angeschriebenen Beziehungen für jeden Werth von t richtig sein. Diess ist der Fall, wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} a^2\mathfrak{A} &= m\,\mathfrak{A} - n\,\mathfrak{C} \\ a^2\mathfrak{B} &= m\,\mathfrak{B} - n\,\mathfrak{D} \\ a^2\mathfrak{C} &= n_1\,\mathfrak{C} - m_1\,\mathfrak{A} \\ a^2\mathfrak{D} &= n_1\,\mathfrak{D} - m_1\,\mathfrak{B} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3($$

$$\left.\begin{aligned} 4\,\omega\,\mathfrak{P} &= m\,\mathfrak{P} - n\,\mathfrak{P}_1 \\ 4\,\omega^2\,\mathfrak{P}_1 &= n_1\,\mathfrak{P}_1 - m_1\,\mathfrak{P} - \frac{1}{2}\,q_1\,(P + P_1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega^2\,\mathfrak{Q} &= m\,\mathfrak{Q} - n\,\mathfrak{Q}_1 - p\,P \\ \omega^2\,\mathfrak{Q}_1 &= n_1\,\mathfrak{Q}_1 - m_1\,\mathfrak{Q} - p_1\,P \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega^2\,\mathfrak{R} &= m\,\mathfrak{R} - n\,\mathfrak{R}_1 - p\,P_1 \\ \omega^2\,\mathfrak{R}_1 &= n_1\,\mathfrak{R}_1 - m_1\,\mathfrak{R} - p_1\,P_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Aus den Gleichungen (3) folgt zunächst:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} = \frac{n}{m - a^2} = \frac{n_1 - a^2}{m_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Aus der Gleichheit $\frac{n}{m - a^2} = \frac{n_1 - a^2}{m_1}$ folgt ferner:

$$a = \pm\sqrt{\frac{m + n_1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(m + n_1)^2 + n\,m_1 - m\,n_1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Wir erhalten demnach für a, und wegen (7) auch für $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}$ und $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$, vier verschiedene Werthe, durch welche den Bedingungen (3) enthprochen werden kann. Setzen wir:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= +\sqrt{\frac{1}{2}(m + n_1) + \sqrt{\frac{1}{4}(m + n_1) + n\,m_1 - m\,n_1}} \\ a_1 &= +\sqrt{\frac{1}{2}(m + n_1) - \sqrt{\frac{1}{4}(m + n_1)^2 + n\,m_1 - m\,n_1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

so sind die vier Werthe von a:

$$+a_1 \qquad -a_1 \qquad +a_2 \qquad -a_2$$

und es ist klar, dass den Gleichungen (1) auch dann Genüge geleistet wird, wenn man in (2) statt $\mathfrak{A}$ sin. at $+\ \mathfrak{B}$ sin. at und $\mathfrak{C}$ sin. at $+\ \mathfrak{D}$ cos. at $\Sigma(\mathfrak{A} +$ sin. at $\mathfrak{B}$ cos. at) und Σ ($\mathfrak{C}$ sin. at $+\ \mathfrak{D}$ cos. at) setzt, wobei sich Σ auf alle vier Wurzeln von a bezieht.

Bezeichnet man die Werthe der Constanten $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}\ \mathfrak{D}$, welche den individuellen Wurzeln entsprechen dadurch, dass man denselben diese Wurzeln beifügt, so dass z. B. $\binom{\mathfrak{A}}{+\alpha_1}$ denjenigen Werth von $\mathfrak{A}$ bedeutet, welcher der Wurzel $+\alpha_1$ entspricht, so hat man:

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathfrak{A}\text{ sin. at} + \mathfrak{B}\text{ cos. at}) = {} & \binom{A}{a_1}\text{sin. } a_1 t + \binom{\mathfrak{B}}{a_1}\text{cos. } a_1 t + \binom{\mathfrak{A}}{a_2}\text{sin. } a_2 t + \binom{\mathfrak{B}}{a_2}\text{cos. } a_2 t \\ & - \binom{\mathfrak{A}}{-a_1}\text{sin. } a_1 t + \binom{\mathfrak{B}}{-a_1}\text{cos. } a_1 t - \binom{\mathfrak{A}}{-a_2}\text{sin. } \alpha_2 t + \binom{\mathfrak{B}}{-a_2}\text{cos. } a_2 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathfrak{C}\text{ sin. at} + \mathfrak{D}\text{ cos. at}) = {} & \binom{\mathfrak{C}}{a_1}\text{sin. } a_1 t + \binom{\mathfrak{D}}{a_1}\text{cos. } a_1 t + \binom{\mathfrak{C}}{a_2}\text{sin. } a_2 t + \binom{\mathfrak{B}}{a_2}\text{cos. } a_2 t \\ & - \binom{\mathfrak{C}}{-a_1}\text{sin. } a_1 t + \binom{\mathfrak{D}}{-a_1}\text{cos. } a_1 t - \binom{\mathfrak{C}}{-a_2}\text{sin. } a_2 t + \binom{\mathfrak{D}}{-a_2}\text{cos. } a_2 t \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \binom{\mathfrak{A}}{a_1} - \binom{\mathfrak{A}}{a_1} &= \mathfrak{G}_1 \\ \binom{\mathfrak{B}}{a_1} + \binom{\mathfrak{B}}{-a_1} &= \mathfrak{H}_1 \\ \binom{\mathfrak{A}}{a_2} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_2} &= \mathfrak{G}_2 \\ \binom{\mathfrak{B}}{a_2} + \binom{\mathfrak{B}}{-a_2} &= \mathfrak{H}_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

so findet man mit Berücksichtigung der Gleichung (7)

$$\left.\begin{aligned} \binom{\mathfrak{C}}{a_1} - \binom{\mathfrak{C}}{-a_1} &= \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1}\left[\binom{\mathfrak{A}}{a_1} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_1}\right] = \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1}\,\mathfrak{G}_1 \\ \binom{\mathfrak{C}}{a_2} - \binom{\mathfrak{C}}{-a_2} &= \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1}\left[\binom{\mathfrak{A}}{a_2} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_2}\right] = \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1}\,\mathfrak{G}_2 \\ \binom{\mathfrak{D}}{a_1} + \binom{\mathfrak{D}}{-a_1} &= \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1}\left[\binom{\mathfrak{B}}{a_1} - \binom{\mathfrak{B}}{-a_1}\right] = \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1}\,\mathfrak{H}_1 \\ \binom{\mathfrak{D}}{a_2} + \binom{\mathfrak{D}}{-a_2} &= \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1}\left[\binom{\mathfrak{B}}{a_2} - \binom{\mathfrak{B}}{-a_2}\right] = \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1}\,\mathfrak{H}_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Führt man diese Werthe in obige Summen ein, so erhält man

$$\Sigma(\mathfrak{A}\text{ sin. a t} + \mathfrak{B}\text{a sin. at}) = (\mathfrak{G}_1\text{ sin. } a_1 t + \mathfrak{H}_1\text{ cos. } a_1 t) + (\mathfrak{G}_2\text{ sin. } a_2 t + \mathfrak{H}_2\text{ cos. } a_2 t)$$

$$\Sigma(\mathfrak{C}\text{ sin. a t} + \mathfrak{D}\text{ cos. a t}) = \frac{-m_1}{a_1^2 - m_1}(\mathfrak{G}_1\text{ sin. } a_1 t + \mathfrak{H}_1\text{ cos. } a_1 t) + \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1}(\mathfrak{G}_2\text{ sin. } a_2 t + \mathfrak{H}_2\text{ cos. } a_2 t)$$

Diese Summenwerthe sind nun statt $\mathfrak{A}$ sin. at + $\mathfrak{B}$ sin at und statt $\mathfrak{C}$ sin. at + $\mathfrak{D}$ cos. at in die Gleichungen (2) zu setzen, und dadurch werden dieselben

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_1 = & (\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t) + (\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t) \\
& + \mathfrak{P} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q} \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R} \cos. (\alpha_0 - \omega t) \\
\varphi_1 = & \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1}(\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t) + \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1}(\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t) \\
& + \mathfrak{P}_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q}_1 \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R}_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \; (12)$$

Aus den Gleichungen (4) findet man ferner

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{P} &= -\frac{\frac{1}{2} q_1 (P + P_1) n}{m_1 n - (4\omega^2 - m)(4\omega^2 - n_1)} \\
\mathfrak{P}_1 &= -\frac{\frac{1}{2} q_1 (P + P_1)(4\omega^2 - m)}{m_1 n - (4\omega^2 - m)(4\omega^2 - n_1)}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \; (13)$$

sodann folgt aus den Gleichungen (5)

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{Q} &= P \frac{p(\omega^2 - n_1) - p_1 n}{m_1 n - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \\
\mathfrak{Q}_1 &= P \frac{p_1(\omega^2 - m) - p m_1}{m_1 n - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \; (14)$$

endlich geben die Gleichungen (6)

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{R} &= P_1 \frac{p(\omega^2 - n_1) - p_1 n}{m_1 n - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \\
\mathfrak{R}_1 &= P_1 \frac{p_1(\omega^2 - m) - p m_1}{m_1 n - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \; (15)$$

Die Werthe dieser Constanten können noch in anderer Weise ausgedrückt werden. Setzen wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
f_1 + f_2 + f_3 &= F_1 \\
\Delta_1 f_1 + \Delta_2 f_2 - \Delta_3 f_3 &= F_2 \\
\Delta_1^2 f_1 + \Delta_2^2 f_2 + \Delta_3^2 f_3 &= F_3
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \; (16)$$

so werden die Seite (147) zusammengestellten Werthe wie $m\ n\ p\ m_1\ n_1\ p_1\ q_1$

$$\left.\begin{aligned}
m &= \frac{F_1}{M} \\
n &= \frac{F_2}{M} \\
p &= \frac{r}{2LM}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \; (17)$$

$$\left.\begin{aligned}
m_1 &= \frac{F_2}{B} \\
n_1 &= \frac{F_3}{B} \\
p_1 &= (L - \Delta_2)\frac{r}{2LB} + \frac{rh}{BD} \\
q_1 &= \frac{r^2}{2LB}\left(1 + \frac{2h}{D}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \; (18)$$

führt man diese Werthe in (13), (14), (15) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{P} &= -\frac{1}{4}(P + P_1)\left(\frac{r}{L}\right)^2\left(1 + \frac{2h}{D}\right)\frac{F_2 L}{F_2^2 - (4\omega^2 M - F_1)(4\omega^2 B - F_3)} \\
\mathfrak{P}_1 &= +\frac{1}{4}(P + P_1)\left(\frac{r}{L}\right)^2\left(1 + \frac{2h}{D}\right)\frac{L(4\omega^2 M - F_1)}{F_2^2 - (4\omega^2 M - F_1)(4\omega^2 B - F_3)} \\
\mathfrak{Q} &= \frac{1}{2} P \frac{r}{L} \frac{(\omega^2 B - F_3) - \left[(L - \Delta_2) + 2h\frac{L}{D}\right] F_2}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_3)} \\
\mathfrak{Q}_1 &= \frac{1}{2} P \frac{r}{L} \frac{\left[(L - \Delta_2) + 2h\frac{L}{D}\right](\omega^2 M - F_1) - F_2}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_3)} \\
\mathfrak{R} &= \frac{1}{2} P_1 \frac{r}{L} \frac{(\omega^2 B - F_3) - \left[(L - \Delta_2) + 2h\frac{L}{D}\right] F_2}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_3)} \\
\mathfrak{R}_1 &= \frac{1}{2} P_1 \frac{r}{L} \frac{\left[(L - \Delta_2) + 2h\frac{L}{D}\right](\omega^2 M - F_1) - F_2}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_3)}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \; (19)$$

führt man die Werthe (17) und (18) auch in die Wurzelwerthe (9) ein, so werden dieselben

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + \frac{F_2^2}{MB}}} \\
a_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + \frac{F_2^2}{MB}}}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \; (20)$$

Hiemit sind nun alle nicht willkürlichen Constanten der Integrale bestimmt. Setzt man in die Ausdrücke (10), Seite 147 für φ_1 und ζ_1 die Werthe (12) und für $m\ n\ m_1\ n_1$ die Werthe (17) und (18), so erhalten wir schliesslich für ζ und φ folgende Ausdrücke:

$$\zeta = \frac{2\,l\,h_1\,K}{D\,\pi}\,\frac{F_2}{F_2^2 - F_1\,F_3} + \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{G}_1 \sin.\,a_1\,t + \mathfrak{H}_1 \cos.\,a_1\,t + \mathfrak{G}_2 \sin.\,a_2\,t + \mathfrak{H}_2 \cos.\,a_2\,t \\ + \mathfrak{P} \sin.\,2\,(\alpha_0 - \omega\,t) + \mathfrak{Q} \sin.\,(\alpha_0 - \omega\,t) + \mathfrak{R} \cos.\,(\alpha_0 - \omega\,t) \end{array} \right\} \quad \ldots \quad (21)$$

$$\varphi = \frac{2\,l\,h_1\,K}{D\,\pi}\,\frac{F_1}{F_2^2 - F_1\,F_3} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1}\,(\mathfrak{G}_1 \sin.\,a_1\,t + \mathfrak{H}_1 \cos.\,a_1\,t) + \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1}\,(\mathfrak{G}_2 \sin.\,a_2\,t + \mathfrak{H}_2 \cos.\,a_2\,t) \\ + \mathfrak{P}_1 \sin.\,2\,(\alpha_0 - \omega\,t) + \mathfrak{Q}_1 \sin.\,(\alpha_0 - \omega\,t) + \mathfrak{R}_1 \cos.\,(\alpha_0 - \omega\,t) \end{array} \right\} \quad (22)$$

In diesen Ausdrücken sind $\mathfrak{G}_1$ $\mathfrak{H}_1$ $\mathfrak{G}_2$ $\mathfrak{H}_2$ die vier willkürlichen Constanten, welche die Integrale zweier Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung erfordern.

Die Ausdrücke (21) und (22) stellen die Integrale der Gleichungen (1) nur in den Fällen richtig dar, in welchen der Werth von $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{R}_1$ endlich sind, d. h. wenn die Nenner der Ausdrücke (19) nicht verschwinden. Allein die Nenner von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ verschwinden, wenn

$$F_2^2 - (4\,\omega^2\,M - F_1)\,(4\,\omega^2\,B - F_3) = 0$$

ist, d. h. wenn ω entweder gleich:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + \frac{F_2^2}{MB}}}$$

oder wenn ω gleich

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + \frac{F_2^2}{BM}}}$$

d. h. die Nenner von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ verschwinden, wenn die Winkelgeschwindigkeit ω entweder gleich $\frac{a_1}{2}$ oder gleich $\frac{a_2}{2}$ ist. Die Nenner von $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{R}_1$ verschwinden dagegen, wenn

$$F_2^2 - (\omega^2\,M - F_1)\,(\omega^2\,M - F_3) = 0$$

ist, d. h. wenn ω entweder gleich:

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + \frac{F_2^2}{MB}}}$$

oder wenn die Winkelgeschwindigkeit ω gleich

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + \frac{F_2^2}{MB}}}$$

d. h. wenn die Winkelgeschwindigkeit ω entweder gleich a_1 oder gleich a_2 ist.

Die Gleichungen (21) und (22) stellen also nur dann die Integrale der Differenzial-Gleichungen (1) dar, wenn die Winkelgeschwindigkeit ω mit keinem der vier Werthe

$$\frac{1}{2}\,a_1 \qquad \frac{1}{2}\,a_2 \qquad a_1 \qquad a_2$$

zusammentrifft. Es gibt also hinsichtlich des Nickens und Wogens vier Ausnahmsfälle, in welchen die hypothetischen Annahmen (2) nicht mehr zulässig sind. Wenn wir diese Ausnahmsfälle vollständig analytisch behandeln wollten, so müssten wir uns neuerdings in ein Gewühle von Formeln stürzen. Diese Arbeit können wir uns aber ersparen, denn es ist mit Sicherheit anzunehmen, dass in den Integralen, welche die Bewegungen φ und ζ in jedem dieser vier Ausnahmsfälle darstellen, Glieder von der Form

$$t\left[\mathfrak{M} \sin.\,(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{N} \cos.\,\alpha_0 - \omega t\right]$$

vorkommen würden. Dass also in jedem dieser vier Ausnahmsfälle Schwingungen eintreten, die mit der Zeit t immer grösser und grösser werden müssten.

Interpretation der Integrale (21) (22). Die Gesetze des Wogens und Nickens.

Vorausgesetzt, dass die Winkelgeschwindigkeit ω der Triebaxe mit keinem der vier Werthe a_1 a_2 $\frac{1}{2}\,a_1$ $\frac{1}{2}\,a_2$ übereinstimmt, besteht, wie aus den Gleichungen (21) und (22) zu ersehen ist, sowohl das Wogen als auch das Nicken aus sieben einfachen periodisch wiederkehrenden Schwingungen, wie sie durch Kurbelmechanismen hervorgebracht werden können, und die ganze totale Bewegung bleibt stets innerhalb gewisser Grenzen. Da die Werthe von t, welche gleiche Werthe von ζ geben, mit den Werthen von t, die gleiche Werthe von φ geben, nicht übereinstimmen, so kommen in der ganzen Bewegungsdauer der Lokomotive zwei gleiche Lagerungen oder zwei gleiche Bewegungszustände nicht vor. Jede einzelne von den vier Elementarschwingungen erreicht ihren numerisch grössten oder kleinsten Werth, wenn der ihr entsprechende Sinus oder Cosinus + oder — Eins wird. Die Schwingungslängen der einzelnen Elementarschwingungen sind:

$$2\,\mathfrak{G}_1 \quad 2\,\mathfrak{H}_1 \quad 2\,\mathfrak{G}_2 \quad 2\,\mathfrak{H}_2 \quad 2\,\mathfrak{P} \quad 2\,\mathfrak{Q} \quad 2\,\mathfrak{R}$$

$$2\,\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\,\mathfrak{G}_1 \qquad 2\,\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\,\mathfrak{H}_1 \qquad 2\,\frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\,\mathfrak{G}_2 \qquad 2\,\frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\,\mathfrak{H}_2$$

$$2\,\mathfrak{P}_1 \quad 2\,\mathfrak{Q}_1 \quad 2\,\mathfrak{R}_1$$

Die Schwingungszeiten sind

$$\frac{2\,\pi}{a_1} \qquad \frac{2\,\pi}{a_2} \qquad \frac{2\,\pi}{\omega} \qquad \frac{\pi}{\omega}$$

Diese 14 Elementarschwingungen können in 2 Klassen eingetheilt werden, die wir Grundschwingungen und Kurbelschwingungen nennen wollen.

Die Grundschwingungen werden durch die Glieder

$$\mathfrak{G}_1 \sin.\,a_1\,t \qquad \mathfrak{H}_1 \cos.\,a_1\,t \qquad \mathfrak{G}_2 \sin.\,a_2\,t \qquad \mathfrak{H}_2 \cos.\,a_2\,t$$

$$\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\,\mathfrak{G}_1 \sin.\,a_1\,t \qquad \frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\,\mathfrak{H}_1 \cos.\,a_1\,t \qquad \frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\,\mathfrak{G}_2 \sin.\,a_2\,t \qquad \frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\,\mathfrak{H}_2 \cos.\,a_2\,t$$

bestimmt. Sie sind, weil ω in den Ausdrücken (20) für a_1 und a_2 nicht vorkommt, unabhängig von der Winkelgeschwindigkeit der Triebaxe, erfolgen also immer in der gleichen Weise wie auch die Geschwindigkeit der Lokomotive sein mag, und richten sich nun allein nach den Werthen von F_1 F_2 F_3 M und B, d. h. nach der Anordnung des Feder-Systems und nach der Grösse und Vertheilung der Massen des Baues. Diese Grundschwingungen treten allein auf, wenn die Lokomotive, ohne vom Dampf getrieben zu werden, bloss durch ihre Trägheit auf der Bahn fortläuft. Ueber die Schwingungslängen dieser Grundschwingungen kann uns leider unsere Theorie keinen Aufschluss geben. Die durchgeführten Rechnungen gelten nur allein für den Beharrungszustand der Bewegung, denn wir haben die Integrationen nur für den Fall, dass ω constant ist, bewerkstelliget. Die Werthe der vier Constanten $\mathfrak{G}_1$ $\mathfrak{H}_1$ $\mathfrak{G}_2$ $\mathfrak{H}_2$ könnten aber nur dann bestimmt werden, wenn man die Rechnung für die Periode des Anlaufes anlegte, was nicht geschehen ist, weil die Bewegungen während des Anlaufes so komplizirt sind, dass sie nur durch ein wahres Gewühl von Formeln ausgedrückt werden könnten.

Die Kurbelschwingungen, welche durch die Glieder

$$\mathfrak{P}\ \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) \qquad \mathfrak{Q}\ \sin. (\alpha_0 - \omega t) \qquad \mathfrak{R}\ \cos. (\alpha_0 - \omega t)$$

$$\mathfrak{P}_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) \qquad \mathfrak{Q}_1 \sin. (\alpha_0 - \omega t) \qquad \mathfrak{R}_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)$$

ausgedrückt werden, entstehen durch die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale und durch die auf den Rahmenbau einwirkenden Horizontalkräfte. Ihre Schwingungsgrössen $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{R}_1$ hängen, wie die Ausdrücke (19) zeigen, von allen wesentlichern Constructionsverhältnissen der Lokomotive, sowie auch von der Winkelgeschwindigkeit der Triebaxe ab. Die Schwingungszeiten dieser Schwingungen richten sich aber nur allein nach der Winkelgeschwindigkeit der Triebaxe. Wenn diese Schwingungen allein vorhanden wären, würde die Lokomotive nach jeder Umdrehung der Triebaxe in die gleiche Lage und auch in den gleichen Bewegungszustand zurückkehren. Läuft eine Lokomotive schnell und hat sie kleine Triebräder, so folgen diese Schwingungen schnell auf einander. Läuft eine Lokomotive langsam und hat sie grosse Triebräder, so folgen diese Schwingungen langsam aufeinander, während die Grundschwingungen immer in gleicher Weise fortgehen, wie auch die Lokomotive laufen mag.

In der Weise, wie so eben dargestellt wurde, erfolgt aber die Bewegung der Lokomotive nur dann, wenn die Winkelgeschwindigkeit ω keinem der vier Werthe a_1 a_2 $\frac{1}{2}a_1$ $\frac{1}{2}a_2$ gleich kommt, d. h. nur dann, wenn die Umdrehungszeit $\frac{2\pi}{\omega}$ verschieden ist von den Schwingungszeiten $\frac{2\pi}{a_1}$ $\frac{2\pi}{a_2}$ $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}a_2}$ $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}a_2}$ der Grundschwingungen. Stimmt dagegen die Umdrehungszeit der Triebaxe mit der Schwingungszeit von einer oder von der andern der vier Grundschwingungen überein, so wird das Wogen und Nicken nicht mehr durch die Gleichungen (21) (22) Seite 164, sondern durch Gleichungen ausgedrückt, in welchen Glieder vorkommen, die die Zeit t als Faktor enthalten. Der Bewegungszustand bleibt daher in diesem Falle nicht innerhalb gewisser Grenzen, sondern er nimmt mit der Zeit immer mehr und mehr zu, so dass zuletzt ein äusserst drohender Zustand eintreten kann. Es gibt also hinsichtlich des Wogens und Nickens vier gefährliche Geschwindigkeiten, bei welchen ein stets wachsendes Ansammeln der Schwingungen eintritt. Diese vier gefährlichen Winkelgeschwindigkeiten sind:

$$a_1 \qquad a_2 \qquad \frac{1}{2}a_1 \qquad \frac{1}{2}a_2$$

Damit also bei keiner von den Winkelgeschwindigkeiten, mit denen man eine Lo-

komotive laufen lassen will, ein gefährlicher Zustand eintreten könne, muss der kleinste von den vier Werthen a_1 a_2 $\frac{1}{2}a_1$ $\frac{1}{2}a_2$ grösser sein, als die grössten der Winkelgeschwindigkeiten, mit der man die Lokomotive noch laufen lassen will. Nennt man a_0 den kleinsten der vier Werthe a_1 a_2 $\frac{1}{2}a_1$ $\frac{1}{2}a_2$ V die grösste Laufgeschwindigkeit der Lokomotive, D den Durchmesser des Triebrads, so ist $\frac{V}{\frac{1}{2}D} = \frac{2V}{D}$ die grösste Winkelgeschwindigkeit. Damit also die Lokomotive ohne Gefahr mit jeder Geschwindigkeit, die zwischen o und V liegt, laufen kann, muss:

$$a_0 > 2\frac{V}{D}$$

oder

$$D > 2\frac{V}{a_0}$$

sein. Und umgekehrt kann eine Lokomotive, deren Triebräder einen Durchmesser D haben, ohne Gefahr mit jeder Geschwindigkeit laufen, die kleiner als $\frac{1}{2}a_0 D$ ist.

Die grösste von den gefährlichen Winkelgeschwindigkeiten ist a_1. Denken wir uns, dass eine Lokomotive durch einen äusserst energischen Antrieb glücklich die grösste von den gefährlichen Geschwindigkeiten überschritten habe, und dass von da an ihre Geschwindigkeit noch fort und fort wachse, so zeigen die Ausdrücke (19), dass das Wogen und Nicken fort und fort schwächer wird und zuletzt bei einer ganz rasenden Geschwindigkeit beinahe verschwindet, denn betrachten wir ω als eine beinahe unendlich grosse Grösse, so nähern sich die Werthe der Ausdrücke immer mehr und mehr folgenden Werthen:

$$\mathfrak{P} = +\frac{1}{4}(P + P_1)\left(\frac{r}{L}\right)^2 \frac{L F_2}{16\,\omega^4 M B}$$

$$\mathfrak{P}_1 = -\frac{1}{4}(P + P_1)\left(\frac{r}{L}\right)^2 \frac{L}{4\,\omega^2 B}\left(1 + \frac{2h}{D}\right)$$

$$\mathfrak{Q} = -\frac{1}{2}P\left(\frac{r}{L}\right)\frac{1}{\omega^2 M}$$

$$\mathfrak{Q}_1 = -\frac{1}{2}P\left(\frac{r}{L}\right)\frac{L - \varDelta_2 + 2h\frac{L}{D}}{\omega^2 B}$$

$$\mathfrak{R} = -\frac{1}{2}P_1\left(\frac{r}{L}\right)\frac{1}{\omega^2 M}$$

$$\mathfrak{R}_1 = -\frac{1}{2}P_1\left(\frac{r}{L}\right)\frac{(L - \varDelta_2) + 2h\frac{L}{D}}{\omega^2 B}$$

die mit dem Wachsen von ω immer mehr und mehr abnehmen und für unendliche Werthe von ω ganz verschwinden. Es wird demnach jede Lokomotive, wie sie auch gebaut sein mag, bei extravaganter Geschwindigkeit weder ein Wanken noch ein Nicken noch ein Wogen zeigen, sondern sie wird starr aufrecht stehend fortrasen. Wenn sich also eine Lokomotive bei extravaganter Geschwindigkeit starrsinnig verhält, so darf man daraus nicht folgern, dass ihre Bauart eine stabile sei. Bei Probefahrten, die man in England mit *Crampton*'schen Lokomotiven angestellt hat, ist man mit Geschwindigkeiten von 120 Kilometer per 1 Stunde oder mit 33 Meter in der Sekunde, also ungefähr 3 mal so schnell als ein schneller Güterzug gefahren, und dabei war ein Wanken, Wogen oder Nicken kaum zu bemerken oder zu spüren. Die englischen Ingenieure zogen aus diesem Verhalten der Lokomotive den Schluss, dass ihre Bauart eine bewundernswürdige Stabilität gewähre. Dieser Schluss ist ein Fehlschluss, spricht aber dessen ungeachtet eine Wahrheit aus. Er ist ein Fehlschluss, weil sich ein so günstiges Verhalten bei einer Geschwindigkeit, die (wie sich in der Folge zeigen wird) beträchtlich grösser ist, als die grösste von den gefährlichen Geschwindigkeiten, auch bei einer hinsichtlich der Stabilität der Bewegung ganz verfehlt erbauten Lokomotive zeigen würde. Er spricht eine Wahrheit aus, weil diese Lokomotive von *Crampton*, wie wir in der Folge sehen werden, in der That in Bezug auf Stabilität vortrefflich angeordnet ist. Hätte man bei den Probefahrten durch längere Zeit eine Geschwindigkeit von nur 16 Meter eintreten lassen, so würde die Maschine so unruhige Bewegungen gezeigt haben, dass die Herren Ingenieure das Urtheil gefällt hätten: dass diese Lokomotive keine Stabilität besitze

Schwächung und Aufhebung der Bewegungen des Nickens und Wogens.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass die Kenntniss der Bedingungen, bei deren Erfüllung die störenden Bewegungen entweder gar nicht oder nur in einem schwachen Grad eintreten, für den Lokomotivbau von grösster Wichtigkeit ist. Dies weiss auch die Praxis, und das Bestreben der Constructeure ist gegenwärtig vorzugsweise dahin gerichtet, die Lokomotive in solcher Weise zu bauen, dass sie sicher und ruhig über das Geleise hinrollen, denn von der Erreichung dieses Zieles wird es abhängen, in welchem Maasse die Fahrgeschwindigkeiten auf Eisenbahnen gesteigert werden können. Ueber diesen wichtigen Gegenstand geben uns die durch das Studium über das Wogen und Nicken gewonnenen Resultate die wünschenswerthesten Aufschlüsse.

Wenn es möglich wäre, die störenden Kurbelschwingungen ganz aufzuheben, so würden auch die Grundschwingungen verschwinden, und es würden dann die Werthe von ζ und φ entweder constant oder gleich Null sein. Allein diese Kurbelschwingungen können nicht alle aufgehoben werden, weil es nicht möglich ist, die Zähler sämmtlicher Brüche der Ausdrücke (19) Seite 163 zum Verschwinden zu bringen, und gleichzeitig die Nenner gegen das Nullwerden zu schützen. Eine vollständige Vertilgung dieser Schwingungen ist daher nicht möglich; man muss sich also mit dem Erreichbaren begnügen, d. h. man muss suchen die Werthe von ζ und φ [Gleichungen (21) und (22) Seite 164] möglichs klein zu machen.

Die von der Zeit unabhängigen Glieder der Ausdrücke 21 und 22 werden klein, wenn h_1 klein ist. Damit die periodischen Glieder dieser Ausdrücke möglichst kleine numerische Werthe erhalten, müssen die Werthe von $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{S}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{S}_1$ $\mathfrak{R}_1$ möglichst geschwächt werden. Zu diesem Zwecke nehmen wir zunächst an

$$F_2 = 0 \qquad L - \Delta_2 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dann werden die Ausdrücke (19) Seite 163

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{P} &= 0 \\
\mathfrak{Q} &= +\frac{1}{2} P \left(\frac{r}{L}\right) \frac{1}{-\omega^2 M + F_1} \\
\mathfrak{R} &= +\frac{1}{2} P_1 \left(\frac{r}{L}\right) \frac{1}{-\omega^2 M + F_1} \\
\mathfrak{P}_1 &= +\frac{1}{4} (P + P_1) \left(\frac{r}{L}\right)^2 \left(1 + \frac{2h}{D}\right) \frac{L}{-4\omega^2 B + F_3} \\
\mathfrak{Q}_1 &= +P \, \frac{r}{D} \, \frac{h}{-\omega^2 B + F_3} \\
\mathfrak{R}_1 &= +P_1 \, \frac{r}{D} \, \frac{h}{-\omega^2 B + F_3}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (2)$$

Den Werth von $\mathfrak{P}_1$ können wir füglich von nun an ganz unberücksichtigt lassen; denn für die Bewegung durch die Quadranten, in welchen die Richtungen der Kolbenbewegungen übereinstimmen, ist, wie schon Seite (148) bemerkt wurde, $P + P_1$ gleich Null; verschwindet also $\mathfrak{P}_1$ gänzlich, und für die beiden andern Quadranten ist $\mathfrak{P}_1$ sehr klein, weil es, wie man sieht, dem Quadrat von $\frac{r}{L}$ proportional ist. Wir wollen also $\mathfrak{P}_1$ von nun an ganz unberücksichtigt lassen.

Nennen wir W den totalen Widerstand des Trains, so ist im Beharrungszustand der Bewegung

$$P = P_1 = \frac{\pi}{8} W \frac{D}{r}$$

durch Einführung dieser Werthe von P und P_1 in (2) werden diese Ausdrücke für $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{R}_1$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{Q} &= +\frac{\pi}{16} W \frac{D}{L} \frac{1}{-\omega^2 M + F_1} \\
\mathfrak{R} &= +\frac{\pi}{16} W \frac{D}{L} \frac{1}{-\omega^2 M + F_1} \\
\mathfrak{Q}_1 &= +\frac{\pi}{8} W \frac{h}{-\omega^2 B + F_3} \\
\mathfrak{R}_1 &= +\frac{\pi}{8} W \frac{h}{-\omega^2 B + F_3}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Aus diesen Ausdrücken kann man nun leicht herauslesen, was zu thun ist, um die Werthe von $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{R}_1$ noch weiter zu schwächen, als es schon durch die Annahmen (1) geschehen ist. Die numerischen Werthe der Ausdrücke (2) und (3) fallen klein aus, 1) wenn W klein ist, d. h. wenn die Lokomotive nur einen geringen Widerstand zu überwinden hat; 2) wenn $\frac{D}{L}$ klein ist, d. h. wenn die Schubstangen im Verhältniss zum

Durchmsser der Triebräder lang sind; 3) wenn sowohl der absolute Werth von h als auch das Verhältniss $\frac{2h}{D}$ klein ist, d. h. wenn die Höhe des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues über der Axe des Triebrades klein ist und wenn überdies diese Höhe im Verhältniss zum Durchmesser des Triebrades einen kleinen Werth hat; 4) wenn F_1 so gross ist, dass die Differenz $F_1 - \omega^2 M$ selbst für die grössten zulässigen Werthe von ω gross ausfällt; 5) wenn F_3 so gross ist, dass die Differenz $F_3 - \omega^2 B_1$ selbst für die grössten noch zulässigen Werthe von ω sehr gross ausfällt. Diese 5 Bedingungen und die zuerst angegebenen, dass 6) h_1 klein, dass 7) $F_2 = 0$ und dass 8) $L - \varDelta_2 = 0$ sein soll, müssen also erfüllt werden, damit das Nicken und Wogen nur in einem schwachen Grade eintritt.

Wir wollen diese acht Bedingungen näher betrachten, um ihre Bedeutung vollständig kennen zu lernen.

Die Bedingung 1) dass W klein sein soll, sagt aus, dass jede Lokomotive nur ein schwaches Nicken und Wogen zeigen wird, wenn sie nur einen kleinen Widerstand zu überwinden hat. Diess ist auch leicht einzusehen, denn wenn der Widerstand W klein ist, werden auch die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale und die Pressungen der Triebaxe gegen die Axengabeln kleine Werthe haben; diese Pressungen sind es aber vorzugsweise, welche das Nicken und Wogen verursachen.

Die Bedingung 2) dass nämlich $\frac{D}{L}$ klein sein soll, sagt aus, dass die Schubstangen im Verhältniss zu dem Durchmesser der Triebräder lang sein sollen. Dieser Anforderung könnte man allerdings auch durch kleine Triebräder entsprechen, allein wir werden bald sehen, dass kleine Triebräder gefährlich sind, das Verhältniss $\frac{D}{L}$ soll also selbst für die durchaus nothwendigen grossen Triebräder klein ausfallen, was nur durch verhältnissmässig lange Schubstangen möglich ist.

Die Bedingungen 3) und 6) dass nämlich h und h_1 möglichst klein, d. h. wo möglich gleich Null sein sollen, sagen aus, dass der Schwerpunkt des auf den Federn liegenden Baues, die Triebaxe und die Zusammenhängung der Lokomotive mit dem Tender in einer und derselben horizontalen Ebene liegen sollen, oder mit andern Worten, dass der Schwerpunkt des Baues und der Zusammenhängungspunkt in der Höhe der Axe der Triebräder liegen soll. Dass diese Bedingung eine wesentliche ist, kann man leicht einsehen, denn wenn dieselbe erfüllt ist, liegen alle auf den Rahmenbau einwirkenden Horizontalkräfte in der durch den Schwerpunkt des Baues gehenden Horizontalebene, können also nur eine Fortbewegung, aber keine Drehung um die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe hervorbringen, oder die Horizontalkräfte verursachen keine nickende Bewegung, wenn h und h_1 gleich Null sind. Die Mehrzahl der Constructeure hat sich bereits für eine niedrige Lage des Schwerpunktes ausgesprochen, allein dieser Ausspruch ist insofern ein unbestimmter, als damit nicht bestimmt gesagt ist, ob die Höhe des Schwerpunktes über der Bahn, oder die Höhe des Schwerpunktes über der Triebaxe gemeint ist. Unsere trocknen Formeln sagen aber aus, dass es hinsichtlich des Nickens nicht auf die Höhe des Schwerpunktes über der Bahn, sondern nur allein auf die Höhe des Schwerpunktes über der Triebaxe ankommt.

Die Bedingung 4) dass F_1 möglichst gross sein soll, kann leicht durch Worte ausgesprochen werden. Es ist nämlich $F_1 = f_1 + f_2 + f_3$ Seite (162), woraus hervorgeht, dass die Federn sehr starr sein sollen. Die Aufhebung oder Schwächung der störenden Schwingungen durch Anwendung von starren Federn ist aber ein fehlerhaftes Mittel, weil dadurch harte erschütternde Einwirkungen der Bahn hervorgerufen werden, gegen welche man sich durch die Federn schützen will. Eine Lokomotive hat nur dann einen zweckmässig angeordneten Bau, wenn sie selbst mit verhältnissmässig weichen Federn keine gaukelnden Bewegungen zeigt.

Die Bedingung 7) dass $F_2 = 0$ sein soll, kann auch leicht mit Worten ausgedrückt werden. Es ist nämlich Seite (162) $F_2 = f_1 \varDelta_1 + f_2 \varDelta_2 - f_3 \varDelta_3$ gesetzt worden. Es soll also $f_1 \varDelta_1 + f_2 \varDelta_2 - f_3 \varDelta_3 = 0$ sein. Diese Beziehung sagt aber aus, wie schon Seite (142) erklärt wurde, dass im ruhenden Zustand der Lokomotive alle Federn durch den auf denselben liegenden Bau um gleich viel zusammengedrückt sein sollen.

