \frac{H_1}{Y_1} - \frac{H_2}{Y_2} \right); & X_2 &= \frac{J_2 y^2}{3c} \left( \frac{H_2}{Y_2} - \frac{H_1}{Y_1} \right); \\ X_r &= \frac{J_r y^2}{3c} \left( \frac{H_r}{Y_r} - \frac{H_{r+1}}{Y_{r+1}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Für lotrechte Belastung und gleich große  $Y$  wird

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{J_1 y}{12} \left( \frac{\mathfrak{Q}_1}{Y_1} - \frac{(\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2)}{Y_2} \right) = -\frac{J_1 y}{12 Y} \mathfrak{Q}_2 \\ &= -\frac{J_1 y}{12 Y} (A - K_1 - K_2) \\ X_2 &= \frac{J_2 y}{12} \left( \frac{\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2}{Y_2} - \frac{\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_3}{Y_3} \right) = \frac{J_2 y}{12 Y} (\mathfrak{Q}_1 - \mathfrak{Q}_3) \\ &= \frac{J_2 y}{12 Y} (K_2 + K_3) \\ X_r &= \frac{J_r y}{12} \left( \frac{\mathfrak{Q}_{r-1} + \mathfrak{Q}_r}{Y_r} - \frac{\mathfrak{Q}_r + \mathfrak{Q}_{r+1}}{Y_{r+1}} \right) = \frac{J_r y}{12 Y} (\mathfrak{Q}_{r-1} - \mathfrak{Q}_{r+1}) \\ &= \frac{J_r y}{12 Y} (K_r + K_{r+1}) \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Der negative Wert von  $X_1$  in Gleichung 47 röhrt davon her, daß das Trägheitsmoment  $Y_1$  des Endpfostens ebenso groß wie das seines Nachbarpfostens  $Y_2$  gewählt wurde, obwohl die von ihm aufzunehmende Kraft  $H_1$  nicht wesentlich größer als  $\frac{1}{2}H_2$  ist. Setzt man  $Y_1 = \frac{1}{2}Y_2 = \frac{1}{2}Y$ , so erhält man aus Gleichung 47 den positiven Wert

$$X_1 = \frac{K_2 y J_1}{12 Y} \quad \dots \quad (47a)$$

Der größte negative Wert von  $X_1$  folgt aus Gleichung 46 für  $Y_1 = \infty$  zu

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= -\frac{J_1 y^2 H_2}{3c Y} = -\frac{J_1 y}{12 Y} (\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2) \\ &= -\frac{J_1 y}{12 Y} (2A - 2K_1 - K_2) \end{aligned} \right\} \quad (47b)$$

Der größte positive Wert von  $X_r$  ergibt sich, wenn die anschließenden Knotenlasten  $K_r$  und  $K_{r+1}$  ihren Höchstwert  $K$  erreichen, zu

$$X_r = \frac{K y J_r}{6 Y} = \frac{K h J_r}{12 Y} \quad \dots \quad (47c)$$

Die Biegungsmomente der Gurtstäbe, deren Stammwerte an den Knoten gleich  $\pm \frac{\mathfrak{Q} c}{4}$  sind, werden nunmehr insgesamt

$$\bar{M} = \pm \frac{\mathfrak{Q} c}{4} + X \quad \dots \quad (48)$$

Bei positivem  $X$  werden die positiven Werte, bei negativem  $X$  die negativen Werte von  $\bar{M}$  größer als früher. Die Zuschlagwerte wirken also hier stets ungünstig. Die Gurtkräfte  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{S}$  werden infolge der Zuschlagkräfte ihrem Absolutwert nach

$$\bar{\mathfrak{S}}_r = \frac{\mathfrak{M}_r}{2y} - \frac{X_r}{y} = \frac{\mathfrak{M}_r}{h} - \frac{2X_r}{h} \quad \dots \quad (49)$$

Dies bedeutet in den mittleren Feldern, wo  $X$  positiv ist, eine Minderung gegenüber den Stammwerten, die jedoch gering ist und außer Betracht bleiben kann. In den Endfeldern dagegen ist  $X$  in der Regel negativ, die Gurtkraft  $\bar{\mathfrak{S}}_r$  wird größer als der Stammwert, was in der statischen Berechnung zu berücksichtigen ist.

In Abb. 30 sind für Vollbelastung die Linie der äußeren Kraftmomente  $\mathfrak{M}$  und die Stufenlinie der von den Gurtkräften  $\mathfrak{S}$  aufgenommenen Momente  $\bar{\mathfrak{S}}h$  aufgetragen. Der Unterschied beider Linien (in der Abbildung schraffiert) stellt die doppelten Werte der Gurtmomente  $\bar{M}$  dar. Die punktierte Stufenlinie entspricht den Stammwerten  $\mathfrak{S}h$  und

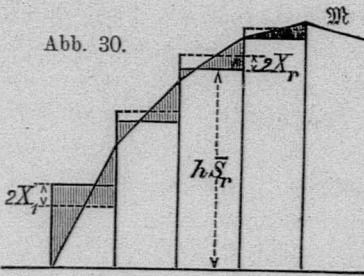


Abb. 30.

ihre Unterschied gegenüber der voll ausgezogenen Stufenlinie den Zuschlagwerten  $2X$ . Die letzteren sind hier für die mittleren Felder konstant, da alle  $K$  den gleichen Wert  $pc$  haben, und zwar

$$2X = \frac{KhJ}{6Y} = \frac{pc h J}{6Y}.$$

Für das Endfeld wird

$$2X_1 = -\frac{J_1 y (A - 1,5K)}{6Y} = -\frac{(n-3)pc h J_1}{24Y},$$

wo  $n$  die Felderzahl bezeichnet.

Die Zuschlagwerte der Zwischenpfosten ergeben sich zu

$$Z_r = \frac{X_r - X_{r-1}}{y} = \frac{Jy}{12Y} (K_{r+1} - K_{r-1}) \quad . \quad (50)$$

Ihr Größtwert wird  $Z = \frac{Jy K}{12Y}$ . Bei gleichmäßiger Vollbelastung wird  $Z = 0$ . Sie können bei der statischen Berechnung außer acht bleiben.

Der Zuschlagwert des Endpfostens wird

$$Z_1 = \frac{X_1}{y} = \frac{J_1 y}{3c} \left( \frac{H_1}{Y_1} - \frac{H_2}{Y_2} \right) \quad . \quad (51)$$

und für gleich große  $Y$ ,  $Z_1 = -J_1 \left( \frac{A - K_1 - K_2}{12Y} \right)$ , also negativ.

