rechter Hand des Gleichheitszeichens von (3) hat demnach für beide Kessel den gleichen Werth, es muss dies also auch hinsichtlich $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}$ der Fall sein.

Somit ist nun der Anfangs ausgesprochene Satz erwiesen. Man kann denselben noch allgemeiner aussprechen, indem man sagt: Alle Kessel, wie auch ihre Anordnungen beschaffen sein mögen, sind für die Bildung und Verwendung des Dampfes gleich vortheilhaft: 1) wenn die Flächenverhältnisse $\frac{R}{F}$ $\frac{\omega}{F}$ $\frac{\Omega}{F}$ $\frac{\Omega_1}{F}$ übereinstimmen; 2) wenn die Dicke λ der Brennstoffschichte den gleichen Werth hat; 3) wenn sie alle gleich stark geheizt werden, d. h. wenn für alle Kessel $\frac{B}{F}$ einerlei Werth hat.

Dies ist aber die Regel, die man seit langer Zeit gleichsam instinktiv in der Praxis befolgt hat, und die darauf hinausläuft, dass man um gute Kesselconstruktionen zu erhalten, nichts zu thun hat, als bereits bestehende Construktionen, die sich bewährt haben, in einem grösseren oder kleineren Maasstab nachzubilden. Man braucht also für die gewöhnliche Praxis zur Bestimmung der Abmessungen eines Kessels kein complizirtes Formelwerk, sondern es genügen aus der Erfahrung entnommene Verhältnisse für $\frac{R}{F}$ $\frac{\omega}{F}$ $\frac{\Omega}{F}$ $\frac{\Omega_1}{F}$.

Allein es gibt Fälle, in denen man durch Nachahmung von Bestehendem nicht gut zum Ziele kommt, und dies gilt insbesondere auch von den Lokomotivkesseln. Man kann die Kessel für starke und schwache Lokomotive nicht geometrisch ähnlich machen, denn die Kessel für starke Lokomotive würden nach dieser Regel eine unverhältnissmäsige Länge erhalten, man muss starke Kessel verhältnissmäsig kürzer und weiter anordnen; auch ist es überhaupt zweckmässig, die Breite der Feuerbüchse und die horizontalen Durchmesser des Röhrenkessels so gross anzunehmen, als es die Spurweite der Bahn, die Radstellung und die Lage der Rahmen nur immer erlauben und nach diesen Annahmen die übrigen Dimensionen des Kessels zu bestimmen. Zu diesem Behufe können wir uns der Formeln (1) bis (5) bedienen. Es folgt aus denselben, wenn man das Güteverhältniss $\frac{W}{B\,\mathfrak{H}} = \mathfrak{p}$ setzt:

$$B = \frac{S}{\mathfrak{p}\,\mathfrak{H}} \left[(650 - t_0) + (w - t_0)\, i\right] \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

$$L = \left(\frac{L}{B}\right) B \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

$$\frac{1}{\Omega} = \frac{1}{S} \sqrt{\left\{\frac{2\,g\,(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A})\,(\alpha + \beta\,\mathfrak{A})}{1 + i} - \left(\frac{\pi S}{4\,\Omega_1\, m_1}\right)^2\right\}} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

$$F = L\,\frac{s}{k}\ \text{lognat.} \left\{\frac{1 - (w - u_0)\,\frac{s\,L}{B\,\mathfrak{H}}}{1 - \mathfrak{p} - (w - u_0)\,\frac{s\,L}{B\,\mathfrak{H}}}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{L} \sqrt{\left\{\frac{C}{c\,\lambda}\left(\frac{S}{\Omega}\right)^2 - \frac{1}{2\,g\,c\,\gamma^2\,\lambda}\left(\frac{L}{\omega}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + 2\,g\,\mu\,\frac{F}{\omega}\right]\right\}} \quad \ldots \quad (11)$$

Für einen zu construirenden Kessel ist zunächst als gegeben zu betrachten:

$$\mathfrak{H} \quad t_0 \quad w \quad i \quad m_1 \quad s \quad m \quad C \quad c \quad \lambda \quad \gamma \quad g \quad \mu$$

Soll der Kessel im Stande sein, eine bestimmte Quantität Dampf mit verhältnissmässig wenig Brennstoff zu erzeugen, und zwar bei einem schwachen schädlichen Vorderdruck $\mathfrak{A}_1$, so muss man folgende Annahmen machen:

1. Die Dampfmenge s, die in jeder Sekunde gebildet werden soll;
2. das Güteverhältniss $\mathfrak{p} = \frac{W}{B\,\mathfrak{H}}$, d. h. das Verhältniss zwischen der Wärmemenge, die in den Kessel eindringt und der Wärmemenge, die im Brennstoff enthalten ist;
3. die Pressung $\mathfrak{A}_1$, die in den Cylindern vor den Kolben eintreten darf;
4. Das Verhältniss $\frac{L}{B}$ zwischen der Luftmenge, die in den Feuerherd einströmt und der Brennstoffmenge, die verbrannt werden soll;
5. das Verhältniss $\frac{S}{\Omega_1}$ zwischen der Dampfmenge, die in jeder Sekunde gebildet werden soll und dem Querschnitt eines Dampfkanales an den Cylindern.

Nebst diesen Grössen ist es auch zweckmässig, noch die Spurweite, die Radstellung, die Rahmenlage und den Querschnitt des Röhrenkessels anzunehmen, und sich über den Durchmesser der engen Heizröhren zu entscheiden. Hiedurch wird aber ω, d. h. die Summe der Querschnitte aller Heizröhren bestimmt.

Vermittelst dieser Daten erhält man nun:

durch (7) die Brennstoffmenge, die in einer Sekunde auf dem Rost verbrannt werden muss;

durch (8) die Luftmenge, welche per 1" in die Feuerung strömen muss;

durch (9) den Querschnitt der Blasrohrmündung;

durch (10) die totale Heizfläche des Kessels, endlich

durch (11) die Grösse der Rostfläche.

Aus dieser Gleichung (11) ersieht man, dass die Construktionsverhältnisse eines Kessels durch einen grossen Querschnitt desselben vortheilhaft werden. Macht man nämlich diesen Querschnitt gross, so erhalten die Heizröhren eine geringe Länge, und fällt der Werth von ω gross aus; der Rost kann also dann wie aus (11) erhellt, eine kleinere Ausdehnung erhalten.

Für die Construktion von mächtigen Lasten- oder Berglokomotiven ist eine enge Spurweite ein sehr misslicher Umstand. Bei einer grossen Spurweite kann man dem Röhrenkessel eine grosse horizontale Weite geben, und man erhält dann, selbst wenn man ihn cylindrisch rundet, eine geringe Länge. Ist die Spurweite eng, so muss man zu ovalen, oder überhaupt zu nicht einfach cylindrisch gerundeten Formen seine Zuflucht nehmen, was für die Solidität nicht gut ist und die Ausführung in mancher Hinsicht erschwert.

Die Formeln (7) bis (11) geben folgende numerische Werthe.

Setzt man:

$$t_0 = 60^\circ \quad w = 150^\circ \quad i = 0{\cdot}3 \quad \mathfrak{H} = 7000 \quad \frac{L}{B} = 16 \quad s = 0{\cdot}2669 \quad k = \frac{1}{158}$$

so geben die Formeln (7), (8), (10):

für $\mathfrak{p}$ =	0·50	0·55	0·60	0·65	0·70
$\frac{B}{S}$ =	0·176	0·160	0 147	0·135	0·126
$\frac{S}{B}$ =	5·68	6·25	6·80	7·40	7·93
$\frac{L}{S}$ =	2·82	2·58	2·35	2·16	2·02
$\frac{F}{S}$ =	94	99	106	111	123

Nimmt man an, dass die mittlere Spannung des Dampfes in den Cylindern vor den Kolben $1 + \frac{1}{4}$ Atmosphäre betragen dürfe, so ist $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A} = \frac{1}{4}\, 10330 = 2582$ Kilogramm. Setzt man ferner:

$$\frac{S}{\Omega_1} = 80 \qquad m_1 = 0{\cdot}6 \qquad \pi = 3{\cdot}14 \qquad \alpha + \beta\,\mathfrak{A} = 0{\cdot}59 \qquad i = 0{\cdot}3 \qquad g = 9{\cdot}81$$

so gibt die Formel (9) für den Querschnitt des Blasrohres:

$$\Omega = \frac{S}{110} \text{ Quadratmeter}$$

Was die Formel (11) betrifft, so fehlen mir direkte Messungen über die in der Feuerbüchse nnd in der Rauchkammer unter gewissen Umständen herrschenden Spannungen, ich vermuthe jedoch, dass man der Wahrheit nahe kommen wird, wenn man setzt:

$$c = 5 \qquad C = 0{\cdot}002$$

Vermittelst dieser Werthe und wenn man ferner nimmt $\lambda = 0{\cdot}6$ $g = 9{\cdot}81$ $\gamma = 0{\cdot}5$ (Gewicht von 1 Kubikmeter Luft bei 500° Temperatur) $\mu = 0{\cdot}0003302$ $m = 0{\cdot}6$ gibt die Formel (11):

$$\frac{L}{R} = \sqrt{\left[0{\cdot}00066\left(\frac{S}{\Omega}\right)^2 - \left(\frac{L}{\omega}\right)^2\left(0{\cdot}0491 + 0{\cdot}00022\,\frac{F}{\omega}\right)\right]} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Wenn das Güteverhältniss des Kessels 60% beträgt, haben wir gefunden:

$$L = \frac{2{\cdot}35}{106}\,F = \frac{F}{45} \qquad S = \frac{F}{106}$$

Für diese Verhältnisse und wenn man ferner $\frac{S}{\Omega} = 110$ nimmt, folgt aus obiger Formel:

$$\frac{F}{R} = \sqrt{\left[16171 - \left(\frac{F}{\omega}\right)^2\left(0\,0491 + 0{\cdot}00022\,\frac{F}{\omega}\right)\right]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Die numerischen Werthe dieses Ausdruckes sind:

für $\frac{F}{\omega}$ =	150	200	250	300
$\frac{F}{R}$ =	120	111	98	76

Heizung der Lokomotivkessel.

Die Art und Weise, wie die Lokomotivkessel geheizt werden sollen, um eine möglichst ökonomische Verwendung des Brennstoffes zu erzielen, ist durch die Erfahrung noch nicht entschieden. Gewöhnlich wird die Feuerbüchse vor der Abfahrt des Zuges in der Art mit Coaks gefüllt, dass die Oberfläche der Brennstoffmasse eine muldenförmige Fläche bildet, die von den unteren Röhren des Röhrenkessels an gegen den unteren Rand

der Heizthüre concav bogenförmig ansteigt. Die mittlere Dicke dieser Brennstoffmasse (das Volumen derselben dividirt durch den Querschnitt des Feuerkastens) beträgt dann durchschnittlich 0·7 Meter. Diese Brennstoffmenge wird aber während der Fahrt nicht beibehalten, sondern man fährt, ohne nachzufeuern so lange fort, bis die mittlere Dicke der Brennstoffschichte 0·3 bis 0·4 Meter beträgt, und sucht sodann diesen Füllungszustand während der weiteren Fortsetzung der Fahrt zu erhalten. Besondere Versuche zur Ermittlung der vortheilhaftesten oder angemessensten Feuerungsart sind meines Wissens bis jetzt nur auf den österreichischen Staatsbahnen angestellt worden, und werden auch jetzt noch immer fortgesetzt. Die österreichischen Ingenieure glauben durch ihre Versuche zu dem Ergebniss gekommen zu sein, dass für eine vortheilhafte Verwendung des Brennstoffes die Dicke der Coaksschichte nicht mehr als 0·1 Meter, also nur den siebenten Theil von der durchschnittlich üblichen, oder gerade nur so viel betragen soll, als in den mit Steinkohlen gefeuerten Fabrikdampfkesseln. Dieses Ergebniss muss auf unrichtigen Beobachtungen, oder es muss auf einem Fehlschluss beruhen. Es weiss doch Jedermann, dass die Lokomotive beinahe nicht, oder nur schwach, dass dagegen die Fabrikkamine in der Regel sehr stark rauchen; es lehrt also schon der Augenschein, dass in den Lokomotivkesseln die Verbrennung wenigstens eben so vollkommen erfolgt, als in den Fabrikkesseln, obgleich in den Ersteren die Dicke der Brennstoffschichte oftmals siebenmal so gross ist, als in den Letzteren. Schon diese Thatsachen lassen vermuthen, dass es auf die Dicke der Brennstoffschichte allein nicht ankommen kann; bedenkt man aber ferner, dass in den Cupolöfen bei einer Brennstoffschichte von 2 Meter und in den Hochöfen bei einer Brennstoffschichte von 10 Meter Dicke eine äusserst vollkommene Verbrennung ohne Rauchentwicklung stattfindet, so muss man die Ueberzeugung gewinnen, dass gleich vollkommene Verbrennungen bei sehr verschiedenen Dicken der Brennstoffschichte stattfinden können, man wird aber auch bemerken, dass die Lebhaftigkeit der Anfachung zur Dicke der Brennstoffschichte in einem umgekehrten Verhältniss steht. Die Dicke der Coaks- oder Kohlenschichte beträgt: 1) in den mit sehr schwacher Anfachung arbeitenden *Cornwall*'schen Dampfkesseln nur 0·08 Meter; 2) in den gewöhnlichen durch ein Kamin schwach angefachten Feuerungen der Fabrikkessel 0·10 bis 0·12 Meter; 3) in den stark durch die Dampfausströmung angefachten Lokomotivkesseln 0·4 bis 0·7 Meter; 4) in den durch Ventilatoren angefachten Cupolöfen circa 2 Meter; endlich 5) in den durch mächtige Cylindergebläse angefachten Hochöfen 10 bis 15 Meter.

Aus diesen Thatsachen ersieht man, dass eine vollkommene Verbrennung nicht durch die Dicke der Brennstoffschichte, sondern durch das Verhältniss der Dicke der Schichte zur Lebhaftigkeit der Anfachung bedingt ist. Dieses Verhältniss drückt aber auch die Zeit aus, in der die Luft durch die Brennstoffschichte geht, oder es drückt die Zeit aus, während welcher die Luft mit dem gluthenden Brennstoff in Berührung bleibt; d. h. es folgt aus diesen Thatsachen der Wirklichkeit, dass eine vollkommene Verbrennung dann stattfindet, wenn die das Verbrennen unterhaltende Luft eine gewisse Zeit mit dem im verbrennenden Zustand befindlichen Brennstoff in Berührung bleibt.

Nennen wir nun:

R die Rostfläche;
$m\,R$ die Summe der Querschnitte aller Luftspalten zwischen den Roststäben;
F die totale Heizfläche eines Kessels;
$\mathfrak{B}$ das Volumen der auf dem Rost liegenden Brennstoffmenge (Coaks oder Steinkohlen);
$\Delta = \frac{\mathfrak{B}}{R}$ die mittlere Dicke der auf dem Rost liegenden Brennstoffmenge;
B die Brennstoffmenge in Kilogrammen, welche in jeder Sekunde verbrennt;
v die Anfachungsgeschwindigkeit, welche wir nach der Geschwindigkeit messen wollen, mit welcher die Luft die Rostspalten durchströmt;

so sind wir zunächst nach den oben angegebenen Thatsachen der Wirklichkeit berechtigt zu setzen:

$$\Delta = \alpha v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wobei nun α die durch Erfahrung für jede besondere Brennstoffart zu bestimmende Zeit bezeichnet, während welcher die das Verbrennen unterhaltende Luft mit dem im verbrennenden Zustand befindlichen Brennstoff in Berührung bleiben soll.

Es ist ferner:

$$\mathfrak{B} = \Delta R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Bei gleich vollkommener Verbrennung muss die durch die Rostspalten in einer Sekunde einströmende Luftmenge $v\,m\,R$ der Brennstoffmenge B, die in jeder Sekunde verbrennen soll, proportional sein. Wir müssen daher setzen:

$$v\,m\,R = \beta B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

wobei β ein nur allein von der Natur des Brennstoffs abhängiger Coefficient ist.

Aus diesen Gleichungen findet man leicht:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{\alpha\beta}{m} B \\ \Delta &= \frac{\alpha\beta}{m}\frac{B}{R} \\ v &= \frac{\beta}{m}\frac{B}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Die Coeffizienten $\alpha\ \beta\ m$ bestimmen wir für Coaks- oder Steinkohlen-Feuerungen auf folgende Art:

Für Fabrikkessel, die mit Steinkohlen gefeuert werden, ist m gleich $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{4}$. Für Lokomotivkessel, die mit Coaks gefeuert werden, ist dagegen in der Regel m gleich $\frac{1}{2}$.

Die kleinste Luftmenge, welche zum vollständigen Verbrennen von 1 Kilogramm Steinkohlen oder Coaks erforderlich ist, beträgt durchschnittlich 11 Kilogramm. Die wirkliche die Verbrennung unterhaltende Luftmenge darf um die Hälfte grösser, also zu $\frac{3}{2} \cdot 11$ oder noch zu 16 Kilogramm, oder zu $\frac{16}{1{\cdot}3} = 12$ Kubikmeter angenommen werden. Es ist daher für Steinkohlen- oder Coaksfeuerungen $\beta = 12$ zu setzen. Auf 1 Quadratmeter Rostfläche eines Fabrikkessels verbrennen in der Regel bei gut unterhaltener Feuerung stündlich 48 Kilogramm Steinkohlen, und dabei beträgt die Dicke der Kohlenschichte 0·1 Meter. Für eine solche Feuerung ist daher zu setzen:

$$\Delta = 0{\cdot}1 \qquad \frac{B}{R} = \frac{48}{3600} = \frac{1}{76} \qquad m = 0{\cdot}25$$

und dann findet man aus der zweiten der Gleichungen (4):

$$\alpha\beta = m\,\Delta\,\frac{R}{B} = 0{\cdot}25 \times 0{\cdot}1 \times 76 = 1{\cdot}9$$

Es ist aber $\beta = 12$, daher finden wir $\alpha = 0{\cdot}16$.

Vermittelst dieser Werthe von α und β geben die Gleichungen (4):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} &= 1{\cdot}9\,\frac{B}{m} \\ \Delta &= 1{\cdot}9\,\frac{B}{m\,R} \\ v &= 12\,\frac{B}{m\,R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Diese Gleichungen sagen aus: die erste, dass die auf dem Rost liegende Brennstoffmenge der in jeder Sekunde zu verbrennenden Menge proportional sein soll; die zweite und dritte, dass die Dicke der Brennstoffschichte und die Anfachungs-Geschwindigkeit der in 1 Sekunde zu verbrennenden Brennstoffmenge direkt und der Rostfläche verkehrt proportional sein soll.

Bestimmen wir den Coeffizienten α, indem wir von einer Lokomotivkesselheizung ausgehen, so finden wir für α den gleichen Werth. In einem Lokomotivkessel von 80 Quadratmetern Heizfläche verbrennen, wenn die mittlere Dicke der Brennstoffschichte 0·7 Meter beträgt und mit einer engen Blasrohrmündung heftig angefacht wird, auf 1 Quadratmeter Rostfläche in jeder Sekunde durchschnittlich 0·185 Kilogramm Coaks. Setzen wir in den Ausdruck:

$$\alpha\beta = m\,\Delta\,\frac{R}{B}$$

$$m = 0{\cdot}5 \qquad \Delta = 0{\cdot}7 \qquad \frac{B}{R} = 0{\cdot}185$$

so finden wir wie früher $\alpha\beta = 1{\cdot}9$.

Bezeichnen wir durch $\mathfrak{p}$ das Güteverhältniss einer Kesselheizung, so ist nach Gleichung (16), Seite 52:

$$\mathfrak{p} = a\left(1 - e^{-\frac{F\,k}{L\,s}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

wobei zur Abkürzung $1 - (w - u_0)\frac{s\,L}{B\,\mathfrak{H}} = a$ gesetzt wurde.

Aus diesem Ausdruck (6) findet man:

$$B = -\frac{\frac{B}{L}\,\frac{k}{s}}{\text{lognat.}\left(1 - \frac{\mathfrak{p}}{a}\right)}\,F \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Führt man diesen Werth von B in die Gleichungen (5) ein, so erhält man:

$$\mathfrak{B} = -\frac{1{\cdot}9}{m}\,\frac{\frac{B}{L}\,\frac{k}{s}}{\text{lognat.}\left(1 - \frac{\mathfrak{p}}{a}\right)}\,F \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta &= -\frac{1\cdot 9}{m}\,\frac{\frac{B}{L}\,\frac{k}{s}}{\text{lognat.}\left(1-\frac{\mathfrak{p}}{a}\right)}\,\frac{F}{R}\\[2ex] v &= -\frac{12}{m}\,\frac{\frac{B}{L}\,\frac{k}{s}}{\text{lognat.}\left(1-\frac{\mathfrak{p}}{a}\right)}\,\frac{F}{R}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(8)$$

Für eine gut unterhaltene Feuerung darf man setzen:

$$a = 0\cdot 9 \qquad k = \frac{1}{158} \qquad s = 0\cdot 2669 \qquad \frac{B}{L} = \frac{1}{16}$$

und dann findet man:

für $\mathfrak{p}$ =	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8
$\frac{B}{F_1}$ =	0·0038	0·0026	0·0020	0·0014	0·0011	0·0007
$\frac{m\mathfrak{B}}{F}$ =	0·0069	0·0047	0·0038	0·0027	0·0021	0·0013
$\frac{m\Delta R}{F}$ =	0·0069	0·0047	0·0038	0·0027	0·0021	0·0013
$\frac{m v R}{F}$ =	0·0456	0·0312	0·0240	0·0168	0·0132	0·0084

Für Lokomotivkessel ist durchschnittlich $\frac{F}{R} = 90$, $m = 0\cdot 5$, und dann wird:

für $\mathfrak{p}$ =	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	
Δ =	1·24	0·84	0·76	0·49	0·37	0·23	Meter.
v =	8·2	5·6	4·3	3·0	2·4	1·5	„

Für Fabrikkessel ist durchschnittlich $\frac{F}{R} = 15$ $m = 0\cdot 25$, und dann wird:

für $\mathfrak{p}$ =	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	
Δ =	0·41	0·28	0·23	0·16	0·12	0·08	Meter.
v =	2·7	1·8	1·4	1·0	0·8	0·5	„

IV.

Der mittlere Fortlauf der Lokomotive.

Bedingungen,

welche erfüllt sein müssen, damit die Triebräder im Moment der Abfahrt so wie auch während der Fahrt nicht glitschen.

Es sei W der totale Widerstand, welcher der Fortbewegung des ganzen Wagenzuges entgegenwirkt. W ist also auch die Zugkraft, mit welcher man vorn an dem Rahmen der Lokomotive anziehen müsste, um den Wagenzug in Bewegung zu bringen.

P die Kraft, mit welcher ein Kolben der Lokomotive getrieben wird, d. h. die Differenz der Pressungen, welche gegen beide Flächen des Kolbens ausgeübt werden. Diese Kraft P ist bei einer nicht expandirenden Lokomotive während des ganzen Kolbenschubes beinahe constant, bei einer expandirenden Lokomotive während der Dauer der Expansion variabel. Wir wollen eine nicht expandirende Lokomotive voraussetzen, dürfen also P als eine constante Kraft betrachten.

F der Reibungswiderstand sämmtlicher Triebräder, d. h. die Reibung, welche der Summe der Pressungen entspricht, mit welcher die Räder der Kurbelaxen und sämmtliche mit diesen Rädern verkuppelten Räder gegen die Bahn gepresst werden.

Nehmen wir an, dass im Moment der Abfahrt die Kurbeln zufällig so gestellt sind, dass beide Kolben vorwärts laufen, wenn die Fahrt nach vorwärts beginnt, und dass die Kurbeln mit den Axen der Cylinder die Winkel α und $90 + \alpha$ bilden.

Der Halbmesser einer Kurbel sei r, der Halbmesser eines Triebrades, so wie auch eines jeden mit einem Triebrad gekuppelten Rades R.

Im Moment der Abfahrt wird jeder der beiden Kolben mit einer Kraft P nach rechts getrieben, und dies hat zur Folge, dass auf jeden der beiden Kurbelzapfen nach horizontaler Richtung eine Pressung P nach vorwärts ausgeübt wird. Dies ist streng richtig, wie lang oder wie kurz die Schubstangen sein mögen. Allein durch die im Innern eines Cylinders herrschenden Spannungen wird nicht nur der Kolben, sondern auch der Cylinder eben so stark, aber nach entgegengesetzter Richtung gepresst, jeder Cylinder wird also mit einer Kraft P nach links getrieben, wenn sein Kolben mit einer Kraft P nach rechts gedrückt wird; und da die Cylinder mit dem Rahmenbau fest verbunden sind, so wird dieser letztere mit einer Kraft $2P$ nach links getrieben, wenn beide Kolben mit einer Kraft $2P$ nach rechts getrieben werden. Nun ist aber der Widerstand W als eine der Bewegung der Lokomotive entgegenwirkende Kraft anzusehen, der Rahmenbau wird also im Ganzen mit einer Kraft $W + 2P$ nach links getrieben, und wenn dennoch eine Bewegung nach rechts eintreten soll, so kann dies nur dadurch geschehen, dass die Kurbelaxe gegen die Axenhalter einen Druck ausübt, der wenigstens gleich $W + 2P$ ist.

Nehmen wir vorläufig an, die Reibung sämmtlicher Triebräder gegen die Bahn sei so stark, dass ein Glitschen dieser Räder nicht eintritt. Dann unterliegt es keiner Schwierigkeit, die Kraft zu bestimmen, mit welcher die Kurbelaxe durch die auf die Kurbelzapfen wirkenden Kräfte gegen die Axenhalter vorwärts treibt. Heissen wir diese Kraft für einen Augenblick X, so muss das statische Moment derselben in Bezug auf eine durch den Berührungspunkt der Räder mit der Bahn gehende Queraxe eben so gross sein als die Summe der Momente der Pressungen auf die Kurbelzapfen in Bezug auf die gleiche Axe. Das Moment von X ist RX. Die von B aus auf die Richtungen der Kurbelzapfenpressungen gefällten Perpendikel haben annähernd die Längen $R + r \sin.\alpha$, $R + r \sin.(90 + \alpha)$, oder $R + r \sin.\alpha$ und $R + r \cos.\alpha$. Die Summe jener Momente ist daher:

$$P(R + r\sin.\alpha) + P(R + r\cos.\alpha) = 2PR + Pr(\sin.\alpha + \cos.\alpha)$$

Man hat daher:

$$RX = 2PR + Pr(\sin.\alpha + \cos.\alpha)$$

und:

$$X = 2R + P\frac{r}{R}(\sin.\alpha + \cos.\alpha)$$

Wenn die Räder auf der Bahn nicht glitschen, so wird die Bewegung beginnen, wenn P wenigstens so gross ist, dass $X = W + 2P$ wird, d. h. wenn

$$2P + P\frac{r}{R}(\sin.\alpha + \cos.\alpha) = W + 2P$$

ist. Hieraus folgt für den kleinsten Werth von P:

$$P = W\frac{\frac{R}{r}}{\sin.\alpha + \cos.\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dieser Ausdruck wird innerhalb α gleich 0 und α gleich $90°$ am allergrössten, wenn $\alpha = 0°$ oder wenn $\alpha = 90°$ ist, und in beiden dieser Fälle wird der Werth von P:

$$W.\frac{R}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

So stark muss also ein Kolben getrieben werden, damit der Widerstand W auch dann überwunden werden kann, wenn der Zufall es wollte, dass im Moment der Abfahrt einer der beiden Kolben am Ende, der andere dagegen in der Mitte seines Schubes stünde, also überhaupt nur eine Maschine treibend wirkte.

Nun wollen wir weiter sehen, was nothwendig ist, damit die Triebräder auf der Bahn nicht glitschen.

Die auf die Kurbelzapfen wirkenden Kräfte bestreben sich, die Kurbelaxe mit einem Moment gleich $P(r\sin.\alpha + r\cos.\alpha)$ zu drehen. Um dies zu verhindern, muss am Umfang des Triebrades eine Kraft $P\frac{r}{R}(\sin.\alpha + \cos.\alpha)$ nach entgegengesetzter Richtung wirken, d. h. die Reibung F aller gekuppelten Räder auf der Bahn muss daher wenigstens $P\frac{r}{R}(\sin.\alpha + \cos.\alpha)$ sein, oder der kleinste Werth von F, durch welchen ein Glitschen der Räder verhindert wird, ist:

$$F = P\frac{r}{R}(\sin.\alpha + \cos.\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Dieser Werth von F wird am grössten, wenn $\alpha = 45°$, d. h. wenn $\sin.\alpha + \cos.\alpha = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = 1{\cdot}414$ und beträgt dann:

$$1{\cdot}414\,P\frac{r}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Am leichtesten tritt also im Moment, wenn der Wagenzug abfahren soll, ein Glitschen der Räder auf der Bahn ein, wenn die Kurbeln im ersten und zweiten, oder im dritten und vierten Quadranten so stehen, dass sie gegen eine Vertikallinie Winkel von 45° bilden; und wenn in dieser ungünstigsten Stellung ein Glitschen nicht eintreten soll, muss die Reibung aller gekuppelten Räder gegen die Bahn wenigstens $1{\cdot}414\,P\frac{r}{R}$ betragen.

Setzt man hier für P den oben (2) gefundenen Werth $W\frac{R}{r}$, der vorhanden sein muss, damit die Lokomotive die für die Abfahrt nöthige Zugkraft selbst dann besitzt, wenn im Moment der Abfahrt einer der Kolben am Anfang, der andere in der Mitte des Schubes stünde, so findet man für den Betrag der Reibung, welche gegen das Glitschen sichert, folgenden Werth:

$$1{\cdot}414\,.\,W\,.\,\frac{R}{r}\,.\,\frac{r}{R} = 1{\cdot}414\,W \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Wenn also die Abfahrt auch unter den ungünstigsten Verhältnissen ohne Glitschen der Räder erfolgen soll, muss die Reibung aller gekuppelten Räder auf der Bahn 1·414 mal so viel betragen als der Widerstand, und es genügt nicht, wenn sie nur, wie man gewöhnlich glaubt, genau so viel beträgt als der Widerstand selbst.

Ist der Wagenzug in den Beharrungszustand seiner Bewegung getreten, in welchem alle Umdrehungen eines Triebrades in gleichen Zeiten geschehen, so tritt in den Cylindern eine Dampfspannung ein, bei welcher die durch die Pressungen auf die Kolben während einer Umdrehung eines Rades entwickelte Arbeitsgrösse durch die Ueberwältigung des Widerstandes W consumirt wird. Nennen wir für einen Augenblick P_1 diese Kraft, mit welcher ein Kolben im Beharrungszustand getrieben wird, so entwickeln beide Kolben während einer Umdrehung eines Triebrades zusammen eine Wirkungsgrösse $2 \times 4r \times P_1 = 8rP_1$. Bei einer Umdrehung eines Triebrades legt aber der Wagenzug einen Weg $2R\pi$ zurück, wird also der Widerstand W durch eine Weglänge $2R\pi$ überwunden, es beträgt mithin die durch den Widerstand consumirte Wirkung $2R\pi W$. Es ist demnach im Beharrungszustand der Bewegung:

$$8rP_1 = 2R\pi W$$

folglich:

$$P_1 = \frac{\pi}{4}\frac{R}{r}W$$

Setzt man diesen Werth von P_1 statt P in den Ausdruck (4), so erhält man die Reibung, welche im Beharrungszustand der Bewegung die sämmtlichen Triebräder hervorbringen müssen, damit sie während des Laufes nicht glitschen. Diese Reibung ist demnach:

$$1{\cdot}414\,.\,\frac{\pi}{4}\frac{R}{r}W\,.\,\frac{r}{R} = 1{\cdot}11\,W \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Vergleicht man diesen Werth mit (5), so sieht man, dass die Fortsetzung der Fahrt mit einer geringeren Reibung der Räder auf der Bahn erfolgen könnte als die Abfahrt.

Der Beharrungszustand der Bewegung einer Lokomotive.

Wenn eine gleichförmig geheizte Lokomotive mit einer angehängten Wagenreihe auf einer geradlinigen Bahnstrecke durch längere Zeit fortgelaufen ist, nähert sich ihre Bewegung immer mehr und mehr einem Beharrungszustand, in welchem alle Umdrehungen der Triebräder in gleichen Zeiten geschehen, und der ferner von der Art ist, dass die Zustände der Lokomotive am Anfange und am Ende jeder Umdrehung der Triebräder in jeder Hinsicht ganz identisch sind. Es müssen also am Anfange und am Ende jeder Umdrehung der Triebräder gleiche Werthe haben: 1) die Geschwindigkeiten der Lokomotive; 2) die lebendigen Kräfte der Massen der Lokomotive; 3) die Dampfspannungen im Kessel; 4) die im Kessel enthaltene Wasser- und Dampfmenge; 5) die Temperaturen in allen Theilen der Lokomotive.

Diese Identität der Zustände am Anfange und am Ende jeder Umdrehung der Triebräder ist nur unter folgenden Bedingungen möglich:

1. Die Gleichheit der Geschwindigkeiten und der lebendigen Kräfte am Anfange und Ende jeder Umdrehung der Triebräder ist nur möglich, wenn die Summe der Wirkungen, welche die Pressungen des Dampfes gegen die Kolben während jeder Umdrehung der Triebräder entwickeln, eben so gross ist als die Summe der Wirkungen, welche sämmtliche der Bewegung der Lokomotive entgegen wirkenden Widerstände während jeder Umdrehung der Triebräder consumiren.
2. Die Gleichheit der Wasser- und Dampfvolumen im Kessel am Anfange und am Ende jeder Umdrehung ist nur möglich, wenn die Pumpen bei jeder Umdrehung eben so viel Wasser in den Kessel liefern, als aus demselben in Dampf oder flüssiger Form entweicht.
3. Die Gleichheit der Dampfspannungen kann nur stattfinden, wenn aus dem Kessel während jeder Umdrehung eben so viel Dampf entfernt wird, als in der Zeit einer Umdrehung durch die in den Kessel eindringende Wärme gebildet wird.
4. Die Gleichheit der Temperaturverhältnisse ist nur möglich, wenn während jeder Umdrehung der Triebräder die durch den Brennstoff entwickelte Wärmemenge eben so gross ist als die aus der Lokomotive entweichende.