Nennt man $\mathfrak{P}_1\ \mathfrak{P}_2\ \mathfrak{P}_3$ die Belastungen der drei Axen der Lokomotive, s die Zusammendrückung jeder der sechs Federn, so ist

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{P}_1 = 2 f_1 s \qquad \mathfrak{P}_2 = 2 f_2 s \qquad \mathfrak{P}_3 = 2 f_3 s \\ G = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Multiplizirt man die Gleichung $f_1 \varDelta_1 + f_2 \varDelta_2 - f_3 \varDelta_3 = 0$ mit $2s$ und berücksichtiget die Werthe (4) so kann dieselbe auch geschrieben werden wie folgt:

$$\mathfrak{P}_1 \varDelta_1 + \mathfrak{P}_2 \varDelta_2 - \mathfrak{P}_3 \varDelta_3 = 0 \qquad (5)$$

Diese Gleichungen (4) und (5) leisten für die Anordnung der Axenstellung und der Federnwerke wesentliche Dienste.

Wenn ein Lokomotivbau angeordnet werden soll, wird anzugeben sein: 1) $\mathfrak{G}$ das Gewicht des auf den Axen liegenden Baues; 2) die Pressung $\mathfrak{P}_1$ auf die Vorderaxe; 3) die Pressung auf die Triebaxe; 4) die Zusammendrückung s der Federn im ruhigen Zustand der Lokomotive. Mit diesen Daten findet man zunächst aus (4) die Starrheits-Coeffizienten der Federn, nämlich:

$$f_1 = \frac{G - \mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_3}{2s} \qquad f_2 = \frac{\mathfrak{P}_2}{2s} \qquad f_3 = \frac{\mathfrak{P}_3}{2s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

und die Gleichung (5) liefert dann eine Beziehung, durch welche die Position eine der drei Axen gegen den Schwerpunkt bestimmt werden kann, wenn die Position der beiden andern Axen gegeben sind.

Die Bedingung 5) dass F_3 möglichst gross sein soll, kann ebenfalls mit Worten ausgedrückt werden. Es ist nämlich $F_3 = f_1 \varDelta_1^2 + f_2 \varDelta_2^2 + f_3 \varDelta_3^2$. Setzen wir voraus, dass im ruhenden Zustand der Lokomotive alle Federn gleich stark zusammengedrückt sind, so ist vermöge (4)

$$F_1 = \frac{\mathfrak{P}_1}{2s} \qquad F_2 = \frac{\mathfrak{P}_2}{2s} \qquad F_3 = \frac{\mathfrak{P}_3}{2s}$$

der Werth von F_3 wird demnach

$$F_3 = \frac{\mathfrak{P}_1 \varDelta_1^2 + \mathfrak{P}_2 \varDelta_2^2 + \mathfrak{P}_3 \varDelta_3^2}{2s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Der Werth von F_3 fällt also, wie man aus diesem Ausdruck ersieht, möglichst gross aus, wenn sowohl die vordere als auch die hintere Axe möglichst weit vom Schwerpunkt entfernt gestellt wird, und wenn diese zwei Axen möglichst stark belastet werden. Am besten ist es also in dieser Hinsicht, in der Mitte der Lokomotive gar keine Axe anzubringen, und die Vorder- und Hinteraxe weit auseinander zu stellen, oder kurz gesagt: Weite Radstellung, keine Mittelaxe! oder jedenfalls nur eine schwach belastete Mittelaxe.

Bei Personenlokomotiven sollen also die Triebräder, welche jederzeit eine ansehnliche Belastung erfordern, niemals in der Mitte, sondern an den Enden angebracht werden. Allein da die Triebräder immer eine bedeutende Grösse erhalten müssen, und grosse Vorderräder leicht ausgleisen, so sollen die Triebräder der Personenlokomotive nur an der hinteren Axe der Lokomotive angebracht werden.

Die Bedingung 8) dass $L - \Delta_2 = 0$ oder dass $L = \Delta_2$ sein solle, ist von grosser Wichtigkeit, denn sie bestimmt die richtige Position der Dampfcylinder. Es ist Δ_2 der Horizontalabstand des Schwerpunktes von der Triebaxe, L die Länge der Schubstange. $L = \Delta_2$ sagt demnach aus, dass die mittlere Position der Gleitstücke (d. h. diejenige Position der Gleitstücke, in welcher sie sich befinden, wenn die Kolben auf halbem Schub stehen) in die Vertikalebene fallen sollen, die quer durch den Schwerpunkt des Baues gelegt werden kann. Es ist also, wie man sieht, nicht gleichgiltig, wo man die Cylinder anbringt, sondern es wird ihnen durch unsere trocknen Formeln eine ganz bestimmte Position angewiesen; und diess ist auch sehr natürlich. Denn offenbar werden die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale ein möglichst schwaches Nicken veranlassen, wenn sich die Gleitstücke so wenig als möglich von der quer durch den Schwerpunkt gehenden Vertikalebene entfernen, diess ist aber dann der Fall, wenn die mittlere Position der Gleitstücke in diese Schwerpunktsebene fällt.

Untersuchen wir nun ferner noch, unter welchen Umständen $F_1 > \omega^2 M$ und $F_3 > \omega^2 B$ wird.

Nennen wir V die Fahrgeschwindigkeit, D den Durchmesser eines Triebrades, so ist $\omega = 2\frac{V}{D}$. Es soll daher:

$$F_1 > \left(2\frac{V}{D}\right)^2 M \quad \text{und} \quad F_3 > \left(2\frac{V}{D}\right)^2 B$$

oder

$$D > 2V\sqrt{\frac{M}{F_1}} \quad \text{und} \quad D > 2V\sqrt{\frac{B}{F_3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

sein.

Setzen wir voraus, dass im ruhenden Zustand der Lokomotive alle Federn gleich stark zusammengedrückt sind, so ist:

$$F_1 = \frac{\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3}{2s} = \frac{G}{2s}$$

$$F_3 = \frac{\Delta_1^2\,\mathfrak{P}_1 + \Delta_2^2\,\mathfrak{P}_2 + \Delta_3^2\,\mathfrak{P}_3}{2s}$$

$$F_2 = \frac{\Delta_1\,\mathfrak{P}_1 + \Delta_2\,\mathfrak{P}_2 - \Delta_3\,\mathfrak{P}_3}{2s} = 0$$

Aus diesen Ausdrücken findet man:

$$F_3 = \frac{1}{2s}\left[G\,\Delta_1\,\Delta_3 + \mathfrak{P}_2\,\frac{\Delta_1\,\Delta_2\,(\Delta_2 - \Delta_1) - \Delta_1\,\Delta_3\,(\Delta_1 + \Delta_3) + \Delta_2\,\Delta_3\,(\Delta_2 + \Delta_3)}{\Delta_1 + \Delta_3}\right]$$

Die Bedingungen (8) können demnach geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} D &> 2V\sqrt{2s\,\frac{M}{G}} \\ D &> 2V\sqrt{2s\,\frac{B(\Delta_1 + \Delta_3)}{(G - \mathfrak{P}_2)(\Delta_1 + \Delta_3)\,\Delta_1\,\Delta_3 + \mathfrak{P}_2\,(\Delta_2 - \Delta_1)\,\Delta_1\,\Delta_2 + \mathfrak{P}_2\,(\Delta_2 + \Delta_3)\,\Delta_2\,\Delta_3}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (9)$$

Für numerische Berechnungen ist es nothwendig, das als Masse ausgedrückte Trägheitsmoment B des Baues zu bestimmen. Denken wir uus, dass man in einem parallelepipedischen Raum die Masse $\frac{G}{2g}$ ganz gleichförmig vertheile, so ist es immer möglich, die Dimensionen dieses Parallelepipeds so zu wählen, dass das Trägheitsmoment desselben mit dem wahren Trägheitsmoment B genau übereinstimmt. Nennen wir h_2 die Höhe, l_2 die mit der Längenrichtung der Lokomotive parallele Dimension des Parallelepipeds, so ist bekanntlich das Trägheitsmoment desselben $\frac{G}{2g}\,\frac{1}{12}\,(l_2^2 + h_2^2)$ Wir können daher schreiben:

$$B = \frac{G}{2g}\,\frac{1}{12}\,(l_2^2 + h_2^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Wäre B und G bekannt, so würde man vermittelst dieses Ausdruckes die Dimensionen l_2 und h_2 leicht so bestimmen können, dass das Trägheitsmoment des Parallelepipeds mit dem Trägheitsmoment des wirklichen Baues übereinstimmt. Allein B ist eben nicht bekannt, sondern nur G, und es handelt sich darum, l_2 und h_2 so zu wählen, dass $\frac{G}{2g}\,\frac{1}{12}\,(l_2^2 + h_2^2)$ dem wahren Trägheitsmoment B gleich wird. Wir werden wohl keinen erheblichen Fehler begehen, wenn wir für l_2 die totale Länge des Kessels, und für h_2 den Durchmesser des Röhrenkessels in Rechnung bringen.

Setzt man in den ersten der Ausdrücke (9) für M seinen Werth $\frac{G}{2g}$ und in den zweiten für B obigen Werth (10) so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} D &> 2V\sqrt{\frac{s}{g}} \\ D &> 2V\sqrt{\frac{s}{g}\cdot\frac{1}{12}\,\frac{(l_2^2 + h_2^2)\,(\Delta_1 + \Delta_3)\,G}{(G - \mathfrak{P}_2)(\Delta_1 + \Delta_3)\,\Delta_1\,\Delta_3 + \mathfrak{P}_2\,(\Delta_2 - \Delta_1)\,\Delta_1\,\Delta_2 + \mathfrak{P}_2\,(\Delta_2 + \Delta_3)\,\Delta_2\,\Delta_3}} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Den Bedingungen $F_1 > \omega^2 M$ und $F_3 > 4\,\omega^2 B$ wird demnach entsprochen, wenn der Durchmesser eines Triebrades grösser genommen wird, als der grössere von den zwei Werthen, welche die Ausdrücke (11) bestimmen.

Wir wollen sehen, wie gross nach dieser Regel die Triebräder einer *Stephenson'shen* und einer *Crampton'schen* Lokomotive werden müsste.

Bei der Personenlokomotive von *Stephenson* liegt die Triebaxe immer nahe, bisweilen sogar ganz genau unter dem Schwerpunkt des Baues. Wir wollen das Letztere annehmen, setzen daher $\Delta_2 = 0$. Die Belastung $\mathfrak{P}_2$ der Triebräder beträgt bei dieser Lokomotive in der Regel 0.44 vom Gewicht des Baues. Wir setzen daher $\mathfrak{P}_2 = 0.44\,G$. Der Durchmesser des Röhrenkessels ist ungefähr um $\frac{1}{5}$ von der totalen Länge, es ist also h_2 ungefähr $\frac{1}{5}\,l_2$ und h_2^2 gleich $\frac{1}{25}\,l_2^2$, wir dürfen uns also erlauben h_1^2 gegen l_1^2 zu vernachlässigen. Die beiden Tragaxen sind vom Schwerpunkt nahe gleich weit entfernt. Wir dürfen also $\Delta_1 = \Delta_3 = \frac{\Delta_1 + \Delta_3}{2}$ setzen. Mit dieser die Personenlokomotive von *Stephenson* charakterisirenden Annahmen werden die Ausdrücke (11)

$$\left.\begin{aligned} D &> 2V\sqrt{\frac{s}{g}} \\ D &> 1.5\,V\frac{l_2}{\Delta_1+\Delta_3}\sqrt{\frac{s}{g}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Der Durchmesser des Triebrades muss also um so grösser sein, je grösser die grösste Fahrgeschwindigkeit und je kleiner der Radstand $\Delta_1 + \Delta_3$ im Verhältniss zur Länge des Baues ist.

Bei einer von *Stephenson* erbauten Lokomotive beträgt die Total-Kessellänge 6 Meter und der Radstand 3.55 Meter. Die Zusammendrückung s der Federn ist nie kleiner als 0.04 Meter. Mit diesen Daten gibt der erste der Ausdrücke (12)

$$\left.\begin{aligned} &D > 0{\cdot}13\,V \text{ und } V < 8\,D \\ &\text{gibt dagegen der zweite der Ausdrücke 12} \\ &D > 0.18\,V \text{ und } V < 5{\cdot}6\,D \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Die grösste Fahrgeschwindigkeit dieser Lokomotive von *Stephenson* soll also nach dieser Rechnung kleiner als $5.6\,D$ sein. Sie wird, wenn man Triebräder von $D = 2$ Meter Durchmesser annimmt, nun $2 \times 5{\cdot}6 = 11{\cdot}2$ Meter.

Für eine Personenzug-Lokomotive nach dem System von *Crampton* haben wir folgende Annahmen zu machen.

Wir haben unserer Untersuchung eine Lokomotive zu Grunde gelegt, bei welcher die Triebaxe um Δ_2 und eine Tragaxe um Δ_1 hinter dem Schwerpunkt, die zweite Trag-Axe dagegen um Δ_3 vor dem Schwerpunkte liegt. In der Lokomotive von *Crampton* sind die Entfernungen des Schwerpunktes von der hinter der Feuerbüchse angebrachten Trieb-Axe und von der vordersten Tragaxe gleich gross, wir müssen also $\Delta_2 = \Delta_3$ setzen. Hinter dem Schwerpunkt kommt keine Tragaxe vor, wohl ist aber eine solche genau unter dem Schwerpunkt angebracht; wir müssen also $\Delta_1 = 0$ setzen. Die Belastung der Triebaxe ist nahe 0·44 vom Gewichte des auf den Federn liegenden Baues; wir haben daher $\mathfrak{P}_2 = 0{\cdot}44\,G$. h_2^2 dürfen wir auch hier wie früher gegen l_2^2 vernachlässigen. Mit diesen Daten werden die Ausdrücke (11)

$$\left.\begin{aligned} D &> 2V\sqrt{\frac{s}{g}} \\ D &> 1{\cdot}23\,V\frac{l_2}{\Delta_2+\Delta_3}\sqrt{\frac{s}{g}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

An dieser Lokomotive ist aber der Radstand $\Delta_2 + \Delta_3$ so gross, als die totale Kessellänge ist, also $\frac{l_2}{\Delta_2 + \Delta_3} = 1$. Nehmen wir auch hier $s = 0{\cdot}04$ $g = 9{\cdot}81$, so erhalten wir

$$D > 0{\cdot}13\,V \text{ und } V < 8\,D$$

$$D > 0{\cdot}079\,V \text{ und } V < 12{\cdot}6\,D$$

Die grösste Fahrgeschwindigkeit dieser Lokomotive von *Crampton* soll also nach dieser Rechnung kleiner als $8\,D$ sein. Sie wird, wenn man Triebräder von 2·3 Meter Durchmesser annimmt, 18·4 Meter. Man kann also mit dieser Lokomotive ohne Gefahr bedeutend schneller fahren, als mit der von *Stephenson*.

Unsere Formeln (3) Seite (169) sagen uns nicht nur, wie gross die Triebräder nicht sein sollen, sie belehren uns auch, wie gross die Räder sein sollen, damit eine Lokomotive bei einer gewissen Geschwindigkeit, mit der sie zu laufen bestimmt ist, möglichst schwache Störungen verursacht.

Die Werthe von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ der Formeln (3) Seite (169), welche das Nicken bestimmen, werden bei einer unendlich kleinen Winkelgeschwindigkeit, also bei einem unendlich grossen Durchmesser der Triebräder am kleinsten. Anders verhält es sich mit den Werthen von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$, die das Wogen bestimmen. Diese werden für eine bestimmte endliche Grösse der Triebräder, nämlich für denjenigen Werth von D am kleinsten, für welchen

$$\frac{D}{F_1 - \omega^2 M}$$

den kleinsten Werth hat. Setzen wir diesen Ausdruck X und führen in denselben für ω seinen Werth $\frac{2V}{D}$ ein, so wird:

$$X = \frac{D^3}{F_1 D^2 - 4V^2 M}$$

Dieser Ausdruck verschwindet für $D = 0$ und wird unendlich, sowohl für $D = 2V\sqrt{\frac{M}{F_1}}$ als auch für $D = \infty$; zwischen diesen beiden Werthen von D liegt also nothwendig ein gewisser endlicher Werth, für welchen X ein Minimum wird, d. h. es gibt nebst dem nicht ausführbaren Werth $D = 0$ noch einen endlichen Werth von D, für welchen das Wogen möglichst schwach ausfällt. Für diesen vortheilhaftesten Werth von D muss $\frac{dX}{dD} = 0$ sein. Nun ist

$$\frac{dX}{dD} = \frac{D^2(D^2 F_1 - 12V^2 M)}{(F_1 D^2 - 4V^2 M)^2}$$

Der diesen Ausdruck zum Verschwinden bringende vortheilhafteste Werth von D ist demnach

$$D = V\sqrt{12\frac{M}{F_1}} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

oder auch weil $\sqrt{\frac{M}{F_1}} = \sqrt{\frac{s}{g}}$ ist

$$D = 2V\sqrt{3\frac{s}{g}} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

für $s = 0{\cdot}04$ Meter. $g = 9{\cdot}808$ wird

$$D = 0{\cdot}22\ V$$

Dieser Durchmesser ist aber sehr gross, denn er wird selbst für eine mässige Fahrgeschwindigkeit von 10 Meter bereits 2·2 Meter.

Bezeichnet man mit V_1 die gefährliche Geschwindigkeit einer Lokomotive, deren Triebräder einen Durchmesser D haben, so hat man zur Bestimmung derselben

$$D^2 F_1 = 4 V_1^2 M$$

Daraus folgt:

$$D = V_1 \sqrt{4 \frac{M}{F_1}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Aus (15) und (17) folgt aber:

$$V_1 = V \sqrt{3} = 1{\cdot}73\ V \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

Das Wogen einer Lokomotive, die mit einer Geschwindigkeit V zu fahren bestimmt ist, wird also möglichst schwach, wenn der Durchmesser der Triebräder so gross genommen wird, als der Ausdruck (16) bestimmt, und die gefährliche Geschwindigkeit ist dann 1·73 mal so gross als die Geschwindigkeit V.

Für den vortheilhaftesten Werth von D, den die Gleichung (15) darbietet, wird, wenn man berücksichtigt dass $M = \frac{G}{2g}$ $F_1 = \frac{G}{2s}$ ist

$$X = 6\ \frac{V}{G}\ s \sqrt{3 \frac{s}{g}}$$

Die Werthe von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ der Ausdrücke (3) Seite 169 werden mithin:

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{R} = \frac{6}{16}\pi \cdot \frac{W}{G} \cdot \frac{V}{L} \cdot s \sqrt{3 \frac{s}{g}}$$

$\frac{W}{G}$ ist für alle Lokomotive sehr nahe eine Constante, eben so auch die Zusammendrückung s der Federn. Damit also die Werthe von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ für alle Lokomotive gleich gross ausfallen, muss auch $\frac{V}{L}$ constant sein, oder es muss die Länge der Schubstange der Fahrgeschwindigkeit proportional genommen werden. Eine grosse Fahrgeschwindigkeit erfordert also nicht nur grosse Triebräder, sondern auch lange Schubstangen. Das erstere dieser Elemente ist jedoch viel wichtiger als das letztere, denn wenn der Durchmesser D genau oder annähernd so gross ist als die Gleichung (15) vorschreibt, fallen die Werthe von $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{R}_1$ selbst bei einem mässigen Werth von L beinahe verschwindend klein aus.

Setzen wir z. B. $V = 12$ $s = 0{\cdot}05$ $\frac{W}{G} = \frac{1}{20}$ $g = 9.81$ $L = 2$, so wird der vortheilhafteste Werth von $D = 3$ und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R} = \frac{1}{453}$ Meter.

Diese numerischen Rechnungen sind nun freilich nicht ganz zuverlässig, indem das Trägheitsmoment B beinahe nur durch eine Schätzung in Rechnung gebracht wurde, allein so viel kann man doch daraus sehen, dass die wirklichen Fahrgeschwindigkeiten der Personenlokomotive den gefährlichen Geschwindigkeiten oftmals sehr nahe kommen dürften. Wenn aber auch diese numerischen Rechnungen nicht ganz verlässlich sind, so ist doch die Form der Ausdrücke (12) und (14) eine Wahrheit; wir sind also zu dem Ausspruch berechtiget, dass eine grosse Fahrgeschwindigkeit grosse Triebräder, starre Federn und eine im Verhältniss zur Länge des Lokomotivbaues weite Radstellung erfordert.

Diese Gesetze, welche uns die Untersuchung über das Wanken, Wogen und Nicken geliefert hat, gelten nicht nur für diese specielle Lokomotive, die wir der Untersuchung zu Grunde gelegt haben, sondern sie gelten auch für alle andern Anordnungen, die nicht mit Blindaxen versehen sind, vorausgesetzt, dass man sich an den Sinn dieser Gesetze und an den wörtlichen Ausdruck derselben, nicht aber an den Buchstaben der Formeln hält. Es gilt z. B. für alle Lokomotive das Gesetz, dass alle Federn im ruhenden Zustand der Lokomotive gleich stark zusammengepresst sein sollen, dass ferner die Gleitstücke in ihrer mittleren Position in die durch den Schwerpunkt gehende Querebene fallen sollen; dass die Federn starr sein sollen; dass die Summe der Produkte aus den Axenbelastungen in die Quadrate der Entfernungen der Axen von dem Schwerpunkt möglichst gross sein soll etc. Hält man sich also an den wahren Sinn dieser Gesetze, so darf man sie jederzeit anwenden.

Diese Gesetze sind als Grundgesetze anzusehen, die bei dem Bau einer jeden Lokomotive beobachtet werden müssen, und die man ungestraft nicht übertreten darf. Eine Lokomotive ist richtig oder fehlerhaft angeordnet je nachdem ihre Bauart diesen Gesetzen entspricht oder diese Gesetze verletzt. Einzelne dieser Gesetze sind zwar auch auf empirischem Wege aufgefunden oder durch das gesunde Gefühl errathen worden, allein im Allgemeinen fehlt es in der Praxis noch sehr an klarer Uebersicht, das Herumprobiren ist noch immer an der Tagesordnung und die Constructeurs sprechen sich noch immer dahin aus, dass es überhaupt nicht möglich sei, allgemein gültige Regeln für den Bau der Lokomotive aufzustellen. Hoffentlich wird man über den Lokomotivbau zu einer anderen Ansicht kommen, wenn sich einmal die hier aufgestellten Regeln in der Praxis verbreitet haben werden.

Die aufgefundenen Gesetze werden uns in der Folge zur Bestimmung der Dimensionen von neu zu erbauenden Lokomotiven wesentliche Dienste leisten, zunächst wollen wir uns derselben bedienen um die gegenwärtig am häufigsten im Gebrauch befindlichen Lokomotive hinsichtlich der Stabilität ihres Baues zu beurtheilen.

Beurtheilung verschiedener Lokomotive hinsichtlich der Stabilität ihres Baues.

1. Die Personenlokomotive von *Stephenson* mit innen liegenden Cylindern, die Triebaxe in der Mitte, die drei Axen zwischen dem Feuerkasten und der Rauchkammer, innere Rahmen. (Tab. I, Fig. 3, 4.)

Obgleich die Construction dieser Lokomotive die am meisten verbreitete ist, so können wir doch von ihrer Stabilität nur wenig Gutes sagen. Die Cylinder liegen zwar nahe neben einander, allein die Schubstangen haben immer im Verhältniss zu den Kurbeln nur eine geringe Länge. Die Kurbeltriebaxe liegt unter dem Kessel, der Schwerpunkt des beweglichen Baues liegt also hoch. Die Maschine hat innere Rahmen, die Entfernung der Federn der einen Seite von den Federn der andern Seite der Lokomotive ist also klein. Es ist mithin nur eine von den Bedingungen erfüllt, durch die man sich gegen das Wanken schützen kann. Noch ungünstiger ist diese Lokomotive hinsichtlich des Wogens und Nickens gebaut. Die Radstellung ist eine enge, denn alle Axen befinden sich zwischen dem Feuerkasten und der Rauchkammer. Die jederzeit eine beträchtliche Belastung erfordernde Triebaxe ist in der Mitte ganz in der Nähe des Schwerpunktes angebracht, die Belastung der Vorder- und Hinterräder ist also zu schwach. Die Cylinder liegen viel zu weit vor dem Schwerpunkt des Baues, die Gleitstücke sollten in ihrer mittleren Position in der durch den Schwerpunkt gehenden Querebene liegen, befinden sich aber weit vorne, ungefähr über der Vorderaxe. Die Schubstangen sollten auch zur Schwächung des Wogens und Nickens eine beträchtliche Länge haben, was, wie schon gesagt wurde, nicht der Fall ist. Es ist also an dieser Lokomotive hinsichtlich der Stabilität nichts zu loben, als dass die Cylinder nahe neben einander liegen. Man wird gut thun, wenn man diese Bauart ganz verlässt.

2. Die Personenlokomotive von *Stephenson* mit aussen, vorne neben der Rauchkammer liegenden Cylindern, die Triebaxe in der Mitte, die drei Axen zwischen dem Feuerkasten und der Rauchkammer, innere Rahmen. (Tab. II, Fig. 5 und 6.)

An dieser Lokomotive ist keine von den Bedingungen erfüllt, die wir als Merkmale einer guten Construction aufgefunden haben. Die Schubstangen haben eine geringe Länge, die Cylinder liegen zu weit vorne, die mittlere Position der Gleitstücke fällt um ein Beträchtliches vor den Schwerpunkt des Baues. Durch die äussere Lage der Cylinder sind sie zu weit von einander entfernt, verursachen also Wanken. Die Triebräder sind in der Mitte und sollten hinten sein. Die Radstellung ist eine enge, weil alle Axen zwischen dem Feuerkasten und der Rauchkammer liegen. Der Schwerpunkt liegt hoch, insbesondere über den Axen der Tragräder. Es sind innere Rahmen vorhanden, die Federn sind daher zu nahe neben einander. Diese Lokomotive hat durch die Einfachheit ihres Baues ein „praktisches" Ansehen, ist aber so fehlerhaft als nur möglich angeordnet. Wenn die Federn nicht so starr wären, könnte man sie sicherlich gar nicht brauchen.

3. *Stephenson's* Personenzuglokomotive mit in der Mitte des Wagenbaues liegenden Cylindern, die Triebaxe in der Nähe der Feuerbüchse, jedoch vor derselben, innere Rahmen. (Tab. II, Fig. 7 und 8.)

Bei dieser Lokomotive sind mehrere von den von uns aufgestellten Bedingungen einer richtigen Bauart ganz gut erfüllt. Die hintere Axe ist hier Triebaxe, und die Cylinder haben eine solche Lage, dass die Gleitstücke in ihrer mittleren Position wenigstens nahe in die Vertikalebene fallen, die quer durch den Schwerpunkt des Baues geht. Allein der Radstand ($\Delta_2 + \Delta_3$) ist zu klein und die Schubstangen sind auch wie bei allen *Stephenson*'schen Lokomotiven zu kurz, es sind also zwei von den Bedingungen, durch deren Erfüllung das Nicken und Wogen möglichst geschwächt werden kann, nicht realisirt. Hinsichtlich des Wankens ist diese Lokomotive sehr fehlerhaft angeordnet. Die Cylinder liegen aussen, die Schubstangen haben eine geringe Länge, es sind innere Rahmen angebracht oder die Federn liegen innerhalb der Räder, der Schwerpunkt des Baues liegt hoch, weil die Axe der grossen Triebräder unter dem Kessel durchgeht. Der lobenswerthen Eigenschaften hat also diese Lokomotive nur die zwei zuerst genannten.

4. Die Personenlokomotive von *Crampton* ohne Blindaxe, mit aussen liegenden Cylindern und mit grossen Triebrädern, deren Axe hinter der Feuerbüchse liegt. (Tab. II, Fig 9 und 10.)

Ueber diese Maschine fällen auch unsere trocknen Formeln ein sehr günstiges Urtheil. Die Cylinder sind so gelegt, dass die mittlere Position der Gleitstücke in die durch den Schwerpunkt gehende vertikale Querebene fallen. Die Triebräder haben eine bedeutende Grösse und ihre Axe liegt nicht in der Mitte, sondern hinter der Feuerbüchse. Der Radstand ist grösser, als bei irgend einer andern Personenlokomotive. Die Schubstangen haben eine sehr beträchtliche Länge. Werden die Federn hinreichend starr gemacht und in der Weise angeordnet, dass sie in ruhigem Zustand der Lokomotive um gleich viel zusammengedrückt sind, so entspricht diese Lokomotive vollkommen und vollständig den Bedingungen hinsichtlich des Wogens und Nickens. Aber auch gegen das Wanken ist diese Lokomotive in mehrfacher Hinsicht gut gebaut. Die Schubstangen haben, wie schon gesagt wurde, eine sehr beträchtliche Länge. Der Schwerpunkt des Baues liegt tiefer, als bei irgend einer andern Personenlokomotive, und es liegen wenigstens die vordern Federn ausserhalb der Räder. Nur allein der Umstand ist ein ungünstiger, dass die Cylinder ausserhalb liegen. Diese Lokomotive hat also nach dem Urtheile unserer Formeln nur eine einzige Unvollkommenheit; und sie würde zu dem wahren Vorbild aller Personenlokomotiven gemacht werden können, wenn man diese äussere Lage der Cylinder mit einer inneren Lage vertauschen könnte, ohne eine von den übrigen der wirklich realisirten Bedingungen zu verletzen.

Sucht man eine Construction in einer Hinsicht zu verbessern, so begegnet es gewöhnlich, dass man sie in einer andern Hinsicht verschlechtert. *Crampton* war glücklicher. Er wollte nur Eine Verbesserung machen, dieser folgten aber mehrere andere freiwillig nach. *Crampton* wollte grössere Räder anwenden, ohne den Schwerpunkt des Baues höher legen zu müssen, und hatte den glücklichen Gedanken, sie von der Mitte wegzunehmen und hinter die Feuerbüchse zu verlegen, dadurch konnte nun der Schwerpunkt tiefer gelegt werden, wurde der Radstand grösser, erhielten die Cylinder ihre richtige Längenposition und wurden die Schubstangen von selbst länger.

5. Die Lokomotive von *Norris* mit aussen liegenden Cylindern, mit vier gekuppelten Triebrädern und mit einem beweglichen vierrädrigen Laufwagen. (Tab. V, Fig. 17 und 18.)

Die Lage der Cylinder ist theils eine ungünstige, theils eine fehlerhafte; sie ist ungünstig, weil die Cylinder aussen liegen; fehlerhaft, weil sie zu weit vorne liegen. Bringt man die Cylinder in eine solche Lage, dass die mittlere Position der Gleitstücke in die durch den Schwerpunkt gehende Querebene fällt, so muss die hinter der Feuerbüchse befindliche Triebaxe von den Gleitstücken aus vermittelst Schubstangen getrieben werden, weil sonst die Schubstangen zu kurz würden. Die Radstellung ist eine richtige, allein der Schwerpunkt der Maschine kommt ziemlich hoch zu liegen, weil die vor dem Feuerkasten befindliche Triebaxe unter dem Kessel durchgeht. Beseitiget man die Fehler dieser Construction, so kommt man zur Lokomotive von *Crampton* ohne Blindaxe.

Die Lokomotive von Crampton mit Blindaxe.

Die ganze frühere Untersuchung über das Wanken, Wogen und Nicken der Lokomotive bezieht sich nur allein auf solche Anordnungen, bei welchen die Kraft von den Gleitstücken aus direkt durch Schubstangen auf die Triebaxe übertragen wird. In dieser neueren Personenzuglokomotive von *Crampton* ist eine so direkte Uebertragung der Kraft nicht vorhanden, sondern die Kraft wird zunächst von den Gleitstücken aus vermittelst Schubstangen auf eine gegen den Rahmenbau unveränderlich gelagerte Kurbelaxe übertragen, und erst von dieser aus wird die hinter der Feuerbüchse befindliche Triebaxe vermittelst Kurbeln und Kupplungsstangen getrieben. Diese in dem Rahmenbau liegende, mit inneren Maschinenkurbeln und mit äusseren Kupplungskurbeln versehene Blindaxe wird, beim Vorwärtslaufen der Lokomotive, nach vertikaler Richtung abwärts gedrückt, und diese Pressung, in Verbindung mit allen übrigen auf den Rahmenbau einwirkenden

Horizontal- und Vertikalkräften, bewirkt in dieser Lokomotive das Wanken, Wogen und Nicken.

In der Maschine von *Crampton* liegt die Triebaxe höher als die Blindaxe und als die Gleitstücke, allein da die äusseren Kupplungsstangen im Verhältniss zur Höhe der Triebaxe über der Blindaxe sehr lang sind, so werden wir keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir annehmen, dass die Triebaxe, die Blindaxe und die Gleitstücke in einer und derselben horizontalen Ebene liegen, in welchem Falle die äusseren Kupplungsstangen stets eine horizontale Lage haben. Tab. XIV, Fig. 55 stellt den Mechanismus und das Kräftesystem der vordern Maschine dar, Fig. 56 den Mechanismus und das Kräftesystem der hintern Maschine. Fig. 57 ist eine ideale Darstellung des Rahmenbaues und der auf denselben einwirkenden Kräfte. ε ist der Verbindungspunkt des Tenders mit der Lokomotive. A die Triebaxe. B die Blindaxe. C D die Gleitstücke der beiden Maschinen. F die Punkte, in welchen die Cylinder mit dem Rahmen verbunden sind. H der Schwerpunkt des auf den Federn liegenden Baues. Die in Betrachtung zu ziehenden Kräfte sind folgende:

Das Gleitstück der vordern Maschine übt gegen das obere Führungslineal nach vertikaler Richtung aufwärts einen Druck $P\frac{r}{L}\sin.\alpha$ aus. Das Gleitstück der hintern Maschine übt gegen das Führungslineal nach vertikaler Richtung aufwärts einen Druck $P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha$ aus. Gegen den Zapfen der vorderen Maschinenkurbel wird nach horizontaler Richtung nach vorwärts ein Druck P, nach vertikaler Richtung abwärts ein Druck $P\frac{r}{L}\sin.\alpha$ ausgeübt. Gegen den Zapfen der hintern Maschine wird nach horizontaler Richtung nach rückwärts ein Druck P_1, nach vertikaler Richtung abwärts ein Druck $P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha$ ausgeübt. Gegen den Zapfen der vorderen Kupplungskurbel wirkt nach horizontaler Richtung nach vorwärts ein Druck P, nach vertikaler Richtung kein Druck. Gegen den Zapfen der hinteren Kupplungskurbel wirkt nach horizontaler Richtung, aber nach rückwärts zielend, eine Kraft P_1, nach vertikaler Richtung keine Kraft. Die Blindaxe zieht also den Rahmenbau nach horizontaler Richtung vorwärts mit einer Kraft $2P$, nach horizontaler Richtung rückwärts mit einer Kraft $2P_1$, nach vertikaler Richtung abwärts mit einer Kraft $P\frac{r}{L}\sin.\alpha+P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha$.

Den in A (Fig. 57) nach horizontaler Richtung und nach vorwärts wirkenden Druck der Triebaxe gegen die Axengabeln $\mathfrak{H}$ genannt, so hat man zur Bestimmung derselben

$$\mathfrak{H}\frac{D}{2}=P_1\left(\frac{D}{2}+r\cos.\alpha\right)-P\left(\frac{D}{2}-r\sin.\alpha\right)$$

$$\mathfrak{H}=P_1-P+\frac{2r}{D}(P\sin.\alpha+P_1\cos.\alpha)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

Um das Wanken, Wogen und Nicken der Maschine zu bestimmen, müssen wir bestimmen: 1) die Summe der Vertikalkräfte ΣZ, welche auf den Bau einwirken. 2) die Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe. 3) Die Summe der Momente in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe.

Die Summe der Vertikalkräfte reduzirt sich aber hier einzig und allein auf die Summe der Federkräfte und das Gewicht G des Baues; denn die Summe der Kräfte, welche die Blindaxe abwärts pressen, ist genau so gross, als die Summe der Pressungen,

welche die Gleitstücke nach vertikaler Richtung aufwärts ausüben. Es ist demnach für diese Maschine

$$\Sigma Z=-2\zeta F_1+2\varphi F_1\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(2)$$

Die Summe der Momente in Bezug auf die Längenaxe reduzirt sich hier ebenfalls auf die Summe der Momente der Federkräfte, denn die Pressungen der Gleitstücke geben eine Momentensumme $e\left(P\frac{r}{L}\sin\alpha-P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha\right)$ und die Pressungen gegen die Zapfen der Maschinenkurbeln geben eine Momentensumme $e\left(P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha-P\frac{r}{L}\sin.\alpha\right)$. Der Gesammtbetrag dieser Summe ist demnach gleich Null.

Die Summe der Momente aller auf den Bau einwirkender Kräfte ist demnach vermöge c, Seite 143

$$X_1=-2\varepsilon^2\psi F_1\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(3)$$

Nennt man $\varDelta$ den Horizontalabstand der Blindaxe von dem Schwerpunkt, h die Höhe dieses Schwerpunkts über der Horizontalebene, in der, der Voraussetzung gemäss, die Triebaxe, die Blindaxe und die Gleitstücke liegen. W den Widerstand des Trains, und berücksichtiget, dass die Horizontalabstände der Gleitstücke vom Schwerpunkt annähernd $r\cos.\alpha+L-\varDelta$ $r\sin.\alpha+L-\varDelta$ sind, so erhalten wir für die Summe der Momente aller Kräfte in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe folgenden Ausdruck:

$$Y_1=\left\{\begin{array}{l}+2\zeta F_2-2\varphi F_3\\[2mm] h(P_1-P+2P-2P_1+\mathfrak{H}-W)\\[2mm] P\frac{r}{L}\sin.\alpha(r\cos.\alpha+L-\varDelta)+P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha(r\sin.\alpha+L-\varDelta)\\[2mm] \varDelta\left(P\frac{r}{L}\sin.\alpha+P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha\right)\end{array}\right\}\quad\ldots\quad(4)$$

wobei die erste Zeile die Momente der Federkräfte (b Seite 143), die zweite Zeile die Momente der Horizontalkräfte, die dritte Zeile die Momente der Pressungen der Gleitstücke, die vierte Zeile die Momente der Pressungen der Blindaxe ausdrückt.