Die gesamte Querkraft des Endpfostens ergibt sich hiermit zu

$$\bar{H}_1 = H_1 - Z_1 = \frac{(A - K_1)c}{4y} + \frac{J_1}{12Y} (A - K_1 - K_2). \quad (51^a)$$

Mit  $c = h = 2y$ ,  $J_1 = Y$  und  $K_1 = K_2 = 0$  entspricht dies einer Erhöhung der Querkraft um  $\frac{1}{6}$  gegenüber dem Stammwert  $H_1$ .

Bei Vieleckträgern (Abb. 31), die zu einer wagrechten Längsachse symmetrisch angeordnet sind, kann in gleicher Weise, wie vorstehend bei Parallelträgern geschehen, vorgegangen werden. Nach Durchschneiden des Trägers in

der Längssymmetrieachse verschieben sich die Pfostenmitten  $C$  unter dem Einfluß der Stammkräfte  $H$  in wagrechter Richtung gegen ihre ursprüngliche Lage um die Beträge  $\delta = \frac{Hy^3}{3EY}$ .

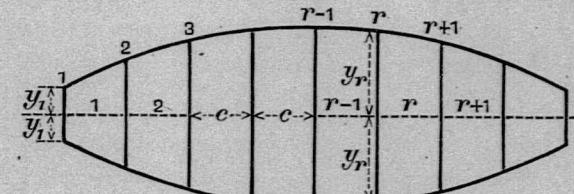


Abb. 31.

Die Entfernungänderung zweier aufeinanderfolgenden Punkte

$$C_2 \text{ und } C_{r+1} \text{ beträgt } \delta_r - \delta_{r+1} = \frac{H_r y_r^3}{3EY_r} - \frac{H_{r+1} y_{r+1}^3}{3EY_{r+1}}.$$

Sie muß durch die Wirkung der Zuschlagwerte wieder rückgängig gemacht werden. Man erhält dementsprechend (siehe Abb. 32)

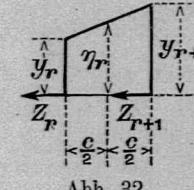


Abb. 32.

$$\delta_r - \delta_{r+1} = \int_0^s \frac{X y ds}{E J_r} + \frac{Z_r y_r^3}{3EY_r} - \frac{Z_{r+1} y_{r+1}^3}{3EY_{r+1}},$$

wo die  $X$  die in den einzelnen Gurtquerschnitten herrschenden Zuschlagsmomente bezeichnen,  $X = y \sum_0^r Z$ . Das Integral kann näherungsweise, und zwar für das Endergebnis etwas zu ungünstig, gesetzt werden

$$\int_0^s \frac{X y ds}{E J_r} = \frac{X_r \cdot \eta_r \cdot s_r}{E J_r},$$

wo  $X_r$  das Zuschlagsmoment in Gurtstabmitte und  $\eta_r$  die zugehörige Ordinate bezeichnet. Zwischen  $Z$  und  $X$  bestehen die Beziehungen

$$X_r = \eta_r \sum_0^r Z \text{ und } Z_r = \frac{X_r}{\eta_r} - \frac{X_{r-1}}{\eta_{r-1}} \quad . \quad (52)$$

Durch Gleichsetzen der durch die Stammwerte und durch die Zuschlagwerte hervorgerufenen Entfernungsänderungen erhält man die Grundgleichung

$$\frac{X_r \eta_r s_r}{J_r} + \frac{Z_r y_r^3}{3 Y_r} - \frac{Z_{r+1} y_{r+1}^3}{3 Y_{r+1}} = \frac{H_r y_r^3}{3 Y_r} - \frac{H_{r+1} y_{r+1}^3}{3 Y_{r+1}} \quad (53)$$

und nach Ersatz der  $Z$  durch die  $X$  nach Gl. 52

$$\left. \begin{aligned} \frac{X_r \eta_r s_r}{J_r} + \left( \frac{X_r}{\eta_r} - \frac{X_{r-1}}{\eta_{r-1}} \right) \frac{y_r^3}{3 Y_r} - \left( \frac{X_{r+1}}{\eta_{r+1}} - \frac{X_r}{\eta_r} \right) \frac{y_{r+1}^3}{3 Y_{r+1}} \\ = \frac{H_r y_r^3}{3 Y_r} - \frac{H_{r+1} y_{r+1}^3}{3 Y_{r+1}} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Vorstehende Grundgleichung kann  $n$  mal aufgestellt werden; aus den betr.  $n$  Einzelgleichungen lassen sich die  $n$  Zuschlagmomente  $X$ , die jeweils in Gurtstabmitte herrschen, genau bestimmen. Das Zuschlagmoment für einen beliebigen Gurtquerschnitt des  $r^{\text{ten}}$  Feldes, dessen Ordinate  $y$  beträgt, ergibt sich sodann zu  $X = X_r \frac{y}{\eta_r}$ ; am  $(r+1)^{\text{ten}}$  Knotenpunkt steigt es auf  $X = X_r \frac{y_{r+1}}{\eta_r}$ . Die Zuschlagkräfte  $Z$  werden mit Hilfe der Gl. 52 erhalten.

Auch hier ergeben sich in den gewöhnlichen Fällen der Anwendung ausreichende Näherungswerte, wenn man in Gl. 53 die Glieder mit  $Z$  vernachlässigt und setzt,

$$X_r = \frac{J_r}{\eta_r s_r} \left( \frac{H_r y_r^3}{3 Y_r} - \frac{H_{r+1} y_{r+1}^3}{3 Y_{r+1}} \right) \quad . . . \quad (55)$$

Die in vorstehender Gleichung auftretenden Stammwerte  $H$  sind nach Gl. 30 u. 34 zu berechnen. Sie sind kleiner als die von Parallelträgern unter sonst gleichen Umständen. Beachtet man außerdem noch die nach den Auflagen hin abnehmende Höhe der Ordinaten  $y$ , so erkennt man, daß die Zuschlagwerte  $X$  bei Vieleckträgern kleiner sind als bei Parallelträgern. Für gleichmäßig belastete Parabolträger werden die Stammkräfte  $H$  und somit auch die Zuschlagmomente  $X$  gleich Null.

Der Einfluß der Abrundungen kann in der früher angegebenen Weise durch Einführung von Mittelwerten  $Y_m$  und  $J_m$  an Stelle der Werte  $Y$  und  $J$  der mittleren Strecken

zum Ausdruck gebracht werden. In den meisten Fällen ist  $Y_m : J_m$  größer als  $Y : J$ , da die zweiseitige Abrundung der Pfosten stärker ins Gewicht fällt als die einseitige der Gurtstäbe. Es werden somit die Zuschlagmomente  $X$  in Wirklichkeit etwas kleiner ausfallen als den Gl. 54 u. 55 entspricht. In den gewöhnlichen Fällen der Anwendung ist der Einfluß der Abrundungen auf die Zuschlagwerte ohne Bedeutung.