Werden diese vier Gleichheiten mit mathematischer Schärfe analytisch ausgedrückt, so erhält man vier Gleichungen, aus welchen alle auf den Beharrungszustand sich beziehenden Fragen beantwortet werden können.

Um diese vier Gleichheiten analytisch auszudrücken, wählen wir folgende Bezeichnungen:

O der Querschnitt eines Dampfcylinders;
l die Länge des Kolbenschubes;
v die mittlere Geschwindigkeit der Dampfkolben;
V die mittlere Fortlaufgeschwindigkeit der Lokomotive;
D der Durchmesser eines Triebrades;
l_1 die Länge des Weges, den ein Kolben bei einem Schub zurücklegt, bis die Dampfzuströmung aufgehoben wird;
m der Coeffizient für den schädlichen Raum, d. h. die Zahl, mit welcher man das Volumen $O l$, das der Kolben bei einem Schub beschreibt, multipliziren muss, um zu erhalten die Summe von dem Volumen eines Dampfkanales und dem Volumen zwischen Cylinderdeckel und Kolben, wenn dieser am Ende eines Schubes ist;
y der Druck des Dampfes im Cylinder hinter dem Kolben auf einen Quadratmeter, nachdem derselbe vom Beginne des Schubes an einen Weg x zurückgelegt hat;

ϱ der Druck auf einen Quadratmeter, welcher im Cylinder vor dem Kolben herrscht, nachdem derselbe vom Beginne des Schubes an einen Weg x zurückgelegt hat;
p_1 der Druck des Dampfes im Cylinder hinter dem Kolben auf einen Quadratmeter in dem Moment, wenn die Dampfzuströmung durch den Steurungsschieber aufgehoben wird;
p_m r_m die mittleren Werthe von y und ϱ, d. h. diejenigen constanten Werthe, welche während eines Schubes eben so grosse Wirkungen produziren und consumiren würden wie die veränderlichen Werthe von y und ϱ. Es ist also:

$$p_m l = \int_0^l y\, dx \qquad r_m l = \int_0^l \varrho\, dx$$

t die Zeit eines Kolbenschubes; es ist also $v = \frac{l}{t}$
S die Dampfmenge in Kilogrammen, welche in jeder Sekunde gebildet wird;
s die Dampfmenge in Kilogrammen, die in jeder Sekunde verloren geht durch unvollkommene Verschlüsse und Dichtungen;
q die Wassermenge, die in jeder Sekunde durch den aus der Maschine entweichenden Dampf mit fortgerissen wird;
u_0 die Temperatur des Wassers, mit welchem der Kessel gespeist wird;
u die Temperatur des Dampfes im Kessel;
q_0 die Wassermenge in Kilogrammen, die in jeder Sekunde in den Kessel getrieben wird;
W der totale Widerstand des Trains und der Lokomotive in Kilogrammen, oder die Kraft, welche an der Lokomotive ziehend im Stande wäre, alle Hindernisse zu überwinden, die durch die Differenz der gegen die Kolben wirkenden Pressungen überwunden werden;
$\mathfrak{W}$ die Wärmemenge, welche in jeder Sekunde in den Kessel eindringt;
$\mathfrak{w}$ die Wärmemenge, welche in jeder Sekunde aus den Oberflächen aller Theile der Lokomotive in die Luft entweicht.

Dies vorausgesetzt, können wir nun die Bedingungen des Beharrungszustandes analytisch ausdrücken.

Es ist:

$\int_0^l O y\, dx$ die Wirkung des Dampfes gegen einen Kolben während eines Schubes;

$\int_0^l O \varrho\, dx$ die schädliche Gegenwirkung des vor dem Kolben herrschenden Druckes während eines Schubes;

$W D \pi$ die Wirkung, welche der Ueberwindung des Widerstandes W durch eine Weglänge $D \pi$ während einer Umdrehung entspricht.

Die Gleichheit der während einer Umdrehung produzirten und consumirten Wirkungen wird ausgedrückt durch:

$$4\int_0^l O y\, dx - 4\int_0^l O \varrho\, dx = W D \pi$$

Dividirt man diese Gleichung durch l und berücksichtigt man, dass:

$$\frac{\int_0^l y\,dx}{l} = p_m \qquad \frac{\int_0^l \varrho\,dx}{l}$$

so findet man:

$$O\,(p_m - r_m) = W\,\frac{D\pi}{4l} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Bei einem Kolbenschub wird der Raum $O l_1 + m O l$ eines Cylinders mit Dampf erfüllt. Dieser Dampf hat in dem Augenblick, wenn die Füllung beendigt ist, eine Spannung p_1, ein Kubikmeter dieses Dampfes hat also ein Gewicht $\alpha + \beta p_1$. Bei jedem einfachen Kolbenschub consumirt also ein Cylinder dem Gewicht nach eine Dampfmenge $O\,(l_1 + m l)\,(\alpha + \beta p_1)$, und da bei einer Umdrehung vier Cylinder-Füllungen vorkommen, so ist der Dampfverbrauch bei einer Umdrehung der Triebräder $4\,O\,(l_1 + m l)\,(\alpha + \beta p_1)$. Es ist aber die Zeit einer Umdrehung $\frac{2l}{v}$, demnach der mittlere Dampfverbrauch in 1 Sekunde:

$$\frac{4\,O\,(l_1 + m l)\,(\alpha + \beta p_1)}{\frac{2l}{v}} = 2\,O\,v\left(\frac{l_1}{l} + m\right)(\alpha + \beta p_1)$$

Da aber ausserdem in jeder Sekunde auch noch eine Dampfmenge s durch unvollkommene Dichtungen verloren geht, so hat man:

$$S = 2\,O\,v\left(\frac{l_1}{e} + m\right)(\alpha + \beta p_1) + s \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

In jeder Sekunde muss diese Dampfmenge S aus Wasser von u_0 Grad Temperatur gebildet werden. Dazu ist eine Wärmemenge $(650 - u_0)\,S$ nothwendig. In jeder Sekunde entweichen aber auch q Kilogramm Wasser mit u Grad Temperatur, wodurch ein Wärmeverlust von $q\,(u - u_0)$ Wärmeeinheiten entspringt. Da noch überdiess $\mathfrak{w}$ Wärmeeinheiten durch Abkühlung an der Oberfläche verloren gehen, so hat man schliesslich die Gleichung:

$$\mathfrak{W} = (650 - u_0)\,S + q\,(u - u_0) + \mathfrak{w} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Nebst diesen Gleichungen besteht noch wegen des geometrischen Zusammenhanges der Maschinenbestandtheile die Beziehung:

$$\frac{V}{v} = \frac{D\pi}{2l} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Diese vier Gleichungen sind keine Annäherungen, sondern absolute Wahrheiten, vorausgesetzt, dass für die einzelnen Zeichen die vollkommen wahren Werthe gesetzt werden. Allein die ganz wahre Bestimmung einiger dieser Grössen, und namentlich der Werthe von p_m und r_m, s q $\mathfrak{w}$ ist mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden; man muss sich daher mit Annäherungswerthen begnügen.

Lokomotive mit Maschinen, die nicht expandiren.

Wir wollen zunächst die aufgefundenen Bedingungsgleichungen des Beharrungszustandes auf Lokomotive mit nicht expandirenden Maschinen anwenden, erlauben uns aber

einige Voraussetzungen zu machen, durch welche die Rechnung wesentlich vereinfacht wird, ohne der Genauigkeit der Resultate merklich zu schaden. Wir nehmen an:

1. Die Dampfeinströmung daure bis an's Ende des Kolbenschubes, wir setzen also $l_1 = l$. Dies ist bekanntlich bei Schiebern der Fall, die nur sehr schwache äussere und innere Ueberdeckung haben.
2. Die Spannung des Dampfes im Cylinder hinter dem Kolben habe während der ganzen Dauer des Schubes einen unveränderlichen Werth p. Dann ist $p_m = p_1 = p$. Diese Voraussetzung nähert sich der Wahrheit um so mehr, je kleiner die Geschwindigkeit der Kolben ist, und je geringer die Hindernisse sind, welche der Ueberströmung des Dampfes aus dem Kessel in den Cylinder entgegenwirken, je grösser also die Querschnitte der Regulator- und der Dampfeinströmungs-Oeffnungen sind.
3. Die Spannung vor dem Kolben habe einen constanten Werth r, der von dem atmosphärischen Druck nicht beträchtlich abweicht. Diese Annahme nähert sich der Wahrheit um so mehr, je kleiner die Geschwindigkeit des Kolbens ist und je grösser die Oeffnungen sind, durch welche der Dampf ausströmt. Unter dieser Voraussetzung ist $r_m = r$.
4. Wir erlauben uns auch noch den Dampfverlust s, den Wärmeverlust $\mathfrak{w}$ und die vom Dampf mit fortgerissene Wassermenge q zu vernachlässigen, setzen also:

$$s = o \qquad \mathfrak{w} = o \qquad q = o$$

Unter diesen Voraussetzungen werden die Bedingungsgleichungen (1) bis (4) des Beharrungszustandes:

$$\left.\begin{aligned} p &= r + \frac{W}{O}\,\frac{D\pi}{4l} \\ S &= 2\,O\,v\,(1 + m)\,(\alpha + \beta p) \\ \mathfrak{W} &= (650 - u_0)\,S \\ \frac{V}{v} &= \frac{D\pi}{2l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Da diese Gleichungen keine absoluten Wahrheiten, sondern nur Annäherungen ausdrücken, so werden auch die Folgerungen, die sich aus demselben ziehen lassen, nur als Annäherungen an die Wahrheit zu betrachten sein. Um jedoch das Wort „Annäherung" nicht so oftmals wiederholen zu müssen, wollen wir die aus (5) sich ergebenden Folgerungen so aussprechen, wie wenn die Gleichungen (5) vollkommen wahr wären.

In diesen vier Gleichungen kommen nebst den constanten Grössen α β π r die nach Umständen veränderlichen Grössen p W D e S O v V $\mathfrak{W}$ u_0 vor, deren Anzahl 10 ist. Es können also $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1. \times 2 \times 3 \times 4} = 210$ verschiedene Fragen gestellt und beantwortet werden. Einige dieser Fragen sind von besonderem praktischen Interresse, wir wollen uns daher mit deren Beantwortung beschäftigen.

Geschwindigkeit, mit welcher eine Lokomotive einen Wagenzug bei einer bekannten Dampfproduktion fortzuziehen vermag.

Es sei gegeben W D l O S u_0 und zu suchen V v p $\mathfrak{W}$. Das will sagen: an eine wirklich existirende Lokomotive sei eine Wagenreihe angehängt, die mit Einschluss des

Widerstandes, denn die Lokomotive verursacht einen totalen Widerstand W der Bewegung entgegensetzt. Im Kessel werde in jeder Sekunde eine Dampfmenge von S Kilogramm gebildet und die Temperatur des Tenderwassers sei u_0. Es soll nun berechnet werden: 1) die Spannung p des Dampfes in den Cylindern; 2) die Geschwindigkeit v der Kolben; 3) die Geschwindigkeit V der Fahrt; 4) die Wärmemenge, welche per 1″ in den Kessel eindringt.

Die erste der Gleichungen (5) gibt direkt für die Dampfspannung p den Werth:

$$p = r + \frac{W}{O}\,\frac{D\pi}{4l} \qquad (6)$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt:

$$v = \frac{S}{20(1+m)(\alpha+\beta p)} \qquad (7)$$

Die vierte Gleichung gibt:

$$V = v \cdot \frac{D\pi}{2l} \qquad (8)$$

Die dritte Gleichung gibt endlich:

$$\mathfrak{W} = (650 - u_0)\,S \qquad (9)$$

Aus der Gleichung (6) ersieht man, dass die Spannung des Dampfes in den Cylindern unabhängig ist von der Geschwindigkeit der Fahrt und von der in jeder Sekunde gebildeten Dampfmenge, also auch unabhängig ist von der mehr oder weniger lebhaften Kesselheizung, und dass diese Spannung abhängt: 1) von der vor dem Kolben herrschenden Spannung; 2) von dem Verhältnis $\frac{D}{l}$ zwischen dem Durchmesser der Triebräder und der Länge des Kolbenschubes; 3) von dem Querschnitt O der Dampfcylinder und 4) von dem zu bewältigenden Widerstand W. Für eine bestimmte Lokomotive haben $\frac{D}{l}$ und O ganz bestimmte Werthe und kann man auch r als eine constante Grösse ansehen. Die Dampfspannung p ist also für jede bestimmte Lokomotive nur allein mit dem Widerstand W veränderlich. Ein Lokomotivführer mag also seine Maschine wie immer behandeln, er mag viel oder wenig einfeuern, den Regulator mehr oder weniger öffnen, es wird doch, wenn der Beharrungszustand eingetreten ist, in den Cylindern immer die gleiche Dampfspannung eintreten, so lange der Widerstand der gleiche bleibt. Diese Dampfspannung fällt gross aus, wenn der Widerstand gross, die Cylinder klein und die Triebräder gross sind.

Da nun p von S nicht abhängt, so zeigt die Gleichung (7), dass die Geschwindigkeit v der Kolbenbewegung der in einer Sekunde produzirten Dampfmenge proportional ist. Bei ungeändertem Widerstand bringt also eine zwei-, drei-, viermal grössere Dampfproduktion eine zwei-, drei-, viermal grössere Geschwindigkeit hervor.

Die Voraussetzung, dass die Werthe von W und r constant und von S und V unabhängig sind, findet in den meisten Fällen nicht statt. In einem Beharrungszustand, in welchem eine grössere Dampferzeugung stattfindet, muss erstlich eine grössere Geschwindigkeit eintreten, muss also schon wegen des Luftwiderstandes der Totalwiderstand W wachsen. In einem Beharrungszustand, in welchem eine grössere Dampferzeugung stattfindet, muss ferner eine grössere Dampfmenge durch das Blasrohr ausströmen, muss

also nothwendig der vor dem Kolben herrschende Widerstand r grösser sein. Mit dem Wachsen von S nimmt also W und r zu, und folglich auch vermöge Gleichung (6) der Werth von p. So wie aber p und folglich auch $(\alpha+\beta p)$ wächst, so kann vermöge Gleichung (7) die Geschwindigkeit v nicht mehr in dem Maase wachsen als S wächst, sondern in einem geringeren Grade.

Das so eben mit Worten Gesagte kann auch auf dem Wege der Rechnung nachgewiesen werden, wenn man für W und r ihre wahren analytisch ausgedrückten Werthe einführt.

Vortheilhafteste Verhältnisse hinsichtlich des Brennstoffaufwandes.

Wir wollen uns die Frage zur Beantwortung vorlegen, unter welchen Bedingungen das Verhältniss zwischen der Effektleistung einer Lokomotive und dem Brennstoffaufwand am günstigsten ausfällt.

Es ist W V die nützliche Wirkung, welche eine Lokomotive in einer Sekunde entwickelt, $\frac{W V}{\mathfrak{W}}$ die nützliche Wirkung, welche die Lokomotive mit jeder in den Kessel eindringenden Wärmeeinheit hervorbringt. Dieses Verhältniss bestimmt also das Güteverhältniss der Maschinenleistung, und soll einen möglichst grossen Werth haben. Aus den Gleichungen (5) findet man leicht:

$$\frac{W V}{\mathfrak{W}} = \frac{1}{(650 - u_0)}\,\frac{p - r}{\alpha + \beta p}\,\frac{1}{1 + m}$$

Für grössere Dampfspannungen über 3 Atmosphären, wie sie bei Lokomotiven vorkommen, ist α gegen βp eine kleine Grösse, man begeht daher keinen merklichen Fehler, wenn man in diesem Ausdruck α gegen βp vernachlässiget; dann erhält man aber:

$$\frac{W V}{\mathfrak{W}} = \frac{1}{\beta(650 - u_0)}\left(1 - \frac{r}{p}\right)\frac{1}{1 + m} \qquad (10)$$

Das Güteverhältniss der Maschinenleistung richtet sich also, wie aus diesem Ausdruck erhellt, einzig und allein nach dem Verhältniss der mittleren Pressungen, die im Beharrungszusand der Bewegung hinter dem Kolben und vor demselben eintreten. Oder eine im Verhältniss zu dem schädlichen Vorderdruck r grosse Dampfspannung p ist die Bedingung einer günstigen Kraftentwicklung.

Um also eine vortheilhafte Leistung einer Lokomotive zu erzielen, ist im Wesentlichen nur nothwendig, solche Verhältnisse eintreten zu lassen, dass im Beharrungszustand der Bewegung in den Dampfcylindern eine hohe Dampfspannung stattfindet.

Es ist aber vermöge Gleichung (6):

$$p = r + \frac{W}{O}\,\frac{D\pi}{4l}$$

woraus man sieht, dass die Dampfspannung gross ausfällt, wenn der Widerstand W und die Triebräder gross, das Volumen O l des Dampfcylinders dagegen klein ist. Um also kleine Lasten vortheilhaft fortschaffen zu können, muss man Lokomotive mit grossen Triebrädern und kleinen Cylindern anwenden. Um aber grosse Lasten vortheilhaft, jedoch nicht mit einer zu übermässigen Dampfspannung fortzuschaffen, muss man Lokomotive mit kleinen Triebrädern und grossen Cylindern benutzen. Personenzuglokomotive erfordern also grosse Triebräder und kleine Cylinder, Lastenzuglokomotive dagegen kleine Triebräder und grosse Cylinder.

Bestimmung der wesentlichsten Dimensionen einer neu zu erbauenden Lokomotive.

An eine neu zu erbauende Lokomotive stellt man zunächst die Bedingung, dass dieselbe einen gewissen Widerstand W mit einer gewissen Geschwindigkeit V zu überwinden im Stande sein soll. Damit aber die Lokomotive hinsichtlich des Brennstoffaufwandes vortheilhaft wirken kann, muss im Beharrungszustand der Bewegung in den Cylindern eine Dampfspannung p von einer gewissen Höhe eintreten, die jedoch diejenigen Grenzen nicht überschreiten darf, an welchen der Zustand des Kessels gefährlich werden könnte. Für die vortheilhafteste Leistung einer Lokomotive ist die Kolbengeschwindigkeit nicht ganz gleichgültig. In dem aufgefundenen Güteverhältniss (10) erscheint sie zwar nicht direkt, ist aber doch darin versteckt enthalten, denn eine grosse Kolbengeschwindigkeit vergrössert nicht nur den schädlichen Vorderdruck, sondern kann auch bewirken, dass zuletzt, wenn die Dampfzuströmung aufgehoben wird, eine Dampfspannung p_1 eintritt, die beträchtlich höher ist als die mittlere Pressung p_m, wodurch das Güteverhältniss ungünstig wird. Aber nicht nur für die Brennstoffökonomie, sondern auch für den soliden Fortbestand des geordneten Zusammenhanges der Maschinenbestandtheile ist eine mässige Geschwindigkeit vortheilhaft. Aus diesen Andeutungen geht hervor, dass für eine neu zu erbauende Lokomotive die Grössen p r V v W u_0 angenommen, die Grössen $O, \frac{D}{l}$, S und W dagegen aus den Gleichungen (5) gesucht werden müssen.

Die letzte dieser Gleichungen (5) gibt zunächst:

$$\frac{D}{l} = \frac{2}{\pi} \frac{V}{v} \qquad \text{(11)}$$

Setzt man diesen Werth in die erste der Gleichungen (5) und sucht sodann O, so findet man:

$$O = \frac{1}{2} \frac{W}{p - r} \frac{V}{v} \qquad \text{(12)}$$

Aus der zweiten und dritten der Gleichungen (5) folgt nun weiter:

$$\left.\begin{aligned} S &= 2\,O\,v\,(1+m)(\alpha+\beta p) \\ \mathfrak{W} &= (650 - u_0)\,S \end{aligned}\right\} \qquad \text{(13)}$$

Durch (11) wird ein gewisses Verhältniss zwischen dem Durchmesser eines Triebrades und der Länge des Kolbenschubes bestimmt, die absoluten Werthe dieser Grössen bleiben jedoch willkürlich. Berücksichtiget man, dass die Communicationswechsel jedes mal mit gewissen Störungen verbunden sind, so erscheint ein langer Kolbenschub als vortheilhaft, aber gewisse Grenzen kann man nicht überschreiten, weil sonst wegen (11) der Durchmesser die Triebräder zu gross genommen werden müssten. Die Gleichung (12) bestimmt den Querschnitt eines Dampfcylinders. Dieser ist, wie man sieht, dem Widerstand W und der Fahrgeschwindigkeit V direkt, der Pressungsdifferenz $p - r$ und der

Kolbengeschwindigkeit v dagegen verkehrt proportional. Eine Lokomotive erfordert durchaus compendiöse Maschinen, also auch kleine Dampfcylinder; man muss daher eine hohe Dampfspannung und eine grosse Kolbengeschwindigkeit eintreten lassen; obgleich diese letztere für die Kraftleistungen ungünstig ist.

Wie die Grössen p r V v zu nehmen sind, um im Ganzen vortheilhafte und für die Ausführung zweckmässige Dimensionen in allen Theilen der Lokomotive zu erhalten, soll in der Folge angegeben werden; vorläufig handelt es sich nur um Grundsätze.

Lokomotive mit expandirenden Maschinen.

Die früher aufgestellten Gleichungen (1) bis (4) gelten auch für expandirende Maschinen, es kömmt nur darauf an, dass man die richtigen Werthe von p_m r_m und p_1 einführt. Wir berechnen zunächst p_m unter folgenden Voraussetzungen: 1) die Spannung des Dampfes im Cylinder habe vom Beginne des Kolbenschubes an bis zur Absperrung hin einen unveränderlichen Werth p. Dann ist p_1 ebenfalls gleich p; 2) die Expansion, welche beginnt nachdem der Kolben einen Weg l_1 zurückgelegt hat, dauere bis an das Ende des Kolbenschubes fort; 3) die Expansion erfolge sowohl ohne Wärme, als auch ohne Dampfverlust.

Nennen wir y die Spannung des Dampfes im Cylinder hinter dem Kolben, nachdem derselbe einen Weg x zurückgelegt hat, der grösser als l ist, so hat man:

$$p_m = \frac{O\,p\,l + \int_{l_1}^{l} O\,y\,dx}{O\,l} \qquad \text{(1)}$$

In dem Moment, in welchem die Absperrung eintritt, ist in dem Volumen $O\,l_1$, das bis dahin der Kolben zurückgelegt hat und in dem schädlichen Raum $m\,O\,l$ eine Dampfmenge $(O\,l_1 + m\,O\,l)(\alpha + \beta p) = O\,l\left(\frac{l_1}{l} + m\right)(\alpha + \beta p)$ eingeschlossen. Nachdem der Kolben den Weg x zurückgelegt hat, befindet sich diese Dampfmenge in einem Volumen $O\,x + m\,O\,l$ und die Spannung ist y; man hat daher die Gleichheit:

$$O\,l\left(\frac{l_1}{l} + m\right)(\alpha + \beta p) = O\,(x + m\,l)(\alpha + \beta y)$$

Hieraus folgt:

$$y = \frac{l_1 + m\,l}{x + m\,l}\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) - \frac{\alpha}{\beta}$$

und nun findet man:

$$\int_{l_1}^{l} O\,y\,dx = O\,(l_1 + m\,l)\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right)\int_{l_1}^{l}\frac{dx}{x + ml} - O\,\frac{\alpha}{\beta}\,(l - l_1)$$

$$= O\,(l_1 + m\,l)\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) \text{lognat.}\,\frac{l + m\,l}{l_1 + m\,l} - O\,\frac{\alpha}{\beta}\,(l - l_1)$$

Der Werth von p_m wird demnach:

$$p_m = \left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right)\left[\frac{l_1}{l} + \left(\frac{l_1}{l} + m\right)\text{lognat.}\,\frac{l + ml}{l_1 + ml}\right] - \frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{(2)}$$

Oder wenn wir der Kürze wegen:

$$\frac{l_1}{l} + \left(\frac{l_1}{l} + m\right) \text{lognat.} \frac{l + ml}{l_1 + ml} = k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

setzen, so erhält man:

$$p_m = \left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) k - \frac{\alpha}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Die vor dem Kolben herrschende Spannung ist bei einer expandirenden Maschine weniger veränderlich, als bei einer nicht expandirenden Maschine und ist nicht viel grösser als der atmosphärische Druck. Wir erlauben uns daher für r_m einen bestimmten, von dem atmosphärischen Druck nicht beträchtlich verschiedenen Werth, den wir mit r bezeichnen wollen, in Rechnung zu bringen. Setzt man in die Gleichungen (1) bis (4), Seite 76 für p_m den obigen Werth (4), ferner $r_m = r$ $p_1 = p$, und vernachlässigt die Verluste s und $\mathfrak{w}$, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&O \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) k - \left(\frac{\alpha}{\beta} + r\right)\right] = W \frac{D\pi}{4l} \\
&S = 2 O v \left(\frac{l_1}{l} + m\right) (\alpha + \beta p) \\
&\frac{V}{v} = \frac{D\pi}{2l} \\
&\mathfrak{W} = (650 - u_0)\, S \\
&k = \frac{l_1}{l} + \left(\frac{l_1}{l} + m\right) \text{lognat.} \frac{l + ml}{l_1 + ml}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

welche ähnlich wie die Gleichungen (5), Seite 77 zur Beantwortung verschiedener Fragen gebraucht werden können.

Geschwindigkeit, mit welcher eine expandirende Lokomotive einen Train fortzieht.

Als erste Anwendung dieser Gleichungen wollen wir die Frage beantworten, mit welcher Geschwindigkeit eine expandirende Maschine einen Wagenzug, der einen bestimmten Widerstand W verursacht, fortzieht, wenn in jeder Sekunde eine gewisse Dampfmenge S produzirt wird. In diesem Falle ist gegeben W D l O $\frac{l_1}{l}$ m S α β r; zu suchen dagegen p v V $\mathfrak{W}$.

Aus der ersten der Gleichungen (5) folgt:

$$p = \frac{1}{k} \left[\frac{W}{O} \frac{D\pi}{4l} + \left(\frac{\alpha}{\beta} + r\right)\right] - \frac{\alpha}{\beta}$$

oder wenn man für k seinen Werth setzt:

$$p = \frac{\frac{W}{O} \frac{D\pi}{4l} + \left(\frac{\alpha}{\beta} + r\right)}{\frac{l_1}{l} + \left(\frac{l_1}{l} + m\right) \text{lognat.} \frac{l + ml}{l_1 + ml}} - \frac{\alpha}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Hat man p berechnet, so gibt die zweite der Gleichungen (5):

$$v = \frac{S}{2 O \left(\frac{l_1}{l} + m\right) (\alpha + \beta p)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

und nun ist noch ferner:

$$\left.\begin{aligned}
&V = \frac{D\pi}{2l} v \\
&\mathfrak{W} = (650 - u_0)\, S
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Vortheilhafteste Leistungen einer expandirenden Lokomotive.

Es ist $W V$ die nützliche Wirkung der Lokomotive, $\frac{W V}{\mathfrak{W}}$ die Wirkung, die sie mit jeder in den Kessel eindringenden Wärmeeinheit entwickelt. Dieses Verhältniss muss für die vortheilhaftesten Umstände ein Maximum werden.

Aus den Gleichungen (5) findet man leicht:

$$\frac{W V}{\mathfrak{W}} = \frac{1}{650 - u_0} \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) k - \left(\frac{\alpha}{\beta} + r\right)}{\left(\frac{l_1}{l} + m\right) (\alpha + \beta p)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Es ist nun die Frage, wie p und wie $\frac{l_1}{l}$ genommen werden soll, damit dieses Güteverhältniss den grössten Werth erhält. Dieser Ausdruck kann auch geschrieben werden wie folgt:

$$\frac{W V}{\mathfrak{W}} = \frac{1}{(650 - u_0)\beta} \frac{k - \frac{\alpha + \beta r}{\alpha + \beta p}}{\left(\frac{l_1}{l} + m\right)}$$

und hieraus ersieht man zunächst, dass eine im Verhältniss zum schädlichen Vorderdruck r möglichst hohe Dampfmenge vortheilhaft ist.

Setzt man zur Berechnung des vortheilhaftesten Werthes von $\frac{l_1}{l}$ der Kürze wegen $\frac{W V}{\mathfrak{W}} = y$ $\frac{l_1}{l} = x$, so wird:

$$k = x + (x + m) \text{lognat.} \frac{1 + m}{x + m}$$

$$y = \frac{1}{(650 - u_0)\beta} \frac{x + (x + m) \text{lognat.} \frac{1 + m}{x + m} - \frac{\alpha + \beta r}{\alpha + \beta p}}{x + m}$$

Differenzirt man diesen Ausdruck, so findet man:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(650-u_0)\beta} \, \frac{x - \frac{\alpha+\beta r}{\alpha+\beta p}}{(x+m)^2}$$

Für den vortheilhaftesten Werth von x muss $\frac{dy}{dx}$ gleich Null werden. Dies ist der Fall für:

$$x = \frac{l_1}{l} = \frac{\alpha+\beta r}{\alpha+\beta p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Bezeichnet man die am Ende des Kolbenschubes in dem Cylinder vorhandene Spannung mit z, so hat man zur Bestimmung derselben die Gleichung:

$$(O\,l_1 + m\,O\,l)\,(\alpha+\beta p) = (O\,l + m\,O\,l)\,(\alpha+\beta z)$$

Hieraus folgt:

$$z = \left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)\frac{\frac{l_1}{l}+m}{1+m} - \frac{\alpha}{\beta}$$

Setzt man hier für $\frac{l_1}{l}$ den obigen, der vortheilhaftesten Expansion entsprechenden Werth (10), so erhält man die Dampfspannung, welche in dem Cylinder am Ende des Kolbenschubes eintritt, wenn die vortheilhafteste Expansion stattfindet. Dieser Werth von z ist:

$$z = r + \frac{m}{1+m}\,(p-r)$$

ist also wegen des schädlichen Raumes etwas grösser als der schädliche Vorderdruck. Die vortheilhafteste Expansion ist also diejenige, bei welcher am Ende eines Kolbenschubes die Pressungen zu beiden Seiten eines Kolbens beinahe gleich gross sind, bei welcher also ein Kolben, wenn er an das Ende eines Schubes gelangt, gar nicht mehr treibend wirken kann.

Bestimmung der wesentlichsten Dimensionen expandirender Maschinen für neu zu erbauende Lokomotive.

Für neu zu erbauende Lokomotive mit expandirenden Maschinen müssen die Grössen

$$W \quad V \quad v \quad p \quad \frac{l_1}{l} \quad m \quad \alpha \quad \beta$$

angenommen, dagegen die Grössen

$$O \quad \frac{D}{e} \quad S \quad \mathfrak{B}$$

bestimmt werden, was vermittelst der Gleichungen (5) geschehen kann.

Durch Elimination von $\frac{D\pi}{2l}$ folgt aus der ersten und dritten dieser Gleichungen

$$O = \frac{W\,V}{2v\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)k - \left(\frac{\alpha}{\beta}+r\right)\right]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Hat man diesen Werth von O berechnet, so gibt die zweite dieser Gleichungen:

$$S = 2\,O\,v\left(\frac{l_1}{l}+m\right)(\alpha+\beta p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Ferner die dritte:

$$\frac{D}{e} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{V}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Endlich die vierte:

$$\mathfrak{B} = (650-u_0)\,S \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Die Güteverhältnisse einer Lokomotive mit expandirenden und einer Lokomotive mit nicht expandirenden Maschinen.

Dividirt man das für expandirende Maschinen gefundene Güteverhältniss (9) durch das für nicht expandirende Maschinen gefundene Güteverhältniss (10), Seite 79, so erhält man einen Quotienten γ, welcher ausdrückt, wie vielmal die Wirkung einer Wärmeeinheit bei einer expandirenden Maschine grösser ist als bei einer nicht expandirenden. Wenn man annimmt, dass die Spannung des Dampfes hinter dem Kolben in den expandirenden Maschinen bis zum Beginn der Expansion eben so gross ist als in den nicht expandirenden Maschinen während des ganzen Kolbenschubes, findet man für den bezeichneten Quotienten γ folgenden Ausdruck:

$$\gamma = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)k - \left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)}{p-r}\cdot\frac{1+m}{\frac{l_1}{l}+m}$$

Setzen wir $p = 60000$ $\frac{\alpha}{\beta} = 3018$ $m = 0{\cdot}05$ $r = 12500$, so wird mit Berücksichtigung des Werthes von k (5):

$$\text{für } \frac{l_1}{l} = \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{4}$$

$$\gamma = 1{\cdot}58 \quad 1{\cdot}33 \quad 1{\cdot}23$$

Das Expansionsprinzip verspricht, wie man aus diesen Zahlen ersieht, keine glänzenden Resultate. Berücksichtigt man, dass eine Expansionssteurung einen grösseren Widerstand verursacht und einen complizirteren, daher schwieriger zu behandelnden Mechanismus erfordert, dass ferner bei etwas starker Expansion ungleichförmige Bewegungen entstehen und eine zu schwache Feueranfachung durch das Blasrohr eintritt, dass endlich expandirende Maschinen für gleiche Kraftentwicklung grössere Cylinder erhalten müssen, die für die Befestigung wenigstens sehr unbequem sind: so kann man von der Anwendung des Expansionsprinzips bei Lokomotiv-Maschinen kaum einen praktischen Vortheil erwarten, und es erklärt sich hieraus die Thatsache, dass die Lokomotive mit expandirenden Maschinen keine allgemeine Verbreitung gefunden haben.

Fahrt mit zwei Lokomotiven.

Es ist nicht ohne Interesse, die Bewegung eines Wagenzuges zu untersuchen, der von zwei ungleich construirten und ungleich geheizten Lokomotiven gezogen wird.