Führt man in diesen Ausdruck für $\mathfrak{H}$ seinen Werth aus (1) ein und berücksichtiget, dass im Beharrungszustand der Bewegung

$$W=2K\frac{2l}{D\pi}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(5)$$

ist, so findet man nach einigen einfachen Reductionen:

$$\left.\begin{array}{l}Y_1=-h\,2K\frac{2l}{D\pi}+2\zeta F_2-2\varphi F_3+\frac{1}{2}\frac{r^2}{L}(P+P_1)\sin.2\alpha\\[2mm] \qquad+r\left(1+\frac{2h}{D}\right)(P\sin.\alpha+P_1\cos.\alpha)\end{array}\right\}\quad\ldots\quad(6)$$

Diese Werthe ΣZ X_1 Y_1 sind unabhängig: 1) von der Horizontalentfernung der

Axen der Maschinen, 2) von der Länge der äusseren Kupplungsstangen, 3) von dem Horizontalabstand Δ der Blindaxe von dem Schwerpunkt. Es ist demnach ganz gleichgültig, ob die Cylinder bei dieser Lokomotive innen, oder ob sie aussen liegend angebracht werden, und nach wohin man die Blindaxe in horizontalem Sinne verlegt. Da ferner, wie wir gesehen haben, die Triebkräfte P und P_1 weder in der Summe ΣZ, noch in der Summe X_1 erscheinen, so kann in dieser Lokomotive, abgesehen von den Einwirkungen der Bahn, weder ein Wogen noch ein Wanken, sondern einzig und allein ein Nicken eintreten. Wir wollen nun sehen, ob dieses Nicken stärker oder schwächer ist, als bei einer gewöhnlichen Lokomotive ohne Blindaxe.

Vermöge des Ausdruckes (6) Seite 146 ist der Werth von Y_1 für eine Lokomotive ohne Blindaxe

$$\left.\begin{aligned} Y_1 = & -h_1 2K\frac{2l}{D\pi} + 2\zeta F_2 - 2\varphi F_3 + \frac{1}{2}(P+P_1)\frac{r^2}{L}\left(1+\frac{2h}{D}\right)\sin. 2\alpha \\ & + \left[(L-\Delta_2)\frac{r}{L} + \frac{2rh}{D}\right](P\sin.\alpha + P_1\cos.\alpha) \end{aligned}\right| \quad . \; . \; . \; (7)$$

Machen wir, um die Vergleichung dieses Ausdruckes mit (6) zu erleichtern, die günstige Voraussetzung, dass in beiden Maschinen $h = h_1 = 0$ seie, so werden die Werthe von Y_1

A) Für die Maschine von *Crampton mit* Blindaxe:

$$2\zeta F_2 - 2\varphi F_3 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{L}(P+P_1)\sin. 2\alpha + r(P\sin.\alpha + P_1\cos.\alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

B) Für die Maschine *ohne* Blindaxe:

$$2\zeta F_2 - 2\varphi F_3 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{L}(P+P_1)\sin. 2\alpha + r\,\frac{L-\Delta_2}{L}(P\sin.\alpha + P_1\cos.\alpha) \quad . \; . \; . \; . \; (9)$$

Diesen letzteren Ausdruck können wir noch weiter spezialisiren. Es ist nämlich Δ_2 für die Personenlokomotive von *Stephenson* ohne Blindaxe nahe gleich Null, und für die Personenlokomotive von *Crampton* ohne Blindaxe gleich L. Die Werthe von Y_1 sind daher:

C) Für die Personenlokomotive von *Stephenson ohne* Blindaxe:

$$2\zeta F_2 - 2\varphi F_3 + \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{L}\right)(P+P_1)\sin. 2\alpha + r(P\sin.\alpha + P_1\cos.\alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

D) Für die Personenlokomotive von *Crampton ohne* Blindaxe:

$$2\zeta F_2 - 2\varphi F_3 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{L}(P+P_1)\sin. 2\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

Vergleicht man diese Ausdrücke (10) und (11) mit (8) so folgt, dass die Maschine von *Crampton mit* Blindaxe 1) gerade so stark nickt, als die Personenlokomotive von *Stephenson ohne* Blindaxe, 2) weit stärker nickt, als die Personenlokomotive von *Crampton* ohne Blindaxe. Dabei ist jedoch vorausgesetzt, dass die Werthe von F_3 für alle drei Maschinen übereinstimmen.

Kurz angedeutet ist also das Urtheil unserer Untersuchung:

Stephenson: innere Cylinder	schwaches Wanken	starkes Wogen	starkes Nicken.
Crampton: ohne Blindaxe	starkes Wanken	kein Wogen	kein Nicken.
Crampton: mit Blindaxe	kein Wanken	kein Wogen	starkes Nicken.

Schliesslich wollen wir noch die Werthe von ζ φ und ψ für die Lokomotive von *Crampton* mit Blindaxe aufstellen. Die Differenzialgleichungen (3) Seite 141 der gaukelnden Bewegungen werden vermittelst der Werthe (2), (3), (6)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -m\zeta + n\varphi \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -c + m_1\zeta - n_1\varphi + \frac{1}{2}(P+P_1)q_1\sin. 2(\alpha_0 - \omega t) \\ &\qquad + p_1[P\sin.(\alpha_0-\omega t) + P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)] \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} &= -m_2\psi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (12)$$

wobei die Coeffizienten $m\ n\ m_1\ n_1\ m_2\ p_1\ q_1$ folgende Werthe haben.

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{f_1+f_2+f_3}{M} = \frac{F_1}{M} & m_1 &= \frac{\Delta_1 f_1 + \Delta_2 f_2 - \Delta_3 f_3}{B} = \frac{F^2}{B} \\ n &= \frac{\Delta_1 f_1 + \Delta_2 f_2 - \Delta_3 f_3}{M} = \frac{F_2}{M} & n_1 &= \frac{\Delta_1^2 f_1 + \Delta_2^2 f_2 + \Delta_3^2 f_3}{B} = \frac{F_3}{B} \\ c &= \frac{2lhK}{BD\pi} & q_1 &= \frac{r^2}{2LB} \\ m_2 &= \frac{e^2(f_1+f_2+f_3)}{A} = \frac{e^2 F_1}{A} & p_1 &= \frac{r}{2B}\left(1+\frac{2h}{D}\right) \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Da die Gleichungen (12) der Form nach mit den Gleichungen (9) Seite 147 übereinstimmen, so werden wir die Integrale der Gleichungen (12) erhalten, wenn wir in die Gleichung (5) Seite 149 und in die Gleichungen (13), (14), (15), Seite 162, so wie endlich in die Gleichungen (21), (22), Seite 164 für $m\ n\ e\ m_1\ n_1\ m_2\ p_1\ q_1$ die so eben zusammengestellten Werthe (13) setzen und ferner noch $p = 0$ und $p_2 = 0$ schreiben.

Wir erhalten somit für die Integrale der Gleichungen (12) folgende Ausdrücke:

$$\psi = \mathfrak{A}\sin.\sqrt{m_2}\,t + \mathfrak{B}\cos.\sqrt{m_2}\,t$$

$$\zeta = \frac{2lh}{D\pi}K\frac{F_2}{F_2^2 - F_1F_3} + \left\{\begin{aligned} & \mathfrak{G}_1\sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1\cos. a_1 t + \mathfrak{G}_2\sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2\cos. a_2 t \\ & + \mathfrak{P}_{\prime\prime}\sin. 2(\alpha_0-\omega t) + \mathfrak{Q}\sin.(\alpha_0-\omega t) + \mathfrak{R}\cos.(\alpha_0-\omega t) \end{aligned}\right\}$$

$$\varphi = \frac{2\,l\,h\,K}{D\,\pi}\,\frac{F_1}{F_2^2 - F_1 F_3} + \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{-m_1}{a_1^2 - n_1}(\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t) + \dfrac{-m_1}{a_2^2 - n_1}(\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t) \\ + \mathfrak{P}_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q}_1 \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R}_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{P} = -\frac{1}{4}\,\frac{r^2}{L}(P + P_1)\,\frac{F_2}{F_2^2 - (4\,\omega^2 M - F_1)(4\,\omega^2 B - F_3)}$$

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{1}{4}\,\frac{r^2}{L}(P + P_1)\,\frac{4\,\omega^2 M - F_1}{F_2^2 - (4\,\omega^2 M - F_1)(4\,\omega^2 B - F_3)}$$

$$\mathfrak{Q} = -\frac{1}{2}\,r\left(1 + \frac{2\,h}{D}\right)P\,\frac{F_2}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_3)}$$

$$\mathfrak{Q}_1 = +\frac{1}{2}\,r\left(1 + \frac{2\,h}{D}\right)P\,\frac{\omega^2 M - F_1}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_3)}$$

$$\mathfrak{R} = -\frac{1}{2}\,r\left(1 + \frac{2\,h}{D}\right)P_1\,\frac{F_2}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_3)}$$

$$\mathfrak{R}_1 = +\frac{1}{2}\,r\left(1 + \frac{2\,h}{D}\right)P_1\,\frac{(\omega^2 M - F_1)}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_3)}$$

Ist $F_2 = 0$, d. h. sind die Federn so construirt, dass sie im ruhigen Zustand der Lokomotive gleich stark zusammengedrückt sind, so werden diese Ausdrücke bedeutend einfacher, denn unter dieser Voraussetzung wird zunächst:

$$\mathfrak{P} = 0 \qquad \mathfrak{Q} = 0 \qquad \mathfrak{R} = 0$$

$$\mathfrak{P}_1 = -\frac{1}{4}\,\frac{r_2}{L}(P + P_1)\,\frac{1}{4\,\omega^2 B - F_3} \qquad \mathfrak{Q}_1 = -\frac{r}{2}\left(1 + \frac{2\,h}{D}\right)P\,\frac{1}{\omega^2 B - F_3}$$

$$\mathfrak{R}_1 = -\frac{r}{2}\left(1 + \frac{2\,h}{D}\right)P_1\,\frac{1}{\omega^2 B - F_3}$$

Allein weil wir von den Einwirkungen der Bahn absehen, so muss $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = 0$ sein und weil auch $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{R} = 0$ ist, so muss noch überdies $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{H}_2 = 0$ sein; denn Grundschwingungen können, wenn die Bahn keine Einwirkungen hervorbringt, nur durch Kurbelschwingungen hervorgerufen werden; in dem Ausdruck für ψ erscheint aber überhaupt keine Kurbelschwingung, und in dem Ausdruck für ζ verschwinden die Kurbelschwingungen, wenn $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{R} = 0$ ist; es müssen also nothwendig sowohl in ψ als in ζ die Grundschwingungen verschwinden, d. h. es muss $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{H}_2 = 0$ sein. Dann aber reduzirt sich der totale Bewegungszustand bloss auf eine nickende Bewegung, die durch folgenden Ausdruck bestimmt wird:

$$\varphi = -\frac{2\,l\,h\,K}{D\,\pi\,F_3} + \frac{1}{4}\,\frac{r^2}{L}(P + P_1)\,\frac{\sin. 2(\alpha_0 - \omega t)}{F_3 - 4\,\omega^2 B} + \frac{\frac{r}{2}\left(1 + \frac{2\,h}{D}\right)}{F_3 - \omega^2 B}\left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right]$$

Lokomotive mit Schleifenbewegung.

Es ist mir der Gedanke gekommen, dass man vielleicht den Schubstangen-Mechanismus durch die Schleifenbewegung mit Vortheil ersetzen könnte. Tab. VIII, Fig. 31 und 32 und Tab. XV, 59, 60, 61. Die Cylinder liegen aussen und sind an den Rahmenbau befestiget. Zur Uebertragung der Kraft von den Kolben aus auf die Kurbeln der Triebaxe dienen die Schleifen. Der Stiel einer Schleife bewegt sich in zwei an dem Rahmenbau angebrachten Führungen b c und an jeden Kurbelzapfen ist ein Gleitstück gesteckt, das mit dem Kurbelzapfen herumgehet und gleichzeitig in der Schleife auf- und abgleitet. Wir wollen vorläufig von den Schwierigkeiten einer soliden Ausführung dieser Anordnung ganz absehen, und nur zunächst untersuchen, wie sich eine solche Lokomotive hinsichtlich des Wankens, Wogens und Nickens verhält.

Die nach horizontaler Richtung und nach rückwärts zielende Pressung P des Gleitstückes der vordern Maschine gegen ihre Schleife sucht den ganzen Körper der Schleife zu drehen, und dadurch wird die Führung b nach abwärts, die Führung c nach aufwärts gepresst. Diese beiden Pressungen sind gleich gross und der numerische Werth jeder derselben ist $P\frac{r}{\Delta}\sin. \alpha$, wobei Δ die Entfernung der Punkte b und c bedeutet. Die Kraft P_1 der hintern Maschine sucht die Schleife der hintern Maschine zu drehen, und zwar in dem gleichen Sinne, in welchem das Schleifenstück der vordern Maschine zur Drehung angeregt wird. Dadurch erleidet der Führungspunkt b der hintern Maschine einen Druck $P\frac{r}{\Delta}\cos. \alpha$ nach abwärts und der Führungspunkt c der hintern Maschine einen Druck $P\frac{r}{\Delta}\cos. \alpha$ nach aufwärts.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\left.\begin{array}{l} P\,\dfrac{r}{\Delta}\sin. \alpha = \mathfrak{V}_1 \\ P_1\,\dfrac{r}{\Delta}\cos. \alpha = \mathfrak{V}_1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und nennen ferner: W den Widerstand des Trains, $\mathfrak{H}$ den Druck der Triebaxe gegen die Axengabeln, h die Höhe des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues über der Axe der Triebräder, so hat man zunächst zur Bestimmung von $\mathfrak{H}$ die Gleichung

$$\mathfrak{H}\,\frac{D}{2} = P\left(\frac{D}{2} + r \sin. \alpha\right) - P_1\left(\frac{D}{2} - r \cos. \alpha\right)$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{H} = P - P_1 + \frac{2\,r}{D}(P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

In Figur 61 ist das auf den Bau einwirkende Kräftensystem angegeben, a ist der Angriffspunkt des Widerstandes W, b und c sind die Führungspunkte der Schleifenstiele. Am vordern Punkt c wirkt eine Kräftensumme $\mathfrak{V} + \mathfrak{V}_1$ vertikal aufwärts, am hintern Punkt b wirkt eine eben so grosse Kräftensumme vertikal abwärts, a ist der Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{H}$, e ist der Stopfbüchsendeckel des Cylinders der vordern Maschine, gegen welchen der Druck P wirkt; e_1 der Bodendeckel des Cylinders der hinteren Maschine, gegen welchen der Druck P_1 wirkt. H der Schwerpunkt des auf den Federn liegenden Baues, Δ_2 die Horizontaldistanz des Schwerpunktes von der Triebaxe. Hieraus folgt nun:

1. Dass die algebraische Summe der Vertikalkräfte gleich Null ist. Ein Wogen wird mithin durch die auf den Bau einwirkenden Kräfte nicht angeregt;
2. dass die algebraische Summe der statischen Momente dieser Kräfte in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe ebenfalls gleich Null ist. Ein Wanken wird also durch diese Kräfte ebenfalls nicht angeregt;
3. dass die Kräfte $W\ \mathfrak{H}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{B}_1\ P\ P_1$ den auf den Federn liegenden Bau um eine durch den Schwerpunkt gehende Queraxe mit einem Moment

$$h(-W+\mathfrak{H}+P_1-P)+(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1)\left(\Delta_2+\frac{1}{2}\Delta\right)-(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1)\left(\Delta_2-\frac{1}{2}\Delta\right) \quad \ldots \quad (3)$$

zur Bewegung anregen, und zwar in dem Sinn, dass der vordere Theil des Lokomotivbaues gehoben wird.

Setzt man für $\mathfrak{B}\ \mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{H}$ die bereits berechneten Werthe (1) und (2), so wird das Moment (3)

$$-hW+r\left(1+\frac{2h}{D}\right)(P\sin.\alpha+P_1\cos.\alpha) \quad \ldots \quad (4)$$

Die Lokomotive wird also ein dem Werthe dieses Momentes entsprechendes Nicken zeigen müssen.

Der vollständige Werth von Y_1, d. h. die vollständige Summe der Momente aller auf den Bau einwirkenden Kräfte in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe ist nun

$$Y_1=-h\,2K\frac{2l}{D\pi}+2\zeta F_2-2\varphi F_3+r\left(1+\frac{2h}{D}\right)(P\sin.\alpha+P_1\cos.\alpha) \quad \ldots \quad (5)$$

Vergleichen wir diesen Werth von Y_1 mit jenem, den wir Seite 181, für die *Crampton*'sche Lokomotive mit Blindaxe gefunden haben, so sieht man, dass sie sich nur durch das Glied

$$\frac{1}{2}\frac{r^2}{L}(P+P^1)\sin.2\alpha$$

unterscheiden. Dieses Glied ist aber von keinem Belang, denn wenn die Kolben der beiden Maschinen nach einerlei Richtung gehen, verschwindet es ganz, weil dann $(P+P_1)$ gleich Null ist, (Siehe Seite 148), und wenn die Kolben nach entgegengesetzten Richtungen gehen, hat es immer nur einen kleinen, bald positiven, bald negativen Werth. Im Mittel genommen, kann man also sagen, dass diese Lokomotive mit Schleifenbewegung hinsichtlich des Nickens gerade so gut, oder um ein Unbedeutendes besser ist, als die Lokomotive von *Crampton* mit Blindaxe. Beide Anordnungen haben aber die vortreffliche Eigenschaft, dass sie weder Wanken noch Wogen verursachen.

Wenn $F_2=0$ ist, d. h. wenn die Federn so angeordnet sind, dass sie im ruhenden Zustand der Lokomotive um gleich viel zusammengepresst sind, wird die Differenzialgleichung der nickenden Bewegung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{hW}{2B}+\frac{r\left(1+\frac{2h}{D}\right)}{2B}(P\sin.\alpha+P_1\cos.\alpha)-\frac{F_3}{B}\varphi \quad \ldots \quad (6)$$

oder wenn man $\alpha=\alpha_0-\omega t$ setzt

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{hW}{2B}+\frac{r\left(1+\frac{2h}{D}\right)}{2B}\left[P\sin.(\alpha_0-\omega t)+P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\right]-\frac{F_3}{B}\varphi \quad \ldots \quad (7)$$

Für das Integrale dieser Gleichung findet man leicht direkt folgenden Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned}\varphi=-\frac{hW}{2F_3}+\left(\mathfrak{A}\sin.\sqrt{\frac{F_3}{B}}\,t+\mathfrak{B}\cos.\sqrt{\frac{F_3}{B}}\,t\right)+\frac{\frac{r}{2}\left(1+\frac{2h}{D}\right)}{F_3-\omega^2B}&\left[P\sin.(\alpha_0-\omega t)\right.\\ &\left.+P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\right]\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

in welchem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die willkürlichen Constanten bedeuten.

Die numerischen Werthe von P und P_1 sind für jede Stellung der Kurbeln. $\frac{\pi}{8}W\frac{D}{r}$

Nennt man V die Fahrgeschwindigkeit, welche der Winkelgeschwindigkeit ω entspricht, so ist $\omega=\frac{2V}{D}$; der Ausdruck für φ wird daher auch:

$$\left.\begin{aligned}\varphi=-\frac{hW}{2F_3}+\left(\mathfrak{A}\sin.\sqrt{\frac{F_3}{B}}\,t+\mathfrak{B}\cos.\sqrt{\frac{F_3}{B}}\,t\right)+\frac{\pi}{16}W\frac{D^2(D+2h)}{F_3D^2-4V^2B}&\times\\ \left[\pm\sin.(\alpha_0-\omega t)\pm\cos.(\alpha_0-\omega t)\right]&\end{aligned}\right\} . \quad (9)$$

dabei sind die Zeichen so zu wählen, dass $\pm\sin.(\alpha_0-\omega t)$ und $\pm\cos.(\alpha_0-\omega t)$ stets positiv bleiben.

Der Ausdruck $\frac{D^2(D+2h)}{F_3D^2-4V^2B}$ verschwindet für $D=0$, wird unendlich für $F_3D^2-4V^2B=0$ oder für $D=2V\sqrt{\frac{B}{F_3}}$, wird auch unendlich für $D=\infty$. Zwischen diesen beiden letzteren Werthen von D liegt also nothwendig ein Werth, für welchen jener Ausdruck ein Minimum wird, und diesen wollen wir suchen. Setzen wir für einen Augenblick:

$$X=\frac{D^2(D+2h)}{F_3D^2-4V^2B} \quad \ldots \quad (10)$$

Differenziren wir diesen Ausdruck in Bezug auf D, so wird:

$$\frac{dX}{dD}=\frac{DF_3}{(D^2F_3-4V^2B)^2}\left(D^3-\frac{12V^2BD}{F_3}-16\frac{V^2Bh}{F_3}\right)$$

Für denjenigen Werth von D, welcher X zu einem Minimum macht, muss $\frac{dX}{dD}$ verschwinden, diess ist der Fall für $D=0$ und für denjenigen reellen Werth von D, für welchen wird

$$D^3-\frac{12V^2BD}{F_3}-\frac{16V^2Bh}{F_3}=0 \quad \ldots \quad (11)$$

Da h im Vergleich zu $\frac{3}{4} D$ immer sehr klein ist, so kann man $\frac{16 V^2 B h}{F_3}$ gegen $\frac{12 V^2 B D}{F_3}$ vernachlässigen und dann folgt aus dieser kubischen Gleichung

$$D^2 = \frac{12 V^2 B}{F_3}$$

oder

$$D = 2 V \sqrt{\frac{3 B}{F_3}} \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Für diesen Werth von D wird der Werth von X, wenn man in demselben ebenfalls $2h$ gegen D vernachlässigt.

$$X = \frac{3}{2} \frac{V}{F_3} \sqrt{12 \frac{B}{F_3}} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Das Nicken wird also bei dieser Lokomotive am schwächsten, wenn der Durchmesser der Triebräder so gross genommen wird, als der Ausdruck (12) gibt, und dieses Nicken beträgt dann:

$$\varphi = \mathfrak{A} \sin. \sqrt{\frac{F_3}{B}}\, t + \mathfrak{B} \cos. \sqrt{\frac{F_3}{B}}\, t + \frac{3\pi}{32} \frac{W V}{F_3} \sqrt{12 \frac{B}{F_3}} \left[\pm \sin. (\alpha_0 - \omega t) \pm \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right] \quad . \quad (14)$$

Für die Lokomotive von *Crampton* ist $\sqrt{\frac{B}{F_3}}$ nahe gleich 0.039 ist. Für diesen Werth gibt die Gleichung (12)

$$D = 0{\cdot}135\, V$$

Dieser Durchmesser wird selbst für eine Geschwindigkeit V von 16 Meter nur 2.1 Meter, ist also sehr wohl ausführbar.

Nennt man V_1 die gefährliche Fahrgeschwindigkeit, d. h. diejenige Geschwindigkeit, für welche der Nenner des Ausdruckes (10) verschwindet, so hat man zur Bestimmung derselben die Gleichung:

$$F_3 D^2 - 4 V_1^2 B - 0$$

woraus folgt:

$$V_1 = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{F_3}{B}} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Aus dieser und aus der Gleichung (13) folgt:

$$V_1 = \sqrt{3}\, V = 1{\cdot}73\, V$$

Wenn wir die soeben gefundenen Resultate in Worte fassen, so können wir Folgendes aussprechen:

Wenn man den Durchmesser D der Triebräder einer Lokomotive, die bestimmt ist im Maximum mit einer Geschwindigkeit V zu laufen, so gross nimmt, als die Gleichung

(12) angibt, so tritt bei dieser Geschwindigkeit V das schwächste Nicken ein, nnd die gefährliche Geschwindigkeit V_1 ist dann 1.73mal so gross, als diese grösste Geschwindigkeit V. Ist $\sqrt{\frac{B}{F_3}} = 0.039$. $V = 16$, so wird $D = 2{\cdot}16$ und $V_1 = 28$ Meter.

Wir wollen noch berechnen, wie stark das Nicken in dem allgemeinen Falle wird, wenn der Durchmesser des Triebrades von dem einer gewissen Fahrgeschwindigkeit entsprechenden vortheilhaftesten Werthe abweicht. Setzen wir:

$$D = m\, 2 V \sqrt{3 \frac{B}{F_3}} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

wobei m irgend eine positive Zahl bedeutet, die für den vortheilhaftesten Durchmesser gleich eins ist, vernachlässigen in dem Ausdruck (9) $2h$ gegen D und setzen zur Abkürzung:

$$Y = \frac{\pi}{16} W \frac{D^3}{F_3 D^2 - 4 V^2 B} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Führen wir in diesen Ausdruck, nach welchem das Nicken zu beurtheilen ist, den obigen Werth von D ein, so wird derselbe

$$Y = \frac{6\pi}{16} W \frac{V}{F_3} \sqrt{3 \frac{B}{F_3}} \frac{m^3}{3 m^2 - 1} \quad . \quad (18)$$

Für B können wir, wie bisher immer geschehen ist, setzen:

$$B = \frac{G}{2 g} \frac{(l_2^2 + h_2^2)}{12} \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Um F_3 näher zu bestimmen, wollen wir annehmen, dass die Lokomotive mit 2 Triebrädern und mit einem vierrädrigen vordern Laufwerk versehen, also in der Weise angeordnet sei, wie Fig. (31) zeigt. Nennen wir Δ_2 den Horizontalabstand des Schwerpunktes von der hinter der Feuerbüchse befindlichen Triebaxe, Δ_3 den Horizontalabstand des Schwerpunktes von dem Mittelpunkt des Laufwerkes, $\mathfrak{P}_2$ die Belastung der Triebaxe, $\mathfrak{P}_3$ die Belastung des Laufwerkes, s die Zusammendrückung der Federn im unbewegten Zustand der Lokomotive, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 &= G \\ \mathfrak{P}_2 \Delta_2 &= \mathfrak{P}_3 \Delta_3 \\ F_3 &= \frac{\mathfrak{P}_2 \Delta_2^2 + \mathfrak{P}_3 \Delta_3^2}{2 s} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Hieraus findet man leicht durch Elimination von Δ_3 und $\mathfrak{P}_3$:

$$= \mathfrak{P}_2 \Delta_2^2 \frac{G}{2 s (G - \mathfrak{P}_2)} \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Führt man die Werthe von B und F_3, welche die Ausdrücke (19) und (20) darbieten, in (16) und (18) ein, so findet man nach einigen Reduktionen:

$$Y = \frac{6\pi}{16} \frac{W}{G} \frac{s\, l_2\, V}{\Delta_2^3} \sqrt{\frac{s}{g}} \left(\frac{G}{\mathfrak{P}_2} - 1\right) \sqrt{\left[1 + \left(\frac{h_2}{l_2}\right)^2\right] \left(\frac{G}{\mathfrak{P}_2} - 1\right)}\, \frac{m^3}{3\, m^2 - 1} \quad . \; . \; . \quad (22)$$

$$D = m\, V\, \frac{l_2}{\Delta_2} \sqrt{\frac{s}{g}} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{h_2}{l_2}\right)^2\right] \left(\frac{G}{\mathfrak{P}_2} - 1\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Wenn wir im Wesentlichen die Verhältnisse der *Crampton*'schen Lokomotive annehmen, dürfen wir setzen:

$\frac{W}{G} = \frac{1}{20}$ $\quad \frac{G}{\mathfrak{P}_2} = \frac{G}{0{\cdot}44\, G} = 2{\cdot}3$ $\quad s = 0{\cdot}05$ $\quad l_2 = 6$ $\quad h_2 = 1{\cdot}2$ $\quad \Delta_2 = 2{\cdot}5$ $\quad g = 0{\cdot}808$ Meter

und dann wird

$$\left.\begin{aligned} D &= 0{\cdot}2\, m\, V \\ Y &= \frac{1}{8178} \frac{m^3}{3\, m^2 - 1}\, V \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

Dieser Werth von Y fällt selbst für einen sehr beträchtlichen Werth von V beinahe verschwindend klein aus, wenn m nur etwas verschieden von demjenigen Werth genommen wird, für welchen $3\, m^2 - 1 = 0$ ist, d. h. wenn m nicht gleich $\frac{1}{\sqrt{3}}$ also nicht gleich $0{\cdot}577$ genommen wird. Wenn also der Durchmesser D um etwas grösser als $0{\cdot}577 \times 0{\cdot}2\, V = 0{\cdot}1154\, V$ genommen wird, so fällt bereits das Nicken schon so schwach aus, dass es in praktischer Hinsicht gar nicht mehr zu beachten ist.

Diese numerische Rechnung ist nur insofern, als das Trägheitsmoment B nur annähernd bestimmt wurde, etwas unzuverlässig. Mit vollkommener Schärfe würde man das Trägheitsmoment des auf den Federn liegenden Baues durch Versuche bestimmen können, und dann liesse sich der einer gewissen Geschwindigkeit entsprechende vortheilhafteste, so wie auch der einer gewissen Geschwindigkeit entsprechende gefährliche Durchmesser ganz scharf durch Rechnung bestimmen. Nennen wir n die Anzahl der Umdrehungen der Triebaxe in einer Sekunde, so ist:

$$n = \frac{1}{\pi} \frac{V}{D}$$

oder wenn wir $D = 0{\cdot}2\, m\, V$ setzen

$$n = \frac{1{\cdot}6}{m}$$

Setzen wir $m = 1$, so wird $D = 0{\cdot}2\, V$ und $n = 1{\cdot}6$, d. h. wenn eine Lokomotive bestimmt ist, mit einer Geschwindigkeit V zu laufen, so ist es am vortheilhaftesten, den Triebrädern einen Durchmesser $0.2\, V$ zu geben, und diese besten Triebräder machen bei der Fahrgeschwindigkeit V in jeder Sekunde 1·6 Umdrehungen.

Setzen wir $m = 0.577$, so wird $D = 0{\cdot}1154\, V$ und $n = 2{\cdot}8$, d. h. wenn man den Triebrädern einer Lokomotive, die bestimmt ist, mit einer Geschwindigkeit V zu laufen einen Durchmesser $D = 0{\cdot}1154\, V$ gibt, so würden die Räder in jeder Sekunde 2·8 Umdrehungen machen, und dabei würde ein heftiges Nicken eintreten.

Aus den Gleichungen (20) folgt $\frac{G}{\mathfrak{P}_2} - 1 = \frac{\Delta_2}{\Delta_3}$ Führt man diesen Werth in (23) ein, so erhält man:

$$D = m\, V\, l_2 \sqrt{\frac{s}{g}} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{h_2}{l_2}\right)^2\right] \frac{1}{\Delta_2 \Delta_3}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Bezeichnet man mit δ den Radstand, setzt also $\Delta_2 + \Delta_3 = \delta$, so wird $\Delta_2 \Delta_3 = \Delta_2 (\delta - \Delta_2)$. Dieses Produkt wird am grössten, wenn $\Delta_2 = \frac{\delta}{2}$ ist und wird dann $\frac{\delta}{2} \frac{\delta}{2} = \frac{\delta^2}{4}$. Der Durchmesser der Triebräder fällt also am kleinsten aus, wenn die Axe der Triebräder und der Mittelpunkt des Laufwerks gleich weit vom Schwerpunkt entfernt sind. Ist dieser Bedingung entsprochen, so wird:

$$D = 2\, m\, V\, \frac{l_2}{\delta} \sqrt{1 + \left(\frac{h_2}{l_2}\right)^2} \sqrt{\frac{s}{g}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

und dann ist der Durchmesser der Triebräder der Fahrgeschwindigkeit v und der Länge des Baues direkt, dagegen dem Radstand verkehrt proportional.

Integration der Differenzialgleichungen, welche das Wogen und Nicken bestimmen, nach der Methode der Variation der Constanten.

Die Kenntniss der Gesetze der störenden Bewegungen ist von so bedeutender praktischer Wichtigkeit, dass es mir, um ganz sicher zu gehen, angemessen zu sein schien, die Integration der Differenzialgleichungen, aus welchen diese Gesetze hergeleitet werden können, auch nach der Methode der Variation der Constanten durchzuführen.

Diese Differenzialgleichungen sind die Gleichungen (1) Seite 159, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= -m\zeta + n\varphi + pK\left[\frac{P}{K}\sin.(\alpha_0 - \omega t) + \frac{P_1}{K}\cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= +\, m_1 \zeta - n_1 \varphi + q_1 K\, \frac{\frac{1}{2}(P + P_1)}{K} \sin.2(\alpha_0 - \omega t) + p_1 K\left[\frac{P}{K}\sin.(\alpha_0 - \omega t)\right. \\ &\qquad \left. + \frac{P_1}{K}\cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (1)$$

Um diese Gleichungen nach der Methode der Variationen der Constanten zu integriren, lassen wir zunächst die Glieder, welche trigonometrische Funktionen enthalten, weg und suchen die Integrale der einfacheren Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} &= -m\zeta_1 + n\varphi_1 \\ \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} &= +\, m_1 \zeta_1 - n_1 \varphi_1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Versuchen wir, ob diesen Gleichungen entsprochen werden kann, wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \mathfrak{A}\sin. at + \mathfrak{B}\cos. at \\ \varphi_1 &= \mathfrak{C}\sin. at + \mathfrak{D}\cos. at \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Setzt man diese Werthe von ζ und φ, so wie auch die durch zweimaliges Differenziren sich ergebenden Werthe von $\frac{d^2\zeta_1}{dt^2}$ und $\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$ in die Gleichungen (2), so werden dieselben:

$$\left.\begin{aligned} -a^2(\mathfrak{A}\sin. at + \mathfrak{B}\cos. at) &= -m(\mathfrak{A}\sin. at + \mathfrak{B}\cos. at) + n(\mathfrak{C}\sin. at + \mathfrak{D}\cos. at) \\ -\alpha^2(\mathfrak{C}\sin. at + \mathfrak{D}\cos at) &= +m_1(\mathfrak{A}\sin. at + \mathfrak{B}\cos. at) - n_1(\mathfrak{C}\sin. at + \mathfrak{D}\cos. at) \end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

Damit diese Gleichungen für jeden Werth von t bestehen können, muss sein:

$$-a^2\mathfrak{A} = -m\,\mathfrak{A} + n\,\mathfrak{C} \qquad -a^2\mathfrak{B} = -m\,\mathfrak{B} + n\,\mathfrak{D}$$

$$-a^2\mathfrak{C} = +m_1\mathfrak{A} - n_1\mathfrak{C} \qquad -a^2\mathfrak{D} = +m_1\mathfrak{B} - n_1\mathfrak{D}$$

Aus diesen vier Gleichheiten folgt:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} = \frac{-n}{a^2 - m} = \frac{a^2 - n_1}{-m_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

folglich auch

$$a = \pm\sqrt{\frac{m+n_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(m+n_1)^2}{4} + n\,m_1 - m\,n_1}} \quad \ldots \quad (6)$$

Wir erhalten also für a vier verschiedene Werthe und eben so auch für $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}$ und $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$. Es gibt demnach vier verschiedene Werthe von a und von $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}$ und $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$, durch welche die Gleichungen (3) den Gleichungen (2) genügen.

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{\frac{m+n_1}{2} + \sqrt{\frac{(m+n_1)^2}{4} + n\,m_1 - m\,n_1}} \\ a_2 &= \sqrt{\frac{m+n_1}{2} - \sqrt{\frac{(m+n_1)^2}{4} + n\,m_1 - m\,n_1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

so sind die vier Werthe von a:

$$+a_1 \qquad -a_1 \qquad +a_2 \qquad -a_2$$

Wegen der linearen Form der Gleichungen (2) genügt denselben auch die Summe aller partikularen Integrale, die den vier Wurzelwerthen von a entsprechen. Bezeichnet man die Werthe von $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}\ \mathfrak{D}$, welche den einzelnen Werthen von a entsprechen, dadurch,

dass man die Wurzelwerthe als Zeichen darunter schreibt, so sind die allgemeinen aus den vier partikularen Integralien zusammengesetzten Integrale der Gleichungen (2):

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \left\{\begin{aligned} &\binom{\mathfrak{A}}{a_1}\sin. a_1 t + \binom{\mathfrak{B}}{a_1}\cos. a_1 t \\ -&\binom{\mathfrak{A}}{-a_1}\sin. a_1 t + \binom{\mathfrak{B}}{-a_1}\cos. a_1 t \end{aligned}\right\} + \left\{\begin{aligned} &\binom{\mathfrak{A}}{a_2}\sin. a_2 t + \binom{\mathfrak{B}}{a_2}\cos. a_2 t \\ -&\binom{\mathfrak{A}}{-a_2}\sin. a_2 t + \binom{\mathfrak{B}}{-a_2}\cos. a_2 t \end{aligned}\right\} \\ \varphi_1 &= \left\{\begin{aligned} &\binom{\mathfrak{C}}{a_1}\sin. a_1 t + \binom{\mathfrak{D}}{a_1}\cos. a_1 t \\ -&\binom{\mathfrak{C}}{-a_1}\sin. a_1 t + \binom{\mathfrak{D}}{-a_1}\cos. a_1 t \end{aligned}\right\} + \left\{\begin{aligned} &\binom{\mathfrak{C}}{a_2}\sin. a_2 t + \binom{\mathfrak{D}}{a_2}\cos. a_2 t \\ -&\binom{\mathfrak{C}}{a_2}\sin. a_2 t + \binom{\mathfrak{D}}{-a_2}\cos. a_2 t \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right\} \ . \ (8)$$

Setzt man

$$\binom{\mathfrak{A}}{a_1} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_1} = \mathfrak{G}_1$$

$$\binom{\mathfrak{B}}{a_1} + \binom{\mathfrak{B}}{-a_1} = \mathfrak{H}_1$$

$$\binom{\mathfrak{A}}{a_2} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_2} = \mathfrak{G}_2$$

$$\binom{\mathfrak{B}}{a_2} + \binom{\mathfrak{B}}{-a_2} = \mathfrak{H}_2$$

und berücksichtiget, dass wegen (5):

$$\binom{\mathfrak{C}}{a_1} - \binom{\mathfrak{C}}{-a_1} = -\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\left[\binom{\mathfrak{A}}{a_1} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_1}\right] = -\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\,\mathfrak{G}_1$$

$$\binom{\mathfrak{C}}{a_2} - \binom{\mathfrak{C}}{-a_2} = -\frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\left[\binom{\mathfrak{A}}{a_2} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_2}\right] = -\frac{-m_1}{a_2^2 - n_1}\,\mathfrak{G}_2$$

$$\binom{\mathfrak{D}}{a_1} + \binom{\mathfrak{D}}{-a_1} = -\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\left[\binom{\mathfrak{B}}{a_1} + \binom{\mathfrak{B}}{-a_1}\right] = -\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\,\mathfrak{H}_1$$

$$\binom{\mathfrak{D}}{a_2} + \binom{\mathfrak{D}}{-a_2} = -\frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\left[\binom{\mathfrak{B}}{a_2} + \binom{\mathfrak{B}}{-a_2}\right] = -\frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\,\mathfrak{H}_2$$

ist, so können die Integrale (8) geschrieben werden, wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \mathfrak{G}_1\sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1\cos. a_1 t + \mathfrak{G}_2\sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2\cos a_2 t \\ \varphi_1 &= -\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}(\mathfrak{G}_1\sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1\cos. a_1 t) - \frac{m_1}{a_2^2 - n_1}(\mathfrak{G}_2\sin\ a_2 t + \mathfrak{H}_2\cos. a_2 t) \end{aligned}\right\} \ldots (9)$$

Dies sind also die Integrale der Gleichungen (2) und $\mathfrak{G}_1\ \mathfrak{G}_2\ \mathfrak{H}_1\ \mathfrak{H}_2$ sind die vier Constanten der Integration, welche diese zwei Gleichungen des zweiten Grades erfordern.