Die Zuschlagspannungen der Gurtstäbe ergeben sich mit Hilfe der Näherungsformel 55 in Feldmitte zu

$$\zeta_r = \frac{X_r e_r}{J_r} = \frac{e_r}{\eta_r s_r} \left( \frac{H_r y_r^3}{3 Y_r} - \frac{H_{r+1} y_{r+1}^3}{3 Y_{r+1}} \right) \quad . . . \quad (56)$$

und für Parallelträger, unter Berücksichtigung der Gl. 47, zu

$$\zeta_r = \frac{y_e}{12 Y} (K_r + K_{r+1}) \quad . . . \quad (56^a)$$

Sie sind hiernach unabhängig vom Trägheitsmoment der Gurtstäbe und wachsen mit der Stabbreite  $2e$ .

Bei unsymmetrischen Verhältnissen, wo die Gurtungen ungleiche Gestalt (Abb. 33) oder ungleiche Trägig-

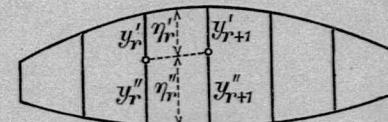


Abb. 33.

momente haben, fallen die Zuschlagmomente der beiden Gurtungen  $X'$  und  $X''$  ungleich aus. Man kann zu ihrer Berechnung auch hier näherungsweise Gl. (55) benutzen, wenn man daselbst die entsprechenden Werte  $J's'J''s''$  einführt und an Stelle der Ordinate  $y$  und  $\eta$ , welche bei symmetrischer Anordnung die jeweiligen halben Trägerhöhen  $\left(\frac{h}{2}\right)$  darstellen, die Teilhöhen  $y'y''\eta'\eta''$  setzt, welche den Verteilungsbeiwerten

$$v' = \frac{J' \cos \psi'}{J' \cos \psi' + J'' \cos \psi''} \quad \text{und} \quad v'' = \frac{J'' \cos \psi''}{J' \cos \psi' + J'' \cos \psi''}$$

entsprechen (vgl. Gl. 21);

$$y' = v'h = v'(2y); \quad \eta' = v'(2\eta); \quad y'' = v''(2y); \quad \eta'' = v''(2\eta).$$

Man erhält

$$\left. \begin{aligned} X_r' &= \frac{J_r'}{\eta_r' s_r'} \left( \frac{H_r y_r'^3}{3 Y_r} - \frac{H_{r+1} y_{r+1}'^3}{3 Y_{r+1}} \right); \\ X_r'' &= \frac{J_r''}{\eta_r'' s_r''} \left( \frac{H_r y_r''^3}{3 Y_r} - \frac{H_{r+1} y_{r+1}''^3}{3 Y_{r+1}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Vorstehende Gleichungen liefern für die schwächere Gurtung etwas zu günstige Ergebnisse, was jedoch praktisch ohne wesentliche Bedeutung ist. Etwas zu große Werte erhält man, wenn man für die schwächere Gurtung die alten Werte  $y$  und  $\eta$ , gleich den jeweiligen halben Trägerhöhen, beibehält.

Anmerkung. Die genaue Bestimmung der Zuschlagswerte bei unsymmetrischen Verhältnissen ist sehr umständlich. Man hat es im allgemeinen mit  $3n$  Unbekannten zu tun; die Aufstellung der erforderlichen  $3n$  Formänderungsgleichungen kann ähnlich wie früher bei symmetrischer Anordnung erfolgen. Man denkt sich die Pfosten in den Punkten  $W$ , die den Nullpunkten der Stammomente entsprechen, durchschnitten. Durch die daselbst wirkenden Stammkräfte  $H$  werden die beiden Querschnittsflächen  $W$  in wagrechter Richtung um  $\Delta$  gegenseitig verschoben und um einen Betrag  $\tau$  gegeneinander gedreht, wo  $\Delta = \frac{H(y'^3 + y''^3)}{3EY}$  und  $\tau = \frac{H(y'^2 - y''^2)}{2EY}$ . Diese Bewegungen müssen durch die an den einzelnen Schnittstellen anzubringenden Zuschlagswerte  $Z$  (wagrechte Kraft),  $Z'$  (lotrechte Kraft) und  $Z''$  (Drehmoment) wieder rückgängig gemacht werden; zugleich darf hierbei keine gegenseitige lotrechte Verschiebung der Schnittflächen entstehen. Die Verwertung dieser Bedingungen liefert die zur Bestimmung der Zuschlagswerte  $Z$  erforderlichen Gleichungen.

In den gewöhnlichen Fällen der Anwendung liegt zu derartigen umständlichen und langwierigen Rechnungen keine Veranlassung vor, da hier die Zuschlagswerte an und für sich klein sind, und das oben angegebene Näherungsverfahren ausreichende Werte für sie ergibt. Außerdem sind die mühsam errechneten Werte keineswegs vollständig genau, wenn man nicht auch noch den Einfluß der Abrundungen in Rechnung stellt, was zu weiteren Umständlichkeiten führen würde; sie gelten, wie auch die Näherungswerte, nur innerhalb Elastizitätsgrenze und geben daher über die Verhältnisse beim Bruch keinen sicheren Aufschluß.

### Die Nebenspannungen.

Die Nebenspannungen werden durch die Achsdehnungen der einzelnen Stäbe hervorgerufen. Bei ihrer Bestimmung empfiehlt es sich, die Einflüsse der Gurtdehnungen und der Pfostendehnungen, die sich in verschiedenartiger Weise geltend machen, getrennt zu behandeln.

#### a) Nebenspannungen infolge der Gurtdehnungen.

Es werden zunächst symmetrische Parallelträger, wo  $J_o = J_u = J$ , und unbiegsame Pfosten vorausgesetzt. Es seien  $\sigma_o$  und  $\sigma_u$  die durch die Stammkräfte und Zuschlagkräfte hervorgerufenen Spannungen der Gurtstäbe eines beliebigen Feldes, wobei für die hauptsächlich in Betracht

kommenden lotrechten Belastungen  $\sigma_u = -\sigma_o = \sigma$  (Absolutwert) ist. Da die Zuschlagwerte verhältnismäßig klein sind, so genügt es in der Regel, nur die Stammwerte zu berücksichtigen. Denkt man sich

das Feld herausgelöst und die Pfosten in der Mitte durchschnitten (Abb. 34), so können sich die den Spannungen entsprechenden Stabverlängerungen  $\frac{\sigma_o c}{E}$  und  $\frac{\sigma_u c}{E}$  zwangslässig herstellen, wodurch die Pfostenentfernung in der unteren Hälfte um  $\frac{(\sigma_u - \sigma_o)c}{E} = \frac{2\sigma c}{E}$  größer wird als in der oberen. Durch die an den Schnittstellen angebrachten wagrechten Nebenkräfte  $\mathfrak{N}$  muß dieser Entfernungunterschied wieder aufgehoben werden. Es muß sein

$$\frac{2\sigma c}{E} = \frac{2\mathfrak{N}c}{EF} + 2 \int_0^c \frac{\mathfrak{N}y^2 dx}{EJ} = \frac{2\mathfrak{N}c}{EF} + \frac{2\mathfrak{N}y^2 c}{EJ}.$$