Wir wollen annehmen, dass die beiden Lokomotive mit nicht expandirenden Maschinen versehen sind, und bezeichnen durch W den totalen Widerstand des Trains mit Einschluss der Widerstände der Lokomotive, durch V die Geschwindigkeit des ganzen Zuges im Beharrungszustand seiner Bewegung, ferner:

O_1 O_2 die Querschnitte der Cylinder;
l_1 l_2 die Kolbenschube;
D_1 D_2 die Durchmesser der Triebräder;
v_1 v_2 die Kolbengeschwindigkeiten;
S_1 S_2 die Dampfmengen in Kilogrammen, welche in den Lokomotiven in jeder Sekunde gebildet werden;
p_1 p_2 die Dampfspannungen in den Cylindern hinter den Kolben;
r_1 r_2 die schädlichen Vorderpressungen;
α β die Coeffizienten zur Bestimmung des Gewichtes von einem Kubikmeter Dampf;
m_1 m_2 die Coeffizienten für die Berechnung der schädlichen Räume der Cylinder.

Im Beharrungszustand der Bewegung bestehen nun folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
&2\,O_1\,(p_1-r_1)\,v_1+2\,O_2\,(p_2-r_2)\,v_2=W\,V\\
&S_1=2\,O_1\,v_1\,(\alpha+\beta\,p_1)\,(1+m_1)\\
&S_2=2\,O_2\,v_2\,(\alpha+\beta\,p_2)\,(1+m_2)\\
&\frac{V}{v_1}=\frac{D_1\,\pi}{2\,l_1}\\
&\frac{V}{v_2}=\frac{D_2\,\pi}{2\,l_2}
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

Aus der zweiten und dritten dieser Gleichungen folgt:

$$p_1=\frac{S_1}{2\,O_1\,v_1\,\beta\,(1+m_1)}-\frac{\alpha}{\beta}\qquad p_2=\frac{S_2}{2\,O_2\,v_2\,\beta\,(1+m_2)}-\frac{\alpha}{\beta}\quad\ldots\ldots\quad(2)$$

Führt man diese Werthe in die erste der Gleichungen (1) ein, so erhält man:

$$\frac{S_1}{\beta\,(1+m_1)}+\frac{S_2}{\beta\,(1+m_2)}-2\left[O_1\,v_1\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_1\right)+O_2\,v_2\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_2\right)\right]=W\,V$$

Substituirt man für v_1 und v_2 Die Werthe, welche die vierte und fünfte der Gleichungen (1) darbieten, und sucht sodann V, so findet man:

$$V=\frac{\dfrac{S_1}{\beta\,(1+m_1)}+\dfrac{S_2}{\beta\,(1+m_2)}}{W+\dfrac{4\,O_1\,l_1}{D_1\,\pi_1}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+r_1\right)+\dfrac{4\,O_2\,l_2}{D_2\,\pi_2}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+r_2\right)}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(3)$$

Drückt man in den Gleichungen (2) v_1 und v_2 durch V aus, und substituirt sodann für V den so eben gefundenen Werth (3), so findet man:

$$p_1=\frac{\dfrac{S_1}{1+m_1}}{\dfrac{S_1}{1+m_1}+\dfrac{S_2}{1+m_2}}\;\frac{W+\dfrac{4\,O_1\,l_1}{D_1\,\pi}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+r_1\right)+\dfrac{4\,O_2\,l_2}{D_2\,\pi}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+r_2\right)}{\dfrac{4\,O_1\,l_1}{D_1\,\pi}}-\frac{\alpha}{\beta}\quad\ldots\quad(4)$$

$$p_2=\frac{\dfrac{S_2}{1+m_2}}{\dfrac{S_1}{1+m_1}+\dfrac{S_2}{1+m_2}}\;\frac{W+\dfrac{4\,O_1\,l_1}{D_1\,\pi}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+r_1\right)+\dfrac{4\,O_2\,l_2}{D_2\,\pi}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+r_2\right)}{\dfrac{4\,O_2\,l_2}{D_2\,\pi}}-\frac{\alpha}{\beta}\quad\ldots\quad(5)$$

Nennt man noch Z_1 und Z_2 die Zugkräfte der beiden Lokomotive, so ist:

$$Z_1\,V=2\,O_1\,(p_1-r_1)\,v_1\qquad Z_2\,V=2\,O_2\,(p_2-r_2)\,v_2$$

oder, wenn man v_1 und v_2 durch V ausdrückt:

$$Z_1=\frac{4\,O_1\,l_1}{D_1\,\pi}\,(p_1-r_1)\qquad Z_2=\frac{4\,O_2\,l_2}{D_2\,\pi}\,(p_2-r_2)$$

oder, wenn man für p_1 und p_2 die Werthe (4) und (5) substituirt:

$$Z_1=\frac{\dfrac{S_1}{1+m_1}}{\dfrac{S_1}{1+m_1}+\dfrac{S_2}{1+m_2}}\left[W+\frac{4\,O_1\,l_1}{D_1\,\pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_1\right)+\frac{4\,O_2\,l_2}{D_2\,\pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_2\right)\right]-\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_1\right)\frac{4\,O_1\,l_1}{D_1\,\pi}\quad.\quad(6)$$

$$Z_2=\frac{\dfrac{S_2}{1+m_1}}{\dfrac{S_1}{1+m_1}+\dfrac{S_2}{1+m_2}}\left[W+\frac{4\,O_1\,l_1}{D_1\,\pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_1\right)+\frac{4\,O_2\,l_2}{D_2\,\pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_2\right)\right]-\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_2\right)\frac{4\,O_2\,l_2}{D_2\,\pi}\quad.\quad(7)$$

Hiemit ist nun der Beharrungszustand vollkommen bestimmt. Die Gleichung (3) gibt die Geschwindigkeit der Fahrt, die Gleichungen (4) und (5) bestimmen die Dampfspannungen in den Cylindern der Lokomotive. Die Gleichungen (6) und (7) bestimmen die Zugkräfte.

Sind die beiden Lokomotive von gleicher Construktion, ist also $O_1=O_2$ $l_1=l_2$ $D_1=D_2$ $r_1=r_2$, so folgt aus den Gleichungen (4) und (5):

$$\frac{\alpha+\beta\,p_1}{\alpha+\beta\,p_2}=\frac{S_1}{S_2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(8)$$

Setzt man für den Fall, dass $O_1=O_2$ $l_1=l_2$ $D_1=D_2$ $r_1=r_2$ $m_1=m_2$ ist, der Kürze wegen:

$$\frac{\frac{1}{1+m_1}}{\frac{S_1}{1+m_1}+\frac{S_2}{1+m_2}}\left[W+\frac{4\,O_1\,l_1}{D_1\,\pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_1\right)+\frac{4\,O_2\,l_2}{D_2\,\pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_2\right)\right]=$$

$$\frac{\frac{1}{1+m_2}}{\frac{S_1}{1+m_1}+\frac{S_2}{1+m_2}}\left[W+\frac{4\,O_1\,l_1}{D_1\,\pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_1\right)+\frac{4\,O_2\,l_2}{D_2\,\pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_2\right)\right]=\mathfrak{A}$$

$$\frac{4\,O_1\,l_1}{D_1\,\pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_1\right)=\frac{4\,O_2\,l_2}{D_2\,\pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_2\right)=\mathfrak{B}$$

so folgt durch Division der Gleichungen (6) und (7):

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\mathfrak{A}\,S_1-\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\,S_2-\mathfrak{B}}=\frac{S_1-\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}}{S_2-\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}}$$

Es ist aber in allen praktischen Fällen $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ sowohl gegen S_1 als auch gegen S_2 eine kleine Grösse, die also gegen S_1 und S_2 vernachlässigt werden darf; daher hat man annähernd:

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{S_1}{S_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Wenn also ein Wagenzug durch zwei gleich construirte, aber ungleich geheizte Lokomotive fortgezogen wird, treten [vermöge (8)] in den Cylindern der Lokomotive Dampfspannungen ein, deren Dichten sich genau wie die Dampfproduktionen verhalten, und üben ferner die beiden Lokomotive Zugkräfte aus, die sich [wegen (9)] nahe wie die Dampfproduktionen verhalten.

Im Allgemeinen ist aber überhaupt die Anwendung zweier Lokomotive ganz unbedenklich, und es ist gar nicht nothwendig, dass sie gleich stark geheizt werden, oder dass in beiden Lokomotiven einerlei Dampfspannung eintritt. Im Beharrungszustand entwickelt jede Lokomotive eine Zugkraft, die vermöge (6) und (7) ihrer Dampfproduktion nahe proportional ist und die Zugkräfte summiren sich. Nur beim Abfahren des Zuges muss mit einiger Vorsicht zu Werke gegangen werden, und es ist gut, wenn in diesem Moment die vorangehende Lokomotive eine grössere Zugkraft entwickelt, als die nachfolgende und zuerst in Gang gesetzt wird.

Differenz zwischen der Spannung des Dampfes in den Cylindern und der Spannung des Dampfes im Kessel.

Die mittlere Spannung des Dampfes in den Cylindern hinter den Kolben richtet sich in einer nicht expandirenden Lokomotive, wie wir gesehen haben [Gleichung (5), Seite 77]: 1) nach der Spannung vor den Kolben; 2) nach dem Widerstand des Trains; 3) nach dem Querschnitt eines Dampfcylinders; 4) nach dem Verhältniss zwischen der Länge des Kolbenschubes und dem Durchmesser der Triebräder.

Die Spannung des Dampfes im Kessel muss gleich sein der Spannung, die in den Cylindern eintritt, mehr noch einer Differenz, die so gross ist, dass dadurch die Widerstände in der Dampfzuleitung überwältigt werden können. Diese Widerstände entstehen: 1) durch die plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen bei Einengungen und Erweiterungen in der Dampfzuleitung; 2) durch rasche Biegungen und Richtungsänderungen der Leitung; 3) durch die Reibung des Dampfes an den Wänden der Leitung.

Den grössten Widerstand verursacht der Regulator, wenn dessen Oeffnung beinahe geschlossen ist, denn die lebendige Kraft des durch diese Regulatoröffnung strömenden Dampfes geht beinahe ganz verloren.

Eine ganz scharfe Bestimmung der Spannung des Dampfes im Kessel gehört abermals zu den Problemen, die sich analytisch nicht lösen lassen. Es ist insbesondere der Umstand ein sehr erschwerender, dass die Dampfzuströmung theils wegen der wechselnden Geschwindigkeit der Kolben und wegen der durch die Schieberbewegung veränderlichen Grösse der Einströmungsöffnungen mit periodisch veränderlicher Geschwindigkeit erfolgt. Da jedoch ein der Wahrheit sich einigermassen näherndes Rechnungsresultat doch besser ist, als gar keine Rechnung, so wollen wir die vorliegende Frage unter folgender Voraussetzung zu lösen suchen:

1. die Spannung des Dampfes in der Leitung bis an die Oeffnung des Regulators sei unveränderlich und so gross als ein Kessel;
2. die Spannung des Dampfes in dem Theil der Leitung zwischen der Regulatoröffnung und den äusseren Mündungen der Dampfkanäle sei ebenfalls constant, aber von vorneherein nicht bekannt;
3. die lebendige Kraft des Dampfes in der Regulatoröffnung gehe verloren;
4. die lebendige Kraft des in den Cylinder einströmenden Dampfes gehe ebenfalls verloren;
5. die Reibungswiderstände und die Widerstände, welche Krümmungen und plötzliche Biegungen verursachen, dürfen vernachlässigt werden.

Nennen wir:

p_1 die Spannung des Dampfes im Cylinder;
y die Spannung des Dampfes in dem Raum zwischen der Regulatoröffnung und den Einströmungsöffnungen in die Dampfkanäle;
p_2 die Spannung des Dampfes im Kessel;
Ω_2 den Querschnitt der Regulatoröffnung;
Ω_1 den Querschnitt eines Dampfkanals;
$\frac{2}{\pi}\,\Omega_1$ den mittlern Werth der durch die Bewegung des Steuerungsschiebers veränderlichen Oeffnung;
$k_2\,k_1$ die Contraktionscoeffizienten für die Einströmung durch die Querschnitte Ω_2 und $\frac{2}{\pi}\,\Omega_1$, durch welche der Dampf in einen Dampfkanal einströmt;
S die Dampfmenge in Kilogrammen, welche in jeder Sekunde auf beide Maschinen wirkt;
i die Wassermenge, welche jedes Kilogramm Dampf mit sich fortreisst;

Mit Berücksichtigung der gemachten Voraussetzungen kann man nun schreiben:

$$\left.\begin{aligned} S\,(1+i) &= \Omega_2\,k_2\,(\alpha+\beta\,y)\,(1+i)\sqrt{\frac{2\,g}{\beta\,(1+i)}\,\text{lognat.}\,\frac{\alpha+\beta\,p_2}{\alpha+\beta\,y}} \\ \frac{1}{2}\,S\,(1+i) &= \frac{2}{\pi}\,\Omega_1\,k_1\,(\alpha+\beta\,p_1)\,(1+i)\sqrt{\frac{2\,g}{\beta\,(1+i)}\,\text{lognat.}\,\frac{\alpha+\beta\,y}{\alpha+\beta\,p_1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Es ist aber, weil $\beta(p_2 - y)$ und $\beta(y - p_1)$ als kleine Grössen betrachtet werden dürfen:

$$\text{lognat.}\ \frac{\alpha + \beta p_2}{\alpha + \beta y} = \log.\left(1 + \frac{\beta(p_2 - y)}{\alpha + \beta y}\right) = \frac{\beta(p_2 - y)}{\alpha + \beta y}$$

$$\text{lognat.}\ \frac{\alpha + \beta y}{\alpha + \beta p_1} = \log.\left(1 + \frac{\beta(y - p_1)}{\alpha + \beta p_1}\right) = \frac{\beta(y - p_1)}{\alpha + \beta p_1}$$

Daher werden die Gleichungen (1):

$$\left.\begin{aligned} S &= \Omega_2 k_2 (\alpha + \beta y) \sqrt{\frac{2g}{1+i} \frac{(p_2 - y)}{\alpha + \beta y}} \\ \frac{1}{2} S &= \frac{2}{\pi} \Omega_1 k_1 (\alpha + \beta p_1) \sqrt{\frac{2g}{1+i} \frac{y - p_1}{\alpha + \beta p_1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Sucht man aus der zweiten dieser Gleichungen y und setzt den Werth in die erste, so findet man:

$$p_2 = p_1 + \frac{S^2(1+i)}{2g(\alpha + \beta p_1)} \left\{ \frac{\pi^2}{16(\Omega_1 k_1)^2} + \frac{1}{\Omega_2^2 k_2^2 + \dfrac{\beta\left(\frac{1}{2}S\right)^2 \Omega_2^2 k_2^2 (1+i)}{2g\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \Omega_1^2 k_1^2 (\alpha + \beta p_1)^2}} \right\}$$

Allein das Glied $\dfrac{\beta\left(\frac{1}{2}S\right)^2 \Omega_2^2 k_2^2 (1+i)}{2g\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \Omega_1^2 k_1^2 (\alpha + \beta p_1)^2}$ darf wegen der Kleinheit von β gegen $\Omega_2^2 k_2^2$ vernachlässigt werden; man erhält daher:

$$p_2 = p_1 + \frac{S^2(1+i)}{2g(\alpha + \beta p_1)} \left[\left(\frac{\pi}{4\,\Omega_1 k_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Omega_2 k_2}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die folgende Tabelle enthält die Differenzen $p_2 - p_1$ der Dampfspannungen im Kessel und im Cylinder, auf 1 Quadratcentimeter bezogen bei verschiedenen Spannungen im Cylinder und für verschiedene Querschnitte der Regulatoröffnung, aber für eine constante Dampfproduktion von 1 Kilogramm per 1 Sekunde. Für S w g Ω_1 wurden folgende constante Werthe gesetzt.

$$S = 1 \qquad i = 0{\cdot}2 \qquad 2g = 19{\cdot}68 \qquad \Omega_1 = 0{\cdot}01 \qquad k_1 = k_2 = 0{\cdot}6$$

Druck im Cylinder auf 1 Quadrat-Centim.	Differenz zwischen dem Druck des Dampfes im Kessel und dem Druck des Dampfes im Cylinder per 1 Quadratcentimeter, wenn der Querschnitt der Regulator-Oeffnung beträgt:						
	20 Quadrat-Centm.	30 Quadrat-Centm.	40 Quadrat-Centm.	60 Quadrat-Centm.	80 Quadrat-Centm.	100 Quadrat-Centm.	120 Quadrat-Centm.
Kilg.	Kilg.	Kilg.	Kilg.	Kilg.	Kilg.	Kilg.	Kilg.
3	2·681	1·226	0·718	0·355	0·228	0·169	0.137
4	2·055	0·940	0·551	0·272	0·175	0·129	0·105
5	1·671	0·764	0·448	0·221	0·142	0·106	0·086
6	1·422	0·650	0·381	0·188	0·121	0·089	0·073

Wenn die Dampfproduktion im Kessel per 1 Sekunde nicht 1 Kilogramm beträgt, so erhält man die Differenz der Pressung per 1 Quadratcentimeter im Kessel und Cylinder, wenn man die Zahlenwerthe der Tabelle mit dem Quadrat S, der wirklich stattfindenden Dampfproduktionen multiplizirt.

Wahre Bewegung des Schwerpunktes einer Lokomotive.

Im Beharrungszustand der Bewegung geschehen alle Umdrehungen der Triebräder einer Lokomotive in gleichen Zeiten. Während jeder Umdrehung der Triebräder legt die Lokomotive, wenn die Räder nicht schleifen, einen Weg $D\pi$ zurück, und wenn man diesen durch die constante Zeit einer Umdrehung dividirt, so erhält man die mittlere Geschwindigkeit derjenigen Fortbewegung, die wir bereits untersucht haben. Die Bewegung des Schwerpunktes der Lokomotive erfolgt aber während einer Umdrehung nicht mit Gleichförmigkeit, sondern mit periodisch veränderlicher Geschwindigkeit, weil wegen der Kurbelmechanismen die treibenden Kräfte mit den Widerständen nicht in jedem Augenblick im Gleichgewicht sein können. Wir wollen uns nun mit der während jeder Umdrehung eines Triebrades wegen der Kurbelmechanismen eintretenden ungleichförmigen Bewegungen des Schwerpunktes der Lokomotive beschäftigen. Diese Bewegung ist aber nicht zu verwechseln mit der des Rahmens und der damit verbundenen Theile des ganzen Baues, sondern sie betrifft nur allein die Art und Weise, wie der dem Massensystem in jedem Augenblick seiner Bewegung entsprechende Schwerpunkt in Folge der Kurbelmechanismen im Raum fortrückt.

Wir müssen uns aber, um diese veränderliche Bewegung des Schwerpunktes zu bestimmen, folgende Voraussetzungen erlauben. Wir nehmen an:

1. zwei Maschinen, die ohne Expansion auf zwei unter einem rechten Winkel gestellte Kurbeln wirken;
2. die Pressungen gegen beide Flächen eines Kolbens seien während der ganzen Dauer eines jeden Schubes unveränderlich;
3. das Verhältniss zwischen der Länge einer Schubstange und der Länge eines Kurbelhalbmessers sei so gross, dass man keinen merklichen Fehler begeht, wenn man es als unendlich gross annimmt;

4. der der Lokomotive entgegenwirkende Widerstand sei constant;
5. die totale lebendige Kraft des ganzen Massensystems der Lokomotive dürfe ausgedrückt werden durch das Produkt aus der Masse der Lokomotive in das Quadrat der Geschwindigkeit ihres Schwerpunktes;
6. die Geschwindigkeit der Massen aller an die Lokomotive angehängten Wägen sei eine absolut unveränderliche.

Für die in der Rechnung erscheinenden Grössen wählen wir folgende Bezeichnungen

O der Querschnitt eines Dampfcylinders;
l die Länge des Kolbenschubes;
D der Durchmesser eines Triebrades;
p die Pressung des Dampfes auf einen Quadratmeter der Kolbenfläche;
r die Pressung auf einen Quadratmeter der Vorderfläche eines Kolbens; p und r sind vermöge der zweiten Voraussetzung constant;
W der constante Widerstand, welcher der Bewegung der Lokomotive entgegenwirkt;
M die Masse der Lokomotive;
L das Gewicht der Lokomotive in Tonnen zu 1000 Kilogrammen, demnach $M = \frac{1000\,L}{2\,g}$ wobei g die Beschleunigung beim freien Fall bezeichnet;
V die mittlere
V_1 das Maximum der
V_2 das Minimum der
} Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Lokomotive;
φ der Winkel, den in irgend einem Augenblick der Bewegung die Kurbel der rechtseitigen Maschine mit der Bewegungsrichtung des Kolbens bildet, demnach $\frac{\pi}{2} + \varphi$ der analoge Winkel für die linkseitige Maschine;
μ derjenige Werth von φ, bei welchem das Minimum der Geschwindigkeit eintritt.

Während die Kurbel den Winkel φ beschreibt, legt der Kolben der rechtseitigen Maschine einen Weg $\frac{l}{2}(1-\cos.\varphi)$, der Kolben der linkseitigen Maschine einen Weg $\frac{l}{2}\sin.\varphi$ zurück (was jedoch nur für eine unendlich lange Schubstange richtig ist). Die beiden Kolben entwickeln dabei zusammen eine Wirkung $O(p-r)\frac{l}{2}(1-\cos.\varphi+\sin.\varphi)$ Gleichzeitig legt die Lokomotive einen Weg $\frac{D}{2}\varphi$ zurück, wird also der Widerstand W durch den Weg $\frac{D}{2}\varphi$ überwunden, wird also eine Wirkung $W\frac{D}{2}\varphi$ consumirt. Nennen wir V_0 die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Lokomotive bewegte, als der Winkel φ gleich Null war, y die dem Winkel φ entsprechende Geschwindigkeit, so ist $M(y^2-V_0^2)$ die Aenderung der lebendigen Kraft der Lokomotiv-Masse während der Bewegung durch den Winkel φ.

Da wir vorausgesetzt haben, dass der Wagenzug seine Geschwindigkeit nicht ändere so besteht nun die Gleichheit:

$$O(p-r)\frac{l}{2}(1-\cos.\varphi+\sin.\varphi)-W\frac{D}{2}\varphi = M(y^2-V_0^2) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Diese Gleichung gilt jedoch nur von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$, weil ausserhalb dieser Gränzen die Richtungen der Pressungen gegen die Kolben Aenderungen erleiden. Innerhalb dieser Gränzen gilt jedoch die Gleichung (1), es mag ein Beharrungszustand vorhanden sein oder nicht. Allein da wir gerade die Bewegung der Lokomotive in ihrem

Beharrungszustand kennen lernen wollen, so müssen wir die Bedingung seines Bestehens analytisch ausdrücken und in (1) einführen. Nun geht aus der Natur der Sache hervor, dass im Beharrungszustand der Bewegung für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wiederum die Geschwindigkeit V_0 eintreten muss; wir erhalten daher die Bedingung, welche den Beharrungszustand charakterisirt, wenn wir in (1) φ gleich $\frac{\pi}{2}$ und y gleich V_0 setzen; wir finden demnach:

$$O(p-r)\frac{l}{2}\,.\,2 - W\frac{D}{2}\frac{\pi}{2} = 0$$

oder:

$$W = \frac{4\,O(p-r)\,l}{D\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Führt man diesen Werth von W in (1) ein, so erhält man:

$$O(p-r)\,l\left[\frac{1}{2}(1-\cos.\varphi+\sin.\varphi)-\frac{2\varphi}{\pi}\right] = M(y^2-V_0^2) \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

und diese Gleichung drückt nun das Gesetz aus, nach welchem im Beharrungszustand die Bewegung der Lokomotive erfolgt, während der Winkel φ von 0 in $\frac{\pi}{2}$ übergeht.

Es liegt in der Natur der Sache, dass innerhalb dieser Grenzen ein Minimum und ein Maximum der Geschwindigkeit vorkommen muss. Für diejenigen Werthe von φ, für welche y ein Maximum oder ein Minimum wird, muss $\frac{d(y^2)}{d\varphi} = 0$ sein. Differenzirt man die Gleichung (3) und setzt $\frac{d(y^2)}{d\varphi} = 0$, so findet man:

$$O(p-r)\,l\left[\frac{1}{2}(\sin.\varphi+\cos.\varphi)-\frac{2}{\pi}\right] = 0$$

oder $\sin.\varphi + \cos.\varphi = \frac{4}{\pi}$. Aus dieser Gleichung findet man, mit Berücksichtigung, dass $\sin.\varphi + \cos.\varphi = \sqrt{1+\sin.2\varphi}$ ist:

$$\sin.2\varphi = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 - 1 = 0{\cdot}6205$$

Die innerhalb 0 und 180° liegenden Winkel, welche dieser Gleichung entsprechen, sind: $38^\circ + 21'$ und $141^\circ + 39'$. Die dem Minimum und Maximum der Geschwindigkeit entsprechenden Werthe von φ sind demnach:

$$19^\circ + 10' + 30'' \text{ (Minimum)}$$
$$70^\circ + 49' + 30'' \text{ (Maximum)}$$

Es ist klar, dass der erstere dieser Werthe dem Minimum, und der letztere dem Maximum entspricht. Denn wenn φ sehr klein ist, wirkt beinahe nur die linkseitige Maschine treibend; wird dagegen φ nahe 45°, so wirken beide Maschinen beinahe mit voller Kraft.

Bezeichnen wir durch μ die Bogenlänge, welche dem Winkel von $19^\circ + 10' + 30''$ entspricht, so müssen der Gleichung (3) sowohl der Werth $\varphi = \mu$ und $y = V_2$, als auch der Werth $\varphi = \frac{\pi}{2} - \mu$ und $y = V_1$ genügen. Man erhält daher:

$$O(p-r)l\left[\frac{1}{2}(1-\cos.\mu+\sin.\mu)-\frac{2\mu}{\pi}\right]=M(V_2^2-V_0^2)$$

$$O(p-r)l\left[\frac{1}{2}(1-\sin.\mu+\cos.\mu)-\frac{2\left(\frac{\pi}{2}-\mu\right)}{\pi}\right]=M(V_1^2-V_0^2)$$

Die Differenz dieser Gleichungen gibt:

$$O(p-r)l\left[-\sin.\mu+\cos.\mu-1+4\frac{\mu}{\pi}\right]=M(V_1^2-V_2^2) \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Nun ist aber $\frac{1}{2}(V_1+V_2)=V$, und wenn wir das Verhältniss $\frac{V_1-V_2}{V}=i$ setzen, so wird $V_1^2-V_2^2=(V_1+V_2)(V_1-V_2)=2V\times iV=2iV^2$. Die Gleichung (4) wird demnach:

$$O(p-r)l\left[-\sin.\mu+\cos.\mu-1+4\frac{\mu}{\pi}\right]=2iV^2M$$

und hieraus folgt:

$$i=\frac{O(p-r)l\left[-\sin.\mu+\cos.\mu-1+\frac{4\mu}{\pi}\right]}{2V^2M} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Nach diesem Werth von i ist die Ungleichförmigkeit zu beurtheilen, welche in der Bewegung des Schwerpunktes der Lokomotive vermöge der Kurbelmechanismen eintritt. Es ist:

$$\frac{4\mu}{\pi}=\frac{4(19\times60\times60+10\times60+30)}{60\times60\times180}=0{\cdot}4261$$

$$\sin.\mu=\sin.(19^0+10'+30'')=0{\cdot}3284$$

$$\cos.\mu=\cos.(19^0+10'+30'')=0{\cdot}9444$$

Ferner:

$$M=\frac{1000\,L}{2g}=\frac{1000\,L}{2\times9{\cdot}808}$$

und hierdurch wird der Werth von i:

$$i=\frac{O(p-r)l}{2424\,LV^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Es sei z. B.:

$O=0{\cdot}1$ $p-r=40000$ $l=0{\cdot}6$ $L=18$ Tonnen $V=10$ Meter

so wird $i=0{\cdot}00055$, d. h. der Unterschied zwischen der grössten und kleinsten Geschwindigkeit ist $0{\cdot}00055$ von der mittleren Geschwindigkeit. Dieser Unterschied beträgt also 0·0055 Meter.

An diesem Beispiel ersieht man, dass die durch die Kurbelmechanismen verursachte Ungleichförmigkeit der Bewegung des Schwerpunktes so unbedeutend ist, dass man sie durch die delikatesten Messinstrumente wohl kaum zu entdecken im Stande wäre. Diese Ungleichförmigkeit ist also für die Praxis eine nicht beachtenswerthe.

Uebergang aus einem Beharrungszustand in einen andern.

Der Uebergang aus einem Beharrungszustand in einen andern kann verursacht werden: 1) durch eine Aenderung des Widerstandes, den die Lokomotive zu überwinden hat, also insbesondere durch Steigen oder Fallen der Bahn; 2) durch eine Aenderung der Kesselheizung; 3) durch eine Aenderung der Regulatorstellung; 4) durch eine Aenderung des Expansionsgrades, wenn der Steuerungsmechanismus eine variable Expansion zulässt; 5) durch eine Aenderung der Ausströmungsöffnung des Blasrohres; 6) durch das gleichzeitige Eintreten zweier oder mehrerer der unter (1) bis (5) genannten Veränderungen.

Um die Erscheinungen, welche bei dem Uebergang aus einem Beharrungszustand in einen andern vorkommen, leichter zu besprechen, wollen wir den ersteren A, den letzteren B nennen.

Geschieht der Uebergang aus A in B nur durch eine Zunahme des Widerstandes, und bleibt alles Andere ungeändert, so muss zunächst eine Abnahme der Geschwindigkeit eintreten, denn im Zustand A war die Spannung des Dampfes in den Cylindern so, dass sie den Widerständen im Mittel genommen das Gleichgewicht hielt; wenn also plötzlich der Widerstand wächst, so kann in diesem Augenblick und in den darauf folgenden die Spannung des Dampfes nicht im Stande sein, den grösseren Widerstand zu bewältigen. Allein so wie die Geschwindigkeit der Lokomotive abnimmt, entsteht eine Verminderung des Dampfverbrauches, während die Dampferzeugung in beinahe ungeschwächtem Masse fortgeht; es muss also im Kessel eine Dampfansammlung und daher eine Steigerung der Spannung eintreten. Allein so wie die Spannung des Dampfes im Kessel wächst, muss sie auch in den Cylindern hinter den Kolben allmählig zunehmen, und diess wird so lange fortdauern, bis in den Cylindern eine Spannung eintritt, welche im Stande ist, dem im Zustand B vorhandenen Widerstand das Gleichgewicht zu halten, und bis ferner der Dampfverbrauch genau so gross wird, als er im Zustand A war. Allein da bis zu diesem Augenblick hin die Spannung des Dampfes fort und fort nicht hinreichend war, dem grösseren Widerstand das Gleichgewicht zu halten, so muss die Geschwindigkeit der Lokomotive bei dem Uebergang aus A in B fortwährend abnehmen. Diese Abnahme erfolgt jedoch nicht gleichförmig, sondern sie erfolgt anfangs rasch und wird allmälig schwächer und schwächer. Im Zustand B herrschen also im Allgemeinen in der Lokomotive stärkere Dampfspannungen, und ist ihre Geschwindigkeit kleiner als im Zustand A.

Wird die Aenderung des Zustandes A durch eine Verstärkung der Heizung bewirkt, so wird zunächst die Dampfproduktion gesteigert, es muss also eine Dampfansammlung und mithin eine Erhöhung der Dampfspannung im Kessel eintreten. Dadurch wird aber auch die Spannung des Dampfes in den Cylindern hinter den Kolben gesteigert, und da sich, der Voraussetzung gemäss, der Widerstand nicht geändert hat, so werden die Kolben mit einer Kraft getrieben, die mehr als hinreichend ist, um die Widerstände zu bewältigen; es muss also die Geschwindigkeit der Maschine fort und fort bis zu einer gewissen Gränze zunehmen, und diese Gränze wird durch den Umstand gesteckt, dass mit der Geschwindigkeitszunahme ein stärkerer Dampfverbrauch eintritt, was zur Folge hat, dass die Differenz zwischen der Dampfproduktion und dem Dampfverbrauch allmählig abnehmen und zuletzt ganz verschwinden muss; was aber ferner zur Folge hat, dass die Dampfspannungen fort und fort abnehmen werden, bis wiederum die im Zustand A da gewesenen Spannungen eintreten.

Im Beharrungszustand B ist also eine grössere Geschwindigkeit vorhanden, sind aber die Spannungszustände beinahe so wie sie in A waren. Ich sage „beinahe", denn die grössere Geschwindigkeit der Lokomotive verursacht einen stärkeren Blasrohrdruck und einen stärkeren Luftwiderstand, es wächst also überhaupt der Total-Widerstand, den der Dampf zu überwinden hat, und daher muss im Zustand B die Dampfspannung etwas grösser sein als sie im Zustand A war. Auch wird aus diesem Grunde die Fahrgeschwindigkeit in einem etwas schwächeren Masse wachsen als die Zunahme der Dampfproduktion.

Geschieht die Aenderung des Zustandes A durch eine Verengung der Blasrohrmündung, so wird zunächst der Blasrohrdruck und mithin der totale Widerstand, der vom Dampf überwunden werden muss, vermehrt. Die Spannung, welche der Dampf im Zustand A hatte, wird also zur Bewältigung des totalen Widerstandes nicht mehr hinreichen, in der Bewegung muss also eine Verzögerung, folglich eine Veränderung des Dampfverbrauches, daher eine Dampfansammlung und mithin eine Erhöhung der Dampfspannung eintreten. Diese Veränderungen werden so lange fortdauern, bis ein Zustand B eintritt, in welchem Dampfverbrauch und Dampfproduktion gleich gross geworden sind und in welchem ferner der Druck des Dampfes mit dem durch die Verengung der Blasrohrmündung verstärkten Widerstand in's Gleichgewicht gekommen ist. In diesem Zustand B wird jedoch die Dampfproduktion grösser sein als sie im Zustand A war, denn indem der Dampf mit einer grösseren Spannkraft durch das Blasrohr entweicht, wird die anfachende Wirkung dieses Vorganges und folglich die Dampfproduktion gesteigert; man kann desshalb ohne Rechnung nicht wohl entscheiden, ob die Geschwindigkeit der Lokomotive im Zustande B grösser oder kleiner sein wird, als sie in A war; denn einerseits müsste die Geschwindigkeit abnehmen, weil der Widerstand vermehrt wurde, anderseits müsste die Geschwindigkeit wachsen, weil die Dampfproduktion zunimmt. Auf welcher Seite das Uebergewicht liegt, kann nur durch Rechnung oder durch Versuche entschieden werden.