Um nun die Gleichungen (1) zu integriren, wenden wir die von *Lagrange* erfundene Methode der Variation der Constanten an. Diese Methode besteht darin, dass man $\mathfrak{G}_1\ \mathfrak{G}_2\ \mathfrak{H}_1\ \mathfrak{H}_2$ als solche Funktionen von t zu bestimmen sucht, dass die Ausdrücke (9) auch den Gleichungen (1) genügen müssen.

Nennt man für einen Augenblick φ_1 und ζ_1 die Differenzialquotienten von φ und ζ, insofern man $\mathfrak{G}_1\ \mathfrak{H}_1\ \mathfrak{G}_2\ \mathfrak{H}_2$ als constante Grössen ansieht und $\varphi_2\ \zeta_2$ die Differenzialquotienten von φ und ζ nach t, insofern man nur allein $\mathfrak{G}_1\ \mathfrak{H}_1\ \mathfrak{G}_2\ \mathfrak{H}_2$ als veränderlich betrachtet, so ist:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \zeta_1 + \zeta_2 \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_1 + \varphi_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Damit aber die Werthe von φ und ζ, welche die Gleichungen (9) darbieten, sowohl den Gleichungen (2), als auch den Gleichungen (1) genügen können, wenn man $\mathfrak{G}_1\ \mathfrak{H}_1\ \mathfrak{G}_2\ \mathfrak{H}_2$ als Funktionen von t ansieht, muss:

$$\zeta_2 = 0 \qquad \varphi_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \zeta_1 \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_1$$

sein.

Man erhält demnach aus (9):

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \sin. a_1 t \frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} + \cos. a_1 t \frac{d\mathfrak{H}_1}{dt} + \sin. a_2 t \frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} + \cos. a_2 t \frac{d\mathfrak{H}_2}{dt} \\ 0 &= \frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\left(\sin. a_1 t \frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} + \cos. a_1 t \frac{d\mathfrak{H}_1}{dt}\right) + \frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\left(\sin. a_2 t \frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} + \cos. a_2 t \frac{d\mathfrak{H}_2}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \;.\;.\; (11)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} &= a_1(\mathfrak{G}_1 \cos. a_1 t - \mathfrak{H}_1 \sin. a_1 t) + a_2(\mathfrak{G}_2 \cos. a_2 t - \mathfrak{H}_2 \sin. a_2 t) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{m_1 a_1}{a_1^2 - n_1}(\mathfrak{G}_1 \cos. a_1 t - \mathfrak{H}_1 \sin. a_1 t) - \frac{a_2 m_1}{a_2^2 - n_1}(\mathfrak{G}_2 \cos. a_2 t - \mathfrak{H}_2 \sin. a_2 t) \end{aligned}\right\} \;.\;.\; (12)$$

Da a_1 nicht $= a_2$ ist, so können die Gleichungen (11) nur bestehen, wenn:

$$\left.\begin{aligned} \sin. a_1 t \frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} + \cos\, a_1 t \frac{d\mathfrak{H}_1}{dt} &= 0 \\ \sin. a_2 t \frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} + \cos. a_2 t \frac{d\mathfrak{H}_2}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (13)$$

Durch nochmalige vollständige Differenziation dieser zwei Gleichungen findet man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\zeta}{dt^2} = &-a_1^2(\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t) - a_2^2(\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t) + a_1\left(\cos. a_1 t \frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} - \sin. a_1 t \frac{d\mathfrak{H}_1}{dt}\right) \\ &+ a_2\left(\cos. a_2 t \frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} - \sin. a_2 t \frac{d\mathfrak{H}_2}{dt}\right) \end{aligned}\right\} (14)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = &+\frac{m_1 a_1^2}{a_1^2 - n_1}(\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t) + \frac{a_2^2 m_1}{a_2^2 - n_1}(\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t) \\ &- \frac{m_1 a_1}{a_1^2 - n_1}\left(\cos. a_1 t \frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} - \sin. a_1 t \frac{d\mathfrak{H}_1}{dt}\right) \\ &- \frac{m_1 a_2}{a_2^2 - n_1}\left(\cos. a_2 t \frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} - \sin. a_2 t \frac{d\mathfrak{H}_2}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \;.\;.\; (14)$$

Substituirt man die Werthe von $\varphi\ \zeta\ \frac{d^2\varphi}{dt^2}\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}$, welche die Ausdrücke (9) und (14) darbieten in die zu integrirenden Gleichungen (1) und berücksictiget, dass wegen (5):

$$(a_1^2 - n_1)(a_1^2 - m) = n\, m_1 \qquad (a_2^2 - n_1)(a_2^2 - m) = n\, m_1$$

ist, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} &a_1\left(\cos. a_1 t \frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} - \sin. a_1 t \frac{d\mathfrak{H}_1}{dt}\right) + a_2\left(\cos. a_2 t \frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} - \sin. a_2 t \frac{d\mathfrak{H}_2}{dt}\right) = p\,[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) \\ &\qquad\qquad + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \\ &-\frac{m_1 a_1}{a_1^2 - n_1}\left(\cos. a_1 t \frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} - \sin. a_1 t \frac{d\mathfrak{H}_1}{dt}\right) - \frac{m_1 a_2}{a_2^2 - n_1}\left(\cos. a_2 t \frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} - \sin. a_2 t \frac{d\mathfrak{H}_2}{dt}\right) \\ &\qquad = \frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + p_1 [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \end{aligned}\right\} \;.\; (15)$$

Aus diesen zwei Gleichungen, in Verbindung mit den Gleichungen (5) und (13) findet man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} &= +\frac{n \cos. a_1 t}{a_1(a_2^2 - a_1^2)}\left\{\frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \left(p_1 + \frac{p\, m_1}{a_2^2 - n_1}\right)[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)]\right\} \\ \frac{d\mathfrak{H}_1}{dt} &= -\frac{n \sin. a_1 t}{a_1(a_2^2 - a_1^2)}\left\{\frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \left(p_1 + \frac{p\, m_1}{a_2^2 - n_1}\right)[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)]\right\} \\ \frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} &= -\frac{n \cos. a_2 t}{a_2(a_2^2 - a_1^2)}\left\{\frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \left(p_1 + \frac{p\, m_1}{a_1^2 - n_1}\right)[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \alpha t)]\right\} \\ \frac{d\mathfrak{H}_2}{dt} &= +\frac{n \sin. a_2 t}{a_2(a_2^2 - a_1^2)}\left\{\frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \left(p_1 + \frac{p\, m_1}{a_1^2 - n_1}\right)[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos\, (\alpha_0 - \omega t)]\right\} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Durch Integration des ersten und zweiten dieser Ausdrücke findet man:

$$\mathfrak{G}_1 = \frac{-n}{a_1(a_2^2 - a_1^2)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} q_1 (P + P_1) \left[\frac{\cos.[2\alpha_0 + (a_1 - 2\omega)t]}{a_1 - 2\omega} - \frac{\cos.[(a_1 + 2\omega)t - 2\alpha_0]}{a_1 + 2\omega} \right] \\ \frac{1}{2}\left(p_1 + \frac{p m_1}{a_2^2 - n_1}\right) \left\{ \begin{array}{l} P \left[\frac{\cos.[\alpha_0 + (a_1 - \omega)t]}{a_1 - \omega} - \frac{\cos.[(a_1 + \omega)t - \alpha_0]}{a_1 + \omega} \right] \\ P_1 \left[- \frac{\sin.[\alpha_0 + (a_1 - \omega)t]}{a_1 - \omega} - \frac{\sin.[(a_1 + \omega)t - \delta\alpha_0]}{a_1 + \omega} \right] \end{array} \right\} \end{array} \right\} + \mathfrak{G}$$

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{-n}{a_1(a_2^2 - a_1^2)} \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{4} q_1 (P + P_1) \left[- \frac{\sin.[2\alpha_0 + (a_1 - 2\omega)t]}{a_1 - 2\omega} + \frac{\sin.[(a_1 + 2\omega)t - 2\alpha_0]}{a_1 + 2\omega} \right] \\ + \frac{1}{2}\left(p_1 + \frac{q m_1}{a_2^2 - n_1}\right) \left\{ \begin{array}{l} P \left[- \frac{\sin.[\alpha_0 + (a_1 - \omega)t]}{a_1 - \omega} + \frac{\sin.[(a_1 + \omega)t - \alpha_0]}{a_1 + \omega} \right] \\ P_1 \left[- \frac{\cos.[\alpha_0 + (a_1 - \omega)t]}{a_1 - \omega} - \frac{\cos.[(a_1 + \omega)t - \alpha_0]}{a_1 + \omega} \right] \end{array} \right\} \end{array} \right\} + \mathfrak{H}$$

wobei $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zwei neue Integrationsconstanten bezeichnen. Multiplizirt man die erste dieser Gleichungen mit $\sin. a_1 t$ und die zweite mit $\cos. a_1 t$ und addirt sie hierauf, so findet man nach einer Reihe von Reduktionen:

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t = + \frac{1}{2} \frac{n q_1 (P + P_1)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_1^2 - 4\omega^2)} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) \\ \qquad + \frac{n\left(p_1 + \frac{p m_1}{a_2^2 - n_1}\right)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_1^2 - \omega^2)} [P \sin.(\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)] \\ \qquad + \mathfrak{G} \sin. a_1 t + \mathfrak{H} \cos. a_1 t \end{array} \right\} \quad . \ (17)$$

Vertauscht man in diesem Ausdruck a_1 mit a_2 und a_2 mit a_1, so findet man ohne weitere Rechnung:

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t = - \frac{1}{2} \frac{n q_1 (P + P_1)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_2^2 - 4\omega^2)} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) \\ \qquad - \frac{n\left(p_1 + \frac{p m_1}{a_1^2 - n_1}\right)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_2^2 - \omega^2)} [P \sin.(\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos.(a_0 - \omega t)] \\ \qquad + \mathfrak{J} \sin. a_2 t + \mathfrak{K} \cos. a_2 t \end{array} \right\} \quad (18)$$

wobei wiederum $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$ die Integrationsconstanten bezeichnen.

Setzt man diese Werthe von $\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t$ und von $\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t$ in die Gleichungen (9), so findet man endlich:

$$\left. \begin{array}{l} \zeta = + \frac{\frac{1}{2} n q_1 (P + P_1)}{(a_2^2 - 4\omega^2)\ (a_1^2 - 4\omega^2)} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) \\ \qquad - \frac{n}{a_2^2 - a_1^2} \left[\frac{p_1(a_1^2 - n_1) + p m_1}{(a_2^2 - \omega^2)(a_1^2 - n_1)} - \frac{p_1(a_2^2 - n_1) + p m_1}{(a_1^2 - \omega^2)(a_2^2 - n_1)} \right] [P \sin.(\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)] \\ \qquad + \mathfrak{G} \sin. a_1 t + \mathfrak{H} \cos. a_1 t + \mathfrak{J} \sin. a_2 t + \mathfrak{K} \cos. a_2 t \end{array} \right\} (19)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = \frac{m_1}{a_1^2 - n_1} \left\{ - \frac{1}{2} \frac{n q_1 (P + P_1)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_1^2 - 4\omega^2)} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) - \frac{n\left(p_1 + \frac{p m_1}{a_2^2 - n_1}\right)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_1^2 - \omega^2)} [P \sin.(\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)] \right\} \\ \quad + \frac{m_1}{a_2^2 - n_1} \left\{ + \frac{1}{2} \frac{n q_1 (P + P_1)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_2^2 - 4\omega^2)} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \frac{n\left(p_1 + \frac{p m_1}{a_1^2 - n_1}\right)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_2^2 - \omega^2)} [P. \sin(\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)] \right\} \\ \quad - \frac{m_1}{a_1^2 - n_1} (\mathfrak{G} \sin. a_1 t + \mathfrak{H} \cos. a_1 t) - \frac{m_1}{a_2^2 - n_1} (\mathfrak{J} \sin. a_2 t + \mathfrak{K} \cos. a_2 t) \end{array} \right\} (20)$$

Diese beiden Ausdrücke können noch bedeutend umgestaltet werden.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$(a_2^2 - 4\omega^2)(a_1^2 - 4\omega^2) = k.$$

Durch Entwicklung findet man:

$$K = a_1^2 a_2^2 - 4\omega^2 (a_1^2 + a_2^2) + 16\omega^4.$$

Setzt man für a_1 und a_2 die Werthe, welche die Gleichungen (7) darbieten, so findet man:

$$k = \left[\frac{m + n_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{m + n_1}{2}\right)^2 + nm_1 - mn_1} \right] \left[\frac{m + n_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{m + n_1}{2}\right)^2 + nm_1 - mn_1} \right]$$
$$- 4\omega^2 (m + n_1) + 16\omega^4.$$

Durch weitere Reduktion findet man:

$$k = (4\omega^2 - m)(4\omega^2 - n_1) - nm_1 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (21)$$

Setzen wir ferner zur Abkürzung:

$$\frac{p_1(a_1^2 - n_1) + pm_1}{(a_2^2 - \omega^2)(a_1^2 - n_1)} - \frac{p(a_2^2 - n_1) + pm_1}{(a_1^2 - \omega^2)(a_2^2 - n_1)} = h$$

Bringt man diese Brüche auf einerlei Nenner, so findet man nach einigen Reduktionen:

$$h = (a_1^2 - a_2^2)\,\frac{p_1\,(a_1^2 - n_1)\,(a_2^2 - n_1) - p\,m_1\,(n_1 - \omega^2)}{(a_1^2 - \omega^2)\,(a_2^2 - \omega^2)\,(a_1^2 - n_1)\,(a_2^2 - n_1)}$$

Mit Berücksichtigung der Ausdrücke (7) findet man aber:

$$(a_1^2 - n_1)\,(a_2^2 - n_1) = -\,n\,m_1$$

$$(a_1^2 - \omega^2)\,(a_2^2 - \omega^2) = (\omega^2 - m)\,(\omega^2 - n_1) - n\,m_1$$

Daher wird:

$$h = \frac{(a_2^2 - a_1^2)}{n}\,\frac{-\,p\,(\omega^2 - n_1) + p_1\,n}{n\,m_1 - (\omega^2 - m)\,(\omega^2 - n_1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Vermittelst der Werthe, welche die Ausdrücke (21) und (22) für k und h darbieten, wird der Werth von ζ, Gleichung (19):

$$\zeta = \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{n\,q_1\,(P + P_1)}{n\,m_1 - (4\,\omega^2 - m)\,(4\,\omega^2 - n_1)}\,\sin.\,2\,(\alpha_0 - \omega\,t) \\[2ex] -\dfrac{p_1\,n - p\,(\omega^2 - n_1)}{n\,m_1 - (\omega^2 - m)\,(\omega^2 - n_1)}\,[P\,\sin.\,(\alpha_0 - \omega t) + P_1\,\cos.\,(\alpha_0 - \omega t)] \\[2ex] +\,\mathfrak{G}\,\sin.\,a_1\,t + \mathfrak{H}\,\cos.\,a_1\,t + \mathfrak{J}\,\sin.\,a_2\,t + \mathfrak{K}\,\cos.\,a_2\,t \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

Der Ausdruck (20) für φ kann geschrieben werden wie folgt:

$$\varphi = \frac{m_1\,n}{a_2^2 - a_1^2} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\,q_1\,(P + P_1)\,\sin.\,2\,(\alpha_0 - \omega\,t)\left[-\dfrac{1}{(a_1^2 - n_1)\,(a_1^2 - 4\,\omega^2)} + \dfrac{1}{(a_2^2 - n_1)\,(a_2^2 - 4\,\omega^2)}\right] \\[3ex] +\,[P\,\sin.\,(\alpha_0 - \omega\,t) + P_1\,\cos.\,(\alpha_0 - \omega\,t)]\left\{\dfrac{p_1 + \dfrac{p\,m_1}{a_1^2 - n_1}}{(a_2^2 - \omega^2)\,(a_2^2 - n_1)} - \dfrac{p_1 + \dfrac{p\,m_1}{a_2^2 - n_1}}{(a_1^2 - \omega^2)\,(a_1^2 - n_1)}\right\} \end{array} \right\} \quad (24)$$

$$-\,\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\,(\mathfrak{G}\,\sin.\,a_1\,t + \mathfrak{H}\,\cos.\,a_1\,t) - \frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\,(\mathfrak{J}\,\sin.\,a_2\,t + \mathfrak{K}\,\cos.\,a_2\,t)$$

Setzen wir zur Abkürzung.

$$-\,\frac{1}{(a_1^2 - n_1)\,(a_1^2 - 4\omega^2)} + \frac{1}{(a_2^2 - n_1)\,(a_2^2 - 4\omega^2)} = h_1$$

Bringt man diese Brüche auf gleiche Nenner, so findet man nach einigen Reduktionen:

$$h_1 = (a_1^2 - a_2^2)\,\frac{a_1^2 + a_2^2 - 4\,\omega^2 - n_1}{(a_1^2 - n_1)\,(a_2^2 - n_1)\,(a_1^2 - 4\,\omega^2)\,(a_2^2 - 4\,\omega^2)}$$

Es ist aber vermöge der Ausdrücke (7)

$$\left. \begin{array}{l} a_1^2 + a_2^2 = m + n_1 \qquad (a_1^2 - n_1)\,(a_2^2 - n) = -\,n\,m_1 \\[1ex] (a_1^2 - 4\,\omega^2)\,(a_2^2 - 4\,\omega^2) = (4\,\omega^2 - m)\,(4\,\omega^2 - n_1) - n\,m_1 \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Daher wird:

$$h_1 = \frac{a_2^2 - a_1^2}{n\,m_1}\,\frac{4\,\omega^2 - m}{n\,m_1 - (4\,\omega^2 - m)\,(4\,\omega^2 - n_1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Setzen wir endlich zur Abkürzung:

$$\frac{p_1 + \dfrac{p\,m_1}{a_1^2 - n_1}}{(a_2^2 - \omega^2)\,(a_2^2 - n_1)} - \frac{p_1 + \dfrac{p\,m_1}{a_2^2 - n_1}}{(a_1^2 - \omega^2)\,(a_1^2 - n_1)} = k_1$$

Bringt man diese Brüche auf einerlei Nenner, so findet man, aber erst nach mehreren Reduktionen:

$$k_1 = (a_2^2 - a_1^2)\,\frac{-\,p\,m_1 - p_1\,(a_1^2 + a_2^2 - \omega^2 - n_1)}{(a_1^2 - \omega^2)\,(a_2^2 - \omega^2)\,(a_1^2 - n_1)\,(a_2^2 - n_1)}$$

Dieser Ausdruck wird wegen der Werthe (25)

$$k_1 = \frac{a_2^2 - a_1^2}{n\,m_1}\,\frac{-\,p\,m_1 + p_1\,(\omega^2 - m)}{n m_1 - (\omega^2 - m)\,(\omega^2 - n_1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Vermittelst der Werthe, welche (25) und (27) für h_1 und k_1 darbieten, wird der Ausdruck (24) für φ:

$$\varphi = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{2} \frac{q_1 (P + P_1)(4\omega^2 - m)}{n m_1 - (4\omega^2 - m)(4\omega^2 - n_1)} \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) \\ \\ + \quad \frac{- p m_1 + p_1 (\omega^2 - m)}{n m_1 - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \right] \\ \\ - \quad \frac{m_1}{a_1^2 - n_1} \left[\mathfrak{G} \sin. a_1 t + \mathfrak{H} \cos. a_1 t \right] - \frac{m_1}{a_2^2 - n_1} \left[\mathfrak{J} \sin. a_2 t + \mathfrak{K} \cos. a_2 t \right] \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad (28)$$

Die Ausdrücke (23) und (28) für ζ und φ stimmen mit denjenigen überein, welche wir Seite 162 gefunden haben. Die Methode der Variation der Constanten hat uns also zu denselben Resultaten geführt, wie das zuerst befolgte Integrationsverfahren, welches, streng genommen, nur ein Versuchen war.

VII.

Festigkeits - Verhältnisse.

Theorie der Federn.

Gleichgewicht eines elastischen Stabes.

Ein im natürlichen Zustand nach irgend einem Gesetz gekrümmter stabförmiger Körper mit ungleichen jedoch nicht viel von einander abweichenden Querschnitten sei unter der Einwirkung von äussern nur auf Biegung wirkenden Kräften im Gleichgewicht; es sollen die Gesetze dieses Gleichgewichtszustandes bestimmt werden.

Es sei für den natürlichen Zustand: $A_0 B_0$, Tab. XVI, Fig. 65, die krummlinige Axe des Stabes, d. h. die Verbindungslinie der Schwerpunkte sämmtlicher Querschnitte des Stabes, $m_0 n_0 = ds$ ein unendlich kleines Element der Axe, $C_0 n_0 = \varrho_0$ der dem Punkt n_0 entsprechende Krümmungshalbmesser der Axe. Für den unter der Einwirkung der äusseren Kräfte gebogenen Stab sei $m n$, Fig. 66, das Axenelement und $C n = \varrho$ der Krümmungshalbmesser, der dem Punkt n entspricht.

Fig. 67 sei der Querschnitt des Stabes bei n $\quad n q = \xi \quad \overline{q q} = v \quad \overline{n d} = z \quad \overline{n b} = z_1$.

Da wir annehmen, dass der Stab durch die äussern Kräfte weder gedehnt noch verkürzt und auch nicht verwunden, sondern nur gebogen werde, und dass diese Biegung nur eine schwache sei, so ist es erlaubt anzunehmen: 1) dass durch die Biegung jedes Axenelement seine Länge nicht ändert, dass also $m n = m_0 n_0 = ds$ gesetzt werden dürfe, 2) dass alle Moleküle, welche ursprünglich in einem Querschnitt $b_0 n_0 d_0$ lagen, während des Vorganges der Biegung stets in einer auf der gebogenen Axe normalen Ebene $b n d$ bleiben. Ist $\varrho < \varrho_0$, so sind alle oberhalb $m n$ liegenden Faserstückchen gedehnt, alle unterhalb $m n$ liegenden Faserstückchen verkürzt. Setzt man $\widehat{m_0 c_0 n_0} = \varphi_0$ $\widehat{m c n} = \varphi$, so ist wie aus den Figuren erhellt:

$$\overline{p_0 q_0} = (\varrho_0 + \xi) \varphi_0 \qquad \overline{p q} = (\varrho + \xi) \varphi$$

oder weil

$$\widehat{m_0 n_0} = \widehat{m n} = ds = \varrho_0 \varphi_0 = \varrho \varphi \text{ ist.}$$

$$\overline{p_0 q_0} = (\varrho_0 + \xi) \frac{ds}{\varrho_0} \qquad \overline{p q} = (\varrho + \xi) \frac{ds}{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Hieraus folgt

$$\overline{p q} - \overline{p_0 q_0} = \xi \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Hiernach ist die Längenausdehnung des Faserstückchens $\overline{p_0 q_0}$ berechnet.

Bezeichnet man durch ε den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht und durch i die Intensität der Spannung in dem Faserstückchen pq, d. h. die auf die Flächeneinheit bezogene Spannung, so hat man nach einem bekannten innerhalb der Elastizitätsgrenze geltenden Ausdehnungsgesetz:

$$\overline{pq} - \overline{p_0 q_0} = \overline{p_0 q_0} \frac{i}{\varepsilon}$$

Wegen (1) und (2) folgt aus dieser Gleichung

$$i = \frac{\varepsilon \xi \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)}{1 + \frac{\xi}{\varrho_0}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Wir wollen annehmen, dass die Querschnittsdimensionen des Stabes im Verhältniss zum Krümmungshalbmesser ϱ_0 ungemein kleine Grössen seien; dann ist es erlaubt $\frac{\xi}{\varrho_0}$ gegen die Einheit zu vernachlässigen, und unter dieser Voraussetzung folgt aus (3)

$$i = \varepsilon \xi \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Die das Flächenelement $v\,d\xi$ spannende Kraft ist $\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) v \xi\, d\xi$, das statische Moment dieser Kraft in Bezug auf eine durch n gehende Drehungsaxe ist demnach $\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) v \xi^2 d\xi$. Wir erhalten daher für die Summe der statischen Momente aller in dem Querschnitt $b\,n\,d$ vorkommenden Spannungen und Pressungen folgenden Werth:

$$\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \int_{-z_1}^{+z} v \xi^2 d\xi$$

Das Integrale $\int_{-z_1}^{+z} v \xi^2 d\xi$ ist das Trägheitmoment des Querschnitts in Bezug auf eine durch n gehende auf die Ebene der Axe des Stabes senkrechte Drehungsaxe. Setzen wir der Kürze wegen:

$$\int_{-z_1}^{+z} v \xi^2 d\xi = \mu$$

so wird das Moment der Elastizitätskräfte:

$$\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \mu$$

Bezeichnen wir durch M die algebraische Summe der statischen Momente aller äussern auf den Stab einwirkenden Kräfte in Bezug auf die durch n gehende Drehungsaxe, so hat man für den Gleichgewichtszustand:

$$M = \varepsilon\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \mu \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Wir haben angenommen, dass die Krümmung des Stabes durch die biegenden Kräfte zunehme. Wenn das Gegentheil stattfindet muss $\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho}$ statt $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}$ gesetzt werden.

Nennt man J die Spannung in dem Faserstückchen $c\,d$, so erhält man zur Bestimmung derselben vermöge (4)

$$J = \varepsilon z \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt:

$$M = J \frac{\mu}{z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Die Werthe von $\frac{\mu}{z}$ findet man in meinen Resultaten für den Maschinenbau auf der V. Figurentafel für verschiedene Querschnittsformen zusammengestellt. Es sind dies die Werthe von E, d. h. man hat

$$\frac{\mu}{z} = E \qquad M = J E \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Stimmen alle Querschnitte des Stabes überein, so ist E eine constante Grösse. Sind die Querschnitte des Stabes ungleich, so ist E veränderlich. Nennt man x und y die Coordinaten des Punktes n in Bezug auf ein rechtwinkliges, in der Ebene der Axenlinie liegendes Axensystem, so hat man für den Krümmungshalbmesser ϱ folgenden Ausdruck:

$$\varrho = \pm \frac{ds^3}{dx\, d^2 y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

welcher Ausdruck jedoch voraussetzt, dass man $d^2 x = 0$ genommen habe. Das obere Zeichen gilt, wenn die Axenlinie des Stabes gegen die Abscissenaxe convex, das untere wenn sie gegen die Abcissenaxe concav gekrümmt ist.

Wenn die Krümmung des Stabes sowohl in seinem natürlichen, wie auch im gebogenen Zustand nur schwach ist, kann man der Abscissenaxe immer eine solche Lage geben, dass $\frac{dy}{dx}$ gegen die Einheit eine sehr kleine Grösse ist, so dass also wegen $ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ annähernd $ds = dx$ gesetzt werden darf. Unter dieser Voraussetzung wird:

$$\varrho = \pm \frac{dx^2}{d^2 y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

und wenn man diesen Werth in (5) einführt, so findet man:

$$\pm\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho_0} + \frac{M}{\varepsilon\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Ist ϱ_0 und M als Funktion von x gegeben, so erhält man durch Integration dieser Gleichung die Axengestalt des Stabes in seinem gebogenen Zustand.

Berechnung der Wirkungsgröße, welche der Biegung eines Stabes entspricht.

Um diese Wirkungsgrösse zu berechnen, suchen wir zunächst diejenige, welche erforderlich ist, um ein Stabelement von der Länge ds aus dem natürlichen Zustand, dem ein Krümmungshalbmesser ϱ_0 entspricht, in einen Krümmungszustand zu bringen, für welchen der Krümmungshalbmesser ϱ ist.

In einem beliebigen Moment des Aktes der Biegung sei r der Krümmungshalbmesser des Elementes ds, dann ist vermöge Gleichung (2) $\xi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varrho}\right)ds$ die Verlängerung des Faserstückchens $p_0 q_0$ und $\xi\, ds\, \frac{d\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varrho_0}\right)}{dr}dr$ die Aenderung dieser Ausdehnung, wenn die Biegung um unendlich wenig fortschreitet. Die Intensität der Spannung in dem Querschnitt $\nu\, d\xi$ ist für den Krümmungshalbmesser r, vermöge (4), $\varepsilon\xi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varrho_0}\right)$. Das der Aenderung der Ausdehnung entsprechende Element der Wirkung ist daher:

$$\nu\, d\xi \times \varepsilon\xi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varrho_0}\right) \times \xi\, ds\, d\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varrho_0}\right)$$

Integrirt man diesen Ausdruck zunächst in Bezug auf ξ von $\xi = -z_1$ bis $\xi = +z$, sodann in Bezug auf r von $r = \varrho_0$ bis $r = \varrho$, endlich in Bezug auf s und dehnt dieses letztere Integrale auf die ganze Länge l des Stabes aus, so erhält man für die Wirkungsgrösse W, die erforderlich ist um den Stab aus dem natürlichen Zustand in den Krümmungszustand zu versetzen, dem ein Krümmungshalbmesser ϱ entspricht, folgenden Ausdruck:

$$W = \frac{\varepsilon}{2}\int_0^l \left[\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_0}\right)^2 \int_{-z_1}^{+z} \xi^2\, \nu\, d\xi\right] ds$$

Oder wenn man wie früher das Trägheitsmoment des Querschnittes mit μ bezeichnet

$$W = \frac{\varepsilon}{2}\int_0^l \left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_0}\right)^2 \mu\, ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Für einen Stab von durchaus gleichen Querschnitten ist μ constant, und dann wird:

$$W = \frac{\varepsilon\mu}{2}\int_0^l \left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_0}\right)^2 ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Die Gleichung (12) ist richtig, es mag der Zustand, dem der Krümmungshalbmesser ϱ entspricht, ein Gleichgewichtszustand sein oder nicht.

Ist der Zustand, dem der Krümmungshalbmesser ϱ entspricht, ein Gleichgewichtszustand, so kann man vermöge (6) und (7) $\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_0}$ entweder durch J oder durch M ausdrücken, und dann erhält man:

$$W = \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^l \frac{J^2\mu}{z^2}\, ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

$$W = \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^l \frac{M^2}{\mu}\, ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Vermittelst der Gleichung (12) findet man für die Wirkungsgrösse, die erforderlich ist, um einen Stab, dem im natürlichen Zustand ein Krümmungshalbmesser ϱ_0 entspricht, aus einem gebogenen Zustand, dem ein Krümmungshalbmesser ϱ entspricht, in einen anderen gebogenen Zustand zu versetzen, dem ein Krümmungshalbmesser ϱ_1 zukommt, folgenden Ausdruck:

$$W = \frac{\varepsilon}{2}\int_0^l \left[\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_0}\right)^2 - \left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_0}\right)^2\right]\mu\, ds \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Wir wollen die bis jetzt gewonnenen Resultate auf einige spezielle Fälle anwenden.

Wirkung, um einen im natürlichen Zustande kreisbogenförmigen Stab mit gleichen Querschnitten in einen anderen kreisbogenförmigen Zustand zu versetzen.

Nennt man ϱ_0 den constanten Halbmesser, der dem natürlichen Zustand entspricht, ϱ den constanten Halbmesser des gebogenen Zustandes, so hat man vermöge (13)

$$W = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_0}\right)^2 \mu l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Wenn ϱ und ϱ_0 unveränderliche Werthe haben, ist auch vermöge (6) J constant. Durch Integration der Gleichung (14) findet man daher auch:

$$W = \frac{J^2\mu l}{2\varepsilon z^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Für rechtwinklige, kreisförmige, ellyptische Querschnitte ist $\frac{\mu}{z^2}$ dem Querdurchschnitt, demnach $\frac{\mu}{z^2} l$ dem Volumen des Stabs proportional. Nennt man $\mathfrak{V}$ das Volumen des Stabes, so findet man vermittelst den auf Tafel V. meiner Resultate zusammengestellten Werthen von $E = \frac{\mu}{z}$.

1) Wenn der Querschnitt des Stabes ein Rechteck ist.

$$\frac{\mu l}{z^2} = \frac{1}{3}\mathfrak{B} \quad \text{und} \quad W = \frac{1}{6}\frac{\mathfrak{J}^2}{\varepsilon}\mathfrak{B} \qquad (19)$$

2) Wenn der Querschnitt des Stabes ein Kreis vom Durchmesser d ist.

$$\frac{\mu l}{z^2} = \frac{1}{4}\mathfrak{B} \qquad W = \frac{1}{8}\frac{\mathfrak{J}^2}{\varepsilon}\mathfrak{B} \qquad (20)$$

3) Wenn der Querschnitt des Stabes ellyptisch ist.

$$\frac{\mu l}{z^2} = \frac{1}{4}\mathfrak{B} \qquad W = \frac{1}{8}\frac{\mathfrak{J}^2}{\varepsilon}\mathfrak{B} \qquad (21)$$

Wenn ein aus gleich dicken, jedoch aus ungleich langen Schienen bestehendes Federwerk, das im natürlichen Zustand in allen Theilen nach einem und demselben Halbmesser gekrümmt ist, durch äussere Kräfte so gebogen wird, dass alle Schienen übereinstimmende kreisbogenförmige Krümmungen annehmen, so findet auf jede Schiene die Gleichung (19) ihre Anwendung und es ist für alle Schienen der Werth von $\mathfrak{J}$ gleich gross, man hat daher, wenn $\mathfrak{B}$ das totale Volumen des Federwerks bezeichnet.

$$W = \frac{1}{6}\frac{\mathfrak{J}^2}{\varepsilon}\mathfrak{B} \qquad (22)$$

Bezeichnet man für eine im natürlichen und im gebogenen Zustand kreisbogenförmig gebogene Schiene f die durch die Biegung verursachte Senkung des Mittelpunktes der Schiene, $2l$ die ganze Länge der Schiene, so hat man annähernd

$$f = \frac{l^2}{2}\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho}\right) \qquad (23)$$

Vermittelst dieses Werthes kann die Wirkungsgrösse W Gleichung (12), welche der Krümmungsänderung entspricht, auf folgende Weise ausgedrückt werden:

$$W = 2\varepsilon\mu\frac{f^2}{l^3} \qquad (24)$$

Biegung eines am einen Ende eingespannten Stabes.

Ein Stab AB (Fig. 68) sei im natürlichen Zustand gerade, habe überall gleiche Querschnitte, sei bei B eingespannt, bei A belastet.

Setzen wir $An = x$ $mn = y$ und erlauben uns ds mit dx zu verwechseln, so hat man $M = Px$ und es wird vermöge Gleichung (15).

$$W = \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^l \frac{P^2 x^2 dx}{\mu} = \frac{1}{6}\frac{P^2 l^3}{\varepsilon\mu} \qquad (25)$$

Nennen wir die in dem Querschnitt bei B eintretende grösste Spannungsintensität $\mathfrak{J}$ so ist wegen Gleichung (7).

$$\mathfrak{J} = \frac{z}{\mu} P l \qquad (26)$$

Elimnirt man aus (25) und (26) den Werth von P so findet man

$$W = \frac{1}{6}\frac{\mathfrak{J}^2}{\varepsilon}\frac{\mu l}{z^2} \qquad (37)$$

Biegung eines auf zwei Stützen liegenden Stabes.

Ein bei A und B (Fig. 69) auf zwei Stützen liegender, im natürlichen Zustand gerader Stab von gleichen Querschnitten werde bei C durch ein Gewicht P belastet.

Nennen wir für einen zwischen A und C gelegenen Punkt m An x $mn = y$, für einen zwischen B und C gelegenen Punkt m_1 $Bn_1 = x$ $m_1 n_1 = y_1$.

Die Pressungen, welche die Stützpunkte A und B erleiden, sind $\frac{Pc_1}{c+c_1}$, $\frac{Pc}{c+c_1}$ die Momente, welche auf die Querschnitte bei m und m_1 einwirken, sind demnach

$$\frac{Pc_1}{c+c_1}x \qquad \frac{Pc}{c+c_1}x_1$$

Vermöge der Gleichung (15) ist daher die Wirkung um den Stab bis in den Gleichgewichtszustand zu bringen:

$$W = \frac{1}{2\varepsilon\mu}\int_0^c \left(\frac{Pc_1}{c+c_1}x\right)^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon\mu}\int_0^{c_1}\left(\frac{Pc}{c+c_1}x_1\right)^2 dx_1$$

oder:

$$W = \frac{1}{6\varepsilon\mu}\frac{P^2 c^2 c_1^2}{c+c_1} \qquad (28)$$

Nennt man $\mathfrak{J}$ das Maximum der Spannungsintensität im Querschnitt bei C, so hat man wegen Gleichung (7)

$$\mathfrak{J}^2 = \frac{Pcc_1}{c+c}\frac{z}{\mu} \qquad (29)$$

Durch Elimination von P aus diesen zwei Gleichungen folgt: wenn man $c + c_1 = l$ setzt:

$$W = \frac{1}{6}\frac{\mathfrak{J}^2}{\varepsilon}\frac{\mu l}{z^2} \qquad (30)$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem in der vorhergehenden Aufgabe für W gefundenen Werth überein.