Hieraus folgt, wenn man das erste, sehr kleine Glied vernachlässt,

$$\mathfrak{N} = \frac{\sigma J}{y^2} \quad \dots \quad (58)$$

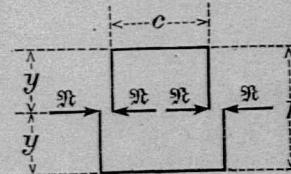
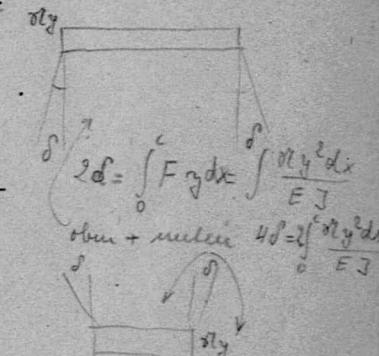


Abb. 34.

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\delta}{E} \quad \Delta l = \frac{\delta l}{E}$$

$$\Delta_U - \Delta_O$$



Das in allen Querschnitten der beiden Gurtstäbe gleich große Nebenmoment ist

$$N = \mathfrak{N}y = \frac{\sigma J}{y} \quad \dots \quad (59)$$

und die zugehörige Nebenspannung der äußersten Faser

$$\nu = \frac{Ne}{J} = \frac{\sigma e}{y} = \frac{2\sigma e}{h} \quad \dots \quad (60)$$

*s Kammelltr. 113*

Hieraus ist ersichtlich, daß sich die Nebenspannung  $\nu$  zur Achsspannung  $\sigma$  verhält wie der Abstand  $e$  der äußersten Faser von der Gurtachse zur halben Trägerhöhe  $y$ .

Sind Abrundungen vorhanden, so erhält die Nebenkraft den etwas größeren Wert

$$\mathfrak{N} = \sigma c : \int_0^e \frac{y^2 dx}{J} = \frac{\sigma J_m}{y^2}; \quad \dots \quad (61)$$

wo  $J_m$  den aus  $J_m = c : \int_0^e \frac{dx}{J}$  zu berechnenden Mittelwert

der Trägheitsmomente darstellt. Die Nebenspannungen werden innerhalb der Abrundungen kleiner, außerhalb derselben etwas größer, als Gleichung 60 angibt.

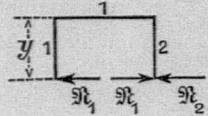


Abb. 35.

Das größte Nebenmoment eines Mittelpfostens (am Knoten) ist nach Abb. 35

$$N = (\mathfrak{N}_2 - \mathfrak{N}_1)y = \frac{(\sigma_2 J_2 - \sigma_1 J_1)}{y} \quad \dots \quad (62)$$

und die zugehörige Nebenspannung

$$\nu = \frac{(\sigma_2 J_2 - \sigma_1 J_1)e}{Yy} \quad \dots \quad (63)$$

Sie sind in der Regel sehr gering; für  $\sigma_2 J_2 = \sigma_1 J_1$  wird sie genau gleich Null.

Für den Endpfosten wird

$$N = \mathfrak{N}_1y = \frac{\sigma_1 J_1}{y} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{\sigma_1 J_1 e}{Y_1 y} \quad \dots \quad (64)$$

Bei vorhandener Abrundung fällt die Nebenspannung entsprechend geringer aus.

Handelt es sich um symmetrische Vieleckträger (Abb. 36), so erhält man in ähnlicher Weise wie bei den Parallelträgern die gleiche Bedingungsgleichung für die Nebenkraft  $\mathfrak{N}$

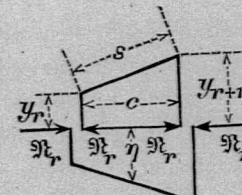


Abb. 36.

$$\frac{2\sigma c}{E} = \frac{2\mathfrak{N} \cos \psi c}{EF} + 2 \int_0^s \frac{\mathfrak{N} y^2 ds}{EJ} = \frac{2\mathfrak{N} \cos \psi c}{EF} + \frac{2\mathfrak{N} s}{EJc} \int_0^e y^2 dx.$$

Hieraus folgt, da

$$\int_0^e y^2 dx = \int_0^e \left[ y_r + \frac{x}{c} (y_{r+1} - y_r) \right]^2 dx = \frac{c}{3} (y_{r+1}^2 + y_{r+1} y_r + y_r^2),$$

mit Vernachlässigung des ersten Gliedes,

$$\mathfrak{N} = \frac{3\sigma c J}{s(y_{r+1}^2 + y_{r+1} y_r + y_r^2)}. \quad (65)$$

Das größte Nebenmoment, beim höheren Pfosten, ist

$$N_{r+1} = \mathfrak{N}_{r+1} \quad \dots \quad (66)$$

und die zugehörige größte Nebenspannung des Feldes

$$\nu = \frac{\mathfrak{N}_{r+1} e}{J} = \frac{3\sigma c y_{r+1} e}{s(y_{r+1}^2 + y_{r+1} y_r + y_r^2)}. \quad (67)$$

Näherungsweise ergibt sich hieraus für nicht zu kleine  $y_r$

$$\nu = \frac{\sigma e}{y_{r+1}} = \frac{2\sigma e}{h_{r+1}} \quad \dots \quad (68)$$

Man hat also auch hier i. A. den Satz, daß sich die größte Nebenspannung  $\nu$  zur Achsspannung  $\sigma$  verhält wie die Außenbreite  $e$  zur halben theoretischen Trägerhöhe  $\frac{h_{r+1}}{2}$ .

Bei unsymmetrischen Trägern (Abb. 33) hat die Gl. 68 ebenfalls näherungsweise Geltung; als Spannung  $\sigma$  ist hierbei der Mittelwert der Gurtspannungen  $\sigma = \frac{\sigma_u - \sigma_o}{2}$  einzuführen.