Wird eine Aenderung des Beharrungszustandes A vermittelst des Regulators veranlasst, und zwar durch eine Verminderung der Einströmungsöffnung, so wird zunächst der Uebergang des Dampfes aus dem Kessel in die Cylinder erschwert. Im Zustand A war die Spannung des Dampfes im Kessel gerade hinreichend, um die produzirte Dampfmenge durch die Regulatoröffnung in den Cylinder zu treiben; so wie aber die Regulatoröffnung plötzlich verengt wird, nimmt die Dampfüberströmung ab, es muss also eine Dampfansammlung, mithin eine Steigerung der Dampfspannung im Kessel eintreten, und diese Veränderungen werden so lange fortdauern, bis die Dampfspannung eine Höhe erreicht hat, bei der sie im Stande ist, allen Dampf, der produzirt wird, durch die enge Regulatoröffnung zu treiben. Die Geschwindigkeit der Lokomotive nimmt anfangs ab, erreicht nach einiger Zeit ein Minimum, und nimmt dann so lange zu, bis sie so gross geworden ist, als sie im Zustand A war. Der Zustand B unterscheidet sich also von A nur durch eine höhere Dampfspannung im Kessel; alles Uebrige wird nicht geändert.

Wird der Zustand A verändert, indem man eine stärkere Expansion eintreten lässt, so wird anfänglich die Wirkung der Maschine und auch der Dampfverbrauch verändert, es muss also eine Abnahme der Geschwindigkeit und eine Ansammlung des Dampfes im Kessel, mithin eine Spannungserhöhung in demselben eintreten. So wie aber diese wächst, wird die Leistung der Maschine allmählig gesteigert, und nimmt die Geschwindigkeit wiederum zu, bis endlich ein Zustand B eintritt, in welchem eine höhere Dampfspannung und eine grössere Geschwindigkeit der Maschine vorhanden ist. Eine grosse Geschwindigkeit muss zuletzt eintreten, weil durch die erhöhte Expansion die Kraftleistungen der Maschine gesteigert werden. Eine höhere Dampfspannung muss eintreten, weil im Zustand B die Cylinder weniger gefüllt werden als sie in A gefüllt wurden, und demnach in beiden Zuständen wegen der gleich gebliebenen Dampferzeugung auch der Dampfverbrauch keine Aenderung erlitten hat.

Die Führung einer Lokomotive beruht wesentlich auf der richtigen Kenntniss der Erscheinungen und Wirkungen, von welchen eine Aenderung des Beharrungszustandes begleitet ist.

Will man bei ungeändertem Widerstand für einige Zeit schneller oder langsamer fahren, so kann dies bewirkt werden, indem man die Regulatoröffnung in ersterem Fall vergrössert, in letzterem vermindert, oder indem man eine schwächere oder stärkere Expansion eintreten lässt. Allein es ist nicht möglich, durch eine Aenderung der Regulatoröffnung die Geschwindigkeit dauernd zu erhöhen oder zu vermindern.

Will man bei einer schwachen Aenderung des Widerstandes eine Aenderung der Geschwindigkeit der Lokomotive verhindern, so kann dies abermals vermittelst des Regulators oder vermittelst des Expansionsapparates bewirkt werden.

Um immer eine hinreichende Quantität von ziemlich hoch gespanntem Dampf im Kessel vorräthig zu haben, ist es angemessen, bei normaler Geschwindigkeit mit einer ziemlich engen Regulatoröffnung zu fahren, die Dampferzeugung vorzugsweise auf solchen Bahnstrecken, die nur einen geringen Widerstand verursachen, zu begünstigen und diesen Dampf für andere Bahnstrecken, die grössere Widerstände veranlassen, aufzusparen. Dies kann bewirkt werden, wenn man beim Bahnabwärtsfahren nachfeuert und die Regulatoröffnung, so wie auch die Blasrohröffnung verengt, beim Bahnaufwärtsfahren dagegen diese beiden Oeffnungen erweitert. Das Abwärtsfahren erfolgt auf diese Weise mit schwacher Kraft, mit starkem Blasrohrdruck, aber mit lebhafter Anfachung, das Aufwärtsfahren dagegen mit erhöhter Kraft, mit schwachem Blasrohrdruck und mit schwacher Anfachung.

Auch die Speisung des Kessels mit Wasser aus dem Tender muss mit Beachtung der Bahnverhältnisse geschehen. Wenn plötzlich eine grosse Wassermenge in den Kessel gebracht wird, tritt in demselben eine niedrigere Temperatur ein, wird sogar ein Theil des vorhandenen Dampfes condensirt, muss also die Spannung des Dampfes und mithin die Leistungsfähigkeit der Maschine abnehmen; es ist daher angemessen, die Kesselspeisung wie die Kesselfeuerung vorzugsweise beim Bahnabwärtsfahren zu begünstigen.

V.

Die Taschensteuerung.

Zur Steuerung der Lokomotiv-Dampfmaschinen werden gegenwärtig allgemein einfache Schieber gebraucht, die eine schwache innere und eine starke äussere Ueberdeckung haben. Zur Bewegung dieser Schieber bedient man sich der von *R. Stephenson* eingeführten Taschensteuerung, vermittelst welcher eine expandirende Wirkung des Dampfes, so wie auch das Vorwärts- und Rückwärtslaufen der Lokomotive hervorgebracht werden kann. Ich darf annehmen, dass dem Leser die Einrichtung und Wirkungsweise dieser Vorrichtung bekannt ist, wende mich daher sogleich zur Theorie derselben, welche die Aufgabe zu lösen hat, den Zusammenhang zwischen den Constructions-Elementen und den Wirkungen dieses Apparates ausfindig zu machen.

Die Constructions-Elemente des Apparates sind: 1) die äussere Ueberdeckung des Schiebers; 2) die innere Ueberdeckung desselben; 3) die Excentricität der Steuerungsscheiben; 4) der Voreilungswinkel der Steuerungsscheiben; 5) die Länge der Excentrikstangen; 6) die Bogenlänge der Tasche; 7) der Krümmungshalbmesser der Tasche.

Die Wirkungselemente des Apparates sind: 1) der Angriffspunkt der Tasche, d. h. derjenige Punkt der Tasche, welcher auf die Schieberstange einwirkt; 2) das lineare Voreilen des Schiebers beim Beginne des Kolbenschubes; 3) die grösste Einströmungsöffnung, wenn der Schieber am Ende seiner Bewegung angekommen ist; 4) die Dauer der Einströmung; 5) die Dauer der Ausströmung.

Die Constructionselemente, mit welchen ein solcher Steuerungsapparat construirt sein muss, damit derselbe gewisse Wirkungen hervorzubringen im Stande ist, wurden bisher von den Constructeurs auf empirischem Wege vermittelst eines Versuchsmodelles ausfindig gemacht; sie lassen sich aber, wie zuerst *Phillips* *) gezeigt hat, viel einfacher und sicherer durch Rechnung bestimmen. Diess soll nun auch im Folgenden geschehen; ich werde jedoch den Weg, welchen *Phillips* betreten hat, um zu den Grundgleichungen des Problems zu gelangen, nicht einschlagen, weil dieses Ziel weit einfacher aus der Betrachtung der Figuren, welche den geometrischen Zusammenhang aller Theile des Apparates darstellen, erreicht werden kann.

*) Théorie de la coulisse servant à produire la détente variable dans les machines à vapeur, et particulièrement dans les machines locomotives, par *M. Phillips*. Annales des mines, 1853, tome III.

Krümmungshalbmesser der Tasche.

Wir wollen zunächst den angemessenen Krümmungshalbmesser der Tasche bestimmen. Tab. XVIII, Fig. 89 stellt den Steuerungsapparat in derjenigen Position dar, wenn der Kolben seine Bewegung von Links nach Rechts beginnt, und wenn die Tasche in ihre mittlere Stellung gebracht ist, in welcher der mittlere Punkt B_1 derselben auf die Schieberstange einwirkt. $O_1 A_1$ ist die Kurbel der Maschine. $D_1 E_1$ sind die Mittelpunkte der excentrischen Scheiben. $D_1 C_1$ $F_1 H_1$ die Excentrikstangen. $C_1 B_1 H_1$ die Krümmung der Tasche.

Tab. XVIII., Fig. 90 zeigt die Stellung des Apparates, wenn der Kolben seine Bewegung von Rechts nach Links beginnt.

Fig. 91 ist eine allgemeine Stellung des Apparates, wenn die Kurbel O A des Kolbens einen Winkel ω zurückgelegt hat, und wenn die Tasche etwas gehoben ist, so dass sie nicht mehr mit dem mittleren Punkt auf die Schieberstange einwirkt.

Die Krümmung der Tasche sollte von der Art sein, dass wenn der Kolben an einem oder am andern Ende des Schubes steht, eine Bewegung des Schiebers nicht eintritt, wenn man die Tasche hebt oder senkt.

Aendert man in Fig. 89 die Stellung der Tasche, ohne die Kurbel $O_1 A_1$ zu drehen, so beschreiben die Punkte C_1 und H_1 kleine Kreisbögen, die auf $D_1 C_1$ und $F_1 H_1$ senkrecht stehen, die ganze Tasche dreht sich also um den Punkt E_1, in welchem sich die Verlängerungen der Excentrikstangen begegnen. Der Punkt B_1 wird also bei einer Hebung oder Senkung der Tasche keine Bewegung machen, wenn $C_1 B_1 H_1$ ein aus E_1 beschriebener Kreisbogen ist, oder $E_1 C_1 = E_1 B_1 = E_1 H_1$ wäre für diese Stellung der Kurbel $O_1 A_1$ der zweckmässigste Krümmungshalbmesser der Tasche.

Aendert man in Fig. 90 um unendlich wenig die Stellung der Tasche, so beschreiben die Punkte C_2 und H_2 kleine auf $E_2 C_2$ und $E_2 H_2$ senkrecht stehende Kreisbögen. Die Tasche dreht sich demnach um den Punkt E_2, in welchem sich die Richtungen von $D_2 C_2$ und $F_2 H_2$ durchschneiden. Der Punkt B_2 wird also bei einer Hebung oder Senkung der Tasche keine Bewegung machen, wenn $C_2 B_2 H_2$ ein aus E_2 beschriebener Kreisbogen ist, d. h. für die Stellung Fig. 90 des Apparates wäre $E_2 C_2 = E_2 B_2 = E_2 H_2$ der vortheilhafteste Krümmungshalbmesser der Tasche.

Man sieht hieraus, dass es nicht möglich ist, den Krümmungshalbmesser der Tasche so zu wählen, dass der Schieber weder in Fig. 89, noch in Fig. 90 eine Bewegung macht, wenn man die Tasche hebt oder senkt; man muss sich demnach damit begnügen, den Halbmesser der Tasche so zu nehmen, dass die Bewegungen des Schiebers sowohl für die Stellung Fig. 89, als auch für die Stellung Fig. 90 möglichst klein ausfallen, und dies ist wohl dann der Fall, wenn der Krümmungshalbmesser der Tasche gleich dem arithmetischen Mittel aus $E_1 C_1$ und $E_2 C_2$ gemacht wird.

Nennen wir R diesen angemessensten Krümmungshalbmesser, so ist:

$$R = \frac{1}{2}\left(\overline{E_1 C_1} + \overline{E_2 C_2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Nennen wir ferner:

$\varrho = \overline{O_1 D_1} = \overline{O_1 F_1} = \overline{O_2 F_2} = \overline{O_2 D_2}$ die Excentrizitäten der Scheiben;
$l = \overline{D_1 C_1} = \overline{F_1 H_1} = \overline{D_2 C_2} = \overline{F_2 H_2}$ die Länge einer Excentrikstange;
$\widehat{V_1 O_1 D_1} = \widehat{v_1 O_1 F_1} = \widehat{V_2 O_2 F_2} = \widehat{v_2 O_2 D_2} = \alpha$ den Voreilungswinkel;
$\overline{C_1 H_1} = \overline{C_2 H_2} = 2c$ die Länge der Sehne, welche dem Bogen der Tasche entspricht,
so ist in Fig. 89:

$$\overline{E_1 C_1} : c = l : c - \varrho \sin.\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

Demnach:

$$\overline{E_1 C_1} = \frac{c\,l}{c - \varrho \cos.\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Ist dagegen in Fig. 90:

$$\overline{E_2 C_2} : c = l : c + \varrho \cos.\alpha$$

Demnach:

$$\overline{E_2 C_2} = \frac{c\,l}{c + \varrho \cos.\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Substituirt man diese Werthe von $\overline{E_1 C_1}$ und $\overline{E_2 C_2}$ in (1), so erhält man:

$$R = \frac{c^2 l}{c^2 - \varrho^2 \cos.^2 \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Allein $\varrho \cos.\alpha$ ist gegen c eine sehr kleine Grösse; $\varrho^2 \cos.^2 \alpha$ kann daher gegen c^2 vernachlässigt werden, und dann folgt:

$$R = l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Der angemessenste Krümmungshalbmesser für die Tasche ist also gleich der Länge der Excentrikstange.

Gleichung der Bewegung des Schiebers.

In Fig. 91 ist J der Mittelpunkt des Schiebers, G der Punkt, in welchem die Sehne CH die Linie OJ durchschneidet. Die Entfernung GJ ist streng genommen nicht constant, sondern ändert sich mit dem Winkel ω, allein diese Aenderung ist nur ganz unmerklich, wenn die Länge der Aufhängstange der Tasche und wenn auch die Länge CH der Tasche im Vergleich zur ganzen Bewegung des Schiebers gross ist; wir können also die Entfernung GJ als eine constante Länge betrachten, die wir gleich b setzen wollen.

Nennen wir:

$OD = OF = r \qquad \overline{DC} = \overline{FH} = l \qquad \overline{CH} = 2c \qquad \overline{OJ} = x \qquad \overline{GJ} = b \qquad \overline{CG} = y$

so ist zunächst:

$$x = \overline{OG} + b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Vermittelst Fig. 91 findet man leicht folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} y \cos.\psi &= l \sin.\varphi + \varrho \sin.\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \omega)\right] \\ (2c - y)\cos.\psi &= l \sin.\varphi_1 + \varrho \sin.\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \omega)\right] \\ \overline{OG} &= \varrho \cos.\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \omega)\right] + l \cos.\varphi - y \sin.\psi \\ \overline{OG} &= \varrho \cos.\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \omega)\right] + l \cos.\varphi_1 + (2c - y)\sin.\psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Aus den beiden ersteren dieser Gleichungen folgt:

$$\left.\begin{aligned} \sin.\varphi &= \frac{y \cos.\psi - \varrho \cos.(\alpha + \omega)}{l} \\ \sin.\varphi_1 &= \frac{(2l - y)\cos.\psi - \varrho \cos.(\alpha - \omega)}{l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Durch Subtraktion der dritten und vierten der Gleichungen (7) ergibt sich eine Gleichung, aus welcher man, mit Berücksichtigung, dass $\sin.(\alpha + \omega) - \sin.(\alpha - \omega) = 2 \cos.\alpha \sin.\omega$ ist, leicht findet:

$$\sin.\psi = \frac{2\varrho \cos.\alpha \sin.\omega + l(\cos.\varphi - \cos.\varphi_1)}{2c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)^*$$

Setzt man diesen Werth in die dritte der Gleichungen (7) und berücksichtigt (6), so erhält man:

$$x = b + \varrho \sin.(\alpha + \omega) - y\,\frac{\varrho}{c} \cos.\alpha \sin.\omega + l\left[\cos.\varphi - \frac{y}{2c}(\cos.\varphi - \cos.\varphi_1)\right] \quad \ldots \quad (10)$$

Die Gleichungen (8) und (9) sind absolut genau; die Gleichung (10) ist nur in so fern ungenau, als wir annehmen, dass $\overline{CG}$ und $\overline{BG}$ zwei von ω unabhängige Längen sind. Diese Ungenauigkeit ist aber in der That eine verschwindend kleine. Die Gleichung (10) würde also, wenn man aus derselben vermittelst (8) und (9) die Winkel φ φ_1 und ψ eliminirte, den Werth von x, d. h. die Position des Schiebers als Funktion von ω beinahe mit absoluter Genauigkeit bestimmen. Diese Elimination ist aber nicht möglich, man muss also, um x zu bestimmen, ein Annäherungsverfahren befolgen.

Die Winkel φ φ_1 und ψ sind jederzeit so klein, dass man sich erlauben darf, $\sin.\varphi = \varphi$ $\cos.\varphi = 1$ $\sin.\varphi_1 = \varphi_1$ $\cos.\varphi_1 = 1$ $\sin.\psi = \psi$ $\cos.\psi = 1$ zu setzen. Unter dieser Voraussetzung wird die Gleichung (10):

$$x = b + l + \varrho \sin.(\alpha + \omega) - \varrho\,\frac{y}{c} \cos.\alpha \sin.\omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

---

*) Vernachlässigt man das jederzeit nur kleine Glied $l(\cos.\varphi - \cos.\varphi)$, so erhält man eine Gleichung, die mit derjenigen übereinstimmt, welche *Phillips* in seinem Aufsatz, Seite 15, erst nach weitläufigen geometrischen Betrachtungen, analytischen Rechnungen und Integrationen von Gleichungen herausbringt.

Man findet diese Gleichung auch ganz leicht und direkt, wenn man unendlich lange Excentrikstangen und eine im Verhältniss zur Schieberbewegung sehr lange Tasche annimmt. Unter dieser Voraussetzung stimmen nämlich die Bewegungen der Punkte C und H mit den Horizontal-Bewegungen von D und F überein. Die Ablenkungen der Punkte C und H von ihrer mittleren Position sind dann, wie Fig. 92 zeigt,

$$\overline{MC} = \varrho \cos.\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \omega)\right] \text{ und } \overline{NH} = \varrho \cos.\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \omega)\right]$$

Es folgt daher unmittelbar aus dieser Figur:

$$\sin.\psi = \frac{\overline{MC} - \overline{NH}}{\overline{CH}} = \varrho\,\frac{[\sin.(\alpha + \omega) - \sin.(\alpha - \omega)]}{2c} = \frac{\varrho}{c} \cos.\alpha \sin.\omega$$

welches die von *Phillips* auf so weiten Umwegen gefundene Gleichung ist.

Der wahre mittlere Werth von x ist:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\, d\omega = b + l$$

$x - (b + l)$ ist demnach die Abweichung des Schiebers von seiner mittleren Position, in welcher er gegen die beiden Einströmungsöffnungen symetrisch steht. Setzen wir $x - (b + l) = \xi$, so wird vermöge (11):

$$\xi = \varrho \sin.(\alpha + \omega) - \varrho \frac{y}{c} \cos.\alpha \sin.\omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

und dieser Ausdruck bestimmt also annähernd das Hin- und Herpendeln des Schiebers um seine mittlere Position.

Nennt man X den Weg, den der Kolben zurücklegt, während die Kurbel den Winkel ω beschreibt, r den Halbmesser der Kurbel, L die Länge der Schubstange, μ den Winkel, den die Schubstange mit der Bewegungsrichtung des Kolbens bildet, so ist ganz streng:

$$X = r(1 - \cos.\omega) + L(1 - \cos.\mu) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Allein μ ist stets ein kleiner Winkel, man darf sich also wohl erlauben, das Glied $L(1 - \mathrm{Cos}.\mu)$ ganz zu vernächlässigen, und dann erhält man:

$$X = r(1 - \cos.\omega) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Vermittelst der Gleichungen (13) und (15), können wir nun die Beziehungen ausfindig machen, die zwischen den Construktionselementen und den Wirkungen des Apparates bestehen; dabei werden uns die Fig. 93 bis 97 behülflich sein.

Fig. 93 zeigt die mittlere Position des Schiebers, i ist die innere, e die äussere Ueberdeckung.
Fig. 94 zeigt die Stellung des Schiebers, wenn der Kolbenschub beginnt, oder wenn $\omega = 0$ ist, a ist das lineare Voreilen des Schiebers.
Fig. 95 zeigt die Stellung des Schiebers, wenn die Einströmungsöffnung am grössten ist, a_1 ist das Maas derselben.
Fig. 96 zeigt die Stellung des Schiebers, wenn die Einströmung aufhört, oder wenn die Expansion des Dampfes beginnt.
Fig. 97 zeigt die Stellung des Schiebers, wenn die Ausströmung aufhört, wenn also vor dem Kolben die Compression des Dampfes beginnt.

Bezeichnen wir durch $X_1\ X_2\ X_3$, $\Omega_1\ \Omega_2\ \Omega_3$ diejenigen Werthe von X und von ω, welche den Schieberstellungen (Fig. 95, 96, 97) entsprechen, so ist:

für $\omega =$	0	Ω_1	Ω_2	Ω_3
$X =$	0	X_1	X_2	X_3
$\xi =$	$e + a$	$e + a_1$	e	$-i$

Wir erhalten demnach vermöge der Gleichungen (13) und (15) die nachstehenden Beziehungen:

$$e + a = \varrho \sin.\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

$$\left.\begin{aligned} e + a_1 &= \varrho \sin.(\alpha + \Omega_1) - y\frac{\varrho}{c}\cos.\alpha \sin.\Omega_1 \\ X_1 &= r(1 - \cos.\Omega_1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$$\left.\begin{aligned} e &= \varrho \sin.(\alpha + \Omega_2) - y\frac{\varrho}{c}\cos.\alpha \sin.\Omega_2 \\ X_2 &= r(1 - \cos.\Omega_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

$$\left.\begin{aligned} -i &= \varrho \sin.(\alpha + \Omega_3) - y\frac{\varrho}{c}\cos.\alpha \sin.\Omega_3 \\ X_3 &= r(1 - \cos.\Omega_3) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Durch Differenziation der Gleichung (13) findet man

$$\frac{d\xi}{d\omega} = \varrho \cos.(\alpha + \omega) - \varrho \frac{y}{c} \cos.\alpha \cos.\omega$$

Nun ist aber Ω_1 derjenige Werth von ω, für welchen ξ am grössten wird, für welchen mithin $\frac{d\xi}{d\omega} = 0$ werden muss, wir erhalten demnach zur Bestimmung von Ω_1 die Gleichung

$$\varrho \cos.(\alpha + \Omega_1) - \varrho \frac{y}{c} \cos.\alpha \cos.\omega = 0$$

aus welcher folgt:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tang.}\,\Omega_1 &= \frac{1 - \frac{y}{c}}{\mathrm{tang.}\,\alpha} \\ \cos.\Omega_1 &= \frac{\mathrm{tang.}\,\alpha}{\sqrt{\mathrm{tang.}^2\alpha + \left(1 - \frac{y}{c}\right)^2}} \\ \sin.\Omega_1 &= \frac{1 - \frac{y}{c}}{\sqrt{\mathrm{tang.}^2\alpha + \left(1 - \frac{y}{c}\right)^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Setzt man diesen Werth von $\cos.\Omega_1$ und $\sin.\Omega_1$ in die erste der Gleichungen (17) so findet man

$$e + a_1 = \varrho \sqrt{\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha\left(1 - \frac{y}{c}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Diese Gleichungen (16) (18) (19) (20) (21) drücken die Beziehungen aus, welche zwischen den Construktionselementen und den Wirkungen des Steuerungsapparates bestehen, und wir können nun vermittelst derselben verschiedene Fragen beantworten.

Legen wir uns zunächst die Aufgabe vor, die Wirkungen eines Apparates, dessen Elemente gegeben sind, zu bestimmen.

In diesem Falle sind die gegebenen Grössen

$$e \quad i \quad \varrho \quad \alpha \quad c \quad y \quad r$$

Die zu suchenden Grössen dagegen

$$a \quad a_1 \quad \Omega_1 \quad X_1 \quad \Omega_2 \quad X_2 \quad \Omega_3 \quad X_3$$

und wir erhalten nun

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{wegen Gleichung } (16): & a = \varrho \sin.\alpha - e \\
\quad ״ \qquad ״ \quad (21): & a_1 = \varrho \sqrt{\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha\left(1 - \frac{y}{c}\right)^2} \\
\quad ״ \qquad ״ \quad (20): & \text{tang.}\,\Omega_1 = \dfrac{1 - \frac{y}{c}}{\text{tang.}\,\alpha} \\
\quad ״ \qquad ״ \quad (17): & X_1 = r\,(1 - \cos.\Omega_1) \\
\quad ״ \qquad ״ \quad (18): & e = \varrho \sin.(\alpha + \Omega_2) - y\,\frac{\varrho}{c}\cos.\alpha \sin.\Omega_2 \\
\quad ״ \qquad ״ \quad (18): & X_2 = r\,(1 - \cos.\Omega_2) \\
\quad ״ \qquad ״ \quad (19): & +i = -\varrho \sin.(\alpha + \Omega_3) + y\,\frac{\varrho}{c}\cos.\alpha \sin.\Omega_3 \\
\quad ״ \qquad ״ \quad (19): & X_3 = r\,(1 - \cos.\Omega_3)
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Die Werthe von Ω_2 und Ω_3 müssen aus den trigonometrischen Gleichungen, welche e und i ausdrücken, durch ein Annäherungsverfahren berechnet werden.

Senkt man die Tasche ganz herab, so dass $y = o$ wird, so wirkt nur allein das Vorwärts-Excentrum auf den Schieber und die Einströmungsöffnung, so wie auch die Dauer der Einströmung wird dann am grössten. Für diesen Fall werden die Gleichungen (22)

$$\left.\begin{array}{rl}
a & = \varrho \sin.\alpha - e \\
a_1 & = \varrho \\
\Omega_1 & = 90^\circ - \alpha \\
X_1 & = r\,(1 - \sin.\alpha) \\
e & = \varrho \sin.(\alpha + \Omega_2) \\
X_2 & = r\,(1 - \cos.\Omega_2) \\
i & = -\varrho \sin.(\alpha + \Omega_3) \\
X_3 & = r\,(1 - \cos.\Omega_3)
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

woraus sich die unbekannten Grössen sehr leicht berechnen lassen.

Legen wir uns ferner die Aufgaben vor, die Constructionselemente des Apparates so zu bestimmen, dass derselbe eine gewisse Wirkung hervorbringt, so sind die gegebenen Grössen

$$a \quad a_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad y \quad c \quad r$$

und die zu suchenden

$$e \quad i \quad \varrho \quad \alpha \quad \Omega_1 \quad X_1 \quad \Omega_2 \quad \Omega_3$$

Aus der Gleichung (16) und der ersten der Gleichungen (17) folgt:

$$\left.\begin{array}{l}
e = \dfrac{a_1 \sin.\alpha - a\sqrt{\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha\left(1 - \frac{y}{c}\right)^2}}{\sqrt{\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha\left(1 - \frac{y}{c}\right)^2} - \sin.\alpha} \\[2ex]
\varrho = \dfrac{a_1 - a}{\sqrt{\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha\left(1 - \frac{y}{c}\right)^2} - \sin.\alpha}
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Durch Division dieser Ausdrücke folgt:

$$\frac{e}{\varrho} = \frac{a_1 \sin.\alpha - a\sqrt{\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha\left(1 - \frac{y}{c}\right)^2}}{a_1 - a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Vermöge der ersten der Gleichungen (18) ist aber auch:

$$\frac{e}{\varrho} = \sin.(\alpha + \Omega_2) - \frac{y}{c}\cos.\alpha \sin.\Omega_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Man erhält daher, wenn man diese Werthe von $\frac{e}{\varrho}$ einander gleich setzt:

$$\sin.(\alpha + \Omega_2) - \frac{y}{c}\cos.\alpha \sin.\Omega_2 = \frac{a_1}{a_1 - a}\sin.\alpha - \frac{a}{a_1 - a}\sqrt{\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha\left(1 - \frac{y}{c}\right)^2} \quad \ldots \quad (27)$$

Die zu suchenden Grössen lassen sich nun auf folgende Art bestimmen:

Aus der zweiten der Gleichungen (18) folgt zunächst:

$$\cos.\Omega_2 = 1 - \frac{X_2}{r}$$

Zur Bestimmung von α dient die trigonometrische Gleichung (27), nämlich:

$$\sin.(\alpha + \Omega_2) - \frac{y}{c}\cos.\alpha \sin.\Omega_2 = \frac{a_1}{a_1 - a}\sin.\alpha - \frac{a}{a_1 - a}\sqrt{\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha\left(1 - \frac{y}{c}\right)^2}$$

Die zweite der Gleichungen (24) gibt:

$$\varrho = \frac{a_1 - a}{\sqrt{\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha\left(1 - \frac{y}{c}\right)^2} - \sin.\alpha}$$

Aus der Gleichung (16) folgt dann ferner:

$$e = \varrho \sin.\alpha - a \qquad (28)$$

Aus der ersten der Gleichungen (20):

$$\operatorname{tang.} \Omega_1 = \frac{1 - \frac{y}{c}}{\operatorname{tang.} \alpha}$$

Aus der zweiten der Gleichungen (17):

$$X_1 = r\,(1 - \cos. \Omega_1)$$

Aus der zweiten der Gleichungen (19):

$$\cos. \Omega_3 = 1 - \frac{X_3}{r}$$

Endlich aus der ersten der Gleichungen (19):

$$i = -\varrho \sin. (\alpha + \Omega_3) + y\,\frac{\varrho}{c} \cos. \alpha \sin. \Omega_3 \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Verlangt man, dass der Apparat gewisse Wirkungen hervorbringt, wenn nur allein das Vorwärts-Excentrum auf den Schieber einwirkt, so ist $y = o$ und dann werden die Gleichungen (28)

$$\left.\begin{aligned}
\cos. \Omega_2 &= 1 - \frac{X_2}{r} \\
\sin. (\alpha + \Omega_2) &= \frac{a_1}{a_1 - a} \sin. \alpha - \frac{a}{a_1 - a} \\
\varrho &= \frac{a_1 - a}{1 - \sin. \alpha} \\
e &= \varrho \sin. \alpha - a \\
\Omega_1 &= 90 - \alpha \\
X_1 &= r\,(1 - \sin. \alpha) \\
\cos. \Omega_3 &= 1 - \frac{X_3}{r} \\
i &= -\varrho \sin. (\alpha + \Omega_3)
\end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Nebst diesen zwei Hauptfragen, die durch die Gleichungen (22) (23) (28) (29) beantwortet werden, kann man noch sehr viele andere stellen, allein ich will diesem Gegenstand keine zu grosse Ausdehnung geben, weil ich der Ansicht bin, dass dieser Apparat nicht als Expansionssteuerung, sondern nur als gewöhnliche Steuerung einen praktischen Werth hat.

Als Expansionssteuerung ist der Apparat sehr unvollkommen, denn schwache Expansionen, die man wohl ganz gut hervorbringen kann, helfen nicht viel, und stärkere Expansionen geschehen sehr mangelhaft, indem die grösste Einströmungsöffnung zu klein und die Dauer der Compression und des Gegendruckes gegen das Ende des Schubes hin zu gross ausfällt.

Als gewöhnlicher Steuerungsapparat ist dagegen diese Vorrichtung eine vortreffliche, das Vor- und Rückwärtsfahren und selbst auch das Abstellen der Maschine kann so leicht

und sicher bewirkt werden; das Voreilen des Schiebers macht, dass der Dampf leicht in den Cylinder gelangen kann, und durch die Aufhebung der Einströmung, bevor noch der Kolben das Ende seines Schubes erreicht hat, bewirkt man, dass der Cylinder nicht nachträglich, wenn sich der Kolben kaum mehr bewegt, mit Dampf gefüllt wird.

Um den Gebrauch der aufgestellten Formeln zu zeigen, wollen wir eine numerische Anwendung machen.

Stellen wir an einen zu construirenden Apparat folgende Forderungen.

Wenn nur allein das Vorwärtsexcentrum auf den Schieber einwirkt, wenn also $y = o$ ist, soll:

1. die Einströmung durch 0·839 des Kolbenschubes stattfinden;
2. die Ausströmung aufhören, nachdem der Kolben 0.964 seines Schubes zurückgelegt hat;
3. das lineare Voreilen 0·007 Meter betragen;
4. die grösste Einströmungsöffnung 0·035 Meter betragen.

Es ist also gegeben:

$$y = o \qquad \frac{X_2}{2r} = 0{\cdot}839 \qquad \frac{X_3}{2r} = 0{\cdot}964 \qquad a = 0{\cdot}007 \text{ Meter} \qquad a_1 = 0{\cdot}035 \text{ Meter}$$

Für diese Daten findet man aus den Formeln (29):

$$\cos. \Omega_2 = 1 - 1{\cdot}678 = -0{\cdot}678 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Omega_2 = 132^\circ + 42'$$

$$\sin. (\alpha + 132^\circ + 42') = \frac{0{\cdot}035}{0{\cdot}035 - 0{\cdot}007} \sin. \alpha - \frac{0{\cdot}007}{0{\cdot}035 - 0{\cdot}007} \quad \alpha = 28^\circ$$

$$\varrho = \frac{0{\cdot}035 - 0{\cdot}007}{1 - \sin. 28^\circ} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varrho = 0{\cdot}0528 \text{ Meter}$$

$$e = 0{\cdot}0528 \sin. 28^\circ - 0{\cdot}007 \quad \ldots\ldots\ldots \quad e = 0{\cdot}024 \text{ Meter}$$

$$\Omega_1 = 90 - 28 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Omega_1 = 62^\circ$$

$$\frac{X_1}{2r} = 1 - \sin. 28^\circ \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{X_1}{2r} = 0{\cdot}5306$$

$$\cos. \Omega_3 = 1 - 1{\cdot}928 = -0{\cdot}928 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Omega_3 = 158^\circ\, 8'$$

$$i = -0{\cdot}0528 \sin. (158^\circ + 8' + 28^\circ) \quad \ldots\ldots\ldots \quad i = 0{\cdot}006$$

VI.

Die störenden Bewegungen einer Lokomotive.

Einleitung.