Gleichgewichts-Verhältnisse eines Federwerkes mit nicht zugespitzten Endstücken.

Wir legen uns die Aufgabe vor, die Gleichgewichtsgesetze eines Federwerkes zu suchen, das im natürlichen Zustande folgende Eigenschaften hat: 1) die Schienenbreiten seien von einerlei Grösse; 2) im natürlichen Zustand seien alle Schienen nach einem und demselben jedoch ziemlich grossen Halbmesser kreisbogenförmig gekrümmt; 3) die Dicke einer einzelnen Schiene sei von der Mitte an bis an die äussersten Endpunkte hin von einerlei Grösse; 4) die Dicken der einzelnen Schienen seien ungleich; 5) jede Schiene sei in der Mitte und an den beiden Enden mit dünnen Metallblättchen von geringer Länge versehen, so dass sich die Schienen, wenn sie aufeinandergelegt und in der Mitte durch eine Umfassung zusammengehalten werden, nicht unmittelbar berühren, sondern zwischen je zweien eine Spalte von gleicher Weite vorhanden ist.

Diese Zwischenlagen dienen nur allein zum Behufe der Theorie, damit sich diese auch auf solche Federwerke ausdehnen kann, in welchen die Schienen im belasteten Zustand des Federwerkes ungleiche Krümmungen annehmen.

Es seien: Tab. XVI, Fig. 71:

n die Anzahl der Schienen des Federwerkes;

$\delta_1\ \delta_2\ \delta_3 \ldots\ldots\ \delta_{n-1}$ die Dicken der Schienen;

$l_1\ l_2\ l_3 \ldots\ldots\ l_{n-1}$ die Längen der Schienen;

b die gemeinschaftliche Breite der Schienen;

P_1 die Belastung auf eines der Enden der obersten Schiene;

$P_2\ P_3\ P_4 \ldots\ldots\ P_n$ die durch die Belastung P verursachten Pressungen auf die Enden der übrigen Schienen;

$x_1\ y_1$ die Coordinaten eines beliebigen, jedoch zwischen $C_1\ B_1$ gelegenen Punktes m_1 der neutralen Axe des Mittelstückes $C_1\ B_1$ der obersten Schiene;

r_1 der diesem Punkt entsprechende Krümmungshalbmesser, wenn das Federwerk belastet ist;

$\xi_1\ v_1$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der neutralen Axe von dem Endstück $B_1\ A_1$ der obersten Schiene;

ϱ_1 der im belasteten Zustand des Federwerkes diesem Punkt entsprechende Krümmungshalbmesser;

R der constante Krümmungshalbmesser der neutralen Axen sämmtlicher Schienen im unbelasteten natürlichen Zustand des Federwerkes;

Die mit $x_1\ y_1\ r_1\ \xi_1\ v_1\ \varrho_1$ analogen Grössen der folgenden Schienen sollen durch $x_2\ y_2\ r_2\ \xi_2\ v_2\ \varrho_2\quad x_3\ y_3\ r_3\ \xi_3\ v_3\ \varrho_3 \ldots\ldots$ bezeichnet werden;

ε der Modulus der Elasticität des Materials, aus welchem die Schienen bestehen.

Die Werthe von μ für die einzelnen Schienen sind:

$$\frac{1}{12}\,b\,\delta_1^3 \qquad \frac{1}{12}\,b\,\delta_2^3 \qquad \frac{1}{12}\,b\,\delta_3^3$$

Die statischen Momente, welche den Punkten

$$\left.\begin{array}{l} x_1\ y_1 \\ x_2\ y_2 \\ x_3\ y_3 \end{array}\right\}\ \text{entsprechen, sind}\ \left\{\begin{array}{l} P_1(l_1 - x_1) - P_2(l_2 - x_1) = P_1\,l_1 - P_2\,l_2 - (P_1 - P_2)\,x_1 \\ P_2(l_2 - x_2) - P_3(l_3 - x_3) = P_2\,l_2 - P_3\,l_3 - (P_2 - P_3)\,x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Die statischen Momente der Kräfte für die Punkte

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1\ v_1 \\ \xi_2\ v_2 \\ \ldots \end{array}\right\}\ \text{sind}\ \left\{\begin{array}{l} P_1(l_1 - \xi_1) \\ P_2(l_2 - \xi_2) \\ \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{1}{R} - \dfrac{12}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3}(P_1\,l_1 - P_2\,l_2) = a & (P_1 - P_2)\dfrac{12}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3} = c_1 \\[2ex] \dfrac{1}{R} - \dfrac{12}{b\,\varepsilon\,\delta_2^3}(P_2\,l_2 - P_3\,l_3) = a_2 & (P_2 - P_3)\dfrac{12}{b\,e\,\delta_2^3} = c_2 \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{1}{R} - \dfrac{12\,P_1\,l_1}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3} = \alpha_1 & \dfrac{12\,P_1}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3} = \gamma_1 \\[2ex] \dfrac{1}{R} - \dfrac{12\,P_2\,l_2}{b\,\varepsilon\,\delta_2^3} = \alpha_2 & \dfrac{12\,P_2}{b\,\varepsilon\,\delta_2^3} = \gamma_2 \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

und berücksichtiget 1) dass die Krümmung durch die Biegung abnimmt; 2) dass die Schienen gegen die unterhalb des Schienenwerkes angenommene Abscissenaxe convex ist, so erhält man vermöge Gleichung (11) (Seite 204) zur Bestimmung der neutralen Axen des Schienenwerks im belasteten Zustand desselben folgende Differenzialgleichungen.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2 y_1}{dx_1^2} = a_1 + c_1\,x_1 \\[2ex] \dfrac{d^2 y_2}{dx_2^2} = a_2 + c_1\,x_2 \\[2ex] \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2 v_1}{d\,\xi_1^2} = \alpha_1 + \beta_1\,\xi_1 \\[2ex] \dfrac{d^2 v_2}{d\,\xi_2^2} = \alpha_2 + \beta_2\,\xi_2 \\[2ex] \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

Das System (3) enthält $(n-1)$ das System (4) besteht aus n Gleichungen, weil die unterste Schiene, da auf dieselbe nur Eine Kraft einwirkt, als ein Endstück zu betrachten ist.

Durch einmalige Integration dieser Gleichungen findet man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d y_1}{d x_1} &= a_1 x_1 + \frac{1}{2} c_1 x_1^2 \\ \frac{d y_2}{d x_2} &= a_2 x_2 + \frac{1}{2} c_2 x_2^2 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d v_1}{d \xi_1} &= \alpha_1 \xi_1 + \frac{1}{2} \beta_1 \xi_1^2 + D_1 \\ \frac{d v_2}{d \xi_2} &= \alpha_2 \xi_2 + \frac{1}{2} \beta_2 \xi_2^2 + D_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

In dem System der Gleichungen (5) kommen keine Integrationsconstante vor, weil an den Anfängen der Mittelstücke die Tangenten mit der Abscissenlinie parallel sind.

Integrirt man auch die Gleichungen (5) und (6) so findet man:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2} a_1 x_1^2 + \frac{1}{6} c_1 x_1^3 + C_1 \\ y_2 &= \frac{1}{2} a_2 x_2^2 + \frac{1}{6} c_2 x_2^3 + C_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2} \alpha_1 \xi_1^2 + \frac{1}{6} \beta_1 \xi_1^3 + D_1 \xi_1 + E_1 \\ v_2 &= \frac{1}{2} \alpha_2 \xi_2^2 + \frac{1}{6} \beta_2 \xi_2^3 + D_2 \xi_2 + E_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Hiemit sind nun die endlichen Gleichungen aller Krümmungen des ganzen Federwerkes bestimmt. Die Constanten $C_1\ C_2\ C_3 \ldots D_1\ D_2\ D_3 \ldots E_1\ E_2\ E_3$ .. ergeben sich durch folgende Bedingungen der Aufgabe.

Die Krümmungen $C_1\, B_1$ und $B_1\, A_1$, $C_2\, B_2$ und $B_2\, A_2 \ldots$ haben in den Punkten $B_1\ B_2\ B_3 \ldots$ zusammenfallende Tangenten; es müssen daher die Werthe der Differenzialquotienten (5), wenn man in dieselben der Reihe nach $x_1 = l_2$ $x_2 = l_3$ $x_3 = l_4$ setzt, gleich sein den Werthen, die aus (6) folgen, wenn man $\xi_1 = l_2$ $\xi_2 = l_3$ $\xi_3 = l_4$ setzt. Man erhält demnach:

$$\left.\begin{aligned} a_1 l_2 + \frac{1}{2} c_1 l_2^2 &= \alpha_1 l_2 + \frac{1}{2} \beta_1 l_2^2 + D_1 \\ a_2 l_3 + \frac{1}{2} c_2 l_3^2 &= \alpha_2 l_3 + \frac{1}{2} \beta_2 l_3^2 + D_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Die Punkte $B_1\ B_2\ B_3 \ldots$ gehören sowohl den Mittelstücken, als auch den Endstücken an. Man hat daher wegen (7) und (8)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} a_1 l_2^2 + \frac{1}{6} c_1 l_2^3 + C_1 &= \frac{1}{2} \alpha_2 l_2^2 + \frac{1}{6} \beta_2 l_2^3 + D_2 l_2 + E_2 \\ \frac{1}{2} a_2 l_3^2 + \frac{1}{6} c_2 l_3^3 + C_2 &= \frac{1}{2} \alpha_3 l_3^2 + \frac{1}{6} \beta_3 l_3^3 + D_3 l_3 + E_3 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (10)$$

Nennt man $\Delta_2\ \Delta_3\ \Delta_4\ \Delta_5 \ldots$ die Normalabstände der neutralen Linien in der Mitte und an den Enden; setzt also Fig. (71) $\overline{c_1 c_2} = \overline{A_2 B_1} = \Delta_2$ $\overline{c_2 c_3} = \overline{A_3 B_2} = \Delta_3 \ldots$ und $O c_1 = e$ so ist:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{für } x_1 = 0 & y_1 = e & \text{demnach wegen (7)} & C = e \\ \text{„ } x_2 = 0 & y_2 = e - \Delta_2 & \text{„ „ „} & C_1 = e - \Delta_2 \\ \text{„ } x_3 = 0 & y_3 = e - (\Delta_2 + \Delta_3) & \text{„ „ „} & C_2 = e - (\Delta_2 + \Delta_3) \\ \text{„ } x_4 = 0 & y_4 = e - (\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4) & \text{„ „ „} & C_3 = e - (\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4) \end{array}\right\} (11)$$

Die Bedingungen, welche ausdrücken, dass jede Feder mit ihrem Ende die unmittelbar darüber liegende berührt, sind:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} \alpha_1 l_2^2 + \frac{1}{6} \beta_1 l_2^3 + D_1 l_2 + E_1 &= \frac{1}{2} \alpha_2 l_2^2 + \frac{1}{6} \beta_2 l_2^3 + D_2 l_2 + E_2 + \Delta_2 \cos. \psi_2 \\ \frac{1}{2} \alpha_2 l_3^2 + \frac{1}{6} \beta_2 l_3^3 + D_2 l_3 + E_2 &= \frac{1}{2} \alpha_3 l_3^2 + \frac{1}{6} \beta_3 l_3^3 + D_3 l_3 + E_3 + \Delta_3 \cos. \psi_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} . \quad (12)$$

In diesen Gleichungen sind $\psi_2\ \psi_3\ \psi_4 \ldots$ die kleinen Winkel, welche die Richtungen $A_1 B$ $A_2 B_1$ $A_3 B_2 \ldots$ mit der vertikalen Richtung bilden.

Aus den Gleichungen (9), (10), (11), (12) ergeben sich für die Integrationsconstanten folgende Werthe. Die Werthe von $C_1\, C_2\, C_3$ .. sind bereits durch die Gleichungen (11) gegeben.

Aus den Gleichungen (9) findet man mit Beachtung der Gleichungen (1) und (2)

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= \frac{6 P_2 l_2^2}{b \varepsilon \delta_1^3} \\ D_2 &= \frac{6 P_3 l_3^2}{b \varepsilon \delta_2^3} \\ &\ldots\ldots \\ D_{n-2} &= \frac{6 P_{n-1} l_{n-1}^2}{b \varepsilon \delta_{n-2}^3} \\ D_{n-1} &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (13)$$

Aus den Gleichungen (10) findet man mit Berücksichtigung von (1), (2), (11), (13):

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= e - \Delta_2 - \frac{2 P_2 l_2^3}{b \varepsilon \delta_1^3} \\ E_2 &= e - (\Delta_2 + \Delta_3) - \frac{2 P_3 l_3^3}{b \varepsilon \delta_2^3} \\ & \cdots\cdots\cdots \\ E_{i-1} &= e - (\Delta_2 + \Delta_3 + \ldots \Delta_n) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Hiermit sind nun sämmtliche Constanten der Integration bestimmt.

Substituirt man die Werthe dieser Constanten in die Gleichungen (12), berücksichtiget die Gleichungen (1) und (2) und erlaubt sich für die kleinen Winkel $\psi_2\ \psi_3\ \psi_4 \ldots \cos.\psi_2 = 1$ $\cos.\psi_3 = 1$ $\cos.\psi_4 \doteq 1$ zu setzen, so ergeben sich noch folgende $(n-1)$ Bedingungsgleichungen.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{l_2^2 P_1}{\delta_3^1}(l_2 - 3 l_1) + 2 l_2^3 P_2 \left(\frac{1}{\delta_1^3} + \frac{1}{\delta_2^3}\right) + \frac{l_3^2 P_3}{\delta_2^3}(l_3 - 3 l_2) = 0 \\ &\frac{l_3^2 P_2}{\delta_2^3}(l_3 - 3 l_2) + 2 l_3^3 P_3 \left(\frac{1}{\delta_2^3} + \frac{1}{\delta_3^3}\right) + \frac{l_4^2 P_4}{\delta_3^3}(l_4 - 3 l_1) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{P_{n-1} l_n^2}{\delta_{n-1}^3}(l_n - 3 l_{n-1}) + 2 P_n l_n^3 \left(\frac{1}{\delta_n^3} - \frac{1}{\delta_{n-1}^3}\right) \qquad = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Wir müssen nun noch die durch die Belastung verursachte Senkung des Punktes A und die in den Schienen vorkommenden grössten Spannungen berechnen.

Nennt man die Ordinate des Punktes A im unbelasteten Zustand der Schienen Y_0, im belasteten Zustand Y, so ist die durch die Belastung verursachte Senkung $f = Y_0 - Y$.

Der Werth von Y wird gefunden, wenn man in die erste der Gleichungen (8) $\xi = 1$ setzt, es ist daher:

$$Y = \frac{1}{2}\alpha_1 l_1^2 + \frac{1}{6}\beta_1 l_1^3 + D_1 l_1 + E_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Der Werth von Y_0 ergibt sich, wenn man in dieser Gleichung für $\alpha_1\ \beta_1\ D_1\ E_1$ diejenigen Werthe setzt, die diesen Grössen zukommen, wenn $P_1\ P_2\ P_3$ gleich Null sind. Diese individuellen Werthe von $\alpha_1\ \beta_1\ D_1\ E_1$ sind aber beziehungsweise $\frac{1}{R}$ 0 0 und e; es ist demnach:

$$Y_0 = \frac{1}{2}\frac{l_1^2}{R} + e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Man hat daher:

$$f = \frac{1}{2}\frac{l_1^2}{R} + e - \frac{1}{2}\alpha_1 l_1^2 - \frac{1}{6}\beta_1 l_1^3 - D_1 l_1 - E_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Setzt man für $\alpha\ \beta\ D\ E$ die Werthe, welche die Gleichungen (2) (13) (14) darbieten, so erhält man nach einigen Reductionen;

$$f = \frac{2}{b \varepsilon \delta_1^3}\left[2 P_1 l_1^3 - P_2 l_2^2 (3 l_1 - l_2)\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Durch diese Gleichung wird die Biegsamkeit des Federwerkes bemessen.

Nun muss noch die Festigkeit bestimmt werden.

Aus den Seite 208 zusammengestellten Werthen der statischen Momente der Kräfte, welche die Schienen abzubrechen streben, erhellt, dass diese Momente alle unter der Form $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}x$ erscheinen; daher für $x = 0$, d. h. für die an der Umfassung der Schienen befindlichen Querschnitte am grössten sind. Nach den daselbst eintretenden Spannungsintensitäten, die wir mit $\mathfrak{Z}_1\ \mathfrak{Z}_2\ \mathfrak{Z}_3 \ldots$ bezeichnen wollen, ist demnach das Festigkeitsvermögen der Schienen zu beurtheilen.

Die Momente der Kräfte, welche die Schienen bei $c_1\ c_2\ c_3 \ldots$ abzubrechen streben, sind:

$$\begin{aligned} & P_1 l_1 - P_2 l_2 \\ & P_2 l_2 - P_3 l_3 \\ & P_3 l_3 - P_4 l_4 \\ & \ldots\ldots \end{aligned}$$

Die Werthe von $\frac{\mu}{z}$ sind für die aufeinander folgenden Schienen

$$\frac{1}{6} b \delta_1^2 \qquad \frac{1}{6} b \delta_2^2 \qquad \frac{1}{6} b \delta_3^2$$

Wir erhalten daher vermöge Gleichung (7) (Seite 203) folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} P_1 l_1 - P_2 l_2 &= \frac{1}{6}\mathfrak{Z}_1 b \delta_1^2 \\ P_2 l_2 - P_3 l_3 &= \frac{1}{6}\mathfrak{Z}_2 b \delta_2^2 \\ P_3 l_3 - P_4 l_4 &= \frac{1}{6}\mathfrak{Z}_3 b \delta_3^2 \\ & \ldots\ldots\ldots \\ P_{n-1} l_{n-1} - P_n l_n &= \frac{1}{6}\mathfrak{Z}_{n-1} b \delta_{n-1}^2 \\ P_n l_n \qquad &= \frac{1}{6}\mathfrak{Z}_n b \delta_n^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

In Betreff der Federwerke kann man vorzugsweise zwei Hauptfragen stellen, die von praktischer Wichtigkeit sind. Die erste betrifft die scharfe Prüfung von bereits bestehenden Federwerken, die zweite hingegen betrifft die Auffindung zweckmässiger Formen und Dimensionen für neu zu construirende Federwerke. Die bis hieher gewonnenen Resultate dienen zunächst zur scharfen Prüfung und zwar auf folgende Weise.

Für ein bereits bestehendes und zu prüfendes Federwerk sind die Längen und Dicken sämmtlicher Schienen und ist auch ihre gemeinschaftliche Breite gegeben. Auch kann man den Modulus der Elastizität des Materials als bekannt ansehen; oder muss denselben durch Biegungsversuche mit einzelnen Schienen bestimmen. Um nun zu erfahren, welcher Zustand in dem Federwerk eintritt, wenn dasselbe belastet wird, d. h. wenn auf jedes der Enden der obersten Schiene eine Kraft P_1 einwirkt, muss man zuerst aus den $(n-1)$ Gleichungen (15), die in Bezug auf die Kräfte vom ersten Grade sind, die $(n-1)$ Pressungen $P_2 P_3 \ldots P_n$ berechnen. Kennt man einmal diese Werthe, so erhält man aus den Gleichungen (19) die Insensitäten der grössten Spannungen, und kann nach denselben beurtheilen, wie stark jede einzelne Schiene in Anspruch genommen ist. Die Gleichungen (1), (2), (13), (14) geben ferner die numerischen Werthe sämmtlicher Constanten, die in den Gleichungen (7) und (8) der neutralen Axen sämmtlicher Schienen vorkommen, und dann sind also diese Axenlinien selbst bestimmt.

Es ist hervorzuheben, dass in den Gleichungen (15), (18) und (19), welche die Biegungen, die wechselseitigen Pressungen und die Intensitäten der grössten Spannungen bestimmen, von dem Krümmungshalbmesser R, nach welchem die Schienen im natürlichen Zustande gekrümmt sind, gar nicht abhängen. Diese Krümmung der Schienen im natürlichen Zustand ist also hinsichtlich der Biegsamkeit (der nach dem Werth von f beurtheilt werden muss) und auch hinsichtlich der Festigkeitsverhältnisse von gar keiner Bedeutung. Man könnte also die Schienen ganz gerade machen, allein da sie dann im belasteten Zustand abwärts gebogen wären, also das Ansehen erhielten, wie wenn sie ihrer Aufgabe nicht gewachsen wären, so ist es doch angemessen, die Schienen wenigstens so stark zu krümmen, dass sie im belasteten Zustand noch etwas aufwärts gekrümmt erscheinen.

Die Rechnungen, zu welchen eine so ganz scharfe Prüfung eines Federwerkes führt, sind, wie man sieht, zwar nicht mit Schwierigkeiten verbunden, allein ihre Durchführung ist doch äusserst mühsam. Glücklicherweise lassen sich die zweckmässigen Abmessungen für neu zu construirende Federwerke viel leichter bestimmen.

Bestimmung der absoluten Constanten für neu zu construirende Federwerke.

Bisher waren wir nicht veranlasst, uns über die zur Messung der Grössen dienenden Einheiten auszusprechen. Alle Resultate, die wir gewonnen haben, gelten natürlich für jedes Maasssystem, vorausgesetzt, dass die Grösse $\varepsilon \mathfrak{J} P$ auf die gewählten Einheiten bezogen werden. Für die folgenden numerischen Rechnungen wollen wir den Centimeter als Längeneinheit, also den Quadratcentimeter als Flächeneinheit und den Kubikcentimeter, als Volumeneinheit annehmen; wollen ferner die Kräfte in Kilogrammen ausdrücken. Unter dieser Voraussetzung muss der Modulus der Elastizität ε und müssen die Spannungsintensitäten $\mathfrak{J}_1\ \mathfrak{J}_2 \ldots$ auf den Quadratcentimeter bezogen werden. Berechnet man mit Zugrundlegung dieser Einheiten eine Wirkungsgrösse, so wird diese nicht in Kilogrammmetern, sondern in Kilogrammcentimetern ausgedrückt.

Zur Bestimmung der Dimensionen eines zu construirenden Federwerkes muss man kennen: 1) den Modulus der Elastizität ε des Stahles, aus welchem die Schienen angefertigt werden, 2) die grösste Spannung $\mathfrak{J}_1$ auf 1 Quadratcentimeter, welche in der belasteten Schiene eintreten darf, damit die Elastizitätsgrenze des Materials nicht überschritten und eine hinreichende Festigkeit erzielt wird, 3) die Senkung f der Endpunkte der längsten Schiene durch die Belastung.

Nach zahlreichen Versuchen von *G. Wertheim* und *Philipps* ist der Modulus der Elastizität für alle Arten von gutem Federstahl nicht beträchtlich veränderlich und beträgt im Mittel genommen auf 1 Quadratcentimeter bezogen:

$$\varepsilon = 2000000.$$

Nach zahlreichen Rechnungen über die Lokomotivfedern beträgt die auf 1 Quadratcentimeter bezogene stärkste Spannung $\mathfrak{J}_1$, im Mittel genommen, 4400 Kilogramm. Nach den Versuchen von *Philipps* beträgt die Spannung an der Elastizitätsgrenze ungefähr 8000 Kilogramm, und ist der Bruchcoefficient für Federstahl in der Regel grösser als 14000. Die Lokomotivfedern sind also bis zur Hälfte der Elastizitätsgrenze und auf den dritten Theil der Bruchfestigkeit in Anspruch genommen. Es ist kein Grund vorhanden, die Federn stärker oder schwächer in Anspruch zu nehmen, als sie gegenwärtig in den Lokomotiven wirklich in Anspruch genommen sind, wir setzen daher:

$$\mathfrak{J}_1 = 4400.$$

Die Senkung f der Endpunkte der Federenden variirt bei den Lokomotivfedern von 2 bis 7 Centimetern, in den meisten Fällen beträgt dieselbe 5 Centimeter. Wir setzen für Personenlokomotive $f = 5$ Centimeter; für Güterlokomotive $f = 4$ Centimeter.

Construktion eines Federwerkes, dessen Schienen im belasteten Zustand übereinstimmende Krümmungen annehmen.

Wir wollen uns die Aufgabe vorlegen, ein Federwerk zu bestimmen, das folgende Eigenschaften besitzt:

1) Im natürlichen Zustand sollen die oberen Flächen sämmtlicher Schienen nach einem Halbmesser R kreisbogenförmig gekrümmt sein.
2) Im belasteten Zustand sollen die oberen Flächen der Schienen vollkommen übereinstimmende Krümmungen haben, so zwar, dass wenn die Schienen, ohne Zwischenplatten anzuwenden, unmittelbar aufeinander gelegt würden, an keiner Stelle des Federwerkes ein Klaffen wahrzunehmen wäre.
3) Im belasteten Zustand sollen alle Federn in der Mitte des Federwerkes gleich stark in Anspruch genommen sein.

Da die beiden ersteren dieser Bedingungen sowohl den Mittelstücken, als auch den Endstücken genügen sollen, so müssen wir, da die Gleichgewichtsgleichungen der Mittelstücke von denen der Endstücke abweichen, die einen und die anderen dieser Stücke besonders betrachten.

Wir beginnen mit den Mittelstücken. Damit diese im belasteten Zustand übereinstimmende Krümmungen annehmen, müssen die Gleichungen (3) (Seite 209), wenn man in denselben $x_1 = x_2 = x_3 \ldots$ setzt für $\frac{d y_1^2}{d x_1^2}$, $\frac{d^2 y_2}{d x_2^2}$ … übereinstimmende Werthe geben;

diess ist aber nur dann der Fall, wenn $a_1 = a_2 = a_3 \dots$ und $c_1 = c_2 = c_3 = \dots$ ist. Es muss also vermöge der Ausdrücke (1) Seite (209) sein:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\delta_1^2}(P_1 l_1 - P_2 l_2) = \frac{1}{\delta_2^2}(P_2 l_2 - P_3 l_3) = \frac{1}{\delta_3^2}(P_3 l_3 - P_4 l_4) = \dots \\ \text{und} \\ \frac{1}{\delta_1^2}(P_1 - P_2) = \frac{1}{\delta_2^2}(P_2 - P_3) = \frac{1}{\delta_3^2}(P_3 - P_4) = \dots \end{array}\right\} \dots \quad (1)$$

Wenn ferner sämmtliche Schienen, mit Einschluss der untersten Endstückschiene, in der Mitte gleich stark in Anspruch genommen sein sollen, so muss

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_3 \dots\dots = \mathfrak{J}_n$$

oder wegen der Ausdrücke (20) (Seite 213)

$$\frac{1}{\delta_1^2}(P_1 l_1 - P_2 l_2) = \frac{1}{\delta_2^2}(P_2 l_2 - P_3 l_3) = \frac{1}{\delta_3^2}(P_3 l_3 - P_4 l_4) \dots = \frac{1}{6} b \mathfrak{J}_1^2 \quad \dots \quad (2)$$

sein.

Diesen Bedingungen (1) und (2) kann nur durch die Annahmen:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 \dots\dots = \delta_i \\ P_1 - P_2 = P_2 - P_3 = P_3 - P_4 = \dots\dots = p \end{array}\right\} \dots\dots \quad (3)$$

entsprochen werden. Es müssen also 1) alle Schienen einerlei Dicke haben, und 2) die Differenzen der Pressungen zwischen je zwei unmittelbar aufeinander folgenden Schienen gleich gross sein, damit die Krümmungen der Schienen und die Intensitäten der Spannungen übereinstimmen können.

Setzt man in die Gleichungen (20) (Seite 213) $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_3 \dots$ und $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 \dots$ und addirt sie hierauf alle zusammen, so findet man die einfache Beziehung:

$$P_1 l_1 = \frac{n}{6} \mathfrak{J}_1 b \delta_1^2 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

Addiren wir aber nicht alle, sondern nur $k-1$ von diesen Gleichungen zusammen, wobei k eine beliebige ganze positive Zahl bezeichnet, die kleiner als n ist, so findet man:

$$P_1 l_1 - P_k l_k = \frac{(k-1)}{6} \mathfrak{J}_1 b \delta_1^2 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

Allein es ist, weil die Differenzen der Pressungen zwischen je zwei auf einander folgenden Schienen gleich gross sein sollen, und diese Differenz mit p bezeichnet wurde:

$$P_k = P_1 - (k-1) p$$

Vermittelst dieses Werthes von P_k folgt aus (5)

$$\left. l_k = \frac{P_1 l_1 - \frac{1}{6}(k-1)\mathfrak{J}_1 b \delta_1^2}{P_1 - (k-1) p} \right\} \dots\dots\dots\dots \quad (6)$$

Mit Berücksichtigung von (4) erhält man auch:

$$\left. l_k = l_1 \frac{1 - \frac{(k-1)}{n}}{1 - (k-1)\frac{p}{P_1}} \right\} \dots\dots\dots\dots \quad (7)$$

Diese Gleichung wird uns in der Folge zur Berechnung der einzelnen Schienenlängen dienen.

Wir müssen nun weiter, um die Senkung f des Endpunktes der obersten Schiene bestimmen zu können, die Gleichung der neutralen Axe dieser Schiene aufstellen.

Da $P_1 l_1 - P_2 l_2 = \frac{\mathfrak{J}_1 b \delta_1^2}{6}$ und $P_1 - P_2 = p$ ist, so erhalten die Coefffzienten a_1 und c_1 folgende Werthe:

$$a_1 = \frac{1}{R} - \frac{2\mathfrak{J}_1}{\varepsilon \delta_1} \qquad c = \frac{12 p}{b \varepsilon \delta_1^3}$$

Die Differenzialgleichung der Axe der obersten Schiene, d. h. die erste der Gleichungen (3) (Seite 209) wird demnach:

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{R} - \frac{2\mathfrak{J}_1}{\varepsilon \delta_1} + \frac{12 p}{b \varepsilon \delta_1^3} x_1 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (8)$$

Berücksichtiget man, dass für $x_1 = 0$ $\frac{dy_1}{dx_1} = 0$ und dass ferner für $x_1 = 0$ $y_1 = e$ werden muss, so findet man aus (8) für y_1 folgenden Werth:

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{2\mathfrak{J}_1}{\varepsilon \delta_1}\right) x_1^2 + \frac{2 p}{b \varepsilon \delta_1^3} x_1^3 + e \quad \dots\dots\dots \quad (9)$$

Streng genommen gilt diese Gleichung nur für die neutrale Axe des Mittelstückes der obersten Schiene. Um aber vermittelst derselben die Senkung f des Endpunktes berechnen zu können, werden wir uns erlauben, sie für die ganze Ausdehnung der obersten Schiene, also bis zu $x_1 = l_1$, gelten zu lassen. Der Fehler, den wir dadurch begehen, ist jedenfalls verschwindend klein, weil, wie wir sehen werden, die Endstücke immer nur sehr kurz ausfallen. Setzen wir in (9) $x_1 = l_1$, so erhalten wir unter dieser Voraussetzung für die Ordinate des Endpunktes A_1 (Fig 71) folgenden Werth:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{2\mathfrak{J}_1}{\varepsilon \delta_1}\right) l_1^2 + \frac{2 p}{b \varepsilon \delta_1^3} l_1^3 + e$$

Für den unbelasteten Zustand des Federwerkes ist aber die Ordinate des Punktes A_1 sehr nahe gleich:

$$\frac{1}{2}\frac{l_1^2}{R}+e$$

Die Senkung f des Punktes A_1 ist demnach:

$$f=\frac{\mathfrak{J}_1\, l_1^2}{\varepsilon\,\delta_1}-\frac{2\,p}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3}\,l_1^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Berücksichtiget man die Gleichung (4), so erhält dieser Werth von f folgende Form:

$$f=\frac{\mathfrak{J}_1\, l_1^2}{\varepsilon\,\delta_1}\left(1-\frac{1}{3}\,\frac{p\,n}{P_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Der Werth von p ist innerhalb gewisser Grenzen ganz willkürlich. Diese Grenzen erkennt man aus dem Ausdruck (7) für irgend eine Schienenlänge.

Da p nie negativ werden kann, so ist $p=0$ der kleinste Werth von p. Da ferner die oberste Schiene die grösste Länge haben soll, so darf $\frac{p}{P_1}$ nie grösser als $\frac{1}{n}$ oder p nie grösser als $\frac{P_1}{n}$ werden. p gleich Null und p gleich $\frac{P_1}{n}$ sind also die Grenzen, innerhalb welchen der Werth von p willkürlich angenommen werden kann. Wir werden in der Folge sehen, dass die Feder werke, die man für verschiedene Annahmen des Werthes von p erhält, in ihren Eigenschaften nur insofern übereinstimmen, als sie alle den Anforderungen entsprechen, die wir Anfangs dieser Nummer ausgesprochen haben Einstweilen genügt es uns, die Grenzen kennen gelernt zu haben, innerhalb welchen p willkürlich angenommen werden kann.

Setzen wir nun:

$$p=\frac{1}{\gamma}\,\frac{P_1}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

wobei γ jede beliebige ganze oder unganze Zahl bezeichnet, die jedoch nie kleiner als die Einheit genommen werden darf, so haben wir einen Ausdruck, der den Werth von p in seine Grenzen einschränkt; wenn wir diesen Werth von p in die Gleichungen (7) und (11) einführen, so werden dieselben:

$$\left.\begin{aligned} l_k &= l_1\,\frac{1-\dfrac{k-1}{n}}{1-\dfrac{k-1}{n}\,\dfrac{1}{\gamma}} \\[2ex] f &= \frac{\mathfrak{J}_1\, l_1^2}{\varepsilon\,\delta_1}\left(1-\frac{1}{3\,\gamma}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Diese beiden Gleichungen in Verbindun g mit (4), nämlich mit

$$P_1\, l_1=\frac{n}{6}\,\mathfrak{J}_1\, b\,\delta_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

bestimmen, wenn man P_1 l_1 b ε f und γ annimmt alle Construktionselemente des Federwerkes, mit Ausnahme der Querschnittsdimensionen der Endstücke.

Die zweite der Gleichungen (13) gibt zunächst die Dicke δ_1 der Schienen, die Gleichung (14) gibt hierauf die Anzahl n der Schienen, die erste der Gleichungen (13) gibt zuletzt, wenn man in dieselbe der Reihe nach $k=1\ 2\ 3\ldots$ bis n setzt, die Längen der einzelnen Schienen.

Es erübrigt nun noch, die Bedingungen für die Schienenenden ausfindig zu machen.

Wir haben die Forderung gestellt, dass die obere Fläche irgend einer Schiene mit der unteren Fläche der unmittelbar darüber befindlichen Schiene der ganzen Ausdehnung nach übereinstimmt. Dieser Anforderung können die Schienenenden nur dann genügen, wenn ihre Dicke nach aussen zu, nach einem gewissen Gesetze, das wir das Zuspitzungsgesetz nennen wollen, abnehmen; und dieses Gesetz muss nun bestimmt werden.

Nennt man für den natürlichen Zustand des Federwerkes σ_0, für den Zustand der Belastung σ den Krümmungshalbmesser, welcher einem Punkt b Fig. 70 der neutralen Linie des Endstückes der k^{ten} Schiene entspricht. Ferner für den natürlichen Zustand R, für den Zustand der Belastung ϱ_1 den Krümmungshalbmesser, welchem die Punkte c und d entsprechen, und $\overline{a\,c}=u$ die Schienendicke bei b, sowie x und y die Coordinaten dieses Punktes.

Zwischen diesen Krümmungshalbmessern besteht, wie man ohne Schwierigkeit findet, folgende Beziehung:

$$\frac{1}{\sigma_0}-\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{R}-\frac{1}{r_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Allein vermöge Gleichung (5) (Seite 203) hat man:

$$\frac{1}{\sigma_0}-\frac{1}{\sigma}=\frac{12}{b\,\varepsilon\,u^3}\,P_k\,(l_k-x)$$

$$\frac{1}{R}-\frac{1}{r_1}=\frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3}\left[P_{k-1}\,(l_{k-1}-x)-P_k\,(l_k-x)\right]$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt:

$$\frac{\delta_1^3}{u^3}=\frac{P_{k-1}\,(l_{k-1}-x)-P_k\,(l_k-x)}{P_k\,(l_k-x)}$$

Für das Federwerk, das wir untersuchen, ist aber:

$$P_{k-1}\,l_{k-1}-P_k\,l_k=\frac{\mathfrak{J}_1\, b\,\delta_1^2}{6}$$

$$P_k=P_1-(k-1)\,p$$

Daher wird:

$$\frac{\delta_1^3}{u^3}=\frac{\dfrac{\mathfrak{J}_1\, b\,\delta_1^2}{6}-p\,x}{\left[P_1-(k-1)\,p\right](l_k-x)}$$

oder wenn man für $\frac{\mathfrak{J}_1 b \delta_1^2}{6}$ den aus (4) folgenden Werth $\frac{P_1 l_1}{n}$ und für p seinen Werth $\frac{1}{\gamma}\ \frac{P_1}{n}$ setzt:

$$\frac{\delta_1^3}{n^3} = \frac{l_1 - \frac{x}{\gamma}}{\left(n - \frac{k-1}{\gamma}\right)(l_k - x)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Dieses Gleichung drückt das gesuchte Gesetz der Zuspitzung aus.

Es ist, wie man sieht, von k abhängig, wenn γ einen endlichen Werth hat. Streng genommen muss also, wenn γ endlich, also p grösser als Null angenommen wird, das Endstück jeder Schiene eine besondere Zuspitzung erhalten. Allein es wird sich in der Folge zeigen, dass die Endstücke der Schienen immer sehr klein ausfallen, so dass es für praktische Zwecke genügt, wenn die Zuspitzungen nach quadratischen oder nach kubischen Parabeln geformt werden. In dem speziellen Fall $\gamma = \infty$ wird die Gleichung (16)

$$\frac{\delta_1^3}{n^3} = \frac{l_1}{n(l_k - x)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Dieser Ausdruck entspricht aber einer kubischen Parabel, und da derselbe von k nicht abhängt, so stimmen die Zuspitzungen sämmtlicher Schienen überein.