Der Umstand, daß die Pfosten in Wirklichkeit biegsam sind und nicht, wie bisher vorausgesetzt, vollständig starr, ist im allgemeinen ohne wesentliche Bedeutung, da die Nebenmomente der Mittelpfosten nach Gl. 62 sehr gering

sind. Die Pfosten verbiegen sich daher tatsächlich sehr wenig; die Verhältnisse liegen fast vollständig so, wie wenn die Pfosten unendlich starr wären. Nur im Endfeld treten infolge der größeren Nebenmomente und Verbiegungen des Endpfosten (Gl. 64) merklichere Änderungen auf. Die Nebenspannungen des Endpfostens und der anschließenden Gurtstäbe werden etwas kleiner, als die Gleichungen 60 und 64 angeben. Für die Anwendung ist dies ohne Belang.

b) Nebenspannungen infolge der Pfostendehnungen. Nur die Endpfosten erhalten größere Längskräfte bzw. Spannungen und Dehnungen; für symmetrische Träger wird beispielsweise die Längskraft  $V_1 = \frac{\mathfrak{N}}{2}$  und die zugehörige Dehnung  $\Delta h_1 = \frac{\mathfrak{N}h_1}{2EF_1}$ . Bei den Zwischenpfosten dagegen handelt es sich nur um kleine Kräfte, die zwischen

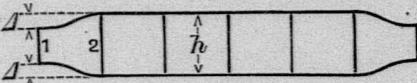


Abb. 37.

$$V = \frac{K_u - K_o}{2} \quad (\text{Parallelträger}) \quad \text{und} \quad V = K_u \quad (\text{Parabelträger})$$

schwanken. Man kann die entsprechenden Dehnungen entweder ganz außer acht lassen oder sie alle gleich groß in Rechnung stellen. Infolge der genannten Dehnungen treten hauptsächlich nur in den Endfeldern Verbiegungen und Nebenspannungen auf (Abb. 37).

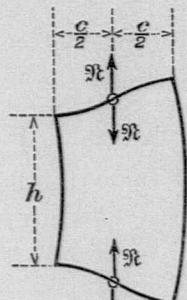


Abb. 38.

Die Gurtstäbe verbiegen sich S-förmig (Abb. 38); die Wendepunkte  $W$  können für vorliegenden Zweck genau genug in Stabmitte angenommen werden. In ihnen wirken lotrechte Nebenkräfte  $\mathfrak{N}$ , die bei Parallelträgern aus der Beziehung

$$2\mathfrak{N} \left( \frac{c^3}{24EJ_o} + \frac{c^3}{24EJ_u} + \frac{c^2h}{4EY} \right) = \Delta = \frac{(\sigma_1 \pm \sigma_2)h}{\varepsilon}$$

ermittelt werden können. Hierbei sind die Pfostenspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  mit ihren Absolutwerten einzuführen; die Vorzeichen + bzw. - gelten für Fahrbahn „unten“ bzw. „oben“. In der Regel kann  $\sigma_2$  gegen  $\sigma_1$  vernachlässigt werden. Man erhält

$$\mathfrak{N} = \frac{12\sigma_1 h}{c^2} : \left( \frac{c}{J_o} + \frac{c}{J_u} + \frac{6h}{Y} \right) \quad \dots \quad (69)$$

dem entsprechen die Einspannungsmomente der Gurtstäbe, wenn man die theoretische Stablänge  $= c$  annimmt,

$$N = \frac{\mathfrak{N}c}{2} = \frac{6\sigma_1 h}{c} : \left( \frac{c}{J_o} + \frac{c}{J_u} + \frac{6h}{Y} \right) \quad \dots \quad (70)$$

die zugehörigen Nebenspannungen sind

$$\nu_o = \frac{Ne_o}{J_o} \quad \text{und} \quad \nu_u = \frac{Ne_u}{J_u} \quad \dots \quad (71)$$

Bei gleicher Stabbreite wird der schwächere Gurtstab stärker beansprucht als der stärkere. Für

$$J_o = J_u = Y \quad \text{und} \quad c = h \quad \text{wird} \quad \nu_o = \nu_u = \frac{3\sigma_1 e}{4h} \quad (71a)$$

Durch Abrundungen wird die Nebenkraft  $\mathfrak{N}$  und das Nebenmoment  $N$  vergrößert, die größte Nebenspannung  $\nu$  dagegen verkleinert. Die Nebenmomente und Nebenspannungen haben in der unteren Gurtung gleichen Sinn wie die Stammmomente und Stammspannungen; sie wirken also ungünstig. Das Umgekehrte ist bei der oberen Gurtung der Fall; hier wirken die Nebeneinflüsse günstig.

Der Endpfosten hat auf seine ganze Höhe das Nebenmoment  $N = \frac{\mathfrak{N}c}{2}$  auszuhalten. Die zugehörige Nebenspannung ist  $\nu_1 = \frac{Ne_1}{Y}$ .

Für  $J_o = J_u = Y$  wird sie ebenso groß wie die der Gurtungen. Sie ist in der unteren Pfostenhälfte gleichen Sinnes wie die Stammspannungen, wirkt hier also ungünstig. Die an den Knoten des zweiten Pfostens angreifenden Einspannungsmomente der Gurtstäbe 1 ( $= \frac{\mathfrak{N}c}{2}$ ) verteilen sich auf die zwei anschließenden Stäbe, Gurtstab 2 und Pfosten 2

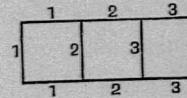


Abb. 39.

(Abb. 39), und zwar annähernd im Verhältnis von deren Steifigkeiten  $\frac{J}{c}$  und  $\frac{Y}{h}$ . Wenn wie gewöhnlich beide Werte nicht wesentlich voneinander verschieden sind, so trifft jeden Stab näherungsweise die Hälfte,  $N = \frac{\mathfrak{N} c}{4}$ ; die entsprechenden

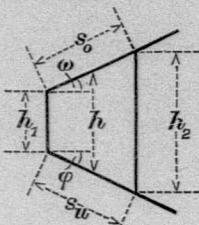


Abb. 40.

Nebenspannungen werden nur halb so groß wie die des ersten Feldes. Über das zweite Feld hinaus pflanzen sich die Verbiegungen und Nebenspannungen nur in geringem Maße fort; sie können außer Betracht bleiben.

Bei geneigten Gurtstäben des Endfelds (Abb. 40) ergibt sich die Nebenkraft

$$\mathfrak{N} = \frac{12 \sigma_1 h_1}{c^2} \left( \frac{s_o}{J_o} + \frac{s_u}{J_u} + \frac{6 \cdot h}{Y} \right) \quad (69a)$$

wo  $h$  gleich der mittleren Höhe des Endfelds gesetzt werden kann.