Stellt man sich in die Nähe des Geleises einer Eisenbahn, und beobachtet mit Aufmerksamkeit die Bewegung einer im vollen Laufe vorüber fahrenden Lokomotive, so hat es das Ansehen, als erfolgte diese Bewegung genau nach der Richtung des Geleises und mit vollkommen gleichförmiger Geschwindigkeit. Stellt man sich hingegen auf die Plattform der Lokomotive, so fühlt und sieht man sogleich, dass sie nicht so sanft als es von dem ersten Standpunkt aus zu sein schien dem Geleise folgt, sondern dass sie sehr mannigfaltigen heftigen Erschütterungen, Zuckungen und Schwankungen ausgesetzt ist. Man fühlt, dass die Stelle, auf der man steht, auf und nieder, vorwärts und rückwärts, so wie auch hin und her oscillirt, sieht ferner, dass der Kessel und alle mit demselben in Verbindung stehenden Theile sehr mannigfaltige geradlinige und drehende Schwingungen machen, und insbesondere, dass die Lokomotive dem Geleise nicht genau folgt, sondern zwischen demselben hin und her schlängelt.

Die wirkliche Bewegung der Lokomotive erfolgt also nicht in so einfacher Weise, als sie einem neben der Bahn stehenden Beobachter vor sich zu gehen scheint, sondern die ganze Bewegung ist im Gegentheil aus sehr vielen einzelnen Bewegungen zusammengesetzt.

Allein die Lokomotive sollte sich, um ihrem Zweck vollkommen zu entsprechen, mit absolut gleichförmiger Geschwindigkeit und in der Weise fortbewegen, dass jeder ihrer Punkte eine mit der Axe des Geleises vollkommen congruente Kurve beschriebe, so zwar, dass die in den Wägen befindlichen Gegenstände und Personen von der Fortbewegung des Zuges gar nicht affizirt würden. Diese Abweichungen des wirklichen Bewegungszustandes von dem gleichförmig mittleren sind demnach schädliche Störungen, die so viel als möglich geschwächt oder beseitiget werden sollten, denn diese Störungen zerrütteln den Bau der Lokomotive und können, wenn sie in einer gewissen Stärke auftreten, ein Ausgleisen der Lokomotive veranlassen.

Die praktische Beseitigung oder Schwächung dieser Störungen erfordert eine genaue Kenntniss der Ursachen und Umstände, durch welche sie hervorgerufen werden, und diese Kenntniss erlangt man, wenn man die wahre Bewegung der Lokomotive mit Hilfe der allgemeinen Grundsätze der Mechanik untersucht und berechnet, was in der folgenden Untersuchung geschehen soll.

Zuvörderst wollen wir die einzelnen Elementarbewegungen, aus welchen die totale Bewegung zusammengesetzt ist, namhaft machen; diese Elementarbewegungen sind:

1) *Der mittlere Fortlauf.* Das ist diejenige gleichförmige Bewegung, welche eintreten müsste, wenn die verschiedenen Störungen gar nicht vorhanden wären, und wenn in

jedem Augenblick die auf die Lokomotive einwirkenden treibenden Kräfte mit den Widerständen im Gleichgewicht wären.

2) *Die periodische Bewegung des Schwerpunktes.* Im Beharrungszustand der Bewegung ist wohl die Kraft, mit welcher die Lokomotive durch den Dampfdruck getrieben wird, mit den Widerständen, im Mittel genommen, im Gleichgewicht, aber nicht in jedem einzelnen Zeitaugenblick der Bewegung, denn die beiden Kolben wirken auf zwei unter einem rechten Winkel gegen einander gestellte Kurbeln ein, was zur Folge hat, dass das statische Moment der Kraft, mit welcher die Kurbelaxe umgetrieben wird, einen periodischen veränderlichen Werth hat. Dieses Moment ist am kleinsten, wenn einer der beiden Kolben am Ende, der andere gleichzeitig auf halbem Schub steht, es ist am grössten, wenn beide Kurbeln mit der Bewegungsrichtung der Kolben Winkel von 45° bilden. Die Maschine wird also im Beharrungszustand ihrer Bewegung mit einer Kraft vorwärtz getrieben, die bald stärker, bald schwächer ist als die Widerstände, ihre Geschwindigkeit muss also bald zu-, bald abnehmen. Die hieraus entstehende Zuckung ist jedoch, wie wir früher (Seite 94) gezeigt haben, wegen der grossen Masse der Lokomotive, so wie auch wegen der Raschheit, mit der sie sich in der Regel bewegt, so schwach, dass ihre Existenz zwar durch Rechnung nachgewiesen, aber durch das Gefühl, sowie auch durch Messungen gar nicht erkannt werden kann.

3) *Das Zucken.* Die Massen der Kolben, der Kolbenstangen und Schubstangen, sowie auch die Massen einiger Steuerungstheile haben gegen das Wagengestell eine hin- und hergehende Bewegung. Der Schwerpunkt des vollständigen Lokomotivbaues hat daher gegen den Rahmenbau eine periodisch veränderliche Lage, allein diese Massenbewegungen können (nach dem Grundsatz der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes eines Massensystems) auf die Bewegungen des Schwerpunktes keinen Einfluss ausüben, es muss also die Verschiebung des Schwerpunktes, welche durch den Hin- und Hergang der Massen angeregt wird, durch eine gewisse Bewegung der Massen des Rahmen- und Kesselbaues aufgehoben werden. Gehen beide Kolben vorwärts, so muss gleichzeitig der Rahmen mit dem Kessel zurückweichen, gehen beide Kolben rückwärts, so muss der Rahmen mit dem Kessel vorwärts rücken. Bewegen sich die Kolben mit gleicher Geschwindigkeit nach entgegengesetzter Richtung, so kann in diesem Augenblick der Rahmenbau mit dem Kessel weder vorwärts noch rückwärts. Man sieht also, dass durch die hin- und hergehenden Bewegungen der Massen des Kolbens, der Kolbenstange, der Schubstange etc., ein Vorwärts- und Rückwärtsbewegen des Rahmenbaues, mithin ein Zucken desselben veranlasst wird.

Man kann sich diese Wirkung der hin- und hergehenden Massen auch auf folgende Art erklären. Diese hin- und hergehenden Massen einer Maschine werden durch die erste Hälfte eines Schubes beschleuniget, in der zweiten Hälfte verzögert; dies ist aber nur möglich, wenn die auf diese Massen nach entgegengesetzter Richtung wirkenden Kräfte, nämlich der Druck des Dampfes, gegen eine Kolbenfläche, und der Rückdruck des Kurbelzapfens gegen die Schubstange nicht gleich gross sind, sondern wenn der Rückdruck des Kurbelzapfens gegen die Schubstange in der ersten Hälfte des Schubes kleiner, in der zweiten Hälfte des Schubes grösser ist als der Dampfdruck gegen den Kolben. Nun wirkt aber der in einem Cylinder befindliche Dampf nicht nur gegen eine der Grundflächen des Kolbens, sondern auch gleichzeitig gegen die dieser Grundfläche zugewendete Deckelfläche des Cylinders, und diese Pressungen sind von gleicher Stärke. Durch die Wirkung des Dampfes auf jede der beiden Maschinen wird daher der Rahmenbau durch ungleiche Kräfte nach entgegengesetzter Richtung gepresst und die Resultirende dieser Kräfte wirkt in den auf einander folgenden Schubhälften abwechselnd vorwärts und rückwärts; es wird demnach der Wagenbau durch die Wirkung des Dampfes auf jede der beiden Maschinen abwechselnd vorwärts und rückwärts getrieben und da die Kurbeln der beiden Maschinen nicht um 180°, sondern um 90° gegeneinander gestellt sind, so können sich diese Wirkungen der beiden Maschinen auf das Wagengestelle, mit Ausnahme einzelner Zeitmomente, nicht aufheben, Wagenbau und Kessel müssen daher wegen der abwechselnden Beschleunigung und Verzögerung der hin- und hergehenden Massen in eine zuckende Bewegung gerathen. Diese störende Bewegung kann jedoch, wie zuerst *Le Chatelier* gezeigt hat, vollständig aufgehoben werden, wenn die Triebräder der Lokomotive mit Massen versehen werden, die durch ihre Centrifugalkraft die ungleiche Wirkung der Schubstangen gegen die Kurbelzapfen aufheben.

4) *Das Schlingern.* Nebst diesen zuckenden Bewegungen, veranlassen die hin- und hergehenden Massen auch noch eine oscillirende drehende Bewegung der Lokomotive um eine durch ihren Schwerpunkt gehende Vertikalaxe; denn die Pressungen des Dampfes gegen die Deckelflächen der Cylinder und die Pressungen der Schubstangen gegen die Kurbelzapfen, halten sich auch in Bezug auf Drehung um eine vertikale Schwerpunktsaxe nicht das Gleichgewicht. Diese Kräfte bestreben sich also, die Lokomotive abwechselnd hin und her zu drehen, und da die Räder zwischen den Schienen einen gewissen, wenn auch kleinen Spielraum haben, so setzt sich jene Drehung mit der fortschreitenden Bewegung zu einer schlängelnden Bewegung zusammen, die, insbesondere wenn der Druck der Vorderräder gegen die Bahn schwach ist, ein Ausgleisen der Lokomotive veranlassen kann.

Auch diese Schlängelung kann ganz aufgehoben werden, wenn man die Triebräder mit Massen versieht, die durch ihre Centrifugalkraft die Drehung aufheben, welche durch die hin- und hergehenden Massen angeregt wird.

Nebst den bisher angeführten Elementarbewegungen kommen noch drei andere, einzig und allein von dem Bau der Lokomotive herrührende schwingende Bewegungen vor. Der zu einem Ganzen vereinigte Bau des Rahmens, des Kessels und der Cylinder wird stets durch Federn getragen, die auf den Axenbüchsen der Trieb- und Tragräder direckt oder indireckt aufsitzen, dieser Bau liegt also auf einer elastischen Unterlage, die möglicher Weise dreierlei Bewegungen zulässt und diese Möglichkeiten werden durch den Druck, den die Gleitstücke, wegen der im Allgemeinen schiefen Lage der Schubstangen, gegen die Führungen beim Vorwärtsfahren nach vertikaler Richtung aufwärts, beim Zurückfahren nach vertikaler Richtung abwärts ausüben, zur Wirklichkeit. Diese Bewegungen befolgen sehr komplizirte Gesetze, weil die Gleitstücke ihren Ort verändern und die Intensitäten ihrer Pressungen mit der wechselnden Neigung der Schubstangen periodisch veränderlich sind. Diese drei Bewegungen sind nun:

5) *Das Wogen.* Vertikalschwingung des Schwerpunktes. Der an den Federn hängende Bau wird durch sein Gewicht nach abwärts, durch die Elastizitätskraft der Federn und durch die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale nach aufwärts zur Bewegung angeregt. Allein die Elastizitätskräfte der Federn sind mit ihrem Biegungszustand, und die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale sind mit der Stellung der Schubstangen periodisch veränderlich, und dadurch entsteht nach vertikaler Richtung eine schwingende Bewegung des Schwerpunktes, die wir das Wogen der Lokomotive nennen wollen.

6) *Das Wanken.* (Drehung um eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende Längenaxe). Die auf den Wagenbau nach vertikaler Richtung wirkenden Kräfte sind im Allgemeinen in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende Längenaxe nicht im Gleichgewicht, müssen daher, da sie periodisch veränderlich sind, ein Hin- und Herdrehen, also ein Wanken des ganzen Baues hervorbringen. Dadurch werden die Räder der Lokomotive bald stark, bald schwach gegen die Bahn gedrückt, und wenn in einem Moment, in welchem der Druck eines Vorderrades gegen die Bahn schwach ist, durch eine an der Bahn befindliche Unebenheit ein Stoss gegen dieses schwach niederdrückende Rad ausgeübt wird, so kann ein Ausgleisen der Lokomotive die Folge sein. Dieses Wanken, so wie auch das früher besprochene Auf- und Niederwogen der Lokomotive kann nicht

vollständig aufgehoben werden, denn die Federn müssen vorhanden sein, weil sonst die von den Unebenheiten der Bahn entstehenden Stösse zu hart wären, und die Pressungen der Gleitstücke gegen die Leitlineale können auch nicht aufgehoben werden; diese störenden Bewegungen können jedoch durch eine zweckmässige Bauart der Lokomotive so weit gemässigt werden, dass sie nicht mehr gefährlich werden. Durch welche Construktionsweise dieses möglich wird, wird sich in der Folge zeigen.

7) *Das Nicken.* (Drehung um eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende Queraxe). Jene vertikal aufwärts wirkenden Pressungen der Federn und der Gleitstücke sind aber auch in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende horizontale Queraxe nicht im Gleichgewicht, müssen also periodische Drehungen um diese Axe, demnach ein abwechselndes Heben und Senken der Enden des auf den Federn liegenden Baues hervorbringen. Jedesmal, wenn das vordere Ende des Wagenbaues aufwärts schwingt, ist der Druck der Vorderräder gegen die Bahn schwach, und wenn in einem solchen Moment durch eine Unebenheit der Bahn die Vorderräder in die Höhe gestossen werden, kann es geschehen, dass ihre Berührung mit der Bahn aufhört und dass sie aus dem Geleise gelenkt werden. Es ist also auch diese Störung hinsichtlich des Ausgleisens sehr bedenklich, und soll daher so weit als möglich geschwächt werden, was wiederum nur durch eine geeignete Bauart der Lokomotive geschehen kann.

Die aus dem Wogen, Wanken und Nicken sich zusammensetzende Bewegung kann man das Gaukeln nennen.

Den mittleren Fortlauf der Lokomotive und die periodische Bewegung des Schwerpunktes haben wir bereits in dem vorhergehenden Abschnitte behandelt; die übrigen der genannten Bewegungen werden wir in diesem Abschnitt erschöpfend untersuchen.

Das Zucken und Schlingern.

Bewegungen einer frei hängenden Lokomotive.

Wenn man eine nicht balanzirte Lokomotive mit vier langen Ketten, welche den Rahmen an seinen vier Ecken fassen, aufhängt, so dass sie frei in der Luft schwebt, und sich wie ein Pendel, in horizontalem Sinne, nach jeder Richtung bewegen kann, hierauf den Kessel heizt, und den Dampf auf die Maschine wirken lässt, so gerathen nicht nur die Kolben, die Schubstangen, die Kurbelaxen und sämmtliche Triebräder in Bewegung, sondern es entsteht auch in dem Rahmenbau und den damit verbundenen Theilen (Kessel, Dampfcylinder etc.) eine aus zwei Schwingungen zusammengesetzte Bewegung, aus einer Schwingung in der Richtung der Längenaxe der Lokomotive und aus einer drehenden Schwingung um eine Vertikalaxe. Die Ursachen, welche diese beiden Schwingungen in einer frei hängenden Lokomotive veranlassen, sind auch vorhanden, wenn die Lokomotive nicht aufgehängt, sondern auf die Bahn gestellt ist und auf derselben fortläuft, und sie sind es, welche dann die Erscheinungen verursachen, die wir Zucken und Schlingern genannt haben.

Eine genaue Kenntniss der schwingenden Bewegungen einer frei hängenden Lokomotive ist in zweifacher Hinsicht von praktischem Werth, denn zunächst lernen wir dadurch die Bewegungen kennen, welche eine auf der Bahn fortlaufende Lokomotive, vermöge ihres inneren Baues, zu machen strebt und theilweise auch wirklich macht; denn eine Lokomotive, die frei hängend Längen-Oscillationen und drehende Schwingungen zeigt, wird, wenn man sie auf die Bahn stellt und durch Dampf forttreibt, vermöge der Ursache, welche die Längenschwingungen veranlasst, mit periodischer Geschwindigkeit fortrollen, und vermöge der Ursache, welche die drehenden Schwingungen erzeugt, ihre Bewegungsrichtung zwischen dem Geleise bald nach der einen, bald nach der andern Seite zu ändern suchen und die Energie, mit welcher sie dies zu thun strebt, wird aus der Kraft beurtheilt werden können, mit welcher die drehenden Schwingungen im frei hängenden Zustand erfolgen. Den Hauptvortheil, den wir aus dem Studium der Bewegungen einer frei hängenden Lokomotive ziehen können, besteht aber darin, dass wir dadurch die Mittel kennen lernen, durch welche diese Schwingungen ganz aufgehoben werden können, und diese Mittel sind zugleich diejenigen, welche das Zucken und Schlingern einer auf der Bahn laufenden Lokomotive ganz aufheben, denn eine Lokomotive, die im aufgehängten Zustand keinerlei Schwingungen zeigt, kann, wenn sie auf die Bahn gestellt und fortgetrieben wird, kein Bestreben zu einer Geschwindigkeits- oder Richtungsänderung der Bewegung äussern. Die Mittel, welche die Schwingungen der frei hängenden Lokomotive beseitigen, sind also zugleich die Mittel, durch welche das Zucken und Schlingern aufgehoben werden kann.

Das Zucken.

Längenschwingungen einer frei hängenden Lokomotive.

Diese Schwingungen kann man durch verschiedene Methoden berechnen. Eine Methode bietet der Grundsatz der Erhaltung des Schwerpunktes dar, und nach dieser wollen wir die Berechnung durchführen.

Eine frei hängende, durch die innere Kraft des Dampfes in Bewegung gebrachte Lokomotive kann als ein Massensystem angesehen werden, auf welches keine nach horizontaler Richtung zielende äussere Kräfte einwirken, da nun die inneren Kräfte eines solchen Systems den Ort seines Schwerpunktes nicht zu verrücken vermögen, so müssen die Bewegungen sämmtlicher Massen so vor sich gehen, dass der dem Massensystem in jedem Augenblick entsprechende ideale Schwerpunkt stets an dem gleichen Ort bleibt. Hieraus folgt, dass der Rahmenbau zurückweichen muss, wenn beide Kolben vorwärts gehen, und vorwärts schwingen wird, wenn beide Kolben zurückgehen etc., dass mithin Längenoscillationen des Rahmenbaues eintreten müssen. Es sei nun Tab. XI, Fig. 43 der Grundriss, Tab. XII., Fig. 44 der Aufriss der Lokomotive in einem Augenblick der Bewegung, in welchem die Mittellinie $A x_1$ des Rahmens mit einer durch den idealen Schwerpunkt B des Ganzen Systems gezogenen fixen geraden Linie O x einen Winkel φ bildet, der vermöge der drehenden Schwingungen einen veränderlichen Werth hat, in welchem Augenblick ferner die Kurbeln der rechtseitigen und linkseitigen Maschine mit einer Horizontalebene, beziehungsweise die Winkel α und $\frac{\pi}{2} - \alpha$ bilden. O sei ein in der Linie B x willkührlich angenommener fixer Punkt, A der Mittelpunkt der Kurbelaxe, C der Schwerpunkt aller Theile der Lokomotive, mit Ausnahme der Kolben, Kolbenstangen, Schubstangen und der Kurbelkörper.

Nennen wir:

$\overline{OB} = a$ die Entfernung des idealen Schwerpunktes des totalen Massensystems von dem fixen Punkt O;

$\overline{AC} = b$ die Entfernung des Schwerpunktes aller in C vereinigt gedachten Massen vom Mittelpunkt der Kurbelaxe;

$\overline{AB} = \xi$ die Entfernung des Mittelpunktes der Kurbelaxe von dem idealen Schwerpunkt B des totalen Massensystems in dem Augenblick, in welchem die Winkel α und φ gelten;

$\left. \begin{array}{l} AP_1 = x_1 \\ MP_1 = y_1 \end{array} \right\}$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes M der Lokomotive in Bezug auf die Linie $A x_1$;

$\left. \begin{array}{l} OP = x \\ MP = y \end{array} \right\}$ die Coordinaten des Punktes M in Bezug auf die Linie O B x;

G das Gewicht der vollständigen Lokomotive sammt Wassergehalt des Kessels;

q das Gewicht eines Kurbelkörpers sammt Kurbelwarze;

ϱ die Entfernung des Schwerpunktes von q von der Kurbelaxe;

S die Summe der Gewichte eines Kolbens einer Kolbenstange sammt Kreuzkopf und einer Schubstange;

L die Länge einer Kolbenstange;

r den Halbmesser einer Kurbel;

s die Entfernung des Schwerpunktes einer Masse S vom Mittelpunkt des Kurbelzapfens, wenn Kurbel, Schubstange und Kolbenstange in eine geraden Linie fallen,

so ist zunächst:

$$\left. \begin{array}{l} x = a + (x_1 - \xi) \cos.\varphi - y_1 \sin.\varphi \\ y = \quad (x_1 - \xi) \sin\varphi + y_1 \cos.\varphi \end{array} \right| \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

Nennt man m das Gewicht des im Punkt M befindlichen Massentheilchens der Lokomotive, so hat man zur Bestimmung des Ortes des idealen Schwerpunktes B die Beziehung;

$$\Sigma m x = a \Sigma m \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

wobei Σ das Summenzeichen ist, welches auf sämmtliche Massenpunkte der totalen Lokomotive auszudehnen ist.

Setzt man für x den Werth, welchen die erste der Gleichungen (1) darbietet, so wird:

$$\Sigma m \left[a + (x_1 - \xi) \cos.\varphi - y_1 \sin.\varphi\right] = a \Sigma m \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

oder weil $\Sigma m a = a \Sigma m$ ist:

$$\Sigma m \left[(x_1 - \xi) \cos.\varphi - y_1 \sin.\varphi\right] = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

In diesem Ausdruck darf man $\sin.\varphi$ und $\cos.\varphi$ vor das Summenzeichen setzen, weil der Winkel φ für alle Massenpunkte der Lokomotive den gleichen Werth hat, man erhält daher statt dieser Gleichung (4) die folgende:

$$\cos.\varphi\,(\Sigma m x_1 - \Sigma m \xi) - \sin.\varphi\,\Sigma m y_1 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

Nun ist aber $\Sigma m y_1 = 0$, indem jedem Punkt, welcher sich linker Hand von der Mittellinie $A x_1$ befindet, ein zweiter Punkt rechter Hand entspricht, für welchen y_1 eben so gross, aber negativ ist. Dann ist ferner $\Sigma m \xi = \xi \Sigma m = \xi G$. Die Gleichung (5) wird daher, weil $\cos.\varphi$ nicht Null ist:

$$\Sigma m x_1 = \xi G \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

wobei Σ wie früher auf sämmtliche Massenpunkte der ganzen Lokomotive auszudehnen ist.

Bezeichnet man für einen Augenblick durch $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$ diejenigen Theile der ganzen Summe $\Sigma m x_1$, welche sich auf die Gewichte $G - 2q - 2S$ $2q$ und $2S$ beziehen, so ist, wenn man die Hin- und Herbewegung der Steuerungstheile unberücksichtiget lässt:

$$\Sigma m x_1 = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Est ist aber $\Sigma_1 = (G - 2q - 2S)\, b$:

$$\Sigma_2 = q\varrho \cos.\alpha + q\varrho \sin.\alpha = q\varrho(\cos.\alpha + \sin.\alpha)$$

Ferner, wenn man die Winkel vernachlässigt, welche die Schubstangen mit den Kolbenstangen bilden:

$$\Sigma_3 = S(r\cos.\alpha + s) + S(r\sin.\alpha + s)$$

$$\Sigma_3 = S\left[r(\cos.\alpha + \sin.\alpha) + 2s\right]$$

Man hat demnach:

$$\Sigma m x_1 = b(G - 2q - 2S) + q\varrho(\cos.\alpha + \sin.\alpha) + S\left[r(\cos.\alpha + \sin.\alpha) + 2s\right]$$

oder:

$$\Sigma m x_1 = (G - 2q - 2S)\, b + 2Ss + (q\varrho + Sr)\,(\cos.\alpha + \sin.\alpha)$$

Führt man diesen Werth von $\Sigma m x_1$ in die Gleichung (6) ein und sucht dann den Werth von ξ, so findet man:

$$\xi = \frac{(G - 2g - 2S)\, b + 2Ss}{G} + \frac{q\varrho + Sr}{G}(\cos.\alpha + \sin.\alpha) \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Der Werth von ξ ist, wie man sieht, mit dem Winkel α periodisch veränderlich, d. h die Kurbelaxe der Lokomotive, der Rahmenbau und alle mit demselben starr verbundenen Körper bewegen sich daher bei jeder Umdrehung der Triebräder vorwärts und rückwärts, oder die Lokomotive macht periodische Längenschwingungen. Von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 45^\circ$ nimmt die Summe $\cos.\alpha + \sin.\alpha$ und nimmt folglich auch der Werth von ξ fortwährend zu, der Rahmen bewegt sich also in dieser Zeit rückwärts. Von $\alpha = 45^\circ$ bis $\alpha = 180 + 45^\circ$ nimmt der Werth von $\sin.\alpha + \cos.\alpha$ und nimmt folglich auch ξ fortwährend ab, und in dieser Zeit bewegt sich der Rahmen vorwärts.

Der gösste Werth von ξ, nämlich der dem Winkel 45° entsprechende ist:

$$\frac{(G - 2q - 2S)\, b + 2Ss}{G} + \frac{q\varrho + Sr}{G}(\sin.45^\circ + \cos.45^\circ) =$$

$$\frac{(G - 2q - 2S)\, b + 2Ss}{G} + \frac{q\varrho + Sr}{G}\sqrt{2}$$

Der kleinste Werth von ξ, nämlich der dem Winkel $180 - 45$ entsprechende ist:

$$\frac{(G - 2q - 2S)\, b + 2Ss}{G} + \frac{q\varrho + Sr}{G}\left[\sin.(180 + 45^\circ) + \cos.(180 + 45^\circ)\right] =$$

$$\frac{(G - 2q - 2S)\, b + 2Ss}{G} - \frac{q\varrho + Sr}{G}\sqrt{2}:$$

Die ganze Verschiebung des Rahmens während jeder Umdrehung der Triebräder ist demnach (die Differenz aus dem grössten und kleinsten Werth von ξ):

$$\frac{q\varrho + Sr}{G}\, 2\sqrt{2}$$

Sie ist, wie man sieht, ganz unabhängig, sowohl von der Geschwindigkeit, so wie auch von dem Gesetze, nach welchem die drehende Bewegung der Triebaxe erfolgt, und richtet sich vorzugsweise nur nach dem Verhältniss $\frac{S}{G}$ zwischen den hin- und hergehenden Massen und der ganzen Masse der Lokomotive. Da dieses Verhältniss jederzeit einen sehr kleinen Werth hat, so beträgt diese Verschiebung allerdings nicht viel, allein wenn eine Lokomotive auf der Bahn im schnellen Lauf ist, wobei die Triebräder in einer Sekunde circa 3 Umdrehungen machen, kommen in jeder Sekunde 3 solche Schüttlungen vor, sie treten also dann mit sehr grosser Heftigkeit auf.

Für eine Personenlokomotive kann man nehmen:

$$G = 24000 \text{ Kilg.} \qquad q = 60 \text{ Kilg.} \qquad S = 224 \text{ Kilg.}$$

$$r = 0{\cdot}23 \text{ Meter} \qquad \varrho = 0{\cdot}18 \text{ Meter.}$$

und dann wird:

$$\frac{q\varrho + Sr}{G}\, 2\sqrt{2} = 0.007 \text{ Meter.}$$

Das Zucken beträgt also hier nur 7 Millimeter, allein wenn man sich vorstellt, dass diese grosse Masse in jeder Sekunde 3 mal und jedesmal um 7 Millimeter geschüttelt wird, so wird man wohl erkennen, dass dies eine sehr heftige Bewegung sein müsse, die zunächst auf die Verbindung aller Theile der Maschine merklich nachtheilig wirken kann, dann aber noch ein abzuckendes Anziehen der Lokomotive zur Folge haben muss.

Beträchtlicher als in obigem Falle wird die Zuckung oder Schüttlung bei Maschinen mit gekuppelten Rädern, wegen der Masse der Kupplungsstangen, die ebenfalls in s eingerechnet werden müssen, vorausgesetzt, dass die Bewegungsrichtung der Kupplungsstangen mit jener der Schubstangen übereinstimmt, wie dies bei gekuppelten Maschinen mit aussen liegenden Cylindern der Fall ist. Bei Maschinen mit innen liegenden Cylindern ist es dagegen möglich, dass die äusseren Kupplungsstangen die Schüttlung vermindern, dies ist nämlich der Fall, wenn die äusseren Kurbeln der Kupplungsstangen gegen die inneren Maschinenkurbeln um 180° verstellt sind.

Bei Güterlokomotiven mit äusseren Cylindern und äusseren Schub- und Kupplungsstangen ist es, um die Schüttlung zu schwächen, gut, diese Stangen alle gerade nur so stark zu halten, als es für die Sicherheit durchaus nothwendig ist.

Bei nicht gekuppelten Maschinen ist es aber hinsichtlich der Schüttlung ganz gleichgültig, ob die Cylinder innen oder aussen liegen, weil diese Lage der Cylinder in diesem Falle auf das Gewicht der Schubstange und überhaupt auf das Gewicht der hin- und hergehenden Massen beinahe keinen Einfluss hat.

Es ist schon oben erwähnt worden, dass das Zucken wesentlich nur von dem Verhältniss $\frac{S}{G}$ abhängt; so lange dieses Verhältniss seinen Werth nicht ändert, ist es also in Betreff des Zuckens ganz gleichgültig, wie die Maschine sonst gebaut ist, ob sie äussere oder innere Cylinder hat, ob die Triebräder vor oder hinter der Feuerbüchse angebracht sind und wie überhaupt die Radstellung beschaffen ist. Auch ist es gleichgültig, ob die Spurweite gross oder klein ist, ob äussere oder innere Rahmen genommen werden, ob der Schwerpunkt des Baues weiter vorn oder weiter zurück liegt, ob er hoch oder tief liegt u. s. w., mit einem Wort: das Zucken schreibt über den Bau der Locomotive nichts vor, ausgenommen ein möglichst geringes Gewicht der hin- und hergehenden Masse; und selbst auch von dieser Anforderung kann man sich vollständig befreien, wenn man balanzirende Massen anbringt, welche, wie wir sogleich sehen werden, das Zucken vollständig beseitigen.

Aufhebung der Längenschwingungen oder des Zuckens durch Massen.

Es gibt zwei Mittel, durch welche das Zucken ganz aufgehoben werden kann, nämlich durch Anbringung entweder von hin- und hergehenden oder von rotirenden Massen. Das Mittel der rotirenden Massen kann bei allen Arten von Lokomotiven leicht angewendet werden, jenes der hin- und hergehenden Massen jedoch nur bei Locomotiven mit innen liegenden Cylindern und mit gekuppelten Rädern. Macht man nämlich bei einer solchen Maschine das Gewicht der auf einer Seite der Lokomotive befindlichen Kupplungsstangen gleich $\frac{\varrho q + r S}{r}$, die äusseren Kurbeln der Kupplungsstangen so lang als die inneren Kurbeln und stellt sie den innern Kurbeln diametral gegenüber, so ist klar, dass dann die Schüttlung ganz aufgehoben wird, denn bei einer solchen Einrichtung ändert der den sämmtlichen hin- und hergehenden Massen entsprechende Schwerpunkt seine Lage gegen die Rahmen nicht, es ist also kein Grund vorhanden, wesshalb der Schwerpunkt des Rahmenbaues seinen Ort verändern sollte. Eine solche Lokomotive wird also im aufgehängten Zustand keine Längenschwingungen machen, und wenn sie auf der Bahn läuft, kein Zucken zeigen.

Wir wollen nun sehen, ob und auf welche Weise die Längenschwingungen an frei hängenden Lokomotiven durch Anbringung von rotirenden Massen aufgehoben werden können.

Wir versehen jedes dieser Räder mit Gewichten von gleicher Grösse (Fig. 44). Es sei Q eines dieser Gewichte, ϱ_2 die Entfernung des Schwerpunktes dieser Gewichte von der geometrischen Axe der Kurbelwelle, $180° - \gamma°$ und $180° + \gamma°$ die Winkel, welche die nach den Schwerpunkten gehenden Radien mit den Richtungen der Kurbeln bilden.

Wir berechnen zunächst die Längenschwingungen der Lokomotive, wenn sie mit diesen Gewichten versehen ist.

Es gilt auch hier wiederum wie bei der nicht balanzirten Lokomotive die Gleichung (6) Seite 113, nämlich

$$\Sigma m x_1 = \Sigma G \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

allein das Summenzeichen muss hier auch auf die Balanzirgewichte Q ausgedehnt werden.

Derjenige Theil der Summe $\Sigma m x_1$ welcher sich auf die Balanzirgewichte bezieht, ist offenbar

$$-\varrho_2 Q \cos.(\alpha - \gamma) - \varrho_2 Q \cos.(90 - \alpha - \gamma) = -\varrho_2 Q \left[\cos.(\alpha - \gamma) + \sin.(\alpha + \gamma)\right]$$

Die Theile der Summe $\Sigma m x_1$ welche sich auf die übrigen Massen der Lokomotive beziehen, sind hier wie bei der nicht balanzirten Lokomotive

$$(G - 2q - 2S) b + 2 S s + (q \varrho + r S)(\sin.\alpha + \cos.\alpha)$$

und somit erhalten wir:

$$G \xi = (G - 2q - 2S) b + 2 S s + (q \varrho + r S.)(\sin.\alpha + \cos.\alpha) - \varrho_2 Q \left[\cos.(\alpha - \gamma) + \sin.(\alpha + \gamma)\right]$$

oder auch weil

$$\cos.(\alpha - \gamma) + \sin.(\alpha + \gamma) = (\sin\alpha + \cos.\alpha)(\sin\gamma + \cos\gamma).$$

$$G \xi = (G - 2q - 2S) b + 2 S s + \left[q \varrho + r S - \varrho_2 Q (\sin.\gamma + \cos.\gamma)\right]\left[\sin.\alpha + \cos.\alpha\right]$$

Hieraus folgt;

$$\xi = \frac{(G - 2q - 2S) b + 2 S s}{G} + \frac{q \varrho + r S - \varrho_2 Q (\sin.\gamma + \cos.\gamma)}{G} (\sin.\alpha + \cos.\alpha) \quad \ldots \quad (10)$$

Wenn keine Längenschwingungen stattfinden sollen, so muss ξ denselben Werth haben für jeden Werth von α; dies ist aber nur möglich, wenn

$$q \varrho + r S - Q \varrho_2 (\sin.\gamma + \cos.\gamma) = 0$$

oder wenn

$$\sin.\gamma + \cos\gamma = \frac{\varrho q + r S}{Q \varrho_2} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Da diese Gleichung drei unbestimmte Grössen, nämlich γ Q und ϱ_2 enthält, so können die Längenschwingungen durch sehr verschiedene Balanzirungsgewichte aufgehoben werden. Wenn ϱ_2 und γ angenommen wird, findet man Q, wenn Q und ϱ_2 so angenommen wird, dass $\frac{\varrho q + r S}{Q \varrho_2} =< 1.414$ ausfällt, findet man ein entsprechendes γ.