Denkt man sich, dass ein nach diesen Regeln berechnetes Federwerk sehr vollkommen ausgeführt werde, dass jedoch auf die Mitte und auf die Enden einer jeden Schiene dünne kurze Metallblättchen gelegt werden, so dass im natürlichen Zustand des Federwerkes zwischen je zwei Schienen eine Spalte von durchaus gleicher Weite vorhanden sein wird. Wird nun dieses Federwerk belastet, so krümmen sich sämmtliche Schienen nach übereinstimmenden elastischen Linien, so dass die Spaltenweite überall genau so gross bleibt, wie sie im natürlichen Zustand des Federwerkes war. Denkt man sich ferner, dass die Dicke der Zwischenblätter kleiner und kleiner werde, so rücken die Schienen nach und nach aneinander und die Spaltenweite nimmt mehr und mehr ab. Denkt man sich endlich, dass die Dicke der Zwischenblättchen verschwindend klein werde, so wird es auch die Spaltenweite. Dann aber treten je zwei aufeinander folgende Schienen in einen Berührungszustand, der jedoch nur in der Mitte und an den Enden ein physischer, in allen übrigen Punkten aber nur ein geometrischer ist. Diese Art der Aufeinanderlagerung wird aber natürlich auch dann eintreten, wenn man gleich anfangs bei der Zusammensetzung des Federwerkes die Zwischenblättchen ganz weglässt und die Schienen unmittelbar aufeinander legt.

Hieraus sieht man, dass in allen diesen Federwerken, in welchen die Schienen in belastetem Zustand übereinstimmende Krümmungen annehmen, nur in der Mitte und an den Enden wechselseitige Pressungen zwischen den Schienen eintreten, und dass die nach den aufgestellten Regeln construirten Federwerke unter der Einwirkung der Belastung nicht klaffen, sondern stets in allen Theilen eine zusammenhängende Masse bilden.

Wir wollen noch die äussere Begrenzung des ganzen Schienenwerkes, d. h. die Gleichung derjenigen krummen Linien bestimmen, welche die Endpunkte der oberen Flächen der Schienen stetig verbindet. Die Auffindung der Gleichung dieser Linie unterliegt zwar keiner Schwierigkeit, allein ihre Form ist so komplizirt, dass man aus der Gleichung von ihrer Gestalt keine klare Anschauung erhält, es ist daher angemessen, die Linie zu suchen, welche die Endpunkte der Oberflächen der Schienen stetig verbindet, wenn die Schienen in ungebogenem Zustand aufeinander geschichtet werden.

Es sei der Mittelpunkt O Fig. 72 der obersten Schiene der Anfangspunkt der Coordinaten. Die Abscissenaxe Ox falle mit der oberen Fläche der ersten Schiene zusammen. Die Ordinaten sollen vertikal abwärts gerichtet werden. Nennen wir $\overline{OF} = x$ die Abscisse, $\overline{FE} = y$ die Ordinate von dem Eudpunkte der k^{ten} Schiene, so ist:

$$x = l_k \qquad y = (k-1)\,\delta$$

Setzt man in die erste der Gleichungen (13) $l_k = x \quad (k-1) = \frac{y}{\delta}$, so findet man:

$$x = l_1 \frac{1 - \frac{y}{n\delta}}{1 - \frac{y}{n\delta\gamma}}$$

Es ist aber $n\delta$ die ganze Dicke des Schienenwerkes in der Mitte, setzt man $n\delta = h$, so wird:

$$x = l_1 \frac{\gamma(h-y)}{h\gamma - y} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

oder:

$$xy - l_1\gamma y - h\gamma x + l_1\gamma h = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Diese Gleichung entspricht einer gleichseitigen Hyperbel. Die Coordinaten des Mittelpunktes sind:

$$\overline{OH} = l_1\gamma \qquad \overline{GH} = h\gamma$$

Die Richtungen $Gx_{,,}$ und $Gy_{,,}$ der Symetrieaxen dieser Hyperbel bilden mit der Axe Ox Winkel von 45°.

Nennt man $x_{,,} = EF_2 \quad y_{,,} = GF_2$ die Coordinaten eines Punktes E in Bezug auf diese Axen der Symetrie, so ist die Gleichung der Hyperbel:

$$y_{,,}^2 - x_{,,}^2 = 2\,l_1 h\gamma(\gamma - 1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

Diese Hyperbel entsteht, wenn man einen Kegel, dessen Seiten an der Spitze einen Winkel von 90° bilden, durch eine Ebene schneidet, die zur Axe des Kegels in einem Abstand $\sqrt{2\,l_1 h\gamma(\gamma-1)}$ parallel ist.

Die Form des geradeaus gestreckten Federwerkes kann also auch durch die Verzeichnung dieser Hyperbel bestimmt werden.

Diese so eben ausgesprochene geometrische Bedeutung der Gleichung (19) folgt aus der Theorie der algebraischen Linien des zweiten Grades.

(Siebente Vorlesung über analystische Geometrie von A. v. Ettingshausen.)

Wir wollen nun die Eigenschaften von einigen speziellen Federanordnungen untersuchen, die sich ergeben, wenn man für γ bestimmte Werthe annimmt.

Federwerk aus Schienen von gleicher Länge und gleicher Dicke.

Setzen wir $\gamma = 1$, so werden die Gleichungen (13) und (14) (Seite 218)

$$\left.\begin{aligned} l_k &= l_1 \\ f &= \frac{2}{3}\frac{\mathfrak{Z}_1 l_1^2}{\varepsilon \delta_1} \\ P_1 l_1 &= \frac{n}{6}\mathfrak{Z}_1 b \delta_1^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Die Annahme $\gamma = 1$ liefert uns also ein Federwerk mit durchaus gleich langen Schienen, die im Belastungszustand vollkommen übereinstimmende Krümmungen annehmen. Betrachtet man $\mathfrak{Z}_1\ l_1\ P_1\ \varepsilon\ b$ als gegebene Grössen, so erhält man zur Bestimmung der Schienendicke und der Schienenanzahl folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{2}{3}\frac{\mathfrak{Z}_1 l_1^2}{\varepsilon f} \\ n &= \frac{6 P_1 l_1}{\mathfrak{Z}_1 b \delta_1^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

In einem solchen Federwerk nimmt die Intensität der Spannung von der Mitte an nach den Enden zu fort und fort ab, und verschwindet sogar an den Enden. Ein solches Federwerk ist also in den äusseren Theilen übermässig fest, daher für praktische Zwecke nicht sehr geeignet.

Da in dem Fall wenn $j = 1$ ist die zwischen je zwei Schienen eintretende wechselseitige Pressung einen und denselben constanten Werth $p = \frac{P_1}{n}$ erhält, so findet man, mit Berücksichtigung der Gleichung (15) (Seite 205), für die Wirkungsgrösse W, die erforderlich ist, um ein solches Federwerk aus seinem natürlichen Zustand in denjenigen Krümmungszustand zu versetzen, den es unter der Belastung annimmt, wenn der Gleichgewichtszustand eingetreten ist, folgenden Ausdruck:

$$W = \frac{1}{18}\frac{\mathfrak{Z}_1^2}{\varepsilon} n b \delta_1 l_1 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Bezeichnet man das totale Volumen des Federwerkes mit $\mathfrak{V}$, setzt also $n b \delta_1 l_1 = \mathfrak{V}$, so wird:

$$W = \frac{1}{18}\frac{\mathfrak{Z}_1^2}{\varepsilon}\mathfrak{V} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Federwerk mit gleich langen Schienenenden, das bei jeder innerhalb der Elasticitätsgrenze liegenden Belastung kreisbogenförmig bleibt, daher in allen Theilen gleich stark in Anspruch genommen ist.

Setzen wir $p = 0$ oder $\gamma = \infty$, so erhalten wir ein Federwerk, in welchem die wechselseitigen Pressungen zwischen den Schienen gleich gross sind.

Für diese Annahme geben die Gleichungen (13) und (14) (Seite 218)

$$\left.\begin{aligned} l_k &= l_1\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ f &= \frac{\mathfrak{Z}_1 l_1^2}{\varepsilon \delta_1} \\ P_1 l_1 &= \frac{n}{6}\mathfrak{Z}_1 b \delta_1^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Aus den ersten dieser Gleichungen findet man:

$$l_k - l_{k+1} = \frac{l_1}{n} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

d. h. die Endstücke der Schienen haben alle einerlei Länge, und sie ist gleich dem n^{ten} Theil von der Länge der obersten Schiene. Aus den zwei letzteren der Gleichungen (1) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\mathfrak{Z}_1 l_1^2}{\varepsilon f} \\ n &= \frac{6 P_1 l_1}{\mathfrak{Z}_1 b \delta_1^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Ist aber $p = 0$, so wird die Gleichung (8) (Seite 217) des Mittelstücks der obersten Schiene:

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{R} - \frac{2\mathfrak{Z}_1}{\varepsilon \delta_1}$$

d. h. im belasteten Zustand des Federwerkes ist die oberste Schiene nach einem Kreisbogen gekrümmt, welcher im Halbmesser r_1 entspricht, dessen Werth durch

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{R} - \frac{2\mathfrak{Z}_1}{\varepsilon \delta_1} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

bestimmt wird. Allein alle aus den Gleichungen (13) und (14) hervorgehenden Federwerke haben die Eigenschaft, dass die Krümmungen der Schienen im belasteten Zustand übereinstimmen; in dem Federwerk, das wir untersuchen, werden also alle Schienen eine mit der obersten Schiene übereinstimmende kreisbogenförmige Krümmung annehmen.

Hieraus folgt aber, dass die Intensität der Spannung in jedem beliebigen Querschnitt des Mittelstückes jeder beliebigen Schiene einen constanten Werth, oder dass das ganze

Federwerk in seinem Mittelstückssystem durchaus gleiche Festigkeit darbietet. Dieses Federsystem gehört also in die Classe der Körperformen, die mit einem Minimum von Materialaufwand ein bestimmtes Tragungsvermögen besitzen.

Damit im belasteten Zustand auch die Oberflächen der Endstücke nach dem Halbmesser r_1 kreisbogenförmig gekrümmt werden, müssen dieselben nach dem Gesetz (16) (Seite 220) zugespitzt werden. Weil aber $\gamma = \infty$ ist, so wird diese Gleichung:

$$\frac{\delta_1^3}{u^3} = \frac{l_1}{n} \frac{1}{l_k - x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Dies ist aber die Gleichnng einer kubischen Parabel, deren Scheitel mit dem Endpunkt des Endstückes zusammenfällt. Da alle Endstücke eine gleiche Länge $\frac{l_1}{n}$ haben, so erhalten sie alle ganz congruente Formen.

In den nach kubischen Parabeln zugespitzten Endstücken ist aber die Intensität der Spannung nicht in jedem Querschnitt gleich gross. Nennt man für den Querschnitt, welchem die Abscisse $l_k - x$ und die Dicke u entsprechen, i die Intensität der Spannung an der oberen Fläche, so ist

$$P_1 (l_k - x) = \frac{i}{6} b u^2$$

Durch Elimination von u vermittelst der Gleichung (5) folgt:

$$i = \frac{6 P_1}{b \delta_1^2} \left(\frac{l_1}{n}\right)^{\frac{2}{3}} (l_k - x)^{\frac{1}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Hieraus sieht man, dass die Intensität der Spannung nach dem Endpunkt eines Endstückes hin abnimmt und daselbst ganz verschwindet. An seiner Wurzel, d. h. für $l_k - x = \frac{l_1}{n}$ hat jedes Endstück eine Spannung

$$\frac{6 P_1}{b \delta_1^2} \frac{l_1}{n}$$

die mit der des Mittelstückes übereinstimmt.

Man würde auch den Endstücken überall gleiche Festigkeit geben können, wenn man sie nicht nach kubischen, sondern nach quadratischen Parabeln zuspitzte, allein dann würden die oberen Flächen der Endstücke mit den darüber hinziehenden unteren Flächen der Mittelstücke nicht mehr ganz scharf übereinstimmen, die Zuspitzung nach kubischen Parabeln verdient daher den Vorzug, und zwar um so viel mehr, als durchaus kein praktischer Nachtheil entsteht, wenn diese ohnedies nun ganz kurzen Endstücke gegen ihren Endpunkt hin etwas fester sind als an den Wurzeln.

Wir können auch für die Halbmesser R der Krümmung im natürlichen Zustand eine Regel aufstellen, wenn wir annehmen, dass die Senkung f einen gewissen aliquoten Theil von der Pfeilhöhe betragen soll, die der obersten Schiene im natürlichen Zustand entspricht.

Diese Pfeilhöhe ist annähernd $\frac{l_1^2}{2R}$, die Senkung dagegen vermöge Gleichungen (1) $\frac{\mathfrak{J}_1 l_1^2}{\varepsilon \delta_1}$.

Bezeichnen wir durch λ das Verhältniss:

$$\frac{\text{Senkung}}{\text{Pfeilhöhe}}$$

so erhalten wir zur Bestimmung von R folgenden Ausdruck:

$$R = \lambda \frac{l_1^2}{2 f} = \lambda \frac{\varepsilon \delta_1}{2 \mathfrak{J}_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Wir wollen nun noch die Wirkungsgrösse berechnen, die erforderlich ist, um das Federwerk so stark zu biegen, dass am Endpunkt der obersten Schiene eine Senkung f eintritt.

Wenn wir die Sache haarscharf nehmen wollten, müssten wir bei dieser Berechnung die Endstücke von den Mittelstücken unterscheiden. Allein da die Endstücke im Vergleich zu den Mittelstücken, im Mittel genommen, sehr kurz sind, und da ferner die Zuspitzungen nach kubischen Parabeln geschehen, was zur Folge hat, dass die Schienendicken der Endstücke, von den Wurzeln an gerechnet, sehr langsam und erst in der Nähe der Endpunkte rasch abnehmen, so werden wir keinen spürbaren Fehler begehen, wenn wir die der Biegung des Federwerkes entsprechende Wirkungsgrösse für den Fall berechnen, dass die Schienen in allen Theilen und bis an ihre Endpunkte hin eine unveränderliche Dicke δ_1 haben.

Nennen wir W die zu berechnende Wirkungsgrösse in Kilogramm-Centimeter ausgedrückt, $\mathfrak{V}$ das totale Volumen des ganzen Federwerkes, so ist vermöge Gleichung (22) (Seite 206)

$$W = \frac{1}{6} \frac{\mathfrak{J}_1^2}{\varepsilon} \mathfrak{V} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Zur Berechnung des Volumens $\mathfrak{V}$ des ganzen Federwerkes hat man die Formel:

$$\mathfrak{V} = b \delta_1 2 \left(\frac{l_1}{n} + 2 \frac{l_1}{n} + 3 \frac{l_1}{n} x \ldots + n \frac{l_1}{n}\right)$$

oder

$$\mathfrak{V} = (n + 1) b \delta_1 l_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

wobei wie bisher l_1 die halbe Länge der obersten Schiene bedeutet, während $\mathfrak{V}$ und W auf das ganze Schienenwerk bezogen sind.

Dieses Federwerk mit gleich dicken Schienen und gleich langen Endstücken besitzt, wie wir gesehen haben, im belasteten Zustand die Eigenschaften:

1. In allen seinen Theilen nach übereinstimmenden Kreisbögen gekrümmt zu sein.
2. Eine vollkommen compakte nirgends klaffende Masse zu bilden.
3. In allen Theilen der Mittelstücke absolut gleich stark, in den Endstücken annähernd gleich stark in Anspruch genommen zu sein.
4. Mit dem geringsten Volumen und Materialaufwand eine bestimmte Tragkraft und Biegsamkeit darzubieten.

Rechnet man zu diesen Eigenschaften noch dazu, dass die Dimensionen dieses Federwerkes ganz leicht vollkommen scharf bestimmt werden können, und dass seine Anfertigung, weil die Schienen von gleicher Dicke und nach dem gleichen Halbmesser R zu richten sind, keinen Schwierigkeiten unterliegt, so muss man sagen, dass dieses Federwerk wenigstens in statischer Hinsicht das vollkommenste ist, das es überhaupt geben kann. Allein für vollkommene Gleichgewichtszustände braucht man keine Federwerke, es ist also die Frage, ob das vorliegende Federwerk auch für dynamische Verhältnisse eine untadelhafte Anordnung genannt zu werden verdient? Diese Frage muss verneinend beantwortet werden. Dieses Federwerk ist gegen stossweise Einwirkungen auf seine Endpunkte in den äusseren Theilen, wo verhältnissmässig nur wenig Material vorhanden ist, beträchtlich schwächer als in der Mitte und gegen die Mitte zu, wo viel Material angehäuft ist. Für dynamische Zustände verdienen also die Federwerke mit hyperbolischer Begrenzung den Vorzug, weil bei denselben gegen die Enden hin mehr Material vorkommt. Dies ist insbesondere der Fall, wenn man für y einen der Einheit sich nähernden Werth z. B. $\frac{3}{2}$ nimmt.

In dem nächsten Abschnitt, welcher die practisch wichtigsten Resultate sämmtlicher Untersuchungen enthält, sind verschiedene Federwerke und insbesondere auch hyperbolische berechnet.

Druck, welchen ein Zapfen eines Laufwerkes auszuhalten hat, mit Berücksichtigung des Einflusses der Feder und der Einwirkungen der Bahn.

Im ruhenden Zustand eines Wagens ist der Druck gegen einen Zapfen eines Laufwerkes gleich dem Gewicht Q eines gewissen Theiles des auf den Federn liegenden Baues. Im bewegten Zustand ist dieser Druck theils durch die schwingende Bewegung des auf den Federn liegenden Baues, theils durch die hüpfende Bewegung der Räder veränderlich. Diesen veränderlichen Druck wollen wir bestimmen.

Es sei:

Q in Kilogrammen das Gewicht, welches im ruhenden Zustand gegen einen Zapfen drückt;

x die Höhe der Federenden über den Schienen der Bahn in irgend einem Zeitaugenblick t der Bewegung;

y die Höhe der Axe des Laufwerkes über den Schienen in dem gleichen Zeitaugenblick t. Wegen der hüpfenden Bewegung ist y im Allgemeinen etwas grösser, als der Halbmesser des Rades;

R der Halbmesser des Rades;

a die Höhe der Schienenenden über der Axe, wenn der Wagen ruhig auf der Bahn steht;

f der Starrheits-Coeffizient für das Federwerk, d. h. die Zahl, mit welcher man die Zusammendrückung der Federn multipliziren muss, um den der Zusammendrückung entsprechenden Druck zu erhalten;

s die Zusammendrückung der Feder, wenn auf derselben das Gewicht Q ruhig liegt. Es ist also $sf = Q$ oder $f = \frac{Q}{s}$.

$g = 980 \cdot 8$ Centimeter. Die Beschleunigung durch die Schwere. Alle Dimensionen sind in Centimetern, alle Pressungen in Kilogrammen ausgedrückt.

Dies vorausgesetzt, ist die Differenzialgleichung der absoluten Bewegung von Q.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\,\frac{f(a+s-x+y)-Q}{Q} \quad \ldots \quad (1)$$

Es ist aber, wie schon erwähnt wurde, $fs = Q$, daher wird diese Gleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\,\frac{f(a-x+y)}{Q} \quad \ldots \quad (2)$$

Da die hüpfende Bewegung des Rades eine periodische ist, so dürfen wir für y folgenden Ausdruck setzen:

$$y = R + \mathfrak{A}\sin.kt + \mathfrak{B}\cos.kt \quad \ldots \quad (3)$$

wobei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gewisse Constante sind, durch welche die Vertikalbewegung der Axe des Laufwerkes ausgedrückt wird, und k eine andere Constante bedeutet, durch welche die Dauer eines Radsprunges bestimmt wird. Aus (2) und (3) folgt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{gf}{Q}(a+R) - \frac{gf}{Q}x + \frac{gf}{Q}(\mathfrak{A}\sin.kt + \mathfrak{B}\cos.kt) \quad \ldots \quad (4)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist, wenn k nicht gleich $\sqrt{\frac{gf}{Q}}$ ist

$$x = a + R + \mathfrak{M}\sin.\sqrt{\frac{gf}{Q}}\,t + \mathfrak{N}\cos.\sqrt{\frac{gf}{Q}}\,t + \frac{\frac{gf}{Q}}{\frac{gf}{Q}-k^2}(\mathfrak{A}\sin.kt + \mathfrak{B}\cos.kt) \quad . \quad (5)$$

Nennen wir P den Druck gegen den Zapfen zur Zeit t, so ist:

$$P = f(a+s-x+y) \quad \ldots \quad (6)$$

Setzt man für x und y die Werthe (5) und (3) und berücksichtiget, dass $fs = Q$ ist, so findet man:

$$P = Q - f\left(\mathfrak{M}\sin.\sqrt{\frac{gf}{Q}}\,t + \mathfrak{N}\cos.\sqrt{\frac{gf}{Q}}\,t\right) - \frac{k^2 f}{\frac{gf}{Q}-k^2}(\mathfrak{A}\sin.kt + \mathfrak{B}\cos.kt) \quad \ldots \quad (7)$$

oder auch, da $\frac{f}{Q} = \frac{1}{s}$ ist.

$$P = Q - \frac{Q}{s}\left(\mathfrak{M}\sin.\sqrt{\frac{g}{s}}\,t + \mathfrak{N}\cos.\sqrt{\frac{g}{s}}\,t\right) - \frac{Q}{s}\,\frac{k^2}{\frac{g}{s}-k^2}(\mathfrak{A}\sin.kt + \mathfrak{B}\cos.kt) \quad . \quad (8)$$

Da die Räder vorzugsweise an den Schienenverbindungen in die Höhe gestossen werden, so darf man die Dauer der Periode $\frac{2\pi}{k}$, welche dem Bewegungsgesetz (3) entspricht, gleich setzen der Zeit, in welcher ein Rad über eine Schiene läuft. Nennen wir V die Fahrgeschwindigkeit, S die Länge einer Schiene, so ist also zu setzen:

$$\frac{2\pi}{k} = \frac{S}{V} \quad \text{oder} \quad k = 2\pi \frac{V}{S}$$

und dann findet man:

$$P = Q - \frac{Q}{s}\left(\mathfrak{M} \sin. \sqrt{\frac{g}{s}}\, t + \mathfrak{N} \cos. \sqrt{\frac{g}{s}}\, t\right) - \frac{Q}{s} \cdot \frac{\left(2\pi \frac{V}{S}\right)^2}{\frac{g}{s} - \left(2\pi \frac{V}{S}\right)^2} \left(\mathfrak{A} \sin. 2\pi \frac{V}{S}\, t + \mathfrak{B} \cos. 2\pi \frac{V}{S}\, t\right) \tag{9}$$

Bezeichnen wir durch h_1 und h_2 die grössten positiven Werthe von

$$-\left(\mathfrak{M} \sin. \sqrt{\frac{g}{s}}\, t + \mathfrak{N} \cos. \sqrt{\frac{g}{s}}\, t\right)$$

und von

$$-\left(\mathfrak{A} \sin. 2\pi \frac{V}{S}\, t + \mathfrak{B} \cos. 2\pi \frac{V}{S}\, t\right)$$

so bedeutet h_1 diejenige Schwingungshöhe, die durch die Elastizität der Federn eintritt, und h_2 die Sprunghöhe eines Rades, und dann ist das Maxinimum des Druckes gegen den Zapfen:

$$\underset{\text{max.}}{P} = Q \left\{ 1 + \frac{h_1}{s} + \frac{h_2}{s} \frac{\left(2\pi \frac{V}{S}\right)^2}{\frac{g}{s} - \left(2\pi \frac{V}{S}\right)^2} \right\} \quad \ldots\ldots \tag{10}$$

oder auch

$$\underset{\text{max}}{P} - Q = \frac{Q}{s} \left\{ h_1 + h_2 \frac{\left(2\pi \frac{V}{S}\right)^2}{\frac{g}{s} - \left(2\pi \frac{V}{S}\right)^2} \right\} \quad \ldots\ldots \tag{11}$$

Der Unterschied zwischen der grössten Pressung, die im bewegten Zustand eintritt und der Pressung in ruhendem Zustand ist also: 1) der Belastung des Zapfens proportional, 2) um so grösser, je kleiner s, oder je starrer die Federn sind, 3) um so grösser, je grösser die Schwingungshöhe h_1 und die Sprunghöhe h_2 ist. Dieser Unterschied wird aber insbesondere sehr gross, wenn 4) $\frac{g}{s} - \left(2\pi \frac{V}{S}\right)^2$ verschwindend klein, oder wenn:

$$S = 2\pi V \sqrt{\frac{s}{g}} \quad \ldots\ldots \tag{12}$$

ist. Es kann also der Druck gegen den Zapfen jeden beliebigen noch so grossen Werth erreichen, wenn die Schienenlänge so gross ist, dass die Zeit, welche der Wagen braucht, um über dieselbe hinzurollen, genau so gross ist, als die Zeit einer Schwingung, die der Wagen vermöge der Federn macht. Damit dieser gefährliche Zustand, bei welchem jeder Zapfen brechen müsste, bei keiner von den Geschwindigkeiten, mit der ein Zug

zu fahren hat, eintreten kann, muss die Schienenlänge grösser sein, als derjenige Werth, den der Ausdruck (12) gibt, wenn man für V die grösste Fahrgeschwindigkeit setzt. Die richtige Schienenlänge ist also der grössten Fahrgeschwindigkeit V proportional und richtet sich überdies noch nach dem Starrheitsgrad der Federn. Weiche Federn, für welche s gross ist, erfordern lange Schienen.

Wir haben früher gesehen, dass die der normalen Belastung entsprechende Senkung s der Federn in der Regel 5 Centimeter beträgt. Setzt man in (12) $s = 5$ $g = 980 \cdot 8$, so wird:

$$S = 0 \cdot 448\, V \quad \ldots\ldots \tag{13}$$

Dieser Ausdruck gilt für jedes Längenmaass, denn es wird durch denselben nur ein, Verhältniss bestimmt.

Für eine Fahrgeschwindigkeit von 14 Meter in einer Sekunde wird $S = 0.448 \times 14 = 6.27$ Meter. Die Schienen sollen also, um den gegenwärtig in Deutschland üblichen grösseren Fahrgeschwindigkeiten zu entsprechen, wenigstens über 6 Meter lang sein; was auch in der That der Fall ist.

Bestimmung der Zapfendurchmesser mit Rücksicht auf Festigkeit und Abnützung.

Vorausgesetzt, dass das Federwerk eines Wagens richtig angeordnet, und dass die Schienen eine der Fahrgeschwindigkeit und der Starrheit der Federn angemessene Länge haben, ist der in der Klammer der Gleichung (10) (Seite 228) enthaltene Ausdruck als eine constante Grösse anzusehen, und dann ist das Maximum des Druckes, den ein Zapfen einer Wagenaxe auszuhalten hat, der Last Q proportional, die im ruhenden Zustand auf dem Zapfen liegt.

Nennen wir:

Q die Belastung eines Zapfens einer Wagenaxe im ruhigen Znstand des Wagens;
αQ das Maximum des Druckes gegen den Zapfen im bewegten Zustand des Wagens;
$\mathfrak{J}$ die grösste Spannung auf einen Quadratcentimeter bezogen, welche im Zapfen eintreten darf, wenn auf denselben der Druck αQ einwirkt;
d den Durchmesser des Zapfens in Centimetern;
l die Länge des Zapfens; " "
n Anzahl der Umdrehungen des Zapfens in einer Sekunde;

so hat man nach bekannten statischen Gesetzen:

$$\alpha Q \frac{l}{2} = \frac{\mathfrak{J}\pi}{32} d^3 \quad \ldots\ldots \tag{1}$$

Hieraus folgt:

$$d = \sqrt{\frac{16\,\alpha Q}{\mathfrak{J}\pi} \frac{l}{d}} \quad \ldots\ldots \tag{2}$$

Dieser Ausdruck bestimmt den Durchmesser des Zapfens, wenn α, $\mathfrak{J}$ die Belastung Q und das Verhältniss $\frac{l}{d}$ zwischen der Länge und dem Durchmesser des Zapfens gegeben sind.

Die Unbestimmtheit des Verhältnisses $\frac{l}{d}$ kann man benutzen, um derjenigen Bedingung zu entsprechen, die erfüllt sein muss, damit ein Zapfen im Gebrauch nicht merklich abgenutzt wird, und sich auch nicht warm läuft. Diese Bedingung ist: dass die Intensität des Druckes zwischen dem Zapfen und der Pfanne unter allen Umständen, insbesondere aber, wenn die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens gross ist, eine mässige seie. Es ist aber die Intensität des Druckes dem Werth von $\frac{Q}{d\,l}$ und die Umfangsgeschwindigkeit dem Werth von $n\,d$ proportional; es ist daher der Natur der Sache angemessen, wenn wir setzen:

$$\frac{Q}{d\,l} = \frac{1}{a + b\,n\,d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

wobei a und b zwei durch Erfahrungen zu bestimmende Constante sind. Aus dieser Gleichung (2) und (3) folgt:

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{Q\,(a + b\,n\,d)}{d} \\ Q &= d^2 \sqrt{\frac{\pi}{16}\,\frac{\mathfrak{S}}{\alpha}\,\frac{1}{a + b\,n\,d}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Die drei constanten Grössen $\frac{\mathfrak{S}}{\alpha}$ a b bestimmen wir auf folgende Weise:

Wir dürfen zunächst annehmen, dass der grösste Druck gegen einen Zapfen im bewegten Zustand des Wagens doppelt so gross ist, als im ruhigen Zustand und setzen daher $\alpha = 2$.

Nach den Dimensionen, welche den Zapfen der Wagenaxen in der Wirklichkeit gegeben wird, ist die grösste Spannung im ruhigen Zustand des Wagens 300 Kilogramm auf 1 Quadratcentimeter; im bewegten Zustand ist also $\mathfrak{S} = 600$ Kilogramm. Wir haben also zu setzen: $\frac{\mathfrak{S}}{\alpha} = \frac{600}{2} = 300$.

Die Länge eines Zapfens, der keine Bewegung hat, darf gleich seinem Durchmesser genommen werden. Wir setzen also für $n = 0$ $l = d$. Mit diesen Daten folgt aus (2) und (3):

$$d = \sqrt{\frac{16\,Q}{\pi\,300}}$$

$$\frac{Q}{d^2} = \frac{1}{a}$$

Durch Elimination von Q folgt aus diesen Gleichungen:

$$a = 0{\cdot}017.$$

Der Erfahrung zufolge dürfen wir ferner einen Zapfen, welcher in einer Sekunde sechs Umdrehungen macht, und mit 2000 Kilogramm belastet ist, zweimal so lang als den Durchmesser machen. Setzen wir in den Gleichungen (2) und (3):

$$\frac{\mathfrak{S}}{\alpha} = 300 \qquad n = 6 \qquad Q = 2000 \qquad \frac{l}{d} = 2 \qquad a = 0{\cdot}017$$

so finden wir:

$$d = \sqrt{\frac{16 \times 2000}{3{\cdot}14 \times 300}} \cdot 2$$

$$\frac{2000}{2\,d^2} = \frac{1}{0{\cdot}017 + 6\,b\,d}$$

und hieraus folgt: $d = 8{\cdot}2$ $b = 0{\cdot}001$.

Hiermit sind nun die drei Coeffizienten $\frac{\mathfrak{S}}{\alpha}$ a und b bestimmt, und vermittelst derselben geben die Gleichungen (4):

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{0{\cdot}001\,Q\,(17 + n\,d)}{d} \\ Q &= \frac{243}{\sqrt{17 + n\,d}} \cdot d^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Vermittelst dieser Formeln ist die in dem VIII. Abschnitt enthaltene Tabelle berechnet.

Zuweilen ist in einer Construction nicht hinreichend Raum vorhanden, um einem Zapfen die wünschenswerthe Länge geben zu können. In einem solchen Falle wird man sich in der Regel begnügen müssen, die Zapfenlänge gleich dem Durchmesser zu nehmen, diesen letzteren also so, zu bestimmen, wie wenn $n = 0$ wäre.

Stahl-Zapfen.

Die Raumverhältnisse sind zuweilen so beengend, dass es wünschenswerth wird, die Zapfendimensionen so klein als möglich nehmen zu können. In solchem Falle ist es angemessen, die Zapfen aus gutem Gussstahl zu machen und die Länge derselben gleich dem Durchmesser zu nehmen. Bei Lokomotiven mit aussen liegenden Cylindern ist es insbesondere angemessen, die Kurbelzapfen, welche in die Radnaben der Triebräder eingesetzt werden von Gusstahl zu nehmen. Ist Q der Druck gegen einen solchen Zapfen in Kilogrammen, d der Durchmesser, l die Länge desselben in Centimetern, so ist zu nehmen:

$$d = l = 0{\cdot}09\,\sqrt{Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Stärke der Axen der Treib- und Laufräder.

Um die Querschnittsdimensionen, welche die Axen an verschiedenen Stellen erhalten sollen, zu bestimmen, ist es am angemessensten, die in dem Lokomotivbau vorkommenden Axenconstruktionen besonders zu behandeln.

A. Axe eines Laufwerkes für einen Wagen oder für eine Lokomotive mit äusseren Zapfen. (Tab. XV, Fig. 62.)

Es sei Q die Belastung eines Zapfens des Laufwerkes; d der Durchmesser; l die Länge eines Zapfens; l_1 der Abstand des Zapfenmittels vom Mittel des neben dem Zapfen befindlichen Rades; d_1 der Durchmesser der Axe in ihrer Mitte; $\mathfrak{S}$ die Spannung per

1 Quadratcentimeter, welche an der Wurzel eines Zapfens und in der Mitte der Axe eintreten darf. Das Moment, welches den Zapfen an der Wurzel abzubrechen strebt, ist $Q \frac{l}{2}$. Das Moment, welches die Welle in der Mitte abzubrechen strebt, ist $Q l_1$, man hat daher, wenn die Welle und der Zapfen gleich fest gemacht werden sollen.

$$Q \frac{l}{2} = \frac{\mathfrak{I} \pi}{32} d^3$$

$$Q l_1 = \frac{\mathfrak{I} \pi}{32} d_1^3$$

Durch Elimination von Q folgt aus diesen Gleichungen:

$$d_1 = d \sqrt[3]{\frac{2 l_1}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

gewöhnlich ist $l_1 = \frac{3}{2} l$ und dann wird: $d_1 = d \sqrt[3]{3} = 1{\cdot}44\, d$. Für ruhige Pressungen würde die Axe in allen Querschnitten zwischen den Rädern gleiche Festigkeit darbieten, wenn ihr Durchmesser überall gleich $d_1 = 1{\cdot}44\, d$ gemacht würde, allein die Erfahrung hat gelehrt, dass die Axen durch die gewaltsamen Einwirkungen der Bahn gegen die Radumfänge am leichtesten in der Nähe der Naben brechen, sie werden desshalb von der Mitte an gegen die Naben etwas verdickt, so dass der Durchmesser an den Naben $1{\cdot}6\, d$ wird.

B. Laufaxe oder Triebaxe einer Lokomotive mit äusseren Cylindern und innerem Rahmen. (Fig. 63)

Es sei Q die Belastung eines Axenhalses, d der Durchmesser des Halses, l die Länge desselben, l_1 die Entfernung vom Mittel des Halses bis zum Mittel des nebenan befindlichen Rades, d_1 der Durchmesser der Axen in der Mitte. In diesem Falle ist das Moment, welches die Zapfen, so wie auch jenes, das die Welle in der Mitte abzubrechen strebt, gleich $Q l_1$, man hat daher zur Bestimmung von d und d_1:

$$d = d_1 = \sqrt[3]{\frac{32\, Q\, l_1}{\mathfrak{I} \pi}} \text{ Centimeter} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Für $\mathfrak{I}$ darf man auch hier 300 setzen, und dann wird:

$$d = d_1 = 0{\cdot}32 \sqrt[3]{Q\, l_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die Länge l des Halses kann man gewöhnlich nicht grösser als den Durchmesser machen, weil sonst l zu gross ausfiele, und die Rahmen zu nahe aneinander zu liegen kämen. Nimmt man aber $l_1 = d$, so folgt aus (3):

$$l = d = d_1 = 0{\cdot}18 \sqrt[3]{Q}$$

C. Triebaxe mit inneren Kurbeln für Lokomotive mit innen liegenden Cylindern und inneren Rahmen. (Fig. 64.)

Es sei Q die Belastung eines Axenhalses, P der Druck gegen einen Kurbelzapfen, l_1 der Abstand vom Mittel eines Rades bis zum Mittel des nebenan befindlichen Halses, l_2 der Abstand vom Mittel eines Halses bis zum Mittel der nebenan befindlichen Kurbel, l_3 der Abstand vom Mittel einer Kurbel bis zum Mittel der ganzen Axe, r der Halbmesser der Kurbel, d_1 der Durchmesser des Axenhalses, d der Durchmesser eines Kurbelzapfens, d_2 der Durchmesser der Axe in der Mitte.