Wie die vorstehenden Untersuchungen zeigen, treten größere Nebenspannungen hauptsächlich nur in den Randstäben (Gurtungen und Endpfosten) auf. Sie sind von gleicher Art wie die Nebenspannungen der steifknotigen Fachwerkträger (Zwängungsspannungen). Wie diese nehmen sie mit der Stabbreite zu und nehmen außerhalb Elastizitätsgrenze an Bedeutung ab. Sie sind bei gleichen Stabbreiten geringer als die der Fachwerkträger; letztere können unter sehr ungünstigen Verhältnissen den 4- bis 6fachen Betrag erreichen. Da jedoch die Stäbe der Rahmenträger mit Rücksicht auf die aufzunehmenden Biegmomente stärkere Breiten erhalten, so werden die Unterschiede in Wirklichkeit wesentlich geringer und können unter Umständen sogar zuungunsten der Rahmenträger ausfallen.

Durch die Nebenspannungen wird ein Teil der Belastung unmittelbar übertragen, wodurch die Stammwerte und Zuschlagwerte entsprechend gemindert werden. Diese Minderung ist jedoch äußerst gering und ohne jede praktische Bedeutung. Die Nebenspannungen leisten daher keine nützliche Arbeit; sie sind als schädliche Spannungen zu bezeichnen.

#### Die Wärmespannungen.

Die Wärmespannungen sind in ähnlicher Weise zu berechnen wie die Nebenspannungen. Man kann sich hierbei auf den einen Fall beschränken, daß die untere Gurtung um  $\pm t^0$  und die Pfosten im Mittel um  $\pm 0,5 t^0$  wärmer sind als die obere Gurtung. Die vorstehend unter a entwickelten Formeln sind dann ohne weiteres anwendbar, wenn man darin  $\sigma$  durch  $\frac{E \omega t}{2}$  ersetzt, wo  $\omega$  = Wärmedehnungsziffer. Beispielsweise wird die größte Wärmespannung eines Gurtstabs, unter Benutzung der Gleichung 60,

$$\sigma_r = \frac{E \omega t e}{h} \quad (72)$$

und die eines Endpfostens, unter Benutzung der Gl. 64,

$$\sigma_r = \frac{E \omega t J_1 e}{h Y_1} \quad (73)$$

Diese Spannungen sind in den gewöhnlichen Fällen sehr gering. Für eiserne Brücken kann gesetzt werden  $E \omega t = \frac{2000000}{80000} \cdot 16 = 400$ , womit sich für  $\frac{e}{h} = \frac{1}{12,5}$  die Wärmespannung  $\sigma_r = 32 \text{ kg/qcm}$  ergibt. Für ältere Eisenbetonbrücken erhält man ähnlich  $\sigma_r = \frac{400000 \cdot 6}{80000} \cdot \frac{1}{10} = 3 \text{ kg/qcm}$ . Außerhalb Elastizitätsgrenze werden die Wärmespannungen noch wesentlich geringer. Sie sind praktisch von sehr geringer Bedeutung.

#### Zwischenbelastungen.

Wenn die Gurtstäbe innerhalb der Knotenpunkte unmittelbar belastet werden, so erhalten sie außer den bisher behandelten normalen Momenten  $M$ , welche dem Angriff der Belastungen ausschließlich an den Knotenpunkten entsprechen, noch zusätzliche Momente  $N$ , die in Feldmitte positiv, nächst den Knoten aber negativ sind. In Abb. 41 sind  $N$ ,  $M$  und  $\bar{M} = N + M$  dargestellt. Der größte positive Wert von  $\bar{M}$

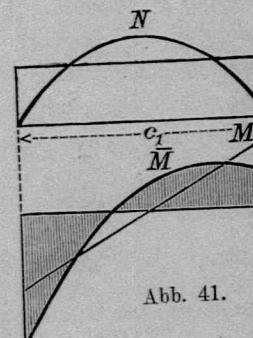


Abb. 41.

ist i. d. R. kleiner als der des Normalmoments  $M$  und bedarf daher keiner besonderen Berücksichtigung. Dagegen fallen die negativen Werte von  $\bar{M}$  in der Nähe des dem Auflager zugekehrten Knotens größer aus als die von  $M$ . Durch Anordnung von Anschlußverstärkungen kann diesem ungünstigen Umstand wirksam begegnet werden.

Die größten negativen Werte von  $N$  treten auf, wenn alle Felder voll belastet sind. Man hat es dann in den Mittelfeldern mit wagrecht eingespannten Balken zu tun. Die Einspannungsmomente sind bei gleichmäßiger Vollbelastung, überall gleichem Trägheitsmoment und freier Spannweite  $c_1$ ,

$$N = -\frac{(g+p)c_1^2}{12} \quad \dots \quad (74)$$

Die freie Spannweite  $c_1$  kann um die halbe Pfostenbreite  $b$  kleiner als die Feldweite  $c$  angenommen werden. Infolge der Anschlußverstärkungen wird  $N$  etwas größer als Gl. 74 angibt, was schätzungsweise berücksichtigt werden kann (bei mittleren Verhältnissen etwa 10%). Im Endfeld liegen die gleichen Verhältnisse (vollkommene Einspannung) vor, wenn der Endständer übermäßig stark ist. Andernfalls gibt er der Einwirkung des Gurtstabs etwas nach, die Einspannung ist nicht mehr vollkommen; das Einspannungsmoment nimmt am Endpfosten 1 ab, während es am andern Pfosten 2 zunimmt. Letzterer Umstand ist jedoch ohne Bedeutung, da hier nach Abb. 41  $N$  und  $M$  verschiedenes Vorzeichen haben. Dagegen ist zu beachten, daß sich die Nachgiebigkeit des Endpfostens auch noch im zweiten Feld bemerkbar macht. Das am linken Knoten 2 des Gurtstabs 2 wirkende Einspannungsmoment wird größer als  $\frac{(g+p)c_1^2}{12}$ ; es kann unter gewöhnlichen Verhältnissen zu  $\frac{(g+p)c_1^2}{10}$  angenommen werden. Dieses Moment hat das gleiche Vorzeichen wie das gleichzeitig wirkende Normalmoment  $M$ . Beide Momente unterstützen sich in ihrer Wirkung. Weitere Änderungen des Kräfteplans (in den Nachbarstäben) können als zu geringfügig außer Betracht bleiben.

Die Mittelposten werden, wenn die Endpfosten übermäßig stark sind, durch gleichmäßige Vollbelastung der Brücke nicht in Anspruch genommen. Die Zwischenbelastung durch das Gewicht der Fahrbahn und der Gurtstäbe ist somit ohne Einfluß auf sie. Ihre größte Beanspruchung erleiden sie, wenn die Gurtfelder abwechselnd vollbelastet und gar nicht belastet sind. Bei unendlich großem Trägheitsmoment würde das größte Pfostenmoment

$N = \bar{M} = \frac{pc^2}{12}$  = Einspannungsmoment bei vollkommener Einspannung sein. Infolge der Nachgiebigkeit der Pfosten, deren Trägheitsmoment nur  $= Y$  ist, mindert sich jedoch das Moment  $N$ .