Wenn es sich nur um die Aufhebung der Längenschwingungen handelte, könnte man $\gamma = 0$ oder $\gamma = 180°$ nehmen und dann fände man $Q \varrho_2 = \varrho q + r S$, allein es handelt sich auch um die Beseitigung der drehenden Schwingungen, und dies erfordert, wie wir sehen werden, abermals eine gewisse Beziehung zwischen Q ϱ_2 und γ, es ist daher vorläufig angemessener, für γ keinen speziellen Werth anzunehmen, sondern abzuwarten, welche Bedingung die Aufhebung der drehenden Schwingungen vorschreibt.

Longitudinalschwingung einer aufgehängten Lokomotive der allgemeinsten Art.

Wir wollen nun die Längenschwingungen einer Lokomotive bestimmen, die folgende allgemeine Einrichtungen hat. 1) Die Entfernung eines Dampfcylindermittels vom Mittel $A x_1$ der Maschine sei e; 2) die Maschine sei aussen mit Kupplungsstangen versehen; 3) die Räder seien mit Balanzirungsmassen versehen. Es sei (Tab. XII. Fig. 44 und Fig. 45.):

e die Entfernung des Mittels eines Cylinders vom Mittel $A x_1$ der Lokomotive;
r der Halbmesser einer Maschinenkurbel;
S das Gewicht eines Kolbens, einer Kolbenstange und einer Schubstange;
q das Gewicht der Körper, die eine Maschinenkurbel bilden;

ϱ die Entfernung des Schwerpunktes eines Gewichts q von der geometrischen Axe der Kurbelwelle;

e_1 die Entfernung des Mittels einer Kupplungsstange vom Mittel Ax der Lokomotive.

S_1 das Gewicht einer Kupplungsstange;

r_1 der Halbmesser einer Kupplungsstangenkurbel;

$\left.\begin{matrix} s \\ s_1 \end{matrix}\right\}$ Die Entfernungen der Schwerpunkte der Massen S und S_1 von den Kurbelzapfen;

90° Winkel, den die Richtungen der Kupplungskurbeln gegeneinander bilden;

β Winkel, unter welchem die rechtseitige Kupplungskurbel gegen die rechtseitige Maschinenkurbel geneigt ist;

q_1 Gewicht einer Kurbel der Kupplungsstange;

ϱ_1 Entfernung des Schwerpunktes eines Gewichts q_1 von der geometrischen Axe der Kurbelwelle;

Q Gewicht einer Balanzirungsmasse;

ϱ_2 Entfernung des Schwerpunktes eines Gewichts Q von der geometrischen Drehungsaxe der Kurbelwelle;

e_2 Entfernung des Schwerpunktes eines Gewichts Q von der durch Ax_1 gelegten Verticalebene;

γ Winkel, den die Richtungen von ϱ mit den Verlängerungen von r bilden; (Fig. 44.)

Es besteht auch hier wiederum die Gleichung (6), nämlich:

$$\Sigma m x_1 = \xi G.$$

Die Glieder von $\Sigma m x_1$, welche die einzelnen Körper der ganzen Lokomotive liefern, sind hier folgende:

Die Glieder, welche entsprechen den Massen	sind
$G - 2q - 2S - 2q_1 - 2S_1 - 2Q$	$b[G - 2q - 2S - 2q_1 - 2S_1 - 2Q]$
$2q$	$q\varrho(\cos.\alpha + \sin.\alpha)$
$2S$	$S[r(\cos.\alpha + \sin.\alpha) + 2s]$
$2q_1$	$q_1\varrho_1[\cos.(\alpha+\beta) + \sin.(\alpha+\beta)]$
$2S_1$	$S\{r_1[\cos.(\alpha+\beta) + \sin.(\alpha+\beta)] + 2s_1\}$
$2Q$	$-Q\varrho_2\{\sin.(\alpha+\gamma) + \cos.(\alpha-\gamma)\}$

wir erhalten daher für ξ folgenden Werth

$$\xi = \frac{b(G - 2q - 2S - 2q_1 - 2S_1 - 2Q) + 2Ss + 2S_1 s_1}{G} +$$

$$\frac{q\varrho + Sr - \varrho_2 Q(\sin.\gamma + \cos.\gamma)}{G}(\sin.\alpha + \cos.\alpha) +$$

$$\frac{(q_1\varrho_1 + S_1 r_1)}{G}\cos.\beta(\sin.\alpha + \cos.\alpha) + \frac{(q_1\varrho_1 + S_1 r_1)}{G}\sin.\beta(\cos.\alpha - \sin.\alpha)$$

Wenn die Längenschwingung nicht eintreten soll, muss ξ für jeden Werth von α den gleichen Werth haben, und dies ist nur dann der Fall, wenn β entweder 0 oder 180° ist und wenn dann ferner:

$$q\varrho + Sr - \varrho_2 Q(\sin.\gamma + \cos.\gamma) + (q_1\varrho_1 + S_1 r_1)\cos.\beta = 0$$

oder weil $\cos.0^\circ = +1$, $\cos.180^\circ = -1$ ist, so wird diese Bedingungsgleichung

$$q\varrho + Sr - \varrho_2 Q(\sin.\gamma + \cos.\gamma) \pm (q_1\varrho_1 + S_1 r_1) = 0 \quad \text{. . . . .} \quad (12)$$

wobei das obere Zeichen gilt, wenn die auf einer Seite der Linie Ax_1 befindlichen Kurbeln parallel gestellt sind und das untere Zeichen, wenn diese Kurbeln diametral gegenüber stehen.

Das Schlingern.

Drehende Schwingungen einer frei hängenden Maschine.

Eine aufgehängte Lokomotive ist als ein System von Massen zu betrachten, welches in horizontalem Sinne nach jeder Richtung frei beweglich ist, und das von keinen äusseren Horizontalkräften affizirt wird. In einem solchen System halten sich alle inneren Horizontalkräfte das Gleichgewicht, und wenn sich die Massen des Systems gegen einander bewegen, so muss diess in einer solchen Weise geschehen, dass die sämmtlichen den Beschleunigungen der Massentheilchen entsprechenden Kräfte die Bedingungen des Gleichgewichts erfüllen, es muss daher die Summe der statischen Momente dieser Kräfte in Bezug auf eine durch den idealen Schwerpunkt des Systems gehende Vertikalaxe gleich Null sein.

Um das hier mit Worten Gesagte analytisch auszudrücken, wählen wir die gleichen Bezeichnungen, die zur Untersuchung der Längenschwingungen gedient haben, und werden im Verlauf der Rechnung nur noch einige Bezeichnungen hinzufügen.

Die beschleunigenden Kräfte eines im Punkt M befindlichen Massentheilchens, dessen Gewicht m ist, sind:

$$\frac{m}{g}\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \frac{m}{g}\frac{d^2y}{dt^2}$$

Diese Kräfte äussern ein Bestreben, die ganze Lokomotive um eine durch den idealen Schwerpunkt B gehende Vertikalaxe zu drehen, und diesem Bestreben entspricht ein Moment von der Grösse:

$$\frac{m}{g}\frac{d^2y}{dt^2}x - \frac{m}{g}\frac{d^2x}{dt^2}y$$

Die Summe der Momente aller beschleunigenden Kräfte sämmtlicher Massentheilchen ist demnach:

$$\Sigma\frac{m}{g}\left(\frac{d^2y}{dt^2}x - \frac{d^2x}{dt^2}y\right)$$

wobei das Summenzeichen Σ auf sämmtliche Massentheilchen, aus welchem die Lokomotive besteht, auszudehnen ist.

Diese Summe muss aber für die, im frei hängenden Zustand durch den inneren Dampfdruck bewegte Lokomotive gleich Null sein. Man hat daher zur Berechnung der drehenden Schwingung der Lokomotive die Gleichung:

$$\Sigma\, m\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\, x - \frac{d^2 x}{dt^2}\, y\right) = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt durch Integration:

$$\Sigma\, m\left(x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt}\right) = \text{Const.}$$

Wenn die Lokomotive in dem Augenblick, wenn die Einwirkung des Dampfes auf die Kolben beginnt, keine Geschwindigkeit hat, so ist in demselben für jeden Punkt der Lokomotive $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ gleich Null. Unter dieser Voraussetzung verschwindet die Constante, und die Gleichung der Bewegung wird:

$$\Sigma\, m\left(x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Nun ist schon Seite (113) gefunden worden:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + (x_1 - \xi)\cos.\varphi - y_1 \sin.\varphi \\ y &= \phantom{a +{}} (x_1 - \xi)\sin.\varphi + y_1 \cos.\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Durch Differenziation findet man hieraus:

$$\frac{dx}{dt} = -(x_1 - \xi)\sin.\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} + \cos.\varphi\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right) - y_1 \cos.\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} - \sin.\varphi\,\frac{dy_1}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = (x_1 - \xi)\cos.\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} + \sin.\varphi\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right) - y_1 \sin.\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} + \cos.\varphi\,\frac{dy_1}{dt}$$

Allein weil die Entfernung jedes Punktes von der Mittellinie $B\,x_1$ der Lokomotive während ihrer Bewegung unverändert bleibt, so ist für jeden Punkt der Lokomotive $\frac{dy_1}{dt} = 0$, demnach:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\left[(x_1 - \xi)\sin.\varphi + y_1\cos.\varphi\right]\frac{d\varphi}{dt} + \cos.\varphi\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right) \\ \frac{dy}{dt} &= \left[(x_1 - \xi)\cos.\varphi - y_1\sin.\varphi\right]\frac{d\varphi}{dt} + \sin.\varphi\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Durch Combination der Gleichungen (2) und (3) findet man nach einigen Reduktionen:

$$x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt} = \left\{(x_1 - \xi)^2 + y_1^2 + a\left[(x_1 - \xi)\cos.\varphi - y_1\sin.\varphi\right]\right\}\frac{d\varphi}{dt} + (a\sin.\varphi - y_1)\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right)$$

Substituirt man diesen Werth in (1) so wird derselbe:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \frac{d\varphi}{dt}\,\Sigma m\left[(x_1 - \xi)^2 + y_1^2\right] + a\,.\,\frac{d\left[\sin.\varphi\,\Sigma m\,(x_1 - \xi)\right]}{dt} &- \Sigma m\, y_1\,\frac{dx_1}{dt}. \\ &- a\sin.\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}\,\Sigma m\, y_1 \\ &+ \frac{d\xi}{dt}\,\Sigma m\, y_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

die zwei letzten Glieder dieses Ausdrucks sind aber wegzulassen, denn beinahe jedem Massenpunkt, welcher sich auf einer Seite der Axe $B\,x_1$ der Lokomotive in einer grossen Entfernung y_1 befindet, entspricht auf der anderen Seite ein eben so grosser Massenpunkt, für welchen y_1 eben so gross aber negativ ist, es heben sich also in der Summe $\Sigma m\, y_1$ die Glieder paarweise auf. Eine Ausnahme hievon machen nur die dem Gewichte nach unbedeutenden Bestandtheile, welche nur auf einer Seite der Lokomotive vorkommen.

Durch Weglassung der zwei letzten Glieder wird die Gleichung der Bewegung

$$0 = \frac{d\varphi}{dt}\,\Sigma m\left[(x_1 - \xi)^2 + y_1^2\right] + a\;\frac{d.\left[\sin.\varphi\,\Sigma m\,(x_1 - \xi)\right]}{dt} - \Sigma m\, y_1\,\frac{dx_1}{dt} \quad \ldots \quad (5)$$

Allein es ist $\Sigma m x_1 = \xi\,\Sigma m = \Sigma m\,\xi$, demnach $\Sigma m\,(x_1 - \xi) = 0$, daher erhalten wir statt (5) folgende Gleichung

$$0 = \frac{d\varphi}{dt}\,\Sigma m\left[(x_1 - \xi)^2 + y_1^2\right] - \Sigma m\, y_1\,\frac{dx_1}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Es ist aber

$$\Sigma m\left[(x_1 - \xi)^2 + y_1^2\right] = \Sigma m\,(x_1^2 + y_1^2) + \xi^2\,\Sigma m - 2\,\xi\,\Sigma m\, x_1$$

oder weil $\Sigma m x_1 = \xi\,\Sigma m$ und $\Sigma m = G$ ist:

$$\Sigma m\left[(x_1 - \xi)^2 + y_1^2\right] = \Sigma m\,(x_1^2 + y_1^2) - \xi^2\, G\,.$$

daher wird die Gleichung (6) der Bewegung

$$0 = \left[\Sigma m\,(x_1^2 + y_1^2) - \xi^2\, G\right]\frac{d\varphi}{dt} - \Sigma m\, y_1\,\frac{dx_1}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Die hier angedeuteten Summen müssen nun für alle Theile der Lokomotive berechnet werden. Bezeichnen wir zur Abkürzung der Sprache durch $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{S}$ diejenigen Theile der totalen Summe $\frac{d\varphi}{dt}\,\Sigma m\,(x_1^2 + y_1^2) - \Sigma m\, y_1\,\frac{dx_1}{dt}$, welche die Massen $G - 2q - 2S$, $2q$, $2S$ liefern, so können wir die Gleichung (7) der Bewegung auch schreiben

$$0 = \mathfrak{R} + \mathfrak{K} + \mathfrak{S} - \xi^2\, G\,\frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$\mathfrak{R}$ bezieht sich auf alle Theile der Lokomotive mit Ausnahme der Kolben, der Schubstangen und Gleitstücke, der Kolbenstangen und der Kurbelkörper (derjenigen Massen, die über die Rundung der Axe hinausragen). Die Hin- und Herbewegung der Steuerungstheile und einiger Pumpentheile können wir vernaehlässigen. Da $m(x_1^2+y_1^2)$ das Trägheitsmoment eines Massentheilchens in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt A der Kurbel gehende Verticalaxe ausdrückt und $\frac{dx_1}{dt}$ für jeden Punkt, auf welchen $\mathfrak{R}$ bezogen werden muss, verschwindet, so reducirt sich der Werth von $\mathfrak{R}$ auf das Produkt aus $\frac{d\varphi}{dt}$ in das Trägheitsmoment aller zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Massen in Bezug auf die durch A gehende Vertikalaxe. Dieses Trägheitsmoment, als Gewicht ausgedrückt, wollen wir durch $(G-2q-2S)k^2$ ausdrücken, dann haben wir

$$\mathfrak{R}=(G-2q-2S)k^2\frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$\mathfrak{K}$ bezieht sich auf die beiden Kurbelkörper.

Der mathematisch genaue Werth von $\mathfrak{K}$ ist äuserst zusammengesetzt, jedoch von keinem erheblichen Einfluss, denn die Kurbelmassen sind im Vergleich zu den übrigen Massen sehr klein; wir dürfen uns daher mit einem Annäherungswerthe begnügen und einen solchen erhalten wir, wenn wir $\mathfrak{K}$ so berechnen, als wäre die Masse jeder Kurbel in ihrem Schwerpunkt vereinigt. Unter dieser Voraussetzung ist

für die Masse

der Vorderkurbel	der Hinterkurbel
$x_1=\varrho\cos.\alpha$	$x_1=\varrho\sin.\alpha$
$y_1=-e$	$y_1=+e$
$\frac{dx_1}{dt}=-\varrho\sin.\alpha\frac{d\alpha}{dt}$	$\frac{dx_1}{dt}=\varrho\cos.\alpha\frac{d\alpha}{dt}$

demnach wird

$$\mathfrak{K}=\left[q(\varrho^2\cos.^2\alpha+e^2)+q(\varrho^2\sin.^2\alpha+e^2)\right]\frac{d\varphi}{dt}-qe\varrho\sin.\alpha\frac{d\alpha}{dt}$$
$$-qe\varrho\cos.\alpha\frac{d\alpha}{dt}$$

oder

$$\mathfrak{K}=q(\varrho^2+2e^2)\frac{d\varphi}{dt}-qe\varrho(\sin.\alpha+\cos.\alpha)\frac{d\alpha}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

wobei $2e$ die Entfernung der Axen der beiden Dampfcylinder bezeichnet.

$\mathfrak{S}$ fällt ebenfalls äusserst zusammengesetzt aus, wenn man seinen Werth mathematisch genau bestimmen will, wir wollen uns also auch hier mit einer Annäherung begnügen, die wir dadurch erhalten, dass wir uns denken, es sei die Masse einer Schubstange, einer Kolbenstange und eines Kolbens längs einer geraden Linie L gleichmässig vertheilt, deren Länge so gross ist, als der Abstand des Kolbens von der Kurbelwarze bei ausgestreckter Stellung der Schubstange. Auch wollen wir die Neigungen der Schubstangen gegen die Kolbenstangen unberücksichtigt lassen.

Nehmen wir in den Linien L zwei Punkte an, die von ihren Kurbeln um u entfernt sind, so ist

für den Punkt der Vorderkurbel	für den Punkt der Hinterkurbel.
$x_1=r\cos.\alpha+u$	$x_1=r\sin.\alpha+u$
$y_1=-e$	$y_1=+e$
$\frac{dx_1}{dt}=-r\sin.\alpha\frac{d\alpha}{dt}$	$\frac{dx_1}{dt}=r\cos.\alpha\frac{d\alpha}{dt}$

Nennen wir λ die ganze Länge einer Linie L, so ist auf jede Längeneinheit ein Gewicht $\frac{S}{\lambda}$ zu vertheilen, und auf ein unendlich kleines Stückchen du der Länge ein Gewicht $\frac{S}{\lambda}du$. Diese beiden Gewichtstheilchen liefern zusammen in der Summe $\mathfrak{S}$ folgenden Betrag:

$$\left\{\left[(r\cos.\alpha+u)^2+e^2\right]\frac{S}{\lambda}du+\left[(r\sin.\alpha+u)^2+e^2\right]\frac{S}{\lambda}du\right\}\frac{d\varphi}{dt}-er\sin.\alpha\frac{d\alpha}{dt}\frac{S}{\lambda}du-er\cos.\alpha\frac{d\alpha}{dt}\frac{S}{\lambda}du$$

oder

$$\left[r^2+2e^2+2u^2+2ru(\cos.\alpha+\sin.\alpha)\right]\frac{S}{\lambda}du\frac{d\varphi}{dt}-er(\sin.\alpha+\cos.\alpha)\frac{d\alpha}{dt}\frac{S}{\lambda}du$$

Die Summe $\mathfrak{S}$ wird nun gefunden, wenn man diesen letzten Ausdruck von $u=0$ bis $u=\lambda$ integrirt, und man findet

$$\mathfrak{S}=\left[(r^2+2e^2)S+\frac{2}{3}S\lambda^2+\lambda rS(\cos.\alpha+\sin.\alpha)\right]\frac{d\varphi}{dt}-erS(\sin.\alpha+\cos.\alpha)\frac{d\alpha}{dt} \quad \ldots \quad (11)$$

Wenn wir nun die für $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{S}$ erhaltenen Werthe in der Gleichung (8) einführen, so ergibt sich:

$$0=(G-2q-2S)k^2\frac{d\varphi}{dt}+q(\varrho^2+2e^2)\frac{d\varphi}{dt}-qe\varrho(\sin.\alpha+\cos.\alpha)\frac{d\alpha}{dt}$$
$$+\left[(r^2+2e^2)S+\frac{2}{3}S\lambda^2+\lambda rS(\cos.\alpha+\sin.\alpha)\right]\frac{d\varphi}{dt}-erS(\sin.\alpha+\cos.\alpha)\frac{d\alpha}{dt}-\xi^2G\frac{d\varphi}{dt}$$

oder wenn man die Glieder, welche $\frac{d\varphi}{dt}$ und jene, welche $\frac{d\alpha}{dt}$ als Faktoren enthalten, zusammenfasst.

$$0=\left\{-\xi^2G+(G-2q-2S)k^2+q(\varrho^2+2e^2)+S\left[(r^2+2e^2)+\frac{2}{3}\lambda^2+\lambda r(\sin.\alpha+\cos.\alpha\right]\right\}\frac{d\varphi}{dt}$$
$$-(q\varrho+rS)e(\sin.\alpha+\cos.\alpha)\frac{d\alpha}{dt}$$

oder endlich wenn man für ξ seinen Werth setzt, den wir früher in der Untersuchung über die Längenschwingung gefunden haben, und welchen die Gleichung (8) Seite 114 darbietet

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} -\left[\frac{(G-2q-2S)b+2Ss}{G} + \frac{q\varrho + Sr}{G}(\sin.\alpha + \cos.\alpha)\right]^2 G \\ +(G-2q-2S)k^2 + q(\varrho^2 + 2c^2) \\ + S\left[(r^2+2e^2) + \frac{2}{3}\lambda^2 + \lambda r(\sin.\alpha + \cos.\alpha)\right] \end{array} \right\} \frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

$$-(q\varrho + rS)e(\sin.\alpha + \cos.\alpha)\frac{d\alpha}{dt}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\left. \begin{array}{l} (G-2q-2S)k^2 + q(\varrho^2+2e^2) + S(r^2+2e^2+\frac{2}{3}\lambda^2) - \frac{[(G-2q-2S)b+2Ss]^2}{G} = \mathfrak{A} \\ -2\frac{[(G-2q-2S)b+2Ss][q\varrho+Sr]}{G} + S\lambda r = \mathfrak{B} \\ -\frac{(q\varrho+Sr)^2}{G} = \mathfrak{C} \\ -(q\varrho+rS)e = \mathfrak{D} \end{array} \right\} \quad \ldots \quad (13)$$

und lässt in der Gleichung (12) dt weg, so folgt aus derselben

$$d\varphi = -\frac{\mathfrak{D}(\sin.\alpha + \cos.\alpha)\,d\alpha}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}(\sin.\alpha + \cos.\alpha) + \mathfrak{C}(\sin.\alpha + \cos.\alpha)^2}.$$

Das Integrale dieser Gleichung würde das Gesetz der drehenden Schwingung bestimmen. Es lässt sich in der That durchführen, allein das Ergebniss ist ein so ausserordentlich complizirtes, dass es wohl angemessen ist, sich mit einer Annäherung zu begnügen. Berücksichtigt man die Kleinheit der Massen q und S gegen die ungeheure Masse G, so ist klar, dass man keinen merklichen Fehler begehen wird, wenn man in den Ausdrücken für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nur diejenigen Glieder beibehält, welche G als Faktor enthalten, dann wird aber

$$\mathfrak{A} = G(k^2 - b^2) \qquad \mathfrak{B} = -2b(q\varrho + Sr) + S\lambda r \qquad \mathfrak{C} = 0$$

$$\mathfrak{D} = -(q\varrho + rS)e$$

und dann wird die Gleichung für $d\varphi$

$$d\varphi = -\frac{(q\varrho + rS)e(\sin.\alpha + \cos.\alpha)\,d\alpha}{G(k^2-b^2) + [-2b(q\varrho+Sr) + S\lambda r][\sin.\alpha + \cos.\alpha]} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

allein hier ist das zweite Glied des Nenners gegen das erste eine verschwindend kleine Grösse, indem jederzeit k gegen b sehr gross ist: dieses zweite Glied darf also auch vernachlässigt werden und dann wird

$$d\varphi = -\frac{(q\varrho + rS)e(\sin.\alpha + \cos.\alpha)\,d\varphi}{G(k^2-b^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Hieraus folgt nun durch Integration:

$$\varphi = +\frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2-b^2)}(\cos.\alpha - \sin.\alpha) + \text{Const.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Für die grössten und kleinsten Werthe von φ muss $\frac{d\varphi}{d\alpha} = 0$ sein, also vermöge (15).

$$\sin.\alpha + \cos.\alpha = 0$$

Dies ist der Fall, wenn $\alpha = 180 - 45$ und $\alpha = 360 - 45°$. Diese grössten und kleinsten Werthe des Winkels φ sind demnach:

$$-\frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2-b^2)}\, 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \text{Const.}$$

$$+\frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2-b^2)}\, 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \text{Const.}$$

Der totale Schwingungswinkel ist demnach (in Theilen des Halbmessers ausgerückt):

$$\frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2-b^2)}\, 4\sqrt{\frac{1}{2}} = 2{\cdot}828\,\frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2-b^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

In dem Moment, wenn durch die Einwirkung des Dampfes die Bewegung der Lokomotive beginnt, haben die Kurbeln eine gewisse Stellung, hat also α einen gewissen Werth, den wir mit α_0 bezeichnen wollen. Für den Beginn der Bewegung ist demnach wegen (16)

$$0 = \frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2-b^2)}(\cos.\alpha_0 - \sin.\alpha_0) + \text{Const.}$$

Zieht man diesen Ausdruk von (16) ab, so erhält man:

$$\varphi = \frac{q\varrho + Sr}{G(k^2-b_2)}\, e\left\{[\cos.\alpha - \cos.\alpha_0] - [\sin.\alpha - \sin.\alpha_0]\right\}$$

oder:

$$\varphi = -\frac{q\varrho + Sr}{G(k^2-b^2)}\, e\; 2\sin.\frac{\alpha-\alpha_0}{2}\left[\sin.\frac{\alpha+\alpha_0}{2} + \cos.\frac{(\alpha+\alpha_0)}{2}\right]$$

Hieraus sieht man zunächst, dass die Lokomotive jedesmal in ihre initiale Stellung (für welche $\varphi = 0$ ist) zurückkehrt, wenn die Kurbeln in ihre initiale Stellung (für welche $\alpha = \alpha_0$ ist) zurückkehren.

Da, wie wir gesehen haben, die extremsten Werthe von φ um gleich viel von dem Werth der Integrationsconstanten abweichen, so bedeutet dieselbe den mittleren Werth des Winkels φ. Es ist aber:

$$\text{Const.} = -\frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2-b^2)}(\cos.\alpha_0 - \sin.\alpha_0)$$

Diese mittlere Schwingungsposition der Lokomotive richtet sich demnach nach dem Winkel α_0, d. h. nach der anfänglichen Stellung der Kurbeln.

Setzt man in die Gleichung (16) $\alpha = 45^\circ$, oder $\alpha = 180 + 45^\circ$, so wird für den einen, wie für den andern dieser Werthe φ gleich Constant. Die von der anfänglichen Stellung der Kurbeln abhängige mittlere Position der Lokomotive tritt also jedesmal ein, wenn während der Bewegung $\alpha = 45^\circ$, oder $\alpha = 180 + 45^\circ$ geworden ist. Wäre anfänglich $\alpha_0 = 45^\circ$ oder $\alpha_0 = 180 + 45^\circ$, so würde const. $= 0$. In diesem Falle wird also die mittlere Schwingungsposition der Lokomotive mit ihrer initialen Position zusammentreffen.

Bezeichnen wir den mittleren Werth von φ mit φ_m, setzen also $\varphi_m = \text{const.}$, so wird:

$$\varphi = \frac{q\varrho + Sr}{G(k^2 - b^2)}\, e(\cos.\alpha - \sin.\alpha) + \varphi_m$$

oder:

$$\varphi - \varphi_m = \frac{q\varrho + Sr}{G(k^2 - b^2)}\, e(\cos.\alpha - \sin.\alpha)$$

Der Ausdruck rechter Hand des Gleichheitszeichens bestimmt also die Schwingung der Lokomotive gegen ihre mittlere Position.

Wenn wir nun die Bewegung der Lokomotive von einem Augenblick an, in welchem $\alpha = 45^\circ$ ist, durch eine ganze Umdrehung verfolgen, so ist der Vorgang folgender:

In dem Augenblick, von welchem an wir die Bewegung der Lokomotive verfolgen, befindet sich dieselbe in ihrer mittleren Position, d. h. in derjenigen Position, in welche sie jedesmal zurückkehrt, wenn $\alpha = 45$, oder $180 + 45^\circ$ wird. Während α über 45° hinaus bis zu $180 - 45^\circ$ wächst, nimmt der Winkel φ fortwährend ab, schwingt also die Lokomotive für einen auf derselben stehenden und vorwärts schauenden Beobachter nach rechts hin, und wenn $\varphi = 180 - 45^\circ$ geworden ist, ist sie nach rechts hin am weitesten von ihrer mittleren Position abgewichen. Von $\alpha = 180 - 45$ bis $\alpha = 360 - 45^\circ$ schwingt die Lokomotive nach links und gelangt dabei, wenn $\alpha = 180 + 45^\circ$ ist, in ihre mittlere Schwingungsposition. Von $\alpha = 360 - 45$ bis $\alpha = 360 + 45^\circ$ schwingt sie wiederum nach links zurück und erreicht zuletzt ihre mittlere Position. Der Betrag des ganzen Schwingungswinkels ist:

$$\frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2 - b^2)}\, 2\sqrt{2}$$

ist also gross: 1) wenn die Gewichte der Kurbeln und die hin- und hergehende Masse gross sind; 2) wenn die Abstände ϱ, r und e, d. h. wenn der Kurbelhalbmesser und der Abstand der Maschine gross ist; 3) wenn das Trägheitsmoment des Kesselbaues etc. klein ist.

Dieser Schwingungswinkel ist aber unabhängig: 1) von der Kraft, mit welcher der Dampf auf den Kolben wirkt; 2) von der Geschwindigkeit der rotirenden Bewegung der Kurbelaxe und von dem Gesetz, nach welchem diese Drehung erfolgt; 3) von der Radstellung, denn $G(k^2 - b^2)$ ist das Trägheitsmoment des Rahmenbaues in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt gehende Vertikalaxe, ist also von der Radstellung unabhängig; 4) von der Spurweite.

Drehende Schwingungen einer aufgehängten nicht balanzirten Lokomotive mit inneren Cylindern und mit äusseren Kupplungsstangen.

Wenn wir uns mit dem Annäherungsgrad begnügen, durch welchen wir bei der Untersuchung über die Schwingungen einer nicht gekuppelten Maschine die Gleichung (16) gefunden haben, so fällt es nicht schwer, die analoge Gleichung für eine Maschine mit gekuppelten Rädern aufzustellen.

Wir behalten die bis jetzt gewählten Bezeichnungen bei und nennen ferner noch r_1 den Halbmesser einer Kurbel der Kupplungsstange, S_1 das Gewicht der Kupplungsstange, q_1 das Gewicht einer Kupplungskurbel, d. h. desjenigen Körpers, der über die runde Nabe des Rades hinausragt, ϱ_1 die Entfernung des Schwerpunktes einer Kupplungskurbel von der geometrischen Drehungsaxe der Kurbelwelle, e_1 die Entfernung der zu beiden Seiten der Lokomotive befindlichen Kupplungsstange von der Axe $A\,x_1$. Wir nehmen an, dass die Richtungen der äussern Kurbeln den Richtungen der innern Kurbeln diametral entgegengesetzt angebracht sind.

Es ist klar, dass wir in dem vorhergehenden Fall statt der Gleichung (16) folgende erhalten werden:

$$\varphi = \frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2 - b^2)}(\cos.\alpha - \sin.\alpha) + \frac{(q_1\varrho_1 + S_1 r_1)e_1}{G(k^2 - b^2)}\left[\cos.(\alpha + \pi) - \sin.(\alpha + \pi)\right] + \text{Const.}$$

oder:

$$\varphi = \frac{(q\varrho + Sr)e - (q_1\varrho_1 + S_1 r_1)e_1}{G(k^2 - b^2)}(\cos.\alpha - \sin.\alpha) + \text{Const.}$$

Man sieht hieraus, dass die Massen der Kupplungsstangen die drehenden Schwingungen zu schwächen, oder sogar ganz aufzuheben im Stande sind, wenn die Kupplungskurbeln den Maschinenkurbeln diametral entgegengesetzt gestellt werden. Diese Drehung verschwindet vollkommen, wenn:

$$(q\varrho + Sr)e = (q_1\varrho_1 + S_1 r_1)e_1$$

Drehende Bewegung einer frei hängenden nicht balanzirten Maschine mit aussen liegenden Cylindern und Kupplungsstangen.

Eine solche Lokomotive hat keine innern Kurbeln, und die Maschinenkurbeln fallen mit den Kupplungskurbeln zusammen, man erhält demnach:

$$\varphi = \frac{Sre + (q_1\varrho_1 + S_1 r_1)e_1}{G(k^2 - b^2)}(\cos.\alpha - \sin.\alpha) + \text{Const.}$$

Hier sind also die Schwingungen wie bei einer ungekuppelten Maschine mit inneren Cylindern.

Gleichung der Kurve, welche der Mittelpunkt A der Kurbelaxe beschreibt, wenn Längenschwingungen und drehende Schwingungen gleichzeitig stattfinden.

Die Gleichungen für φ und ξ, welche die Drehung und die Längenschwingung bestimmen, haben für Lokomotive jeder Art die Form:

$$\xi = m + n(\sin.\alpha + \cos.\alpha)$$

$$\varphi = m_1 + n_1(\sin.\alpha - \cos.\alpha)$$

wobei $m\; m_1\; n\; n_1$ constante, von den Dimensionen und Gewichten abhängige Grössen sind.