Durch die Belastungen der Axenhälse wird die Axe nach abwärts gebogen. Die aus diesen Belastungen entspringenden Momente, welche die Axe in ihrer Mitte C, in der Mitte des Kurbelzapfens B und in der Mitte eines Axenhalses A abzubrechen streben, sind von gleicher Grösse und ihr gemeinschaftlicher Werth ist $Q l_1$. Die zwischen den Mittelpunkten der Axenhälse befindlichen Theile der Axe sind aber auch durch die nach horizontaler Richtung gegen die Kurbelzapfen wirkenden Drücke auf respektive Festigkeit in Anspruch genommen. Die in horizontalem Sinne biegend wirkenden Momente sind für die mittleren Querschnitte der Welle $P l_2$, für den mittleren Querschnitt eines Kurbelzapfens ebenfalls $P l_2$, für den mittleren Querschnitt eines Halses gleich Null. Die Biegungsmomente, welche durch die gleichzeitige Wirkung der Belastungen der Axenhälse und der Drücke gegen die Kurbelzapfen entstehen, sind demnach für die Querschnitte bei C und B $\sqrt{Q^2 l_1^2 + P^2 l_2^2}$ und für den Querschnitt bei A $Q l_1$. Nennt man nun $\mathfrak{I}$ die auf einen Quadratcentimeter bezogenen Spannungen, welche an den Oberflächen der Querschnitte bei C, B und A eintreten dürfen, so hat man zur Bestimmung der Durchmesser, welche die Welle bei C B und A erhalten muss, um der biegenden Wirkung der Kräfte Q und P zu widerstehen, folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{Q^2 l_1^2 + P^2 l_2^2} &= \frac{\mathfrak{I} \pi}{32} d^3 = \frac{\mathfrak{I} \pi}{32} d_2^3 \\ Q l_1 &= \frac{\mathfrak{I} \pi}{32} d_1^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und hieraus folgt:

$$d = d_2 = \sqrt[3]{\frac{32}{\mathfrak{I} \pi} \sqrt{Q^2 l_1^2 + P^2 l_2^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{32}{\mathfrak{I} \pi} Q\, l_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Allein die auf die Kurbelzapfen wirkenden Kräfte werden durch Torsion auf die Räder übertragen; die Axenhälse sind daher auch auf Torsion in Anspruch genommen. Nennt man δ_1 die Durchmesser, welche die Axenhälse erhalten müssen, um nur allein der Torsion, der sie ausgesetzt sind, zu widerstehen, so hat man zur Bestimmung von δ_1 die Gleichung:

$$\delta_1 = \sqrt[3]{\frac{16\, P r}{\pi \mathfrak{T}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

wobei $\mathfrak{T}$ die durch die Torsion an der Oberfläche des Halses entstehende Spannung per ein Quadratcentimeter bezeichnet. Allein ein verwundener Stab widersteht dem Abbrechen ebenso stark, als ein nicht verwundener, und ein gebogener Stab widersteht dem Abwinden ebenso stark, als ein nicht gebogener; der Wellenhals bei A erhält also seine richtige Dimension, wenn wir den Durchmesser gleich machen d_1 wenn $d_1 > \delta_1$ ausfällt, dagegen gleich machen δ_1 wenn $\delta_1 > d_1$ ausfällt.

Um mit den Thatsachen der Wirklichkeit harmonirende Dimensionen zu erhalten, ist zu setzen: $\mathfrak{J} = 300$ $\mathfrak{T} = 135$ und dann wird:

$$\left.\begin{aligned} d = d_2 &= 0{\cdot}32 \sqrt[6]{Q^2 l_1^2 + P^2 l_2^2} \\ d_1 &= 0{\cdot}32 \sqrt[3]{Q l_1} \\ \delta_1 &= 0{\cdot}335 \sqrt[3]{P r} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

Es sei z. B.:

$$Q = 3410, \quad l_1 = 16, \quad P = 5000, \quad r = 26, \quad l_2 = 25$$

so wird:

$$d = d_2 = 16{\cdot}5 \quad d_1 = 12.16, \quad \delta_1 = 16{\cdot}9.$$

Da also δ_1 grösser als d_1 ist, so muss der Durchmesser des Axenhalses 16·9 und nicht 12·16 Centimeter gemacht werden.

Die Ausdrücke (5) können auch geschrieben werden wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= 0{\cdot}32 \sqrt[3]{Q l_1} \\ \delta_1 &= 0{\cdot}335 \sqrt[3]{P r} \\ d = d_2 &= d_1 \sqrt[6]{1 + \left(\frac{P l_2}{Q l_1}\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (6)$$

Die Durchmesser d der Kurbelzapfen fallen insbesondere sehr stark aus für Maschinen mit innen liegenden Cylindern und mit gekuppelten Rädern, denn bei diesen Anordnungen ist der Druck P gegen die Kurbelzapfen, im Verhältniss zur Belastung Q der Kurbelaxe, sehr gross.

Festigkeit eines cylindrischen Gefässes.

Wir wollen die Festigkeit eines cylindrischen Gefässes untersuchen, das im Innern eine Flüssigkeit enthält, die auf jeden Quadratcentimeter einen Druck p_0 und von aussen von einer andern Flüssigkeit umgeben ist, die auf jeden Quadratcentimeter der äusseren Fläche einen Druck p_1 ausübt. Es sei $p_0 > p_1$. Es sei für den natürlichen von keinen äusseren Kräften affizirten Zustand des Gefässes r_0 der innere, r_1 der äussere Halbmesser des Cylinders; x der Halbmesser eines Kreises, der zwischen dem innern und äussern Begrenzungskreis des Cylinders liegt.

Unter den Einwirkungen der Pressungen p_0 und p_1 wird der Gylinder ausgeweitet bis ein Gleichgewicht zwischen diesen Pressungen und den inneren Elastizitätskräften des Materials eintritt. Dadurch gehen die Halbmesser r_0 r_1 und x in ϱ_0 ϱ_1 und ξ über

jedoch in der Art, dass die Wanddicke $\varrho_0 - \varrho_1$ des ausgeweiteten Cylinders kleiner ist, als die Wanddicke $r_1 - r_0$ des Cylinders im natürlichen Zustand. Zieht man durch einen Punkt m (Fig. 87) des Kreises vom Halbmesser ξ einen Radius m C und eine Tangente A B, so ist klar, dass das Material bei m nach der Richtung A B ausgedehnt, nach der Richtung C m zusammengepresst sein wird. Nennen wir y die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung bei m nach der Richtung A B und z die auf einen Quadratcentimeter bezogene Pressung bei m nach der Richtung m C, ε den Modulus des Materials, aus welchem der Cylinder besteht. Das Material, welches im natürlichen Zustand zwischen den Kreisen, deren Halbmesser x und $x + dx$ sind, eingeschlossen war, befindet sich im ausgedehnten Zustand des Cylinders zwischen zwei Kreisen, deren Halbmesser ξ und $\xi + d\xi$ sind; es ist demnach $2\pi\xi - 2\pi x = 2\pi(\xi - x)$ die Ausdehnung und $dx - d\xi$ die Zusammendrückung dieses Materials und man hat nach dem bekannten, für die Ausdehnung und Zusammendrückung von Stäben geltenden empirischen Gesetze:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi(\xi - x) &= 2\pi x \cdot \frac{y}{\varepsilon} \\ dx - d\xi &= dx \cdot \frac{z}{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

Nennt man Θ die Aenderung, welche in der Fläche $(x + dx)^2 \pi - x^2 \pi$ durch die Ausdehnung eintritt, so ist

$$\Theta = \left[(\xi + d\xi)^2 \pi - \xi^2 \pi\right] - \left[(x + dx)^2 \pi - x^2 \pi\right]$$

oder weil dx und $d\xi$ Differenzialien sind:

$$\Theta = 2\pi(\xi\, d\xi - x\, dx) \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) folgt aber:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right) \\ d\xi &= dx\left(1 - \frac{z}{\varepsilon}\right) \end{aligned}\right| \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

Führt man diese Werthe in (2) ein und vernachlässigt das jederzeit verschwindend kleine Glied $\frac{y}{\varepsilon} \frac{z}{\varepsilon}$ so findet man:

$$\Theta = 2\pi x\, dx\left(\frac{y}{\varepsilon} - \frac{z}{\varepsilon}\right)$$

oder

$$\frac{\Theta}{2\pi x\, dx} = \frac{1}{\varepsilon}(y - z) \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

Es ist aber $2\pi x\, dx$ die Fläche, welche in Folge der Einwirkungen der Pressungen p_0 und p_1 eine Ausdehnung erlitten hat $\frac{\Theta}{2\pi x\, dx}$ ist demnach die auf einen Quadratcentimeter bezogene Flächenausdehnung im Punkt m.

Um den analystischen Schwierigkeiten und Weitläufigkeiten, welcher einer ganz scharfen Lösung unseres Problems im Wege stehen, zu entgehen, sind wir nun genöthigt, eine Hypothese zu machen. Wir nehmen nämlich an, dass die auf einen Quadratcentimeter bezogene Flächenausdehnung in allen Punkten des Cylinderquerschnittes gleich gross sei, oder dass $\frac{1}{\varepsilon}(y-z)$ für jeden Querschnittspunkt den gleichen Werth hat. Diesen constanten Werth können wir leicht finden. Nennen wir nämlich $\mathfrak{A}$ die Spannung des Materials per einen Quadratcentimeter am inneren Umfang des Cylinders, so ist $\mathfrak{A}$ der Werth von y für $x = r_0$. Es ist aber ferner für $x = r_0$ $z = p_0$, daher ist die Flächenausdehnung per einen Quadratcentimeter am innern Umfang des Cylinders und vermöge unserer Hypothese in jedem Punkt des Cylinderquerschnitts gleich $\frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{A} - p_0)$.

Die Flächenausdehnung irgend eines Theils des Cylinderquerschnittes wird nun gefunden, wenn man die Fläche, deren Ausdehnung man berechnen will, mit dem Ausdehnungscoeffizienten $\frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{A} - p_0)$ multiplizirt. Die Fläche $(x^2 - r_0^2)\pi$ wird durch die Ausdehnung $(\xi^2 - \varrho_0^2)\pi$. Die Ausdehnung ist demnach $(\xi^2 - \varrho_0^2)\pi - (x^2 - r_0^2)\pi$, daher hat man:

$$(\xi^2 - \varrho_0^2)\pi - (x^2 - r_0^2)\pi = (x^2 - r_0^2)\pi \frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{A} - p_0) \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Allein es ist vermöge der ersten der Gleichungen (3):

$$\xi = x\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right)$$

$$\varrho_0 = r_0\left(1 + \frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}\right)$$

Führt man diese Werthe von ξ und ϱ_0 in (5) ein, und vernachlässigt die Quadrate von $\frac{y}{\varepsilon}$ und von $\frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}$ gegen die ersten Potenzen, so findet man:

$$y x^2 - \mathfrak{A} r_0^2 = (x^2 - r_0^1)\frac{\mathfrak{A} - p_0}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

und hieraus folgt:

$$y = \frac{\mathfrak{A} - p_0}{2} + \frac{\mathfrak{A} + p_0}{2}\frac{r_0^2}{x^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Somit ist nun die auf einen Quadratcentimeter bezogene tangentiale Spannung eines in einer Entfernung x von der Axe des Cylinders befindlichen Punktes berechnet. Diese nimmt, wie man sieht, von der inneren Fläche gegen die äussere hin ab, ist also am innern Umfang am grössten und beträgt daselbst $\mathfrak{A}$.

Nennen wir v die Spannung per 1 Quadratcentimeter in der Entfernung ξ, so findet man v, wenn man in (7) x mit ξ und y mit v und r_0 mit ϱ_0 vertauscht. Man hat daher:

$$v = \frac{\mathfrak{A} - p_0}{2} + \frac{\mathfrak{A} + p_0}{2}\frac{\varrho_0^2}{\xi^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Nun ist $\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} v\, d\xi$ die Summe aller Spannungen in einer, $2\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} v\, d\xi$ die Summe aller Spannungen in zwei diametral gegenüber liegenden Wanddicken sind ferner $2\varrho_0 p_0$ und $2\varrho_1 p_1$ die Pressungen der Flüssigkeiten, welche die Spannungen in zwei diametral gegenüber stehenden Wanddicken hervorrufen.

Man hat daher:

$$2\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} v\, d\xi = 2(\varrho_0 p_0 - \varrho_1 p_1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

oder wegen (8)

$$2\int_{\varrho_0}^{\varrho_1}\left[\frac{\mathfrak{A} - p_0}{2} + \frac{\mathfrak{A} + p_0}{2}\frac{\varrho_0^2}{\xi^2}\right] d\xi = 2(\varrho_0 p_0 - \varrho_1 p_1)$$

Durch Integration findet man:

$$\frac{\mathfrak{A} - p_0}{2}(\varrho_1 - \varrho_0) + \frac{\mathfrak{A} + p_0}{2}\varrho_0^2\frac{\varrho_1 - \varrho_0}{\varrho_1 \varrho_0} = \varrho_0 p_0 - \varrho_1 p_1$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2p_1 - p_0}}$$

Es ist aber vermöge der ersten der Gleichungen (3):

$$\varrho_1 = r_1\left(1 + \frac{p_1}{\varepsilon}\right)$$

$$\varrho_0 = r_0\left(1 + \frac{p_0}{\varepsilon}\right)$$

Daher findet man:

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{1 + \frac{p_0}{\varepsilon}}{1 + \frac{p_1}{\varepsilon}}\sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2p_1 - p_0}}$$

oder endlich weil $\frac{p_0}{\varepsilon}$ und $\frac{p_1}{\varepsilon}$ jederzeit gegen die Einheit beinahe verschwindend kleine Grössen sind:

$$\frac{r_1}{r_0} = \sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2p_1 - p_0}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Diese Formel, welche wir unter der Voraussetzung gefunden haben, dass die verhältnissmässige Volumenänderung des Materials in allen Punkten einen und denselben Werth habe, stimmt mit derjenigen überein, welche *Lamé* in seinem Werke: Theorie mathematique de l'elasticité des corps solides pag. 191 zuerst gefunden hat, ohne von irgend einer Hypothese über die verhältnissmässige Volumenänderung des Materials auszugehen.

Nennen wir:

D den inneren Durchmesser des Cylinders } in Centimetern;
δ die Wanddicke desselben }
n die Anzahl der Atmosphären, welche dem innern,
n_1 die Anzahl der Atmosphären, welche dem äusseren Druck entspricht, und nehmen den Druck der Atmosphäre auf 1 Quadratcentimeter (der eigentlich 1·0335 Kilogr. beträgt) zu 1 Kilogramm an, so ist:

$$r_0 = \frac{D}{2} \qquad r_1 = \frac{D}{2} + \delta \qquad p_0 = n \qquad p_1 = n_1$$

und $\mathfrak{A}$ bedeutet dann die Spannung auf 1 Quadratcentimeter bezogen an der innern Fläche der Wand.

Mit diesen neuen Bezeichnungen folgt aus (10):

$$\delta = \frac{D}{2}\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{A}+n}{\mathfrak{A}+2n_1-n}} - 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Setzt man in dieser Formel für $\mathfrak{A}$ den Coeffizienten der absoluten Festigkeit des Materials, aus welchem der Cylinder besteht, so gibt diese Formel diejenige Wanddicke, bei welcher ein Bersten des Cylinders eintritt. Diese Wanddicke wird unendlich, oder es tritt ein Bersten ein, wie dick man auch die Wand machen mag, wenn $n = \mathfrak{A} + 2n_1$ ist, d. h. wenn die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung der Flüssigkeit um das Doppelte der äusseren Pressung auf einen Quadratcentimeter grösser ist, als der Coeffizient der absoluten Festigkeit des Materials.

Bei hydraulischen Pressen ist die Wanddicke des grossen Presscylinders gewöhnlich halb so gross, als der innere Durchmesser, oder es ist $\delta = \frac{D}{2}$. Für dieses Verhältniss gibt die Formel (11):

$$n = \frac{3}{5}\mathfrak{A} + \frac{8}{5}n_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Die absolute Festigkeit des Gusseisens ist durchschnittlich 1000 Kilogramm per einen Quadratcentimeter. Die Presscylinder dürfen nicht stärker, als bis zu $\frac{1}{3}$ ihrer absoluten Festigkeit in Anspruch genommen werden, man kann also $\mathfrak{A}$ nicht grösser als 300 annehmen, und für diesen Werth gibt die Formel (12) mit Berücksichtigung, dass in diesem Fall $n_1 = n$ ist:

$$n = 181{\cdot}6$$

Damit also der Cylinder der hydraulischen Presse, bei welchem die Wanddicke halb so gross ist, als der innere Durchmesser, das Material nicht mehr als auf $\frac{1}{3}$ seiner Festigkeit in Anspruch nimmt, darf der innere Druck der Flüssigkeit nicht mehr als 181·6 Atmosphären betragen.

Bei Dampfkesseln ist der innere Druck n gegen die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung $\mathfrak{A}$, welche in dem Material an der innern Fläche der Wand eintreten darf, eine kleine Grösse, und dann ist es erlaubt, für δ einen Annäherungswerth aufzustellen. Es ist ganz genau:

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{A}+n}{\mathfrak{A}+2n_1-n}} - 1 = \left(1 + 2\,\frac{n-n_1}{\mathfrak{A}+2n_1-n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

und annähernd

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{A}+n}{\mathfrak{A}+2n_1-n}} - 1 = \frac{n-n_1}{\mathfrak{A}+2n_1-n}$$

demnach ist auch annähernd

$$\delta = \frac{D}{2}\,\frac{n-n_1}{\mathfrak{A}+2n_1-n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Diese Formel wollen wir benutzen, um eine Regel zur Bestimmung der Metalldicke cylindrischer Kessel aufzustellen. Dieselbe gibt natürlich für $n = n_1$ $\delta = 0$. Allein jeder Kessel muss auch dann, wenn der innere Druck dem äusseren gleich wäre, eine gewisse Metalldicke erhalten, um insbesondere gegen verschiedene Zufälligkeiten hinreichende Festigkeit darbieten zu können. Die Formel (13) ist also unmittelbar nach ihrer Form zur Aufstellung einer praktisch brauchbaren Regel für die Bestimmung der Metallstärke nicht geeignet. Wir schreiben desshalb:

$$\delta = \frac{D}{2}\left(\frac{n-n_1}{\mathfrak{A}+2n_1-n} + \mathfrak{B}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

und bestimmen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf folgende Weise durch Erfahrungen. Wir dürfen annehmen, dass ein Kessel von 100 Centimeter Weite doch eine Metalldicke von 0.5 Centimeter erhalten soll, wenn der innere Druck dem äusseren gleich ist. Setzt man in die Formel $n = n_1$ $D = 100$ $\delta = 0{\cdot}5$, so folgt aus ihr $\mathfrak{B} = 0{\cdot}01$.

Die cylindrischen Theile der Lokomotivkessel haben durchschnittlich einen Durchmesser $D = 100$ Centimeter, eine Metalldicke $\delta = 1{\cdot}2$ Centimeter, haben einer normalen Spannung n von 6 Atmosphären zu widerstehen, und gewähren bei diesen Abmessungen eine angemessene Sicherheit. Setzen wir in (14) $n = 6$ $n_1 = 1$ $\delta = 1.2$ $D = 100$ $\mathfrak{B} = 0{\cdot}01$, so findet man $\mathfrak{A} = 361$. Vermittelst dieser Werthe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und wenn man noch $n_1 = 1$ setzt folgt aus (14)

$$\delta = D\,\frac{1{\cdot}315 + 0{\cdot}495\,n}{363 - n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Diese Formel wollen wir als Regel für die Bestimmung der Wanddicke cylindrischer Dampfkessel gelten lassen.

Diese Formel gibt:

für $n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
„ $\frac{\delta}{D} =$	0·0050	0·0064	0·0077	0·0092	0·0106	0·0120	0·0134	0·0149	0·0163	0·0177

Nach dieser Regel fallen die Metalldicken für schwache Pressungen etwas stärker aus, als nach den Regeln, die bisher für die Dicke der Kesselwände aufgestellt wurden. Nach der in Frankreich üblichen Regel wird z. B. die Metalldicke eines Kessels von 100 Centimeter Durchmesser und für eine Spannung von 2 Atmosphären 0·48 Centimeter, unsere Formel gibt dagegen in diesem Fall 0·64 Centimeter.

Wenn wir bestimmen wollen, wie stark das Kesselblech in Anspruch genommen ist, wenn seine Dicke nach obiger Regel bestimmt wird, müssen wir vermittelst der Gleichungen (11) oder (13) die Werthe von $\mathfrak{A}$ bestimmen. Aus (13) folgt, wenn man $n_1 = 1$ setzt:

$$\mathfrak{A} = n - 2 + \frac{D}{2\,\delta}(n-1)$$

Für $D = 100$ $n = 6$ wird nach obiger Tabelle $\delta = 1{\cdot}2$ und nun folgt $\mathfrak{A} = 212$. Die absolute Festigkeit von Eisenblech ist 3300. Das Blech des Kessels ist demnach in diesem Falle auf $\frac{212}{3300} = \frac{1}{15}$ seiner absoluten Festigkeit in Anspruch genommen.

Festigkeit eines sphärischen Gefässes.

Die Fig. 87 kann uns auch zur Untersuchung der Festigkeit eines sphärischen Gefässes dienen. Es sei für den natürlichen Zustand r_0 der innere, r_1 der äussere, x irgend ein zwischen r_0 und r_1 liegender Kugelhalbmesser. Im ausgedehnten Zustand des Gefässes seien diese Halbmesser $\varrho_0\ \varrho_1\ \xi$. In irgend einem Punkt m der Kugelfläche vom Halbmesser ξ herrscht nach radialer Richtung $m\,C$ Zusammenpressung, nach der auf $m\,C$ senkrechten Richtung $A\,m\,B$ Ausdehnung. Die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung sei y, die auf einen Quadratcentimeter bezogene Pressung z. Das Material, welches ursprünglich innerhalb zweier Kugelflächen, deren Halbmesser x und $x + dx$ sind, enthalten war, befindet sich nach erfolgter Ausdehnung innerhalb der Kugelflächen, deren Halbmesser ξ und $\xi + d\,\xi$ sind. Die lineare Zusammenpressung nach der Richtung des Radius ist demnach $dx - d\xi$, die lineare Ausdehnung einer Kreisperipherielänge $2\,\pi\,x$ ist $2\,\pi\,(\xi - x)$. Man hat daher auch hier:

$$2\,\pi\,(\xi - x) = 2\,\pi\,x\,\frac{y}{\varepsilon}$$

$$dx - d\,\xi = dx\,\frac{z}{\varepsilon}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right) \\ d\,\xi &= dx\left(1 - \frac{z}{\varepsilon}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

wobei ε den Modulus der Elastizität des Materials bedeutet.

Nennen wir Θ die Volumensänderung, welche in dem zwischen den Kugelflächen x und $x + dx$ enthaltenen Material eintritt, so ist:

$$\Theta = \frac{4}{3}\,\pi\left[(\xi + d\,\xi)^3 - \xi^3\right] - \frac{4}{3}\,\pi\left[(x + dx)^3 - x^3\right]$$

oder auch, weil $d\,\xi$ und dx Differenzialien sind:

$$\Theta = 4\,\pi\,(\xi^2\,d\xi - x^2\,dx)$$

Setzt man für ξ und $d\xi$ die Werthe, welche die Gleichungen (1) darbieten, so wird:

$$\Theta = 4\,\pi\,x^2\,dx\left[\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right)^2\left(1 - \frac{z}{\varepsilon}\right) - 1\right]$$

Da in allen Anwendungen insbesondere auf Metallgefässe $\frac{y}{\varepsilon}$ und $\frac{z}{\varepsilon}$ sehr kleine Grössen sind, so darf man die Quadrate und die Produkte dieser Grössen gegen ihre ersten Potenzen vernachlässigen und dann wird:

$$\Theta = 4\,\pi\,x^2\,dx\left(\frac{2\,y}{\varepsilon} - \frac{z}{\varepsilon}\right) = 4\,\pi\,x^2\,dx\,\frac{2\,y - z}{\varepsilon}$$

Es ist aber $4\,\pi\,x^2\,dx$ das Volumen, das eine Aenderung Θ erlitten hat, $\frac{\Theta}{4\,\pi\,x^2\,dx}$ oder $\frac{2y - z}{\varepsilon}$ ist demnach die auf einen Kubikcentimeter bezogene Volumensänderung, welche in dem zwischen den Kugelflächen x und $x + dx$ eingeschlossenen Material eintritt, oder kurz gesprochen: $\frac{2\,y - z}{\varepsilon}$ ist die verhältnissmässige Volumensausdehnung, welche in der Entfernung ξ eintritt. Wir wollen aber auch hier die hypothetische Annahme machen, dass die verhältnissmässige Volumensausdehnung in allen Punkten der sphärischen Gefässwand einen und denselben Werth habe, dass mithin $\frac{2\,y - z}{\varepsilon}$ eine constante Grösse sei, deren Werth sich ergeben wird, wenn man für y und z, die irgend einem ganz bestimmten Punkt der Gefässwand entsprechenden Werthe setzt. Nennen wir p_0 die Pressung der Flüssigkeit im Innern auf einen Quadratcentimeter, p_1 die äussere Pressung auf einen Quadratcentimeter, $\mathfrak{A}$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung an der innern Kugelfläche vom Halbmesser ϱ_0, so ist für irgend einen Punkt dieser Kugelfläche $y = \mathfrak{A}$ und $z = p_0$. Der constante Werth von $\frac{1}{\varepsilon}(2\,y - z)$ ist demnach $\frac{1}{\varepsilon}(2\,\mathfrak{A} - p_0)$.

Da nach unserer Hypothese die verhältnissmässige Volumensänderung für jeden Punkt der Gefässwand den gleichen Werth hat, so findet man die Volumensänderung: $\frac{4}{3}\,\pi\,(\xi^3 - \varrho_0^3) - \frac{4}{3}\,\pi\,(x^3 - r_0^3)$ des Volumens $\frac{4\,\pi}{3}(x^3 - r_0^3)$ wenn man dieses Volumen mit $\frac{1}{\varepsilon}(2\,\mathfrak{A} - p_0)$ multiplizirt. Man hat daher:

$$\frac{4}{3}(\xi^3 - \varrho_0^3) - \frac{4}{3}\,\pi\,(x^3 - r_0^3) = \frac{4}{3}\,\pi\,(x^3 - r_0^3)\,\frac{2\,\mathfrak{A} - p_0}{\varepsilon}\ \ldots\ldots\ (2)$$

Allein vermöge der ersten der Gleichungen (1) ist:

$$\xi = x\left(1+\frac{y}{\varepsilon}\right)$$

$$\varrho_0 = r_0\left(1+\frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}\right)$$

Führt man die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werthe von x und r_0 in (2) ein, und vernachlässiget die Produkte und höheren Potenzen der durch ε dividirten Glieder, so findet man:

$$\xi^3 y - \varrho_0^3 \mathfrak{A} = (\xi^3 - \varrho_0^3)\frac{2\mathfrak{A}-p_0}{3}$$

und hieraus folgt:

$$y = \frac{2\mathfrak{A}-p_0}{3} + \frac{\varrho_0^3}{\xi^3}\,\frac{\mathfrak{A}+p}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Hiermit ist also die in der Kugelfläche vom Halbmesser ξ herrschende Spannung berechnet. Sie nimmt nach aussen hin ab, ist am innern Umfang, wo ihr Werth gleich $\mathfrak{A}$ ist, am grössten.

Die Bedingungs-Gleichung des Gleichgewichtes zwischen den Flüssigkeitspressungen und den Material-Spannungen ergibt sich nun auf folgende Art: Legen wir durch den Mittelpunkt der Kugelflächen eine Ebene, welche das Gefäss in zwei Hälften theilt, so werden dieselben durch den innern Druck mit einer Kraft $\varrho_0^2\,\pi\,p_0$ auseinander getrieben, durch den Druck der äusseren Flüssigkeit mit einer Kraft $\varrho_1^2\,\pi\,p_1$ gegen einander gedrückt, die Differenz $(\varrho_0^2\,p_0 - \varrho_1^2\,p_1)\,\pi$. Diese Kraft muss daher gleich sein der Summe aller Spannungen, die in dem Schnitt der sphärischen Gefässwand mit jener Ebene vorkommen; man hat daher:

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} 2\,\pi\,\xi\,d\xi\,y = \pi\,(\varrho_0^2\,p_0 - \varrho_1^2\,p_1)$$

oder wenn man für y seinen Werth setzt:

$$2\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \xi\left(\frac{2\mathfrak{A}-p_0}{3} + \frac{\mathfrak{A}+p_0}{3}\,\frac{\varrho_0^3}{\xi^3}\right)d\xi = \varrho_0^2\,p_0 - \varrho_1^2\,p_1$$

Hieraus findet man durch Integration:

$$2\left(\frac{2\mathfrak{A}-p_0}{3}\,\frac{\varrho_1^2-\varrho_0^2}{2} + \frac{\mathfrak{A}+p_0}{3}\,\varrho_0^3\,\frac{\varrho_1-\varrho_0}{\varrho_1\,\varrho_0}\right) = \varrho_0^2\,p_0 - \varrho_1^2\,p_1$$

und aus diesem Ausdruck folgt durch gewöhnliche Reduktionen:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \sqrt[3]{\frac{2(\mathfrak{A}+p_0)}{2\mathfrak{A}+3p_1-p_0}}$$

Es ist aber $\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \frac{r_1\left(1+\frac{p_1}{\varepsilon}\right)}{r_0\left(1+\frac{p_0}{\varepsilon}\right)}$ und da $\frac{p_1}{\varepsilon}$ und $\frac{p_0}{\varepsilon}$ jederzeit ungemein kleine Grössen sind, so begeht man keinen merklichen Fehler, wenn man $\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \frac{r_0}{r_0}$ setzt; wir erhalten also schliesslich:

$$\frac{r_1}{r_0} = \sqrt[3]{\frac{2(\mathfrak{A}+p_0)}{2\mathfrak{A}+3p_1-p_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Auch diese Formel hat zuerst *Lamé* in seinem früher genannten Werk, Seite 213, aufgestellt.

Nennen wir:

δ die Metalldicke des kugelförmigen Gefässes } in Centimetern;
D den innern Durchmesser }
$\mathfrak{A}$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung, welche im Material an der innern Fläche der Wand eintreten darf;
n die Anzahl der Atmosphären, welche der innern,
n_1 die Anzahl der Atmosphären, welche der äussern Pressung entspricht, und nehmen den Druck einer Atmosphäre auf 1 Quadratcentimeter zu 1 Kilogramm, so ist:

$\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \quad p_0 = n \quad p_1 = n_1 \quad r_0 = \frac{D}{2} \quad r_1 = \frac{D}{2} + \delta$ und aus der Formel (4) folgt dann:

$$\delta = \frac{D}{2}\left[\sqrt[3]{\frac{2(\mathfrak{A}+n)}{2\mathfrak{A}+3n_1-n_1}} - 1\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Setzt man für $\mathfrak{A}$ den Coeffizienten der absoluten Festigkeit des Materials, so gibt diese Formel diejenige Metallstärke, bei welcher ein Bersten des Gefässes eintritt. Diese Metalldicke wird unendlich gross, d. h. der Kessel berstet, wie dick man auch die Wand machen mag, wenn $n = 2\mathfrak{A} + 3n_1$ wird.

Für Dampfkessel ist n im Vergleich zu $\mathfrak{A}$ eine kleine Grösse, und dann kann man wiederum einen Annäherungsausdruck aufstellen. Es ist nämlich ganz genau:

$$\sqrt[3]{\frac{2(\mathfrak{A}+n)}{2\mathfrak{A}+3n_1-n_1}} - 1 = \left(1+3\,\frac{n-n_1}{2\mathfrak{A}+3n_1-n}\right)^{\frac{1}{3}} - 1$$

Da nun $3(n-n_1)$ gegen $2\mathfrak{A}+3n_1-n$ sehr klein ist, so findet man annähernd:

$$\delta = \frac{D}{2}\,\frac{n-n_1}{2\mathfrak{A}+3n_1-n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Wenn die Differenz $n-n_1$ zwischen der innern und äussern Spannung klein ist, gibt diese Formel für δ zu kleine Werthe, wir bringen daher eine Correktion an und setzen:

$$\delta = \frac{D}{2}\left(\frac{n-1}{2\mathfrak{A}+3-n} + \mathfrak{B}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dürfen wir die gleichen Werthe nehmen, die wir für cylindrische Gefässe (Seite 239) aus Erfahrungen gefunden haben. Wir setzen daher $\mathfrak{B} = 0{\cdot}01$ $\mathfrak{A} = 361$ und dann wird:

$$\delta = D\,\frac{3{\cdot}125 + 0{\cdot}495\,n}{725 - n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Diese Formel gibt:

für $n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{\delta}{D} =$	0·0050	0·00569	0·00638	0·00708	0·0077	0·0085	0·0092	0·0098	0·0105	0·0113

Festigkeit des Feuer- und Wasserkastens einer Lokomotive.

Die Wände des Feuerkastens und des denselben umgebenden Wasserkastens sind der im Kessel herrschenden Pressung ausgesetzt. Diese Wände werden zwar aus sehr starken Blechen von 1 bis 1·5 Centimeter Dicke hergestellt, müssen aber dessen ungeachtet durch verschiedene Verbindungen gegen die deformirende Wirkung des im Kessel herrschenden Druckes geschützt werden. Zu diesem Behufe werden die Wände des Feuerkastens und des Wasserkastens durch Bolzen zusammengehängt, wird ferner die Decke des Feuerkastens vermittelst Bolzen an ein System von schmiedeisernen Barren gehängt, die mit ihren Enden auf der Rückwand und Röhrenwand des Feuerkastens aufsitzen, wird endlich der obere Theil des Wasserkastens durch Winkeleisen und Zugstangen verstärkt. In diesem System von Verbindungen sind die einzelnen Theile auf folgende Weise in Anspruch genommen.

Die Bolzen der Wände und Decke, sowie die Zugstangen sind auf absolute, die Barren der Decke des Feuerkastens und die Winkeleisen am oberen Theil des Wasserkastens sind auf respektive Festigkeit in Anspruch genommen. Die Umfangswände des Feuer- und des Wasserkastens sind als Platten anzusehen, die an vielen über ihren Flächen regelmässig vertheilten Punkten festgehalten werden und auf welche entweder nur normale Pressungen, oder, nebst normalen Pressungen, auch dehnende oder zusammendrückende Kräfte einwirken. Die Decken des Feuerkastens und des Wasserkastens sind nicht zusammengehängt, was zur Folge hat, dass der ganze Feuerkasten durch den Druck des Dampfes gegen seine Decke zusammengestaucht, und dass der Wasserkasten durch den gegen seine Decke wirkenden Dampfdruck nach vertikaler Richtung ausgestreckt wird. Die Umfangswände des Feuerkastens und Wasserkastens sind zusammengehängt, nach horizontaler Richtung werden daher die Wände des Feuerkastens weder gedehnt noch zusammengedrückt, allein da die Wände des Wasserkastens eine grössere Ausdehnung haben, als jene des Feuerkastens, so ist der Gesammtdruck gegen die Flächen des ersteren grösser, als gegen die Flächen des letzteren und die Differenz dieser Pressungen bringt in den Wänden des Wasserkastens eine schwache Ausdehnung nach horizontaler Richtung hervor. Die Zustände in den einzelnen Theilen des in Rede stehenden Baues sind also folgende:

Die Decke des Feuerkastens ist weder gedehnt noch zusammengepresst, wird jedoch in den zwischen den Bolzen befindlichen Theilen durch den Dampfdruck einwärts gebogen. Die Umfangswände des Feuerkastens sind: a) nach horizontaler Richtung weder gedehnt noch zusammengepresst; b) nach vertikaler Richtung zusammengestaucht; c) in den rechteckigen oder puadratischen Flächen zwischen den Bolzen nach einwärts gebogen. Die Umfangswände des Wasserkastens sind: a) nach horizontaler Richtung schwach gedehnt; b) nach vertikaler Richtung stark gedehnt; c) in den rechteckigen oder quadratischen Feldern zwischen den Bolzen nach auswärts gebogen.

Eine ganz genaue Bestimmung der Zustände, in welchen sich alle Theile des Feuer- und Wasserkastens befinden, erfordert die Anwendung von äusserst sublimen analytischen Methoden, die sich in diesem Werke nicht sehen lassen dürfen, wir müssen uns daher mit einer Annäherung begnügen, indem wir, um den Zustand zu bestimmen, der in einem Wand- oder Deckenstück nach einer gewissen Richtung A vorhanden ist, die Bolzenreihen durch Längenrippen ersetzen, deren Richtungen mit der Richtung A einen rechten Winkel bilden. Dann wird eine solche Platte durch die auf sie einwirkenden Kräfte zwischen je zwei Rippen rinnenförmig eingedrückt und die in einer solchen Rinne herrschenden Spannungszustände, welche sich, wie wir sehen werden, durch gewöhnlichere analytische Mittel bestimmen lassen, sind wenigstens annähernd übereinstimmend mit jenen, die nach der Richtung A in einer durch Bolzen gehaltenen Platte vorkommen.

Um also die statischen Zustände eines Wand- oder Deckenstückes annähernd kennen zu lernen, müssen wir nun das Gleichgewicht eines Stabes untersuchen, dessen Querschnitt ein Rechteck ist, der auf einer Reihe von Unterstützungen aufliegt, in allen Punkten nach normaler Richtung gepresst, und nach seiner Länge entweder gedehnt oder zusammengedrückt wird.

Gleichgewicht eines Stabes, der auf einer Reihe von gleich weit von einander entfernten Unterstützungen aufliegt, nach normaler Richtung gepreßt und nach seiner Länge gedehnt wird.

Es sei (Fig. 81) ABC ein solcher Stab in deformirtem Zustand.

In dem Querschnitt bei D, in der Mitte zwischen zwei Unterstützungen, werden gewisse Spannungen vorkommen. Wir werden den Gleichgewichtszustand in einem Stück AD nicht ändern, wenn wir den Stab bei D entzweischneiden, und in allen Punkten des Durchschnittes Kräfte anbringen, welche den Spannungen gleich sind, die vor dem Entzweischneiden in diesem Querschnitt vorhanden waren. Diesen Kräften zusammen entspricht erstlich eine gewisse Summe S und zweitens ein gewisses Drehungsmoment M in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehende Axe. Der Gleichgewichtszustand des Stückes AD wird also nicht gestört, wenn wir den Stab bei D entzweischneiden, dann nach horizontaler Richtung eine spannende Kraft S und überdiess noch ein gewisses Kraftmoment M drehend wirken lassen. Der Gleichgewichtszustand des Stückes AD wird aber auch nicht gestört, wenn wir den Stab bei A einspannen. Unsere Aufgabe reduzirt sich also auf die Bestimmung des Gleichgewichtes eines elastischen Stabes, der sich unter folgenden Verhältnissen befindet. Das eine Ende A (Fig. 79) ist festgehalten und nach der Richtung Ax eingespannt. Auf den Stab wirken der ganzen Länge nach normale Pressungen von gleicher Intensität. An dem freien Ende wirkt parallel mit Ax eine spannende Kraft S und überdies noch ein gewisses Kraftmoment M, welches bewirkt, dass die Richtung des Stabes bei D mit Ax parallel ist.