Nimmt man zunächst, wie in Abb. 42, Gelenke an den abstehenden Enden der Pfosten und der benachbarten Gurtstäbe an, so erhält man aus der Bedingung, daß die drei am Einspannungsknoten  $E$  zusammenstoßenden Stäbe sich daselbst um den gleichen Winkel  $\alpha$  drehen, das Pfostenmoment  $N = \bar{M} : \left(1 + \frac{5Jh}{3Yc}\right)$ .

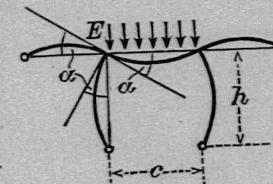


Abb. 42.

Unter Berücksichtigung der teilweisen Einspannung an den abstehenden Knoten wird  $N$  etwas größer und kann näherungsweise gesetzt werden

$$N = \bar{M} : \left(1 + \frac{13}{9} \frac{Jh}{Yc}\right) = \frac{pc^2}{12} : \left(1 + \frac{13}{9} \frac{Jh}{Yc}\right) \quad (75)$$

Für  $J = Y$  und  $c = h$  wird  $N = \frac{9}{22} \bar{M} = \text{rd. } \frac{pc^2}{30}$   $\quad (75^a)$

Die Verbiegungen und Nebenmomente der anschließenden freien Gurtung sind sehr gering und dürfen außer acht bleiben.

Das größte Biegungsmoment des Endpfostens wird bei unendlich großem Trägheitsmoment  $N = \bar{M} = \frac{(g+p)c^2}{12}$ . Bei endlicher Größe desselben ( $Y = Y_1$ ) wird das Biegungsmoment näherungsweise  $N = \bar{M} : \left(1 + \frac{hJ_1}{cY_1}\right)$   $\dots \dots \dots \quad (76)$

und für  $J_1 = Y_1$ ,  $h = c$ ;  $N = \frac{\bar{M}}{2} = \frac{(g+p)c^2}{24}$   $\dots \dots \dots \quad (76^a)$

### Die Verhältnisse außerhalb Elastizitätsgrenze.

Innerhalb der Gebrauchsspannungen ist die den vorstehenden Untersuchungen zugrunde liegende Hookesche Gleichung  $\sigma = E \epsilon$  entweder genau richtig, wie bei Eisen, oder die Abweichungen sind verhältnismäßig gering, so daß sie mit ausreichender Genauigkeit angewendet werden kann, wie bei Eisenbeton. Außerhalb Elastizitätsgrenze trifft die Hookesche Gleichung nicht mehr zu. Die darauf aufgebauten Formeln sind hier nicht mehr ohne weiteres brauchbar; insbesondere können sie nicht zur sicheren Beurteilung des Bruchzustandes verwendet werden. Hier liegen die Verhältnisse bei Eisen und bei Eisenbeton etwas verschieden. Bei Eisen werden die Stammwerte, sofern der Träger symmetrisch zu einer Längsachse angeordnet ist, auch außerhalb Elastizitätsgrenze nicht wesentlich geändert; die Beanspruchungen verteilen sich annähernd gleichmäßig auf beide gleich starke Gurtungen. Bei ungleich starken Gurtungen sind die Spannungen der schwächeren Gurtung größer als die der stärkeren; sie überschreiten daher früher die Elastizitätsgrenze; ihr Dehnungsmodul  $E_1$  wird kleiner als der der stärkeren Gurtung  $E_2$ , und somit wird auch das Verhältnis  $\frac{E_1 J_1}{E_2 J_2}$  außerhalb Elastizitätsgrenze kleiner als innerhalb derselben. Dementsprechend übernimmt jetzt die schwächere Gurtung einen kleineren Teil der Gesamtquerkraft; sie wird auf Kosten der stärkeren Gurtung entlastet. Anderseits aber werden die Pfosten ungünstiger beansprucht. Ihr Momentennullpunkt rückt von der stärkeren Gurtung weiter weg; das größte Pfostenmoment wird demgemäß verhältnismäßig größer als innerhalb Elastizitätsgrenze.

Bezüglich der Zuschlagwerte ist zu beachten, daß die Pfosten in der Hauptsache nur durch Biegungsspannungen, die Gurtungen aber durch Biegungsspannungen und durch Längsspannungen beansprucht werden. Die Spannungen der äußersten Fasern bewegen sich bei den Pfosten zwischen  $\sigma_{\max}$  und 0, bei den Gurtungen zwischen  $\sigma_{\max}$  und  $\sigma$  (Längsspannung). Die Gurtungen stehen daher unter einer größeren mittleren Spannung und haben somit außerhalb Elastizitäts-

grenze einen kleineren durchschnittlichen Dehnungsmodul als die Pfosten,  $E < E_g$ . Infolge davon wird das Steifigkeitsverhältnis von Pfosten und Gurtung,  $E_g Y : E J$ , größer und die Zuschlagwerte kleiner. Haben außerdem noch die Pfosten einen übermäßigen Querschnitt, wie meist in Trägermitte, so ist dies noch in gesteigertem Maße der Fall; die Zuschlagwerte sind dann für den Bruch von ganz untergeordneter Bedeutung. Nur in Ausnahmsfällen, wo die Gurtungen übermäßig stark sind, liegen die Verhältnisse umgekehrt. Die vergrößerten Zuschlagwerte der Gurtungen sind jedoch hier ohne Bedeutung, da ja der Bruch in den schwächeren Pfosten erfolgt. Die Pfosten selbst aber werden durch die vergrößerten Zuschlagwerte günstig beeinflußt.

---

Die Nebenspannungen nehmen in gleicher Weise und aus denselben Gründen wie bei den Fachwerkträgern außerhalb Elastizitätsgrenze ab und sind für den Bruchzustand nur von geringer Bedeutung.

---

Bei Eisenbetonbauten kommen außer den hier weniger ins Gewicht fallenden Änderungen des Dehnungsmoduls  $E$  noch die Änderungen der Trägheitsmomente infolge der Zugrisse in Betracht. Dieselben treten am stärksten in der Zuggurtung, weniger stark in den Pfosten, am schwächsten bzw. gar nicht in der Druckgurtung auf. Es kommt dies einer entsprechenden Minderung der Trägheitsmomente  $J_u$  der Zuggurtung und  $Y$  der Pfosten gegenüber denen der Druckgurtung  $J_o$  gleich. Hierdurch werden die Stammomente der oberen Gurtung verhältnismäßig größer als der Rechnung innerhalb Rißgrenze entspricht. Der Wendepunkt der Pfosten entfernt sich weiter von der Druckgurtung, die Pfostenmomente erhöhen sich.