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{\xi - m}{n} = \sin.\alpha + \cos.\alpha$$

$$\frac{\varphi - m_1}{n_1} = \sin.\alpha - \cos.\alpha$$

Durch Addition und Subtraktion dieser Gleichungen folgt:

$$\sin.\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{\xi - m}{n} \quad \frac{\varphi - m_1}{n_1}\right]$$

$$\cos.\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{\xi - m}{n} - \frac{\varphi - m_1}{n_1}\right]$$

Nimmt man die Summe der Quadraten dieser Gleichungen, so erhält man:

$$1 = \frac{1}{4}\left[\frac{\xi - m}{n} + \frac{\varphi - m_1}{n_1}\right]^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{\xi - m}{n} - \frac{\varphi - m_1}{n_1}\right]^2$$

oder:

$$2 = \left(\frac{\xi - m}{n}\right)^2 + \left(\frac{\varphi - m_1}{n_1}\right)^2$$

Drehende Schwingungen einer aufgehängten mit Centrifugalmassen versehenen Lokomotive der allgemeinsten Art.

Wir haben bereits Seite 117 die Einrichtung einer solchen Lokomotive von allgemeiner Construktion angegeben, und ihre Längenschwingungen untersucht. Nun wollen wir auch ihre drehenden Schwingungen bestimmen. Wir lassen alle Bezeichnungen bestehen, die in jenem Artikel angenommen wurden.

Auch für eine solche Lokomotive von allgemeiner Einrichung besteht die Seite 121 aufgefundene Gleichung der Drehung (7) nämlich:

$$0 = [\Sigma (x_1^2 + y_1^2) - \xi^2 G] \frac{d\varphi}{dt} - \Sigma m y_1 \frac{dx_1}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

wobei die Summe auf alle Gewichtstheile der Lokomotive auszudehnen sind:

$\Sigma m (x_1^2 + y_1^2)$ ist das totale Trägheitsmoment der ganzen Lokomotive in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt A der Kurbelaxe gehende Vertikalaxe. Dieses Trägheitsmoment ist wegen jener Bestandtheile, die während der Bewegung der Treibaxe ihre Lage gegen den Rahmenbau verändern, eine periodisch veränderliche Grösse. Allein alle diese gegen den Rahmenbau beweglichen Theile haben im Vergleich zu den übrigen Theilen, die ihre relative Lage gegen einander und gegen die durch A gehende Vertikalaxe nicht ändern, nur einen sehr kleinen Werth. Wir werden daher keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir in der Berechnung des Trägheitsmoments $\Sigma m (x_1^2 + y_1^2)$ die Trägheitsmomente dieser beweglichen Theile ganz vernachlässigen. Nennen wir daher $G k^2$ das Trägheitsmoment aller gegen einander nicht beweglichen Theile der Lokomotive in Bezug auf eine durch A gehende Vertikalaxe, so ist annähernd

$$\Sigma m (x_1^2 + y_1^2) = G k^2$$

Den genauen Werth von ξ, welcher der Längenschwingung entspricht, haben wir früher Seite (118) gefunden. Da jedoch die Massen q S q_1 S_1 Q gegen G ungemein klein sind, so ist ξ nur um äusserst wenig von b verschieden, wir dürfen uns daher erlauben, $\xi^2 G = b^2 G$ zu setzen. Dann haben wir:

$$\Sigma m (x_1^2 + y_1^2) - \xi^2 G = G (k^2 - b^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Nun handelt es sich noch um die Berechnung der letzten Summe des Ausdrucks (18). Die Glieder, welche die Massen $2q$ $2S$ $2q_1$ $2S_1$ $2Q$ in diese Summe liefern, sind nun folgende:

1) für die Massen $2p$ ...... $q e \varrho (\sin.\alpha + \cos.\alpha) \frac{d\alpha}{dt}$

2) „ „ „ $2q_1$ ...... $q_1 e_1 \varrho_1 [\sin.(\alpha + \beta) + \cos.(\alpha + \beta)] \frac{d\alpha}{dt}$

3) „ „ „ $2S$ ...... $S e r (\sin.\alpha + \cos.\alpha) \frac{d\alpha}{dt}$

4) „ „ „ $2S_1$ ...... $S_1 e_1 r_1 [\sin.(\alpha + \beta) + \cos.(\alpha + \beta)] \frac{d\alpha}{dt}$

5) „ „ „ $2Q$ ...... $- e_2 \varrho_2 Q [\sin.(\alpha - \gamma) + \cos.(\alpha + \gamma)] \frac{d\alpha}{dt}$

Die Gleichung der drehenden Bewegung wird demnach:

$$G (k^2 - b^2) \frac{d\varphi}{dt} = (q e \varrho + S e r)(\sin.\alpha + \cos.\alpha) \frac{d\alpha}{dt} + (q_1 e_1 \varrho_1 + S_1 e_1 r_1 [\sin.(\alpha + \beta) + \cos.(\alpha + \beta)] \frac{d\alpha}{dt}$$
$$- e_2 \varrho_2 Q [\sin.(\alpha - \gamma) + \cos.(\alpha + \gamma)] \frac{d\alpha}{dt}$$

Es ist aber

$$\sin.(\alpha + \beta) + \cos.(\alpha + \beta) = \cos.\beta (\sin.\alpha + \cos.\alpha) - \sin.\beta (\sin.\alpha - \cos.\alpha)$$

$$\sin.(\alpha - \gamma) + \cos.(\alpha + \gamma) = (\sin.\alpha + \cos.\alpha)(\cos.\gamma - \sin.\gamma)$$

daher wird obige Gleichung:

$$G (k^2 - b^2) \frac{d\varphi}{dt} = [(q \varrho + S r) e + (q_1 \varrho_1 + S_1 r_1) e_1 \cos.\beta - e_2 \varrho_2 Q (\cos.\gamma - \sin.\gamma)] (\sin.\alpha + \cos.\alpha) \frac{d\alpha}{dt}$$
$$- (q_1 \varrho_1 + S_1 r_1) e_1 \sin.\beta (\sin.\alpha - \cos.\alpha) \frac{d\alpha}{dt}$$

Lässt man in dieser Gleichung dt weg und integrirt dieselbe in Bezug auf α, so findet man:

$$G (k - b^2) \varphi = [(q \varrho + S r) e + (q_1 \varrho_1 + S_1 r_1) e_1 \cos.\beta - e_2 \varrho_2 Q (\cos.\gamma - \sin.\gamma)] (\sin.\alpha - \cos.\alpha)$$
$$+ (q_1 \varrho_1 + S_1 r_1) e_1 \sin.\beta (\sin.\alpha + \cos.\alpha) + \text{Const.}$$

Wenn keine drehende Schwingung stattfinden soll, muss φ für jeden Werth von α gleich Null sein.

Diess erfordert aber die Erfüllung folgender Bedingungen:

$$\text{Const.} = 0$$

$$\beta = 0 \text{ oder } = \pi$$

$$(q\,\varrho + S\,r)\,e + (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1 \cos.\beta - e_2\,\varrho_2\,Q\,(\cos.\gamma - \sin.\gamma) = 0$$

Wenn aber $\beta = 0$ oder $= \pi$ ist, kann die letzte Gleichung auch geschrieben werden wie folgt:

$$(q\,\varrho + S\,r)\,e \pm (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1 - e_2\,\varrho_2\,Q\,(\cos.\gamma - \sin.\gamma) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

wobei das obere Zeichen gilt, wenn die äussern und innern Kurbel parallel gestellt sind, das untere Zeichen hingegen, wenn die Kurbeln diametral gegenüber stehen.

Vollständige Aufhebung des Zuckens und Schlingerns durch rotirende Balanzirungs-Massen.

Wir haben Seite (119) gefunden, dass die Längenschwingungen einer Lokomotive verschwinden, wenn

$$(q\,\varrho + S\,r) \pm (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1) = \varrho_2\,Q\,(\cos.\gamma + \sin.\gamma) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

ist; haben ferner oben Gleichung (20) gefunden, dass die drehenden Schwingungen nicht eintreten, wenn

$$(q\,\varrho + S\,r)\,e \pm (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1 = e_2\,\varrho_2\,Q\,(\cos.\gamma - \sin.\gamma) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

ist. Bestehen diese Bedingungen gleichzeitig, so wird demnach weder die eine, noch die andere dieser Schwingungen eintreten. Diese Gleichungen können aber gleichzeitig bestehen, weil sie zwei unbestimmte Grössen Q und γ enthalten. Diese lassen sich also so bestimmen, dass keine von den beiden störenden Bewegungen eintritt.

Dividirt man die Gleichung (2) durch e_2, quadrirt sie hierauf, so wie auch die Gleichung (1) und nimmt die Summe dieser Quadrate, so erhält man eine Gleichung, aus welcher folgt:

$$Q = \frac{q\,\varrho + S\,r}{\varrho_2} \sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{e}{e_2}\right)^2\right] \pm \left[1+\frac{e\,e_1}{e_2^2}\right]\frac{q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1}{q\,\varrho + S\,r} + \frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{e_1}{e_2}\right)^2\right]\left[\frac{q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1}{q\,\varrho + S\,r}\right]^2\right\}} \quad (3)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt ferner:

$$\sin.\gamma = \frac{1}{2\,\varrho_2\,Q}\left[(q\,\varrho + S\,r)\left(1 - \frac{e}{e_2}\right) \pm (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\left(1 - \frac{e_1}{e_2}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$\cos.\gamma = \frac{1}{2\,\varrho_2\,Q}\left[(q\,\varrho + S\,r)\left(1 + \frac{e}{e_2}\right) \pm (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\left(1 + \frac{e_1}{e_2}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

In diesen Formeln gelten die oberen Zeichen, wenn die Kupplungskurbeln den Treibkurbeln parallel gestellt sind, die unteren Zeichen dagegen, wenn die Kupplungskurbeln den Treibkurbeln diametral gegenüberstehen. Die Gleichung (3) bestimmt die Grösse eines Balanzirungsgewichtes, die Gleichungen (4) und (5) die Position der Gewichte, wenn man nicht nur die numerischen Werthe, sondern auch die Zeichen von $\sin.\gamma$ und $\cos.\gamma$ berücksichtigt. Um jeden Zweifel über die richtige Anbringung der Balanzirungsmassen zu beseitigen, dienen die Figuren 49, 50, Tab. XII. Der in denselben verzeichnete spitze Winkel γ_1 ist derjenige Winkel, dessen Sinus und Cosinus gleich ist dem *numerischen* Werthen von $\sin.\gamma$ und von $\cos.\gamma$. Der schraffirte Kreis stellt das Balanzirungsgewicht am vorderen, der nicht schraffirte Kreis das Balanzirungsgewicht des hinteren Rades vor.

Die Balanzirungsgewichte sind anzubringen, wie folgendes Schema andeutet:

sin. γ	cos. γ	Figur.
+1	+1	49 a
+1	−1	49 b
−1	−1	50 a
−1	+1	50 b

Man erhält die Tangente des Winkels γ_1, wenn man die Werthe von $\sin.\gamma$ und $\cos.\gamma$ der Gleichungen (3) und (4) durch einander dividirt und nur allein den numerischen Werth des Quotienten nimmt; es ist also $\text{tang.}\,\gamma_1$ gleich dem numerischen Werthe des Quotienten.

$$\frac{\left(1 - \frac{e}{e_2}\right) \pm \frac{q_1\,r_1 + S_1\,r_1}{q\,r + S\,r}\left(1 - \frac{e_1}{e_2}\right)}{\left(1 + \frac{e}{e_2}\right) \pm \frac{q_1\,r_1 + S_1\,r_1}{q\,r + S\,r}\left(1 + \frac{e_1}{e_2}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Für eine Lokomotive, deren Räder nicht gekuppelt sind, die also überhaupt mit nur 2 Triebrädern versehen ist, ist $S_1 = 0$ $q_1 = 0$ und dann wird:

$$Q = \frac{q\,\varrho + S\,r}{\varrho_2}\sqrt{\frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{e}{e_2}\right)^2\right]} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

$$\sin.\gamma = \frac{q\,\varrho + S\,r}{2\,\varrho_2\,Q}\left(1 - \frac{e}{e_2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

$$\cos.\gamma = \frac{q\,\varrho + S\,r}{2\,\varrho_2\,Q}\left(1 + \frac{e}{e_2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Für innen liegende Cylinder ist $e < e_2$. Fällt also sowohl $\sin.\gamma$ als $\cos.\gamma$ positiv aus, so sind demnach die Gewichte so anzubringen, wie Fig. 49 a zeigt. Für aussen liegende Cylinder ist $e > e_2$. Fällt also $\sin.\gamma$ negativ, $\cos.\gamma$ positiv aus, so sind also die Gewichte anzubringen, wie Fig. 50 b zeigt.

Für Lokomotive mit aussen liegenden Cylindern und mit gekuppelten Rädern fallen die Kupplungskurbeln mit den Triebrädern der Richtung nach zusammen, müssen also in den Gleichungen (3) (4) (5) die oberen Zeichen genommen werden, und da in diesem

Fall $e > e_1 > e_2$ ist, so wird $\sin.\gamma$ negativ; $\cos.\gamma$ dagegen positiv, sind demnach die Gewichte so anzubringen, wie Fig. 50 b zeigt.

Stellen wir die verschiedenen Lokomotive nach der Grösse der Balanzirungsgewichte, welche sie erfordern, zusammen, so erhalten wir folgende Reihe, welche mit derjenigen Construction beginnt, die das kleinste Gewicht verlangt.

	Cylinderlage.	Räder.	Kupplungskurbeln.
A.	innen	nicht gekuppelt	keine
B.	aussen	nicht gekuppelt	keine
C.	innen	gekuppelt	diametral
D.	innen	gekuppelt	parallel
E.	aussen	gekuppelt	zusammenfallend

Wenn bei einer Lokomotive mit innen liegenden Cylindern und mit gekuppelten Rädern die äusseren Kupplungskurbeln den inneren Triebkurbeln diametral gegenüber gestellt sind, muss man in den Ausdrücken für Q, $\sin.\gamma$, $\cos.\gamma$, die unteren Zeichen nehmen; und in diesem Falle hat es das Ansehen, dass der Werth von Q unter gewissen Umständen verschwinden könnte, dass also gar keine Balanzirungsgewichte nothwendig, würden. Wir wollen diese Vermuthung prüfen.

Setzen wir zur Abkürzung $\frac{q_1 \varrho_1 + S_1 r_1}{q \varrho + S r} = k$, so verschwindet Q, wenn ist:

$$\frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{e}{e_2}\right)^2\right] - \left[1 + \frac{e e_1}{e_2^2}\right]k + \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^2\right]k^2 = 0$$

hieraus folgt:

$$k = \frac{q_1 \varrho_1 + S_1 r_1}{q r + S r} = \frac{1 + \frac{e e_1}{e_2^2} \pm \left(\frac{e_1}{c_2} - \frac{e}{e_2}\right)\sqrt{-1}}{1 + \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^2}$$

Die Werthe von k, welche den Ausdruck von Q zum Verschwinden bringen, sind demnach, wie man sieht, imaginär, so lange e von e_1 verschieden ist. Allein die Gleichung, aus welcher wir k gesucht haben, gilt nur für Maschinen mit innen liegenden Cylindern, weil es nur bei diesen möglich ist, dass die Kupplungskurbeln den Triebkurbeln diametral gegenüber stehen; es kann also e nicht gleich e_1 genommen werden und folglich ist es nicht möglich, die schwingenden Bewegungen ohne Balanzirungsgewichte aufzuheben.

Direktes Verfahren zur Bestimmung der Balanzirungs-Massen.

Die das Zucken und Schlingern aufhebenden Balanzirungsmassen können auch durch folgendes Verfahren direkt bestimmt werden.

Die Wirkungen, welche die hin- und hergehenden Massen der Kolben, Kolbenstangen, Schubstangen und Kupplungsstangen in horizontalem Sinne hervorbringen, sind beinahe so, wie wenn diese Massen mit den Kurbelzapfen direkt verbunden wären und mit denselben herum rotirten, denn die Horizontalbewegungen dieser Massen stimmen mit den

Horizontalbewegungen der Kurbelzapfen beinahe überein. Wir wollen uns also vorstellen, dass die hin- und hergehenden Massen in den Kurbelzapfen, mit welchen sie in Verbindung stehen, concentrirt würden, so dass sie mit den Kurbelzapfen um die Treibaxe herum rotiren müssten, und nun kommt es darauf an, die Treibräder mit solchen Massen zu versehen, dass ihre Centrifugalkräfte den Centrifugalkräften der mit den Kurbeln verbundenen Massen das Gleichgewicht halten.

Wir legen der Rechnung eine Maschine mit innen liegenden Cylindern und mit gekuppelten Rädern zu Grunde und nehmen an, dass die Kupplungskurbeln mit den Maschinenkurpeln parallel gestellt seien (Fig. 46) und lassen die früher gewählten Bezeichnungen gelten, bezeichnen aber noch durch ω die Winkelgeschwindigkeit der Triebräder.

Nun ist: $\frac{S}{g}\omega^2 r$ die Centrifugalkraft eines Kolbens, einer Kolbenstange und einer Schubstange; $\frac{q}{g}\omega^2 \varrho$ die Centrifugalkraft eines inneren Kurbelkörpers; $\frac{S_1}{g}\omega^2 r_1$ die Centrifugalkraft einer Kupplungsstange; $\frac{q_1}{g}\omega^2 \varrho_1$ die Centrifugalkraft eines äusseren Kurbelkörpers. Es ist klar, dass die Wirkung dieser vier Centrifugalkräfte durch zwei Massen B und b aufgehoben werden kann, wenn man dieselben in einer Entfernung ϱ_2 den Kurbeln gegenüber mit den Triebrädern verbindet. Die Centrifugalkräfte der Massen B und b sind: $\frac{B}{g}\omega^2 \varrho_2$, $\frac{b}{g}\omega^2 \varrho_2$. Nach dem Gesetz des Hebels halten sich diese sechs Kräfte das Gleichgewicht, wenn folgenden Bedingungen entsprochen wird:

$$\frac{B}{g}\omega^2 \varrho_2 \times 2 c_2 = \left(\frac{S}{g}\omega^2 r + \frac{q}{g}\omega^2 \varrho\right)(e_2 + e) + \left(\frac{S_1}{g}\omega^2 r_1 + \frac{q_1}{g}\omega^2 \varrho_1\right)(e_2 + e_1)$$

$$\frac{b}{g}\omega^2 \varrho_2 \times 2 e_2 = \left(\frac{S}{g}\omega^2 r + \frac{q}{g}\omega^2 \varrho\right)(e_2 - e) - \left(\frac{S_1}{g}\omega^2 r_1 + \frac{q_1}{g}\omega^2 \varrho_1\right)(e_1 - e_2)$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{S r + q \varrho}{\varrho_2}\,\frac{e_2 + e}{2 e_2} + \frac{S_1 r_1 + q_1 \varrho_1}{\varrho_2}\,\frac{e_1 + e_2}{2 e_2} \\ b &= \frac{S r + q \varrho}{\varrho_2}\,\frac{e_2 - e}{2 e_2} - \frac{S_1 r_1 + q_1 \varrho_1}{\varrho_2}\,\frac{e_1 - e_2}{2 e_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Diese zwei Massen heben aber nur allein die Massenwirkung einer Maschine und einer Kupplungsstange auf. Um aber auch die Massenwirkungen der zweiten (hintern) Maschine und der zweiten Kupplungsstange aufzuheben, müssen die Räder noch mit zwei Massen B und b versehen werden, und diese zwei Massen müssen, die erstere am Hinterrad, die letztere am Vorderrad, den Richtungen der hintern Kurbeln gegenüber angebracht werden. Die Wirkung aller mit den 4 Kurbeln rotirenden Massen kann also aufgehoben werden, wenn man jedes der beiden Triebräder mit zwei Massen B und b versieht. Am Vorderrad (Fig. 47 a) muss die Masse B der vordern Kurbel gegenüber angebracht werden. Am Hinterrad (Fig. 48 a) dagegen muss die Masse B der hintern Kurbel gegenüber, die Masse b der vordern Kurbel gegenüber angebracht werden. Allein den Centrifugalkräften der beiden mit einem Rad zu verbindenden Massen B und b entspricht eine resultirende Kraft, die auch durch eine einzige Masse Q hervorgebracht werden kann. Vorausgesetzt, dass Q ebenfalls in der Entfernung ϱ_2 angebracht wird, hat man nach der Zerlegung der Kräfte (Fig. 47 b):

$$B = Q \cos.\gamma \qquad b = Q \sin.\gamma$$

demnach:

$$\left.\begin{aligned} \text{tang.}\,\gamma &= \frac{b}{B} \\ Q &= \sqrt{b^2+B^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Substituirt man für b und B die Werthe, welche die Gleichungen (1) darbieten, so findet man nach einigen Reduktionen:

$$\text{tang.}\,\gamma = \frac{\left(1-\frac{e}{e_2}\right)+\frac{S_1 r_1+q_1\varrho_1}{S r+q\varrho}\left(1-\frac{e_1}{e_2}\right)}{\left(1+\frac{e}{e_2}\right)+\frac{S_1 r_1+q_1\varrho_1}{S r+q\varrho}\left(1+\frac{e_1}{e_2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$Q = \frac{S r+q\varrho}{\varrho_2}\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{e}{e_2}\right)^2\right]+\left[1+\frac{e\,e_1}{e_2^2}\right]\frac{S_1 r_1+q_1\varrho_1}{S r+q\varrho}+\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{e_1}{e_2}\right)^2\right]\left[\frac{S_1 r_1+q_1\varrho_1}{S r+q\varrho}\right]^2\right\}}$$

und dieser Ausdruch stimmt mit den früher Seite 130 gefundenen überein, denn wir haben bei dieser Rechnung paralelle Kurbeln vorausgesetzt, für welche in den früheren Gleichungen die oberen Zeichen gelten.

Pressungen der Triebräder gegen die Bahn, wenn dieselben mit balanzirenden, rotirenden Massen versehen sind.

Die rotirenden Balanzirungsmassen bringen durch ihre Centrifugalkraft einen veränderlichen Druck der Triebräder gegen die Schienen hervor, wodurch unter gewissen Umständen bedenkliche Nachtheile entstehen können.

Nennen wir $\mathfrak{C}$ den Betrag der Centrifugalkraft einer rotirenden Masse, ψ den Winkel, den in irgend einem Augenblick der Bewegung der durch den Schwerpunkt der rotirenden Masse gehende Radius mit einer durch den Mittelpunkt des Rades vertikal abwärts gezogenen Linie bildet, so ist $\mathfrak{C}\cos.\psi$ die Kraft, mit welcher das Rad durch die Wirkung der Centrifugalkraft der rotirenden Masse nach vertikaler Richtung abwärts getrieben wird. Nennen wir ferner $\mathfrak{G}$ das Gewicht der Triebaxe, der Triebräder und der mit denselben verbundenen rotirenden Massen, $\mathfrak{p}$ den Druck, welcher in dem Zeitaugenblick, dem der Winkel ψ entspricht, gegen die Axenbüchse der Räder ausgeübt wird. Endlich $\mathfrak{P}$ den Druck des Triebrades gegen die Bahn, so ist

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2}\mathfrak{G}+\mathfrak{p}+\mathfrak{C}\cos.\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Wenn die störenden Bewegungen des Wankens, Wogens und Nickens nur in einem schwachen Maase stattfinden, dürfen wir die Pressung $\mathfrak{p}$ als eine constante ansehen, und dann ist der Druck $\mathfrak{P}$ nur allein mit ψ veränderlich.

Der grösste und kleinste Werth dieses Druckes ist $\frac{1}{2}\mathfrak{G}+\mathfrak{p}+\mathfrak{C}$ und $\frac{1}{2}\mathfrak{G}+\mathfrak{p}-\mathfrak{C}$. Der erstere tritt ein, so oft der Schwerpunkt der rotirenden Masse seinen tiefsten, der letztere, so oft der Schwerpunkt der rotirenden Masse seinen höchsten Stand erreicht. Sollte $\frac{1}{2}\mathfrak{G}+\mathfrak{p}-\mathfrak{C}=0$, oder $\mathfrak{C}=\frac{1}{2}\mathfrak{G}+\mathfrak{p}$ werden, so würde der Druck des Rades gegen die Bahn ganz aufhören. Sollte gar $\mathfrak{C}>\frac{1}{2}\mathfrak{G}+\mathfrak{p}$ werden, so würden die Räder jedesmal in die Höhe springen, wenn die Schwerpunkte der rotirenden Massen ihre höchsten Orte

erreichen und die beiden Räder würden dann auf der Bahn gleichsam hämmernd fortlaufen.

Nennen wir D den Durchmesser eines Triebrades, $g=9{\cdot}808$ die Beschleunigung durch die Schwere, V die Fahrgeschwindigkeit der Lokomotive und behalten im Uebrigen die früher gewähltcn Bezeichnungen bei, so ist:

$$\mathfrak{C} = \frac{Q}{g}V^2\left(\frac{2\varrho_2}{D}\right)^2\frac{1}{\varrho_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

In der höchsten Stellung einer rotirenden Masse hört also der Druck des Rades gegen die Bahn ganz auf, wenn:

$$\frac{Q}{g}V^2\left(\frac{2\varrho_2}{D}\right)^2\frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{2}\mathfrak{G}+\mathfrak{p}$$

ist, oder wenn:

$$V = \sqrt{\left\{\frac{g\left(\frac{1}{2}\mathfrak{G}+\mathfrak{p}\right)}{Q}\left(\frac{D}{2\varrho_2}\right)^2\varrho_2\right\}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Für eine stärkere Personenzuglokomotive dürfen wir annehmen:

$$Q=50 \qquad \frac{1}{2}\mathfrak{G}+\mathfrak{p}=4000 \qquad \frac{D}{2\varrho_2}=\frac{4}{3} \quad . \quad \varrho_2=1 \qquad g=9{\cdot}808$$

und mit diesen Daten findet man $V=37$ Meter. Die grösste Geschwindigkeit der Schnellzüge beträgt aber nur circa 16 Meter, ist also nicht halb so gross als diejenige, bei welcher ein Aufspringen der Räder eintreten könnte.

Wir wollen noch die grössten und kleinsten Pressungen der Räder berechnen, wenn eine Geschwindigkeit von 16 Meter eintritt.

Nehmen wir wiederum:

$$Q=50 \qquad \frac{D}{2\varrho_2}=\frac{4}{3} \qquad \varrho_2=1 \qquad g=9{\cdot}808 \qquad \frac{1}{2}\mathfrak{G}+\mathfrak{p}=4000$$

und $V=16$, so wird:

$$\frac{1}{2}\mathfrak{G}+\mathfrak{p}\pm\frac{Q}{g}V^2\left(\frac{2\varrho_2}{D}\right)^2\frac{1}{\varrho_2}=4000\pm734$$

Das Minimum der Pressung eines Rades gegen die Bahn ist demnach in diesem Falle $4000\,(1-0{\cdot}183)$, das Maximum dagegen $4000\,(1+0{\cdot}183)$.

Diese grössten und kleinsten Pressungen weichen also nur circa 18% von dem mittleren Werth ab.

Diese Veränderlichkeit des Druckes der Räder gegen die Bahn ist also bei dieser grössten gegenwärtig vorkommenden Geschwindigkeit der Schnellzüge noch nicht bedenklich, denn eine Verminderung des Druckes um 18% kann ein Aufspringen der Räder noch nicht veranlassen, und durch eine Verstärkung dieses Druckes um 18% ist auch nicht zu befürchten, dass die Radumfänge ungleichförmig abgenützt werden könnten.

Vollkommen könnte die Wirkung der hin- und hergehenden Massen der Kolben, Kolbenstangen und Schubstangen nur durch hin- und hergehende Gegenmassen aufgehoben werden; allein die Anbringung derselben ist mit constructiven Schwierigkeiten verbunden, und so lange diese nicht beseitigt werden können, muss man sich schon mit den rotirenden Massen begnügen, und muss sich den veränderlichen Druck der Triebräder gegen die Bahn gefallen lassen.

Der praktische Werth der Massenbalanzirung.

Der praktische Werth der Balanzirung der hin- und hergehenden Massen durch rotirende oder durch hin- und hergehende Massen ist bis jetzt noch nicht richtig gewürdigt worden. Die französischen Ingenieure überschätzen die Sache und sie scheinen der Ansicht zu sein, dass durch eine richtige Balanzirung der Massen die wesentlichsten Uebelstände, mit welchen ein Lokomotivbau behaftet sein kann, aufgehoben wären. Die Engländer schlagen den Werth der Balanzirung zu gering an und kümmern sich um diese Angelegenheit in der Regel schon aus dem Grunde nicht, weil sie von einem „Theoretiker“ aufgebracht wurde. Nach meiner Meinung ist eine richtige Balanzirung zu empfehlen, ich bin jedoch weit entfernt, zu glauben, dass damit den wesentlichsten Uebelständen, mit welchen eine Lokomotive behaftet sein kann, abgeholfen würde. Diese Hauptübel liegen nicht im Zucken und Schlingern, sondern sie liegen im Wanken, Wogen und Nicken. Um die beiden ersteren dieser störenden Bewegungen aufzuheben, genügt es, richtig berechnete Balanzirungsgewichte anzuwenden, im Uebrigen ist aber in dieser Hinsicht der Bau der Lokomotive ganz gleichgültig. Um dagegen die drei letzteren störenden Bewegungen möglichst zu schwächen, muss die ganze Disposition der Maschine, des Kessels und der Räder und muss das ganze System der Federung gewissen Bedingungen entsprechen. Die wichtigsten Gesetze des Lokomotivbaues ergeben sich nicht aus dem Studium der zuckenden und schlingernden Bewegung, sondern sie folgen, wie wir in der Folge sehen werden, aus dem Studium der Bewegungen des Wogens, Wankens und Nickens. Dieses Studium ist der Gegenstand der folgenden, etwas weitläufigen Untersuchungen.

Das Gaukeln

oder

das Wanken, Wogen und Nicken.

Die Kräfte, welche das Gaukeln verursachen.

Das Wanken, Wogen und Nicken oder die gaukelnde Bewegung des auf den Federn liegenden Baues wird durch die Kräfte verursacht, welche auf dieses Massensystem einwirken und sich nicht das Gleichgewicht halten. Diese Kräfte sind folgende:

1) das Gewicht des auf den Federn ruhenden Baues;
2) die Elasticitätskräfte der Federn;
3) die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale;
4) der Widerstand des durch die Lokomotive fortzuziehenden Trains;
5) die Pressungen des Dampfes gegen die Deckelflächen der Dampfcylinder;
6) die Pressungen der Triebaxe gegen die Axengabeln.

Wenn eine Lokomotive ruhig auf der Bahn steht, wird das Gewicht des auf den Federn liegenden Baues durch die Elastizitätskräfte der Federn getragen, und jede derselben befindet sich dabei in einem mehr oder weniger deformirten Zustande. So wie aber in dem auf den Federn liegenden Bau eine gaukelnde Bewegung veranlasst wird, werden die Federn bald mehr, bald weniger deformirt, und wirken dann mit veränderlichen Intensitäten auf den Bau ein, so dass in demsellben die einmal hervorgerufene gaukelnde Bewegung fortdauernd erhalten wird.

Die Schubstangen bilden mit den Kolbenstangen Winkel, die mit den Kurbelstellungen veränderlich sind; dies hat zur Folge, dass die Gleitstücke gegen die Führungslineale beim Vorwärtsfahren nach aufwärts, beim Rückwärtsfahren nach abwärts Pressungen ausüben, deren Angriffspunkte und Intensitäten veränderlich sind.

Am hinteren Ende des Rahmenbaues wirkt der Widerstand, den der fortzuschaffende Wagenzug verursacht. Der Angriffspunkt dieses Widerstandes liegt tiefer als der Schwerpunkt des auf den Federn liegenden Baues, und die Intensität desselben ist, streng genommen, wegen der nicht ganz gleichförmigen Bewegung der Lokomotive etwas veränderlich.

Die mit dem Rahmenbau fest verbundenen Dampfcylinder werden durch den Druck des Dampfes gegen die Deckelflächen der Cylinder bald vorwärts, bald rückwärts getrieben. Laufen beide Kolben vorwärts, so werden die Cylinder durch den Dampfdruck zurück getrieben. Laufen beide Kolben nach rückwärts, so werden die Cylinder nach vorwärts getrieben. Laufen die Kolben nach entgegengesetzter Richtung, so wird einer von den Cylindern nach vorwärts, der andere nach rückwärts getrieben.

Durch den Druck des Dampfes gegen die Kolben wird die Axe der Triebräder mit veränderlicher Kraft bald vorwärts, bald rückwärts getrieben. Die Achsenbüchsen drücken desshalb bald stärker, bald schwächer gegen die Axengabeln.

Durch das veränderliche Spiel dieser Kräfte wird das Wanken, Wogen und Nicken hervorgebracht. Das Wanken entsteht, weil diese Kräfte in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende Queraxe nicht im Gleichgewichte sind. Das Wogen wird veranlasst, weil die Summe der vertikal aufwärts wirkenden Kräfte veränderlich ist, während das vertical abwärts wirkende Gewicht des Baues einen constanten Werth hat. Das Nicken wird hervorgerufen, weil die Kräfte in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende Längenaxe nicht im Gleichgewichte sind.

Die Bestimmung dieser störenden Bewegungen ist der Gegenstand der folgenden Untersuchung, die dabei vorkommenden Rechnungen sind zwar weitläufig, stehen aber in keinem Missverhältnisse mit den Resultaten, welche sie uns liefern.

Druck der Gleitstücke gegen die Führungslineale.

Es sei, Tab. XII, Fig. 44,

r der Halbmesser einer Maschinenkurbel;
L die Länge einer Schubstange;
α der Winkel, den in irgend einem Augenblick der Bewegung eine Kurbel mit der Bewegungsrichtung des Kolbens bildet;
λ der Winkel, den gleichzeitig die Schubstange mit der Kolbenstange oder mit der Bewegungsrichtung des Kolbens bildet;
P die Kraft, mit welcher der Kolben treibend einwirkt;
S der in der Schubstange wirkende Widerstand;
N die Kraft, mit welcher das Gleitstück nach aufwärts getrieben wird, wenn die Bewegung nach vorwärts erfolgt.