Wir nennen:

$\left.\begin{array}{ll} b & \text{die Breite} \\ \delta & \text{die Dicke} \end{array}\right\}$ des Stabes;

ε den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht;

p den Druck auf jede Flächeneinheit des Stabes;

$c = AD$ die Länge des Stabes;

$\left.\begin{array}{l} Ap = x \\ mp = y \end{array}\right\}$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Linie, in welcher die Schwerpunkte aller Querschnitte des Stabes liegen;

$\left.\begin{array}{l} \overline{AE} = c \\ AD = f \end{array}\right\}$ die Coordinaten des Punktes D;

ϱ den Krümmunghalbmesser bei m;

$\left.\begin{array}{ll} S & \text{den Zug} \\ M & \text{das Moment} \end{array}\right\}$ bei m.

Wir nehmen an, die Biegung des Stabes sei nur eine schwache, dann ist $\frac{1}{2}\, b\, p\, (c-x)^2$ die Summe der Momente aller von m bis D wirkenden Pressungen, bezogen auf den Punkt m und $-S(f-y)$ das Moment der Spannung S. Die Summe der Momente der Spannungen, die im Querschnitt bei D vorkommen, ist in Bezug auf irgend einen Punkt des Stabes gleich $-M$. Die Summe der Momente aller im Querschnitt bei m vorkommenden Spannungen beträgt $-\frac{b\,\varepsilon\,d^3}{12}\,\frac{1}{\varrho}$. Die Bedingungsgleichung des Gleichgewichts ist demnach:

$$-\frac{b\,\varepsilon\,\delta^3}{12}\,\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}\, b\, p\, (c-x)^2 - S(f-y) - M = 0$$

Allein da wir eine sehr schwache Biegung voraussetzen und den Punkt m in dem gegen die Axe Ax convexen Theil der Kurve angenommen haben, so ist $\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2y}{dx^2}$ wir erhalten daher die Differenzialgleichung:

$$-\frac{b\,\varepsilon\,\delta^3}{12}\,\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}\, b\, p\, (c-x)^2 - S(f-y) - M = 0$$

oder

$$\frac{b\,\varepsilon\,\delta^3}{12}\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\, b\, p\, (c-x)^2 - S(f-y) - M \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\left(\frac{1}{2}\, b\, p\, c^2 - S\, f - M\right) = \alpha \\ \frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\, b\, p\, c \;\ldots\ldots = \beta \\ \frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\,\frac{1}{2}\, p\, b \;\ldots\ldots = \gamma \\ \frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\, S \;\ldots\ldots = \lambda^2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

so bezeichnen α β γ λ^2 in Bezug auf die Integration constante Grössen, und die Gleichung (1) wird:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha - \beta x + \gamma x^2 + \lambda^2 y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$y = -\frac{2\gamma + \alpha\lambda^2}{\lambda^4} + \frac{\beta}{\lambda^2}\, x - \frac{\gamma}{\lambda^2}\, x^2 + D e^{\lambda x} + E e^{-\lambda x} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

wobei D und E die Constanten der Integration bezeichnen. Durch Differenziation dieser Gleichung wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{\lambda^2} - 2\,\frac{\gamma}{\lambda^2}\, x + \lambda\left(D e^{\lambda x} - E e^{-\lambda x}\right) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Nun ist für den Punkt A $\quad x = 0 \quad y = 0 \quad \frac{dy}{dx} = 0$

und für den Punkt $\quad D \quad x = c \quad y = f \quad \frac{dy}{dx} = 0$.

Man hat daher:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -\frac{2\gamma + \alpha\lambda^2}{\lambda^4} + D + E \\ 0 = \frac{\beta}{\lambda^2} + \lambda(D - E) \\ f = -\frac{2\gamma + \alpha\lambda^2}{\lambda^4} + \frac{\beta}{\lambda^2}\, c - \frac{\gamma}{\lambda^2}\, c^2 + D e^{\lambda c} + E e^{-\lambda c} \\ 0 = \frac{\beta}{\lambda^2} - 2\,\frac{\gamma}{\lambda^2}\, c + \lambda\left(D e^{\lambda c} - E e^{-\lambda c}\right) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Diese vier Gleichungen bestimmen die Integrationsconstanten D und E und die Werthe von M und f. Aus der zweiten und vierten dieser Gleichungen folgt zunächst:

$$\left.\begin{array}{l} D = \dfrac{\frac{\beta}{\lambda^3}\left(e^{-\lambda c} - 1\right) + \frac{2\gamma c}{\lambda^3}}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}} \\ E = \dfrac{\frac{\beta}{\lambda^3}\left(e^{+\lambda c} - 1\right) + \frac{2\gamma c}{\lambda^3}}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Aus der ersten und dritten der Gleichungen (6) folgt durch Elimination von $\frac{2\gamma + \alpha\lambda^2}{\lambda^4}$ (worin das unbekannte Moment M enthalten ist):

$$f = \frac{\beta}{\lambda^2} c - \frac{\gamma}{\lambda^2} c^2 + D\left(e^{\lambda c} - 1\right) + E\left(e^{-\lambda c} - 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Daher, wenn man für D und E die Werthe aus (7) einführt:

$$\left.\begin{aligned} f = \frac{\beta}{\lambda^2} c - \frac{\gamma}{\lambda^2} c^2 + \left[\frac{\beta}{\lambda^3}\left(e^{-\lambda c} - 1\right) + \frac{2\gamma c}{\lambda^3}\right] \frac{e^{\lambda c} - 1}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}} \\ + \left[\frac{\beta}{\lambda^3}\left(e^{\lambda c} - 1\right) + \frac{2\gamma c}{\lambda^3}\right] \frac{e^{-\lambda c} - 1}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

oder nach einigen Zusammenziehungen:

$$f = \frac{\beta - \gamma c}{\lambda^2}\left[c + \frac{2}{\lambda} \frac{2 - e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Nun ist aber in allen Anwendungen λc eine sehr kleine Grösse, man kann daher setzen:

$$\left.\begin{aligned} e^{\lambda c} &= 1 + \lambda c + \frac{\lambda^2 c^2}{1 \cdot 2} + \frac{\lambda^3 c^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\lambda^4 c^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ e^{-\lambda c} &= 1 - \lambda c + \frac{\lambda^2 c^2}{1 \cdot 2} - \frac{\lambda^3 c^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\lambda^4 c^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Führt man diese Werthe in den obigen Ausdruck für f ein, so findet man:

$$f = \frac{p\, b\, c^4 \lambda^2}{24\, S}\left(\frac{1}{1 + \frac{\lambda^2 c^2}{6}}\right)$$

oder weil $\left(1 + \frac{\lambda^2 c^2}{6}\right)^{-1}$ annähernd gleich $1 - \frac{\lambda^2 c^2}{6}$ ist

$$f = \frac{p\, b\, c^4 \lambda^2}{24\, S}\left(1 - \frac{\lambda^2 c^2}{6}\right)$$

oder endlich, wenn man für λ^2 seinen Werth setzt:

$$f = \frac{p\, c^4}{2\, \varepsilon\, \delta^3}\left(1 - \frac{2\, S\, c^2}{b\, \varepsilon\, \delta^3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Hiermit ist nun die Einbiegung des Stabes in seiner Mitte bestimmt.

Es liegt in der Natur der Sache, dass der Krümmungshalbmesser entweder bei A oder bei D den kleinsten Werth hat. Nennen wir ϱ_0 ϱ_c die Krümmungshalbmesser, die

den Punkten A und D entsprechen. Durch Differenziation der Gleichung (5) findet man:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho} = -\frac{2\gamma}{\lambda^2} + \lambda^2\left(D e^{\lambda x} + E e^{-\lambda x}\right)$$

es ist daher:

$$\frac{1}{\varrho_0} = -\frac{2 x}{\lambda^2} + \lambda^2 (D + E)$$

$$\frac{1}{\varrho_c} = -\frac{2\gamma}{\lambda^2} + \lambda^2\left(D e^{\lambda c} + E e^{-\lambda c}\right)$$

Setzt man für D und E die Werthe (7) und berücksichtiget, dass $2\gamma c = \beta$ ist, so findet man

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_0} &= -\frac{2\gamma}{\lambda^2} + \frac{\beta}{\lambda} \frac{e^{\lambda c} + e^{-\lambda c}}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}} \\ \frac{1}{\varrho_c} &= -\frac{2\gamma}{\lambda^2} + \frac{\beta}{\lambda} \frac{2}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Allein es ist $e^{\lambda c} + e^{-\lambda c} > 2$ daher wird: $\frac{1}{\varrho_0} > \frac{1}{\varrho_c}$ oder $\varrho_0 > \varrho_c$. Die stärkste Krümmung findet also bei A statt.

Setzt man in den Ausdruck von $\frac{1}{\varrho_0}$ für $e^{\lambda c}$ $e^{-\lambda c}$ die ersten 5 Glieder der Reihen und berücksichtiget, dass $\beta = 2\gamma c$ ist, so findet man:

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{2}{3} \gamma c^2 \frac{1 + \frac{1}{8} \lambda^2 c^2}{1 + \frac{1}{6} \lambda^2 c^2}$$

oder auch weil $\left(1 + \frac{1}{6} \lambda^2 c^2\right)^{-1}$ annähernd gleich $1 - \frac{1}{6} \lambda^2 c^2$ ist:

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{2}{3} \gamma c^2 \left(1 - \frac{1}{24} \lambda^2 c^2\right)$$

und wenn man für γ und λ^2 ihre Werthe setzt:

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{4\, p\, c^2}{\varepsilon\, \delta^3}\left(1 - \frac{S\, c^2}{2\, b\, \varepsilon\, \delta^3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Nennt man $\mathfrak{Z}_1$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung, welche in der obersten Faser des Querschnittes bei A eintreten würde, wenn der Stab nur gebogen und nicht gedehnt würde, $\mathfrak{J}$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung, die an der gleichen Stelle in dem gebogenen und gedehnten Stab eintritt, so ist:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 + \frac{S}{b\,\delta} \quad , \quad \frac{b\,\varepsilon\,\delta^3}{12}\frac{1}{\varrho_0} = \frac{\mathfrak{J}_1}{6}\,b\,\delta^2$$

man findet daher:

$$\mathfrak{J} = \frac{S}{b\,\delta} + 2\,p\,\frac{c^2}{\delta^2}\left(1 - \frac{S\,c^2}{2\,b\,\varepsilon\,\delta^3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Hiermit ist also auch die grösste in dem Stab vorkommende Spannungsintensität berechnet.

Die Hauptresultate dieser Untersuchung sind also:

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{p\,c^4}{2\,\varepsilon\,\delta^3}\left(1 - \frac{2\,S\,c^2}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\right) \\ \mathfrak{J} &= \frac{2\,p\,c^2}{\delta^2}\left(1 - \frac{S\,c^2}{2\,b\,\varepsilon\,\delta^3}\right) + \frac{S}{b\,\delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Gleichgewicht eines Stabes, der auf mehreren gleich weit von einander entfernten Stützen aufliegt, nach normaler Richtung gepreßt wird und auch einer Zusammendrückung ausgesetzt ist.

Bezeichnen wir die zusammendrückende Kraft mit S und behalten alle in der vorhergehenden Untersuchung gewählten Bezeichnungen, so erhalten wir die Differenzialgleichung, welche im vorliegenden Fall den Gleichgewichtszustand des Stabes charakterisirt, wenn wir in der Gleichung (1) (Seite 246) S negativ setzen. Wir haben daher:

$$\frac{b\,\varepsilon\,\delta^3}{12}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\,b\,p\,(c-x)^2 + S\,(f-y) - M \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\left(\frac{1}{2}\,b\,p\,c^2 + S\,f - M\right) &= \alpha \\ \frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\,b\,p\,c \;\ldots\ldots &= \beta \\ \frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\,\frac{1}{2}\,p\,b \;\ldots\ldots &= \gamma \\ \frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\,S \;\ldots\ldots &= \lambda^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

so erhält man:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha - \beta\,x + \gamma\,x^2 - \lambda^2\,y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$y = -\frac{2\gamma - \alpha\lambda^2}{\lambda^4} - \frac{\beta}{\lambda^2}\,x + \frac{\gamma}{\lambda^2}\,x^2 + D\sin.\lambda x + E\cos.\lambda x \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Das Differenziale dieser Gleichung ist:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\beta}{\lambda^2} + \frac{2\gamma}{\lambda^2}\,x + \lambda\,(D\cos.\lambda x - E\sin.\lambda x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Für $x=0$ ist $y=0$ und $\frac{dy}{dx}=0$. Für $x=c$ ist $y=f$ und $\frac{dy}{dx}=0$. Daher hat man folgende vier Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\frac{2\gamma - \alpha\lambda^2}{\lambda^4} + E \\ 0 &= -\frac{\beta}{\lambda^2} + \lambda D \\ f &= -\frac{2\gamma - \alpha\lambda^2}{\lambda^4} - \frac{\beta c}{\lambda^2} + \frac{\gamma c^2}{\lambda^2} + D\sin.\lambda c + E\cos.\lambda c \\ 0 &= -\frac{\beta}{\lambda^2} + \frac{2\gamma c}{\lambda^2} + \lambda\,(D\cos.\lambda c - E\sin.\lambda c) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Aus der zweiten und vierten dieser Gleichungen findet man mit Berücksichtigung, dass $2\gamma c = \beta$ ist.

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{\beta}{\lambda^3} \\ E &= \frac{\beta\cos.\lambda c}{\lambda^3\sin.\lambda c} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Vermittelst dieser Werthe von D und E und mit Berücksichtigung der ersten der Gleichungen (6) wird die dritte dieser Gleichungen:

$$f = \frac{\beta}{\lambda^3}\,\frac{1-\cos.\lambda c}{\sin.\lambda c} - \frac{c\,\beta}{2\,\lambda^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Da auch hier λc eine kleine Grösse ist, so können wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} \sin.\lambda c &= \lambda c - \frac{\lambda^3 c^3}{6} \\ \cos.\lambda c &= 1 - \frac{\lambda^2 c^2}{2} + \frac{\lambda^4 c^4}{24} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

und dann findet man nach einigen Reduktionen:

$$f = \frac{\beta c^3}{24}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{6}\lambda^2 c^2}$$

oder weil annähernd $\left(1 - \frac{1}{6}\lambda^2 c^2\right)^{-1}$ gleich $\left(1 + \frac{1}{6}\lambda^2 c^2\right)$ $\beta = \frac{12\,b\,p\,c}{b\,\varepsilon\,\delta^3}$ $\lambda^2 = \frac{12\,S}{q\,\varepsilon\,\delta^3}$ ist.

$$f = \frac{p c^4}{2 \varepsilon \delta^3}\left(1 + \frac{2 S c^2}{\varepsilon b \delta^3}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Die Annäherungswerthe von f unterscheiden sich, wie man sieht, im vorliegenden und im vorhergehenden Falle nur durch das Zeichen des zweiten Gliedes in dem in der Klammer enthaltenen Ausdruck.

Differenzirt man die Gleichung (5), so findet man:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho} = \frac{2\gamma}{\lambda^2} - \lambda^2 (D \sin. \lambda x + E \cos. \lambda x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Nennt man ϱ_0 und ϱ_c die Krümmungshalbmesser, die den Punkten A und D der krummen Linie entsprechen, so hat man vermöge (11):

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{2\gamma}{\lambda^2} - \lambda^2 E$$

$$\frac{1}{\varrho_c} = \frac{2\gamma}{\lambda^2} - \lambda^2 (D \sin. \lambda c + E \cos. \lambda c)$$

oder mit Berücksichtigung der Werthe von D und E, welche die Gleichungen (7) darbieten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_0} &= \frac{2\gamma}{\lambda^2} - \frac{\beta \cos. \lambda c}{\lambda \sin. \lambda c} \\ \frac{1}{\varrho_c} &= \frac{2\gamma}{\lambda^2} - \frac{\beta}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sin \lambda c} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Es ist demnach, wie man aus diesen Ausdrücken ersieht, $\frac{1}{\varrho_0} > \frac{1}{\varrho_c}$ oder $\varrho_0 < \varrho_c$. Die Krümmung ist also auch in diesem Falle im Punkte A am stärksten. Setzt man in den ersten der Ausdrücke (12) für $\sin. \lambda c$ und $\cos. \lambda c$ die Annäherungswerthe (9), so findet man, mit Berücksichtigung, dass $2 \gamma c = \beta$ ist.

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{2}{3} \gamma c^2 \frac{1 - \frac{1}{8} \lambda^2 c^2}{1 - \frac{1}{6} \lambda^2 c^2}$$

oder weil annähernd $\left(1 - \frac{1}{6} \lambda^2 c^2\right)^{-1}$ gleich $1 + \frac{1}{6} \lambda^2 c^2$, ferner $\gamma = \frac{6 p}{\varepsilon \delta^3}$ $\lambda^2 = \frac{12 S}{b \varepsilon \delta^3}$ ist:

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{4 p c^2}{\varepsilon \delta^3}\left(1 + \frac{c^2 S}{2 b \varepsilon \delta^3}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Nennt man $\mathfrak{J}$ die Intensität der Spannung an der obersten Stelle des Querschnittes bei A, so ist in diesem Falle $\mathfrak{J}_1$ die Spannung, welche daselbst stattfände, wenn der Stab nur gebogen und nicht auch zusammengedrückt wäre, es ist also:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 - \frac{S}{b \delta}, \qquad \frac{b \varepsilon \delta^3}{12} \frac{1}{\varrho_0} = \frac{\mathfrak{J}_1}{6} b \delta^2$$

Daher wird:

$$\mathfrak{J} = \frac{\varepsilon \delta}{2} \frac{1}{\varrho_0} - \frac{S}{b \delta}$$

oder wenn man für $\frac{1}{\varrho_0}$ seinen Werth aus (13) setzt:

$$\mathfrak{J} = \frac{2 p c^2}{\delta^2}\left(1 + \frac{c^2 S}{2 b \varepsilon \delta^3}\right) - \frac{S}{b \delta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Die Hauptresultate dieser Untersuchung sind demnach:

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{p c^4}{2 \varepsilon \delta^3}\left(1 + \frac{2 S c^2}{b \varepsilon \delta^3}\right) \\ \mathfrak{J} &= \frac{2 p c^2}{\delta^2}\left(1 + \frac{S c^2}{2 b \varepsilon \delta^3}\right) - \frac{S}{b \delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Stärke der Wand- und Deckbolzen.

Man kann annehmen, dass ein Bolzen der Wand und Decke einen Zug auszuhalten hat, der gleich ist der Differenz der Pressungen, welche gegen die beiden Flächen eines Bolzenfeldes ausgeübt werden. Durch diese Annahme werden jedoch die Bolzen der Decke etwas zu stark bestimmt, weil diese Bolzen nicht dem ganzen Druck gegen die Decke, sondern nur demjenigen Theil dieses Druckes, der an den Barren zieht, ausgesetzt sind.

Nennt man Ω die Fläche in Quadratcentimetern eines Bolzenfeldes der Wand oder der Decke, n die Anzahl der Atmosphären, welche der Spannung des Dampfes im Kessel entspricht, 1·03 den Druck der Atmosphäre in Kilogrammen auf 1 Quadratcentimeter, Δ den äusseren Durchmesser eines Bolzens, $\mathfrak{A}$ die Spannung in einem Bolzen auf einen Quadratcentimeter bezogen, so ist:

$$\Delta^2 \frac{\pi}{4} \mathfrak{A} = \Omega \, 1{\cdot}03 \, (n - 1)$$

demnach

$$\Delta = \sqrt{\frac{4{\cdot}12}{3{\cdot}14} \frac{(n - 1) \Omega}{\mathfrak{A}}}$$

Setzen wir $\mathfrak{A} = 300$, so liefert diese Formel mit den Thatsachen übereinstimmende Dimensionen. Diese Bolzen werden bekanntlich aus Kupfer gemacht, die absolute Festigkeit desselben ist 2500 Kilogramm per 1 Quadratcentimeter. Die Bolzen sind also, wenn man $\mathfrak{A} = 300$ nimmt, ungefähr auf $\frac{1}{8}$ ihrer absoluten Festigkeit in Anspruch genommen.

Für $\mathfrak{A} = 300$ erhält man:

$$\Delta = 0{\cdot}07 \sqrt{(n - 1) \Omega} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Die halbkugelförmigen Köpfe dieser Bolzen sollen in der Feuerbüchse verhältnissmässig gross gemacht werden, weil sie durch die Wirkung des Feuers sehr schnell verbrennen. Es ist angemessen, den Durchmesser eines solchen Bolzenkopfes gleich 2Δ zu nehmen.

Decke der Feuerbüchse.

Die Decke der Feuerbüchse ist weder einer Ausdehnung, noch einer Zusammendrückung, sondern nur allein einer Einbiegung in den Bolzenfeldern ausgesetzt. Wir nehmen an, dass diese Felder quadratisch seien, und setzen:

δ die Dicke des Deckbleches
e die Entfernung zweier Bolzen in eine Bolzenreihe } in Centimetern;
n die Anzahl der Atmosphären, welche der Spannung des Dampfes im Kessel entspricht;
$1{\cdot}03$ der Druck einer Atmosphäre auf 1 Quadratcentimeter;
$\mathfrak{J}$ die grösste Spannungsintensität, welche in der Decke eintreten darf.

Da im vorliegenden Fall s gleich Null ist, so gibt sowohl die zweite der Gleichungen (16) (Seite 250), als auch die zweite der Gleichungen (15) (Seite 253), wenn man in dieselbe $c = \frac{e}{2}$ $p = 1{\cdot}03\,(n-1)$ $s = 0$ setzt:

$$\mathfrak{J} = \frac{1{\cdot}03\,(n-1)}{2}\left(\frac{e}{\delta}\right)^2$$

und hieraus folgt:

$$e = \delta\sqrt{\frac{2\,\mathfrak{J}}{1{\cdot}03\,(n-1)}}$$

Auch hier muss man, um mit der Wirklichkeit übereinstimmende Dimensionen zu erhalten, $\mathfrak{J} = 300$ setzen, dann wird:

$$e = 24\frac{\delta}{\sqrt{n-1}} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Gewöhnlich beträgt die Blechdicke der Decke 1·2 Centimeter, die Spannung des Dampfes 6 Atmosphären. Für $\delta = 1{\cdot}2$, $n = 6$ gibt diese Formel $e = 12{\cdot}8$ Centimeter.

Wände des Feuerkastens.

Die Wände des Feuerkastens sind nach horizontaler Richtung weder gedehnt noch zusammengedrückt, nach vertikaler Richtung sind sie dagegen zusammengestaucht.

Nennt man:

e die Entfernung zweier Bolzen in einer Horiziontalreihe,
e_1 „ „ „ „ „ Vertikalreihe,
δ die Blechdicke der Umfangswände der Feuerbüchse,
B die Breite, L die Länge des Feuerkastens,
} Centimeter;
n die Anzahl der Atmosphären, welche der Spannung des Dampfes im Kessel entspricht,

so hat man zunächst, weil der Zustand der Wände nach horizontaler Richtung mit dem Zustand der Decke übereinstimmt

$$e = 24\frac{\delta}{\sqrt{n-1}} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Der Druck des Dampfes gegen die Deckfläche ist $1{\cdot}03\,(n-1)\,B\,L$. Der Druck auf einen Quadratcentimeter der vertikalen Wände ist daher $\frac{1{\cdot}03\,(n-1)\,B\,L}{2\,(B+L)\,\delta}$. Da in den frühern Rechnungen s auf den Querschnitt $b\,\delta$ bezogen wurde, so müssen wir setzen:

$$s = \frac{1{\cdot}03\,(n-1)\,B\,L}{2\,(B+L)\,\delta}\,b\,\delta = \frac{1{\cdot}03\,(n-1)\,B\,L\,b}{2\,(B+L)}$$

Nebst diesem Werth von s haben wir, um e_1 zu bestimmen, in die zweite der Formeln (15) (Seite 253) zu setzen $p = 1{\cdot}03\,(n-1)$ $c = \frac{e_1}{2}$ und dann wird:

$$\mathfrak{J} = \frac{1{\cdot}03}{2}\,(n-1)\,\frac{e_1^2}{\delta^2}\left(1 + \frac{1{\cdot}03}{16}\,\frac{(n-1)\,e_1^2\,B\,L}{\varepsilon\,\delta^3\,(B+L)}\right) - \frac{1{\cdot}03}{2}\,\frac{(n-1)\,B\,L}{(B+L)\,\delta}$$

Allein das zweite Glied des Ausdruckes in der Klammer ist wegen des grossen Werthes von ε eine gegen die Einheit sehr kleine Grösse, kann also vernachlässigt werden, und dann wird:

$$\mathfrak{J} = \frac{1{\cdot}03\,(n-1)}{2}\,\frac{e_1^2}{\delta^2} - \frac{1{\cdot}03}{2}\,\frac{(n-1)\,B\,L}{(B+L)\,\delta}$$

Hieraus folgt:

$$e_1 = \sqrt{\frac{2\,\mathfrak{J}\,\delta^2}{1{\cdot}03\,(n-1)} + \frac{B\,L\,\delta}{B+L}}$$

Für $\mathfrak{J}$ ist auch hier 300 in Rechnung zu bringen, und dann wird:

$$e_1 = \sqrt{582\,\frac{\delta^2}{n-1} + \frac{B\,L\,\delta}{B+L}} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Wände des Wasserkastens.

Diese sind nach horizontaler Richtung schwach gedehnt, nach vertikaler Richtung stark gedehnt.

Nennen wir:

e die Entfernung zweier Bolzen in eine Horizontalreihe;
e_1 „ „ „ „ „ Vertikalreihe;
δ die Blechdicke der Umfangswand des Wasserkastens;
B_1 die Breite, L_1 die Länge des Wasserkastens;
n die Anzahl der Atmosphären, welche der Spannung des Dampfes entspricht.
$\mathfrak{J}$ die Intensität der Spannung, die in der Wand eintreten darf.

Zur Bestimmung von e ist in die zweite der Gleichungen (16) (Seite 250) zu setzen

$$s = \frac{1}{2}\,(L_1 - L)\,b\,1{\cdot}03\,(n-1) \qquad c = \frac{e}{2} \qquad p = 1{\cdot}03\,(n-1)$$

man darf aber auch hier das zweite Glied des Ausdruckes in der Klammer, wegen seiner Kleinheit gegen Eins, vernachlässigen, und dann findet man:

$$e = \sqrt{\frac{2\,\mathfrak{J}\,\delta^2}{1{\cdot}03\,(n-1)} - (L_1 - L)\,\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Um e_1 zu bestimmen, ist in die zweite der Gleichungen (16) (Seite 250) zu setzen: $S = \frac{1{\cdot}03\,(n-1)\,B_1\,L_1\,b}{2\,(B_1 + L_1)}$ $p = 1{\cdot}03\,(n-1)$ $c = \frac{e_1}{2}$ und ist das zweite Glied des Ausdruckes in der Klammer zu vernachlässigen. Man findet dann:

$$e_1 = \sqrt{\frac{2\,\mathfrak{J}\,\delta^2}{1{\cdot}03\,(n-1)} - \frac{B_1\,L_1\,\delta}{B_1 + L_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Auch in diesen Formeln für e und e_1 darf man $\mathfrak{J} = 300$ setzen.

Stärke der Deckbarren.

Eine ganz strenge Bestimmung der Deckbarren würde zu sehr weitläufigen difficilen Rechnungen führen. Die Sache wird ziemlich einfach und hinreichend genau, wenn wir die Decke so behandeln, wie wenn sie ihrer ganzen Länge nach mit den Barren stetig verbunden wäre, in welchem Falle die Krümmung der Barren mit jener der Decke sehr nahe übereinstimmt.

Nehmen wir den Mittelpunkt o (Fig. 81) der Decke als Anfangspunkt der horizontalen Abscissen und setzen:

$\left.\begin{matrix} o\,p = x \\ m\,p = y \end{matrix}\right\}$ die Coordinaten eines Punktes m der Axenlinien des Bleches;
ϱ die Krümmungshalbmesser des Bleches und der Barren in den durch m gehenden Querschnitt;
δ die Dicke des Bleches; (Centimeter)
L die Länge $A\,B$ einer Barre; (Centimeter)
B die Breite der Decke; (Centimeter)
h die Höhe } einer Barre; (Centimeter)
b die Breite } einer Barre; (Centimeter)
i die Anzahl der Barren, durch welche die Decke verstärkt ist;
ε den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem Decke und Barren bestehen. Wir wollen annehmen, dass beide von Schmiedeeisen sind;
p den Druck auf einen Quadratcentimeter der Decke;
$\mathfrak{J}$ die grösste Spannung, welche in den Barren vorkommen darf;
n die Anzahl der Atmosphären, welche der Spannung des Dampfes entspricht, also $p = 1{\cdot}03\,(n-1)$.

Wir behandeln die Sache so, wie wenn die Decke nur auf der Röhren- und der Rückwand, nicht aber auf den Seitenwänden des Feuerkastens aufläge; dann ist $\frac{p\,B\,L}{2}$ der Druck auf eine der Unterstützungen A und B. Ferner $\frac{p\,B}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 - \frac{B\,L\,p}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right)$ die Summe der Momente der Kräfte, welche das Blech und die Barre in dem Querschnitt bei m abzubrechen streben. Es ist aber ferner $\frac{B\,\varepsilon\,\delta^3}{12} \cdot \frac{1}{\varrho}$ die Summe der statischen Momente aller Spannungen und Pressungen im Querschnitt des Bleches bei m und $\frac{i\,\varepsilon\,b\,h^3}{12}\,\frac{1}{\varrho}$ die Summe der Momente in Bezug auf sämmtliche Barren, man hat daher:

$$\frac{1}{12}\,(B\,\varepsilon\,\delta^3 + i\,b\,\varepsilon\,h^3)\,\frac{1}{\varrho} + \frac{p\,B}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 - \frac{B\,L\,p}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

oder weil $\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ gesetzt werden darf

$$\frac{1}{12}\,(B\,\varepsilon\,\delta^3 + i\,b\,\varepsilon\,h^3)\,\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{p\,B}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 - \frac{B\,L\,p}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Durch zweimalige Integration und mit Berücksichtigung dass für $x = 0$ $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, findet man:

$$\frac{1}{12}\,(B\,\varepsilon\,\delta^3 + i\,b\,\varepsilon\,h^3)\,y + \frac{p\,B}{2}\left(\frac{L^2}{8}\,x^2 - \frac{L}{6}\,x^3 + \frac{x^4}{12}\right) - \frac{B\,L\,p}{2}\left(\frac{L}{4}\,x^2 - \frac{x^3}{6}\right) = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

Nennt man f die Senkung, die in der Mitte der Barren eintritt, so ist für $x = \frac{L}{2}$ $y = f$ und dann findet man:

$$f = \frac{5}{32}\,\frac{B\,p\,L^4}{B\,\varepsilon\,\delta^3 + i\,b\,\varepsilon\,h^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Nennt man ϱ_0 den Krümmungshalbmesser bei o, so findet man denselben aus (1), wenn man $x = 0$ und $\varrho = \varrho_0$ setzt. Es ergibt sich:

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{3}{2}\,\frac{p\,B\,L^2}{B\,\varepsilon\,\delta^3 + i\,b\,\varepsilon\,h^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Nun ist aber die Summe der Momente aller Spannungen und Pressungen in den Querschnitten der Barren bei o sowohl gleich $\frac{i\,b\,\varepsilon\,h^3}{12}\,\frac{1}{\varrho_0}$, als auch gleich $\frac{i\,\mathfrak{J}\,b\,h^2}{6}$ wobei $\mathfrak{J}$ die Intensität der Spannung im untersten Punkt des Barren bedeutet. Man hat also;

$$\frac{i\,b\,\varepsilon\,h^3}{12}\,\frac{1}{\varrho_0} = \frac{i\,\mathfrak{J}\,b\,h^2}{6}$$

oder

$$\frac{\varepsilon\,h}{2\,\varrho_0} = \mathfrak{J}$$

Setzt man für ϱ_0 seinen Werth aus (5), so erhält man eine Gleichung, aus welcher folgt:

$$\frac{i\,b}{B} = \frac{3}{4}\,\frac{p}{\mathfrak{J}}\left(\frac{L}{h}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{h}\right)^2$$

oder weil $p = 1{\cdot}03\,(n-1)$. ist:

$$\frac{i\,b}{B} = \frac{0{\cdot}77\,(n-1)}{\mathfrak{J}}\left(\frac{L}{h}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{h}\right)^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Diese Formel bestimmt das Verhältniss zwischen der Summe der Dicken sämmtlicher Barren und der Breite des Feuerkastens, wenn $\mathfrak{J}$ gegeben und $\frac{L}{h}$ $\frac{\delta}{h}$ passend angenommen wird. Die Werthe, welche sie für $\frac{i\,b}{B}$ gibt, stimmen mit den Verhältnissen, die man an den Lokomotiven findet, nur dann überein, wenn man für $\mathfrak{J}$ den ganz ungewöhnlich grossen Werth 800 in Rechnung bringt. Die Deckbarren werden also noch immer sehr schwach, oder wenigstens beträchtlich schwächer gemacht, als alle anderen Theile des Kesselbaues. Ich stelle als Regel auf, dass man nehmen soll:

$$\frac{L}{h} = 7 \qquad \frac{h}{\delta} = 12 \qquad \mathfrak{J} = 600$$

und dann wird, wenn man das nicht beachtenswerthe Glied $\left(\frac{\delta}{h}\right)^3$ vernachlässiget:

$$\frac{i\,b}{B} = 0{\cdot}063\,(n-1)$$

Gleichgewicht eines krummen elastischen Stabes.

Einzelne Theile der Wände eines Kessels erhalten bisweilen eine Form, die von der einfach cylindrischen abweicht. Es entsteht also die Frage, welche Formänderungen in solchen Kesselwänden durch die innern Pressungen des Dampfes eintreten, welche Spannungszustände dadurch hervorgerufen werden und durch welche Mittel derlei Formveränderungen entweder aufgehoben, oder innerhalb gewisser Grenzen erhalten werden können. Diese Fragen veranlassen uns, die Formänderungen aufzusuchen, die in elastischen Stäben eintreten, die im natürlichen Zustande gekrümmt sind, wenn auf dieselben deformirende Kräfte einwirken.

Es sei für den natürlichen Zustand $A\,B$ Fig. 82 die Axenlinie eines krummen Stabes, d. h. die Linie, in welcher die Schwerpunkte aller Querschnitte des Stabes liegen. Derselbe werde bei A eingeklemmt und so festgehalten, dass die Richtung $A\,x$ des ersten Linienelementes keine Aenderung erleiden kann. Nachdem gewisse, auf den Stab einwirkende äussere Kräfte mit den innern Elastizitätskräften ins Gleichgewicht gekommen sind, sei $A\,B_1$ die Axenlinie des Stabes. Wir nehmen an, dass gegen jede Flächeneinheit der concaven Fläche von $A\,B_1$ nach normaler Richtung ein Druck p, und dass am Ende B_1 zwei Kräfte X und Y nebst einen Drehungsmoment M_1 wirken. Die Richtung von X sei parallel, jene von Y senkrecht zu $A\,x$. Um von dem Moment M_1 eine Vorstellung zu erhalten, denke man sich an den Stab bei B_1 nach normaler Richtung einen zweiten unbiegsamen Stab $a\,b$ befestiget, lasse an demselben in den Punkten a und b, die von B_1 um eine Längeneinheit entfernt sind, senkrecht auf $a\,b$ und nach entgegengesetzten Richtungen Kräfte wirken, von denen jede gleich $\frac{1}{2}M_1$ ist, so geben diese in Bezug auf eine durch B_1 gehende auf die Ebene der Figur senkrechte Axe ein Moment M_1. Man überzeugt sich

leicht, dass das Moment dieser in a und b wirkenden Kräfte auch in Bezug auf jede Axe, die auf der Ebene der Figur senkrecht steht, gleich M_1 ist.

Nennen wir nun:

$A\,p = x$, $m\,p = y$ die Coordinaten eines im natürlichen Zustand des Stabes im Punkte m seiner Axe befindlichen Körperatoms;

$A\,p_1 = x_1$, $m\,p_1 = y_1$ die Coordinaten des gleichen Atoms im gebogenen Zustand des Stabes;

ϱ ϱ_1 die Krümmungshalbmesser, welche den Punkten m und m_1 der Axenlinien $A\,B$ und $A\,B_1$ entsprechen;

$a\,b$, $a_1\,b_1$ die Coordinaten der Punkte B und B_1;

$m\,n = ds$ die Länge eines Axenelementes im natürlichen,

$m_1\,n_1 = ds_1$ die Länge des gleichen Elementes im gebogenen Zustand des Stabes;

β die Breite, δ die Dicke des Stabes;

p die Pressung gegen jede Flächeneinheit der concaven Fläche des Stabes;

ε den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht;

S die auf eine Flächeneinheit bezogene Spannung im Punkt m_1 der Axe des gebogenen Stabes.

Alle Längen sollen in Centimetern, die Flächen in Quadratcentimetern, die Kräfte in Kilogrammen ausgedrückt werden.

Wenn die Rechnung für eine Coordinate für eine Kraft oder für einen Kraftmoment einen negativen Werth liefert, so ist diess ein Zeichen, dass im Gleichgewichtszustand die Richtung dieser Coordinate dieser Kraft oder dieses Momentes derjenigen entgegengesetzt ist, die in der Figur angenommen, und zur Herleitung der Gleichgewichtsgleichungen vorausgesetzt wird.

Wenn wir die Momente der Kräfte, welche das Stück $m_1\,B_1$ des Stabes um m_1 zu drehen suchen, positiv oder negativ nehmen, je nachdem sie den Stab seiner natürlichen Lage zu nähern oder von derselben zu entfernen streben, so sind diese Momente

1) für die Normalpressungen gegen $m_1\,B$

$$+\frac{\beta\,p}{2}\left[(a_1 - x_1)^2 + (b_1 - y_1)^2\right]$$

2) für die Kräfte X und Y

$$+X\,(b_1 - y_1) - Y\,(a_1 - x_1)$$

3) für die in a und b wirkenden Kräfte

$$-M_1$$

4) für die in dem Querschnitt bei m_1 vorkommenden Spannungen und Pressungen

$$\frac{\beta\,\varepsilon\,\delta^3}{12}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho}\right)$$

Die Momentengleichung ist demnach