Eine genaue Untersuchung dieser Verhältnisse läßt sich theoretisch nicht durchführen. Ein sicherer Aufschluß kann nur von sorgfältig angestellten Versuchen erwartet werden.

**Bestimmung der Durchbiegung.**

a) Parallelträger. Die Biegungslinie einer Gurtung ergibt sich als eine Seillinie, deren Belastung die verzerrte Momentenfläche  $\frac{\bar{M}}{J}$  und deren Seilzug der Elastizitätsmodul  $E$  bildet.  $\bar{M}$  bezeichnet hierbei das gesamte auf die Gurtung einwirkende Biegemoment (Stammmoment, Zuschlagmoment und Nebenmoment),  $\bar{M} = M + X + N$ . Innerhalb der Strecke der Anschlußverstärkungen sind die daselbst vorhandenen größeren Trägheitsmomente einzuführen; auf die Breite der Pfosten ist ein angemessenes Trägheitsmoment schätzungsweise anzunehmen. Analytisch erhält man die Durchbiegung in der Entfernung  $x$  vom Auflager

$$\delta = \frac{l-x}{l} \int_0^x \frac{\bar{M}x dx}{EJ} + \frac{x}{l} \int_x^l \frac{\bar{M}(l-x) dx}{EJ}. \quad (77)$$

Statt die Nebenmomente  $N$  gleichzeitig mit den Stammmomenten und Zuschlagmomenten in Rechnung zu stellen, erscheint es meist zweckmäßiger, sie besonders zu behandeln und dabei auf ihre Ursache, die Stabdehnungen, zurückzugehen. Man erhält deren Einfluß am einfachsten mit Hilfe des Satzes der virtuellen Verschiebungen zu  $\delta_2 = \sum_0^l \frac{S \ddot{s} s}{EF}$ , wo  $S$  = wirkliche Stabkraft,  $\ddot{s}$  = gedachte Stabkraft, die durch eine bei  $x$  angreifende Last 1 erzeugt wird,  $F$  = wirklicher Querschnitt.

Die Gesamtbiegungslinie setzt sich nun zusammen aus der Biegungslinie  $\delta_1$  der Gurtung (Trägheitsmomente  $J$ , Kraftmomente  $M + X$ ) und aus der soeben bestimmten Biegungslinie  $\delta_2$ . Man erhält insgesamt

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{l-x}{l} \int_0^x \frac{(M+X)x dx}{EJ} + \frac{x}{l} \int_x^l \frac{(M+X)(l-x) dx}{EJ} + \sum_0^l \frac{S \ddot{s} s}{EF}. \quad (78)$$

Bei  $\delta_1$  wurde, wie üblich, der geringe Einfluß der Stabquerkräfte nicht in Rechnung gestellt. Zur Kompensation kann man für die Stabkräfte  $S$  und  $\ddot{s}$  die etwas zu großen Stammwerte einführen.

b) Vieleckträger. Auch hier können die Gleichungen (77) und (78) bzw. die entsprechenden zeichnerischen Verfahren benutzt werden, wenn man jeweils  $J$  durch  $J \cos \varphi$  ersetzt.

250669517

Verlag von WILHELM ERNST & SOHN, BERLIN W<sup>o</sup>  
Wilhelmstraße 90.

Hütte des Bauingenieurs. (Sonderausgabe von Band III „Hütte“ 21. Auflage.)

Herausgegeben vom Akademischen Verein Hütte E. V.

Umfang rd. 73 Bogen = 1168 Seiten mit 2098 Textabbildungen.

1911.

In Leinen geb. 9,— M., in Leder geb. 10,— M.

Als Ergänzung erschien hierzu:

Statische Tabellen. Belastungsangaben und Formeln zur Aufstellung von Berechnungen für Baukonstruktionen. Gesammelt u. berechnet von F. Boerner, Ingenieur. Mit 357 Textabbildungen. Vierte neu bearbeitete Auflage. 1912. geb. 4,20 M.

Empfohlen durch Runderlaß des Herrn Ministers der öffentlichen Arbeiten.

Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte.

Von Dr.-Ing. Dr. H. Zimmermann, Wirkl. Geheimer Oberbaurat.

Ausgabe A ohne besondere Quadrattafel. Sechste Auflage. 1910.

Ausgabe B mit Anhang: Quadrattafel. Siebente Auflage. 1913.

geb. 5,— M.

geb. 6,- M.

Die Anwendung dieser Tafeln ist bei den Reichseisenbahnen amtlich genehmigt und auch den preußischen Eisenbahndirektionen durch Ministerialerlaß empfohlen.

Tafeln für Eisenbahnbrücken aus einbetonierte Walzträgern.

Von Dr.-Ing. O. Kommerell, Kaiserl. Baurat im Reichsamt für die Verwaltung der Reichseisenbahnen.

Mit 8 Textabbildungen.

1911.

geh. 2,40 M.

Empfohlen durch Runderlaß des Herrn Ministers der öffentlichen Arbeiten.

Tabellen für Straßenbrücken aus einbetonierten Walzträgern.

Von Dr.-Ing. O. Kommerell, Kaiserl. Baurat im Reichsamt für die Verwaltung der Reichseisenbahnen.

Mit 44 Textabbildungen.

1912.

geh. 6,80 M., kart. 7,40 M.

Statische Berechnung von Tunnelmauerwerk. Grundlagen und Anwendung auf die wichtigsten Belastungsfälle. Von Dr.-Ing. O. Kommerell, Kaiserl. Baurat im Reichsamt für die Verwaltung der Reichseisenbahnen.

Mit 144 Textabbildungen und 10 Tafeln. 1912.

geh. 12 M., geb. 13,50 M.

Das Problem der Pfahlbelastung. Von Baudirektor O. Stern.

Mit 61 Textabbildungen u. 6 Tafeln.

1908.

geh. 7 M., geb. 8 M.

Neuere Bauausführungen in Eisenbeton bei der württembergischen Staats-eisenbahnverwaltung.

Von Königl. Baurat Jori und Regierungsbaumeister Dr.-Ing. Schaechterle.

I. Bogenbrücken.

Mit 177 Textabbildungen.

1911.

Preis geb. 4,50 M.

II. Balkenbrücken.

Mit 149 Textabbildungen.

1913.

Preis geb. 4,50 M.

Beton-Kalender 1913. Taschenbuch für den Beton- und Eisenbetonbau sowie die verwandten Fächer. Unter Mitwirkung hervorragender Fachmänner herausgegeben von der Zeitschrift „Beton u. Eisen“. VIII. neu bearbeiteter Jahrgang.

Mit 1135 Textabbildungen. Teil I in Leinen geb., Teil II geh. beide Teile zusammen 4.— M.

Man verlange Prospekt mit Inhaltangabe!