Dies vorausgesetzt, ist zunächst

$$r \sin.\alpha = L \sin.\lambda$$

demnach

$$\sin.\lambda = \left(\frac{r}{L}\right)\sin.\alpha \qquad \tang\lambda = \frac{\left(\frac{r}{L}\right)\sin.\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin.^2\alpha}}$$

Es ist aber ferner $S\cos.\lambda = P$, $S\sin.\lambda = N$, demnach

$$N = P\,\tang.\lambda = P\frac{\left(\frac{r}{L}\right)\sin.\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin.^2\alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Das Verhältniss $\left(\frac{r}{L}\right)$ ist bei Lokomotiven immer höchstens $\frac{1}{6}$, der Werth von $\left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin.^2\alpha$ beträgt also im Maximum $\frac{1}{36}$, kann also gegen die Einheit vernachlässigt werden, dann wird aber

$$N = P\frac{r}{L}\sin.\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Bezeichnen wir für die zweite Maschine die Kraft, mit welcher ihr Kolben treibend

wirkt, mit P und den Druck des Gleitstückes gegen das Führungslineal mit N_1, so ist, da die Kurbeln der beiden Maschinen einen rechten Winkel bilden,

$$N_1 = P_1\frac{r}{L}\sin.\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Es folgt sowohl aus der Betrachtung der Figur, sowie auch aus den Werthen von N und N_1, dass diese Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale stets nach aufwärts gerichtet bleiben, so lange die Bewegung der Kurbel nach der Richtung des Pfeiles erfolgt, denn das Zeichen von P stimmt stets mit dem Zeichen von $\sin.\alpha$, und das Zeichen von P_1 stimmt stets mit dem Zeichen von $\cos.\alpha$ überein. Erfolgt dagegen die Bewegung der Kurbel nach einer Richtung, die der des Pfeiles in der Figur entgegengesetzt ist, so fallen die Zeichen von P und $\sin.\alpha$, so wie auch von P_1 und $\cos.\alpha$ entgegengesetzt aus, die Werthe von N und N_1 werden also dann beständig negativ oder die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale sind, beim Rückwärtsfahren einer Lokomotive, deren Cylinder vor der Triebaxe liegen, nach abwärts gerichtet.

Dass diese Pressungen spürbare Wirkungen hervorbringen können, sieht man am besten durch ihre numerischen Werthe.

Es sei z. B. für eine Personenzuglokomotive der Durchmesser eines Dampfcylinders $=0{\cdot}4$ Meter, die Spannung des Dampfes hinter den Kolben auf 1 Quadratmeter bezogen, 50000 Kilogramm, der schädliche Widerstand vor den Kolben 12500 Kilogramm, das Verhältniss $\frac{r}{L}=6$, so sind die grössten Werthe von N und N_1

$$\frac{\overline{0{\cdot}4}^2 \times 3{\cdot}14}{4}(50000-12500)\frac{1}{6} = 785 \text{ Kilogramm.}$$

Allgemeine Gleichungen zur Bestimmung der gaukelnden Bewegung.

Die Bewegungen eines starren Massensystems werden bekanntlich durch 6 Gleichungen bestimmt. Drei derselben bestimmen die Bewegung des Schwerpunktes, drei andere die Drehungen des Systems um drei der Richtung nach auf einander senkrecht stehende, durch den Schwerpunkt gehende Axen.

Um die Bewegung des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues zu bestimmen, nehmen wir ein die fortschreitende Bewegung der Lokomotive begleitendes Axensystem $O\xi$ $O\upsilon$ $O\zeta$ an. Die Axe $O\zeta$ legen wir in die Axe des Geleises $O\upsilon$ quer über das Geleise. $O\zeta$ steht mithin vertikal.

Nennen wir ξ υ ζ die Coordinaten des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues in Bezug auf dieses fortschreitende Axensystem, ΣX ΣY ΣZ die algebraische Summe der Kräfte, welche in einem beliebigen Zeitmoment der Bewegung parallel mit $O\xi$ $O\upsilon$ $O\zeta$ auf das Massensystem einwirken, M die totale Masse des auf den Federn liegenden Baues $\left(\text{Masse} = \frac{\text{Gewicht}}{2\times 9{\cdot}808}\right)$, so sind die Gleichungen der Bewegung des Schwerpunktes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{1}{2}\frac{\Sigma X}{M} \\ \frac{d^2\upsilon}{dt^2} &= \frac{1}{2}\frac{\Sigma Y}{M} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \frac{1}{2}\frac{\Sigma Z}{M} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Um die drehenden Bewegungen des Massensystems zu bestimmen, legen wir durch den Schwerpunkt desselben ein Axensystem $O x_1$ $O y_1$ $O z_1$ und zwar so, dass $O x_1$ mit der Axe des Lokomotivkessels parallel ist, $O y_1$ senkrecht auf $O x_1$ und parallel mit der Ebene des Lokomotivrahmens ist, $O z_1$ auf der Ebene des Lokomotivrahmens senkrecht steht.

Es ist klar, dass diese drei Axen entweder ganz genau, oder doch sehr nahe mit den Hauptaxen der Trägheitsmomente zusammenfallen.

Nennt man nun:

A B C die Trägheitsmomente (als Massen ausgedrückt) des auf den Federn liegenden Baues in Bezug auf die Axen $O x_1$ $O y_1$ $O x_1$;

x_1 y_1 z_1 die Winkelgeschwindigkeiten, mit welchen sich das System in einem bestimmten Zeitaugenblick t um die drei Axen $O x_1$ $O y_1$ $O z_1$ dreht;

X_1 Y_1 Z_1 die Summe der statischen Momente der zur Zeit t wirksamen Kräfte in Bezug auf die Axen $O x_1$ $O y_1$ $O z_1$;

$d x_1$ $d y_1$ $d z_1$ die Aenderungen dieser Winkelgeschwindigkeiten in dem auf t folgenden Zeitelement dt, so sind bekanntlich die Gleichungen der drehenden Bewegung:

$$\left.\begin{aligned} C\frac{d z_1}{dt} + (B - A) x_1 y_1 &= \frac{1}{2} Z_1 \\ B\frac{d y_1}{dt} + (A - C) x_1 z_1 &= \frac{1}{2} Y_1 \\ A\frac{d x_1}{dt} + (C - B) y_1 z_1 &= \frac{1}{2} X_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Die Kräfte ΣX ΣY ΣZ, so wie auch die Momente X_1 Y_1 Z_1 haben in unserem Falle nicht constante Werthe, sondern sind periodische Funkti onen der Zeit. Die Bestimmung der gaukelnden Bewegung hängt also von der Integration eines sehr complizirten Systems von sechs Gleichungen ab, und es ist vorauszusehen, dass insbesondere die Integration der drei Gleichungen (2) nicht gelingen wird, denn die Werthe von x_1 y_1 z_1 werden selbst in dem günstigsten Falle, wenn X_1 Y_1 Z_1 verschwinden, durch ellyptische Funktionen ausgedrückt.

Glücklicherweise sind aber alle einzelnen Bewegungen, aus welchen das Gaukeln zusammengesetzt ist, sehr klein, denn die Federn sind sehr starr und müssen es sein, damit diese gaukelnde Bewegung nicht zu stark auftreten kann. Wegen dieser Kleinheit der drehenden Schwingungen können in den Gleichungen (2) der Glieder $(B - A) x_1 y_1$ $(A - C) x_1 z_1$ $(C - B) y_1 z_1$ gegen $C\frac{d z_1}{dt}$ $A\frac{d y_1}{dt}$ $A\frac{d x_1}{dt}$ vernachlässigt werden, wodurch die drei Gleichungen (2) eine wesentlich einfachere Form erhalten.

Ferner aber dürfen wir drei von den sechs Gleichungen (1) und (2) ganz weglassen. Die erste der Gleichungen (1) kann weggelassen werden, weil sie sich auf die horizontale Fortbewegung des Schwerpunktes bezieht, die wir schon früher behandelt haben. Die zweite der Gleichungen (1) kann weggelassen werden, weil parallel mit der Richtung der Axe $O y_1$ keine Kräfte wirken. Die erste der Gleichungen (2) kann endlich weggelassen werden, weil die früher genannten, das Wanken, Wogen und Nicken veranlassenden Kräfte keine Drehung um eine Vertikalaxe erregen. Da wir also die erste und zweite der Gleichungen (1) und die erste der Gleichungen (2) weglassen, und in der zweiten und dritten der Gleichungen (2) die Glieder $(A - C) x_1 z_1$ $(C - B) y_1 z_1$ vernachlässigen dürfen, so reduzirt sich unser Problem auf die Integration der folgenden drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \frac{1}{2}\frac{\Sigma Z}{M} \\ B\frac{d y_1}{dt} &= \frac{1}{2} Y_1 \\ A\frac{d x_1}{dt} &= \frac{1}{2} X_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Ausmittlung der Werthe von ΣZ Y_1 X_1.

Um das Verständniss der folgenden Untersuchung zu erleichtern, wollen wir derselben eine Lokomotive von ganz bestimmter und bekannter Bauart zu Grund legen. Wir wählen eine Stephenson'sche Personenzuglokomotive mit inneren Cylindern, innerem Rahmen und mit sechs nicht gekuppelten Rädern (Tab. XIII, Fig. 51, 52, 53, 54).

Der Erfahrung zufolge dürfen wir annehmen, dass die zum Zusammendrücken einer Feder erforderliche Kraft der Zusammendrückung proportional sei. Die Richtigkeit dieses Satzes werden wir in der Folge auch theoretisch nachweisen; er gilt jedoch nur für nicht zu starke Zusammendrückungen. Die Zahl, mit welcher man die Zusammendrückung einer Feder multipliziren muss, um die zusammendrückende Kraft zu erhalten, wollen wir den Starrheits-Coeffizienten der Feder heissen. Ist also f der Starrheits-Coeffizient einer Feder, x ihre Zusammendrückung, so ist $f x$ die zusammendrückende Kraft.

Nennen wir nun, Tab. XIII, Fig. 51 bis Fig. 54,

G das Gewicht des auf den Federn liegenden Baues, mit Einschluss des im Kessel enthaltenen Wassers;

Δ_1 den Horizontalabstand des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues von der hinteren Laufaxe;

Δ_2 den Horizontalabstand dieses Schwerpunktes von der mittleren Triebaxe:

Δ_3 den Horizontalabstand dieses Schwerpunktes von der vorderen Laufaxe;

$2\,\varepsilon$ die Entfernung der Federn an einer Seite der Lokomotive von den Federn der andern Seite;

f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 die Starrheits-Coeffizienten der in den Punkten 1 2 3 4 5 6 (Fig. 54) wirkenden Federn;

ζ_1 ζ_2 $\ldots$ ζ_6 die Zusammendrückungen dieser Federn durch das Gewicht des Baues, wenn derselbe ruhig auf den Federn liegt und die Lokomotive ruhig auf der Bahn steht;

Dies vorausgesetzt, sind $f_1 \zeta_1$ $f_2 \zeta_2$ $\ldots$ $f_6 \zeta_6$ die Kräfte, mit welchen die Federn nach vertikaler Richtung auf den Bau aufwärts wirken, wenn die Lokomotive in vollkommen ruhigem Zustand auf der Bahn steht. Für den Gleichgewichtszustand der Federn im ruhenden Zustand des Baues bestehen demnach folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} G &= f_1 \zeta_1 + f_2 \zeta_2 + \ldots\ldots + f_6 \zeta_6 \\ \Delta_1 (f_1 \zeta_1 + f_4 \zeta_4) + \Delta_2 (f_2 \zeta^2 + f_5 \zeta_5) &= \Delta_3 (f_3 \zeta_3 + f_6 \zeta_6) \\ f_1 \zeta_1 + f_2 \zeta_2 + f_3 \zeta_3 &= f_4 \zeta_4 + f_5 \zeta_5 + f_6 \zeta_6 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Wir wollen diese Gleichung zunächst benützen um die Bedingungen ausfindig zu machen, bei deren Erfüllung alle Federn durch den auf denselben ruhig liegenden Bau um gleich viel zusammengedrückt werden, wollen aber voraussetzen, dass die auf eine und dieselbe Axe einwirkenden Federn gleich starr sind, dass also $f_1 = f_4$ $f_2 = f_5$ $f_3 = f_6$

und $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 \quad . \; . \; . \; . \quad \zeta_6 = z$ sei, wobei z die in allen Federn entstehende Zusammendrückung bedeutet. In diesem Falle werden die zwei ersten der Gleichungen (4)

$$\left.\begin{aligned} G &= 2\,z\,(f_1 + f_2 + f_3) \\ 0 &= \Delta_1 f_1 + \Delta_2 f_2 - \Delta_3 f_3 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

und die dritte dieser Gleichungen wird identisch erfüllt.

Dies sind also die Bedingungen, bei deren Erfüllung alle Federn durch die Last des Baues um gleich viel zusammengepresst werden, vorausgesetzt, dass die auf eine Axe wirkenden Federn gleich starr sind. Wir werden in der Folge veranlasst sein, auf diese Bedingungen (5) zurückzukommen.

Wir denken uns nun, dass man den Bau aus der Gleichgewichtsposition, die durch die Gleichungen (4) charakterisirt wird, in eine andere Lage bringt, indem man den Bau parallel zu seiner Gleichgewichtslage um ζ hebt; sodann um eine durch den Schwerpunkt gehende Queraxe um einen Winkel φ (Fig 51) so dreht, dass der vordere Theil der Lokomotive höher zu stehen kommt, und endlich um eine durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe um einen kleinen Wink el ψ (Fig. 52, 53) so dreht, dass sich die rechte Seite der Lokomotive hebt, die linke aber senkt, so sind dann:

Die Zusammendrückungen der Federn	Die zusammendrückenden Kräfte
$\zeta_1 - \zeta + \Delta_1 \varphi + \varepsilon \psi$	$f_1 (\zeta_1 - \zeta + \Delta_1 \varphi + \varepsilon \psi)$
$\zeta_2 - \zeta + \Delta_2 \varphi + \varepsilon \psi$	$f_2 (\zeta_2 - \zeta + \Delta_2 \varphi + \varepsilon \psi)$
$\zeta_3 - \zeta - \Delta_3 \varphi + \varepsilon \psi$	$f_3 (\zeta_3 - \zeta - \Delta_3 \varphi + \varepsilon \psi)$
$\zeta_4 - \zeta + \Delta_1 \varphi - \varepsilon \psi$	$f_4 (\zeta_4 - \zeta + \Delta_1 \varphi - \varepsilon \psi)$
$\zeta_5 - \zeta + \Delta_2 \varphi - \varepsilon \psi$	$f_5 (\zeta_5 - \zeta + \Delta_2 \varphi - \varepsilon \psi)$
$\zeta_6 - \zeta - \Delta_3 \varphi - \varepsilon \psi$	$f_6 (\zeta_6 - \zeta - \Delta_3 \varphi - \varepsilon \psi)$

und es ist nun:

a) die Summe aller den Rahmenbau aufwärts drückenden Federkräfte

$$\begin{aligned} f_1 \zeta_1 + f_2 \zeta_2 + f_3 \zeta_3 + f_4 \zeta_4 + f_5 \zeta_5 + f_6 \zeta_6 - \zeta\,[f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6] \\ + \varphi\,[\Delta_1 (f_1 + f_4) + \Delta_2 (f_2 + f_5) - \Delta_3 (f_3 + f_6] \\ + \varepsilon\psi\,[f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6] \end{aligned}$$

b) die algebraische Summe der statischen Momente der Federkräfte in Bezug auf die Queraxe

$$\begin{aligned} &+ \Delta_3\,[f_3 (\zeta_3 - \zeta - \Delta_3 \varphi + \varepsilon \psi) + f_6 (\zeta_6 - \zeta - \Delta_3 \varphi - \varepsilon \psi)] \\ &- \Delta_2\,[f_2 (\zeta_2 - \zeta + \Delta_2 \varphi + \varepsilon \psi) + f_5 (\zeta_5 - \zeta + \Delta_2 \varphi - \varepsilon \psi)] \\ &- \Delta_1\,[f_1 (\zeta_1 - \zeta + \Delta_1 \varphi_1 + \varepsilon \psi) + f_4 (\zeta_4 - \zeta + \Delta_1 \varphi - \varepsilon \psi)] \end{aligned}$$

c) die algebraische Summe der Momente der Federkräfte in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe

$$\varepsilon \left\{ \begin{aligned} &f_4 (\zeta_4 - \zeta + \Delta_1 \varphi - \varepsilon \psi) + f_5 (\zeta_5 - \zeta + \Delta_2 \varphi - \varepsilon \psi) + f_6 (\zeta_6 - \zeta - \Delta_3 \varphi - \varepsilon \psi) \\ -&f_1 (\zeta_1 - \zeta + \Delta_1 \varphi + \varepsilon \psi) - f_2 (\zeta_2 - \zeta + \Delta_2 \varphi + \varepsilon \psi) - f_3 (\zeta_3 - \zeta - \Delta_3 \varphi + \zeta \psi \end{aligned} \right\}$$

Diese Ausdrücke werden sehr vereinfacht, wenn man berücksichtigt, dass in der Wirklichkeit die auf eine und dieselbe Axe wirkenden Federn gleich starr, und in ruhigem Zustande um gleich viel zusammengepresst sind. Wir können also nehmen

$$f_1 = f_4 \quad f_2 = f_5 \quad f_3 = f_6$$

$$\zeta^1 = \zeta_4 \quad \zeta_2 = \zeta_5 \quad \zeta_3 = \zeta_6$$

Führt man diese Werthe in die obigen Ausdrücke ein und berücksichtigt die Gleichgewichtsbedingungen (4), so erhält man folgende Resultate

a) Summe aller Federkraft

$$G - 2\,\zeta\,(f_1 + f_2 + f_3) + 2\,\varphi\,(\Delta_1 f_1 + \Delta_2 f_2 - \Delta_3 f_3)$$

b) Summe der Momente in Bezug auf die Queraxe

$$+ 2\,\zeta\,(\Delta_1 f_1 + \Delta_2 f_2 - \Delta_3 f_3) - 2\,\varphi\,(f_1 \Delta_1^2 + f_2 \Delta_2^2 + f_3 \Delta_3^2)$$

c) Summe der Momente in Bezug auf die Längenaxe

$$- 2\,\varepsilon^2 \psi\,(f_1 + f_2 + f_3)$$

Somit sind nun die von den Federkräften herrührenden Bestandtheile der Summe ΣZ, Y_1, X_1 berechnet, und wir gehen nun zur Bestimmung derjenigen Glieder über, welche die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale liefern.

Nennen wir

- P die Kraft, mit welcher der Kolben der vorderen Maschine getrieben wird.
- P_1 die Kraft, mit welcher der Kolben der hinteren Maschine getrieben wird. Diese Kräfte P und P_1 haben zwar gleiche Intensitäten, es ist aber gleichwohl zweckmässiger, sie so in Rechnung zu bringen, als wären sie ungleich;
- L die Länge einer Schubstange;
- r den Halbmesser einer Kurbel.
- e den Horizontalabstand der Axen der beiden Cylinder von der Längenaxe der Lokomotive (Fig. 54);
- ω die Winkelgeschwindigkeit der Triebräder;
- D den Durchmesser eines Triebrades;
- α den Winkel, den die Kurbel der vorderen Maschine mit der Axe des Cylinders in dem Zeitmoment bildet, in welchem die Position des Baues durch die Grössen ζ, φ und ψ bestimmt wird.
- $\frac{\pi}{2} - \alpha$ den Winkel, den gleichzeitig die Kurbel der hinteren Maschine mit der Richtung ihres Cylinders bildet. (Fig. 51);

Dies vorausgesetzt, sind, vermöge der Seite (138) gegebenen Erläuterungen, $P \frac{r}{L} \sin.\alpha$ $P_1 \frac{r}{L} \cos.\alpha$ die Pressungen der Gleitstücke gegen die oberen Führungslineale, und sind ferner $r \cos.\alpha + L - \Delta_2$, $r \sin.\alpha + L - \Delta_2$ die Horizontalabstände der beiden Gleitstücke von der durch den Schwerpunkt des Baues gehenden Queraxe.

Die Momente dieser Pressungen sind demnach

d) in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Oueraxe

$$P \frac{r}{L} \sin.\alpha \,(r \cos.\alpha + L - \varDelta_2) + P_1 \frac{r}{L} \cos.\alpha \,(r \sin.\alpha + L - \varDelta_2)$$

oder

$$\frac{1}{2}(P + P_1)\frac{r}{L} \sin.2\alpha + (L - \varDelta_2)\frac{r}{L}(P \sin.\alpha + P_1 \operatorname{Cos.}\alpha)$$

e) in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe $O\,x_1$

$$P \frac{r}{L} \sin.\alpha\, e - P_1 \frac{r}{L} \cos.\alpha\, e$$

oder

$$\frac{r}{L} e\,(P \sin.\alpha - P_1 \cos.\alpha)$$

endlich ist die Summe der vertikal aufwärts wirkenden Pressungen

f) $$\frac{r}{L}(P \sin.\alpha + P_1 \cos.\alpha)$$

Nun haben wir noch die auf den Rahmenbau einwirkenden Horizontalkräfte zu berücksichtigen.

Heissen wir K den numerischen Werth der Kraft, mit welcher ein Kolben getrieben wird (also die Differenz der Pressungen gegen die beiden Flächen eines Kolbens), so ist, wie schon früher gezeigt wurde, der Widerstand des ganzen Trains $2K\frac{2l}{D\pi}$, wobei l die Länge des Kolbenschubes bezeichnet. Nennen wir h_1 die Höhe des Schwerpunktes des Baues über dem Zusammenhängungspunkt der Lokomotive mit dem Tender, so ist das Moment dieses Zuges in Begug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe

g) $$-h_1 \,.\, 2K\frac{2l}{D\pi}$$

Streng genommen ist der Zug in der Zusammenhängung der Lokomotive mit dem Tender nicht constant gleich dem mittleren Widerstand des Trains, sondern bei einem etwas unruhigen Lauf der Lokomotive periodisch veränderlich.

Wenn die Kurbeln der beiden Maschinen die in Fig. (51) dargestellte Stellung haben, wird, beim Vorwärtslaufen der Lokomotive, der vordere Kolben vorwärts, der Kolben der hinteren Maschine dagegen rückwärts getrieben; wird demnach der Cylinder der vorderen Maschine mit einer Kraft P zurück, der Cylinder der hinteren Maschine mit einer Kraft P_1 nach vorwärts getrieben. Nennen wir h die Höhe des Schwerpunktes über der Axe des Triebrades, so ist

h) $$h\,(P_1 - P)$$

das Moment in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe.

Nun haben wir noch das Moment der Pressungen zu bestimmen, welche die Triebaxe gegen die Axengabeln ausübt. Dabei wollen wir uns aber erlauben, die Umdrehungsgeschwindigkeit der Triebaxe als constant anzunehmen, und die hin- und hergehenden Massen der Schubstangen, Kolbenstangen und Kolben zu vernachlässigen, oder, mit andern Worten, wir wollen die Pressungen der Triebaxe gegen die Axengabeln nach statischen Gesetzen berechnen; der Fehler, den wir dadurch begehen, ist von keinem Belang.

Zerlegt man die Pressungen der Schubstangen gegen die Kurbelzapfen in horizontale und vertikale Kräfte, so sind die ersteren P und P_1, die letzteren dagegen $P\frac{r}{L}\sin.\alpha$, $P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha$.

Wir setzen voraus, dass die Triebräder auf der Bahn nicht glitschen, sondern nur rollen, dann können wir das Radwerk als einen Hebel ansehen, der im Berührungspunkte seinen Drehungspunkt hat. Nennen wir für einen Augenblick $\mathfrak{K}$ den numerischen Werth des Druckes der Triebaxe gegen die Axenhalter, so haben wir zur Bestimmmg desselben die Gleichung

$$\mathfrak{K}\frac{D}{2} = P\left(\frac{D}{2} + r \sin.\alpha\right) - P_1\left(\frac{D}{2} - r \cos.\alpha\right) + P\frac{r}{L}\sin.\alpha \; r\cos.\alpha + P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha \; r \sin.\alpha$$

und hieraus folgt:

$$\mathfrak{K} = P - P_1 + \frac{2r}{D}(P \sin.\alpha + P_1 \cos.\alpha) + \frac{r^2}{LD}(P + P_1)\sin.2\alpha$$

Das Moment dieses Druckes in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe ist:

i) $$+\mathfrak{K}h = +h\left[P - P_1 + \frac{2r}{D}(P \sin.\alpha + P_1 \cos.\alpha) + \frac{r^2}{LD}(P + P_1)\sin.2\alpha\right]$$

Hiemit sind nun endlich alle Bestandtheile der zu berechnenden Summe bestimmt; wir dürfen jedoch nicht übersehen, dass in der Summe der Vertikalkräfte auch das Gewicht des Baues aufgenommen werden muss. Fassen wir sämmtliche Resultate a b c d e f g h i zusammen und berücksichtigen das Gewicht G des Baues, so finden wir nun:

$$\Sigma Z = -2\zeta(f_1 + f_2 + f_3) + 2\varphi(\varDelta_1 f_1 + \varDelta_2 f_2 - \varDelta_3 f_3) + \frac{r}{L}(P \sin.\alpha + P_1 \cos.\alpha)$$

$$Y_1 = \left\{\begin{array}{l} 2\zeta(\varDelta_1 f_1 + \varDelta_2 f_2 - \varDelta_3 f_3) - 2\varphi(f_1 \varDelta_1^2 + f_2 \varDelta_2^2 + f_3 \varDelta_3^2) \\ + \frac{1}{2}(P + P_1)\frac{r^2}{L}\sin.2\alpha + (L - \varDelta_2)\frac{r}{L}(P \sin.\alpha + P_1 \cos.\alpha) \\ - h_1\, 2K\frac{2l}{D\pi} + h(P_1 - P) + h(P - P_1) \\ + h(P + P_1)\frac{r^2}{DL}\sin.2\alpha + \frac{2r}{D}h(P \sin.\alpha + P_1 \cos.\alpha) \end{array}\right\}$$

$$X_1 = -2\varepsilon^2\psi(f_1 + f_2 + f_3) + \frac{r}{L}e(P \sin.\alpha - P_1 \cos.\alpha)$$

oder auch, wenn man in Y_1 zusammengehörige Glieder vereiniget:

$$\begin{aligned}\Sigma Z &= -2\zeta(f_1+f_2+f_3)+2\varphi(\Delta_1 f_1+\Delta_2 f_2-\Delta_3 f_3)+\frac{r}{L}(P\sin.\alpha+P_1\cos.\alpha)\\ Y_1 &= -h_1\,2K\frac{2l}{D\pi}+2\zeta(\Delta_1 f_1+\Delta_2 f_2-\Delta_3 f_3)-2\varphi(f_1\Delta_1^2+f_2\Delta_2^2+f_3\Delta_3^2)\\ &\quad+\frac{1}{2}(P+P_1)\frac{r^2}{L}\left(1+\frac{2h}{D}\right)\sin.2\alpha+\left[(L-\Delta_2)\frac{r}{L}+\frac{2rh}{D}\right](P\sin.\alpha+P_1\cos.\alpha)\\ X_1 &= -2\varepsilon^2\psi(f_1+f_2+f_3)+\frac{r}{L}e(P\sin.\alpha-P_1\cos.\alpha)\end{aligned} \quad . \quad (6)$$

Rechnen wir die Zeit t von einem Augenblick des Beharrungszustandes an, in welchem die Kurbel der vorderen Maschine mit der Richtung ihrer Kolbenstange einen Winkel α_0 bildete, so können wir in den Gleichungen (6), die für die Zeit t gelten $\alpha=\alpha_0-\omega t$ setzen. Dies setzt jedoch voraus, dass α_0 gleich oder kleiner als 90° ist, indem die Gleichungen (6) zunächst nur gelten, so lange α zwischen 0 und 90° liegt.

Hiedurch erhalten wir nun:

$$\begin{aligned}\Sigma Z &= -2\zeta(f_1+f_2+f_3)+2\varphi(\Delta_1 f_1+\Delta_2 f_2-\Delta_3 f_3)+\frac{r}{L}\left[P\sin.(\alpha_0-\omega t)+P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\right]\\ Y_1 &= \left\{\begin{aligned}&-h_1\,2K\frac{2l}{D\pi}+2\zeta(\Delta_1 f_1+\Delta_2 f_2-\Delta_3 f_3)-2\varphi(f_1\Delta_1^2+f_2\Delta_2^2+f_3\Delta_3^2)\\ &+\frac{1}{2}(P+P_1)\frac{r^2}{L}\left(1+\frac{2h}{D}\right)\sin.2(\alpha_0-\omega t)\\ &+\left[(L-\Delta_2)\frac{r}{L}+\frac{2rh}{D}\right]\left[P\sin.(a_0-\omega t)+P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\right]\end{aligned}\right\}\\ X_1 &= -2\varepsilon^2\psi(f_1+f_2+f_3)+\frac{r}{L}e\left[P\sin.(\alpha_0-\omega t)+P_1\cos.\alpha_0-\omega t)\right]\end{aligned} \quad (7)$$

Aus diesen Werthen von $\Sigma Z\ Y_1\ X_1$ könnte man bereits sehr viel wichtige Schlüsse ziehen, allein da eine vollständige Kenntniss der Bewegungszustände doch nur durch die Integrale der Bewegungsgleichungen erlangt werden kann, so wollen wir uns hier nicht länger aufhalten, sondern machen sogleich die Vorbereitungen zur Fortsetzung der Untersuchung.

Differenzialgleichungen, welche die gaukelnde Bewegung bestimmen.

Diese Differenzialgleichungen ergeben sich, wenn man in die Gleichungen (3) die so eben für $\Sigma Z\ Y_1$ und X_1 gefundenen Werthe substituirt und ferner noch berichtiget, dass man hat:

$$\frac{dy_1}{dt}=\frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad \frac{dx_1}{dt}=\frac{d^2\psi}{dt^2}$$

Macht man diese Substitution und setzt sodann zur Aabkürzung der Rechnungen:

$$\left.\begin{aligned}&m=\frac{f_1+f_2+f_3}{M} && m_1=\frac{\Delta_1 f_1+\Delta_2 f_2-\Delta_3 f_3}{B} && m_2=\frac{\varepsilon^2(f_1+f_2+f_4)}{A}\\ &n=\frac{\Delta_1 f_1+\Delta_2 f_2-\Delta_3 f_3}{M} && n_1=\frac{\Delta_1^2 f_1+\Delta_2^2 f_2+\Delta_3^2 f_3}{B}\\ &p=\frac{r}{2LM} && p_1=(L-\Delta_2)\frac{r}{2LB}+\frac{rh}{BD} && p_2=\frac{re}{2AL}\\ &c=\frac{2lh_1K}{BD\pi} && q_1=\frac{r^2}{2LB}\left(1+\frac{2h}{D}\right)\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

so erscheinen die Gleichungen (3) unter nachstehender Form;

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -m\zeta+n\varphi+p\left[P\sin.(\alpha_0-\omega t)+P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\right]\\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -c+m_1\zeta-n_1\varphi+\frac{1}{2}(P+P_1)q_1\sin.2(\alpha_0-\omega t)\\ &\quad+p_1\left[P\sin.(\alpha_0-\omega t)+P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\right]\\ \frac{d^2\psi}{dt^2} &= -m_2\psi+p_2\left[P\sin.(\alpha_0-\omega t)-P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\right]\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots (9)$$

Setzen wir:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \varphi_1+c\frac{m}{m_1 n-n_1 m}\\ \zeta &= \zeta_1+c\frac{n}{m_1 n-n_1 m}\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots (10)$$

so bedeuten φ_1 und ζ_1 zwei neue Variable, die von φ und ζ nur um constante Werthe verschieden sind.

Durch Einführung dieser Werthe von φ und ζ in die Gleichungen (9) nehmen dieselben folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} &= -m\zeta_1+n\varphi+p\left[P\sin.(\alpha_0-\omega t)+P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\right]\\ \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} &= +m_1\zeta_1-n_1\varphi_1+p_1\left[P\sin.(\alpha_0-\omega t)+P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\right]\\ &\quad+\frac{1}{2}(P+P_1)q_1\sin.2(\alpha_0-\omega t)\\ \frac{d^2\psi}{dt^2} &= -m_2\psi+pe\left[P\sin.(\alpha_0-\omega t)-P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\right]\end{aligned}\right\} \quad \dots (11)$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den Gleichungen (9) dadurch, dass in ihnen kein absolut constantes Glied vorkommt. Integrirt man die Gleichungen (11) und setzt sodann die für ζ_1 und φ_1 sich ergebenden Ausdrücke in (10), so erhält man die zu berechnenden Werthe von φ und ζ.

Es ist in Erinnerung zu bringen, dass diese Gleichungen (9) und (11) zunächst nur gelten, so lange $\alpha_0-\omega t$ nicht ausserhalb 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, d. h. nur für die Zeit gelten, in der die Kurbel der vordern Maschine den Quadranten I, Fig. (51) durchläuft. Die Differenzialgleichungen für die Bewegung der Kurbel durch die übrigen Quadranten erhält man, wenn man in den Gleichungen (11) für P und P_1 diejenigen Werthe setzt, welche in folgendem Schema zusammengestellt sind:

Wenn $\alpha_0 - \omega t$ liegt im Quadranten Fig. (51)	sind die Werthe von		
	P	P_1	$P + P_1$
I.	$+K$	$+K$	$2K$
II.	$+K$	$-K$	0
III.	$-K$	$-K$	$-2K$
IV.	$-K$	$+K$	0

wobei K den numerischen Werth der Kraft bedeutet, mit welcher ein Kolben getrieben wird. Die numerischen Werthe von P und P_1 bleiben nämlich der Voraussetzung gemäss nun gleich k, die Zeichen von P und P_1 ändern sich dagegen in der Art, dass die Produkte $P \sin.(\alpha_0 - \omega t)$ $P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)$ stets positiv bleiben.

Die dritte der Gleichungen (11) kann unabhängig von den beiden andern integrirt werden, weil sie die beiden andern Variabeln ζ_1 und φ_1 nicht enthält. Die beiden erstern der Gleichungen (11) müssen dagegen gleichzeitig integrirt werden, weil in jeder derselben sowohl ζ_1 als auch φ_1 vorkommt. Mit den Integrationen dieser Gleichungen werden wir uns nun beschäftigen.

Integration der Differenzialgleichung, welche das Wanken bestimmt.

Die wankende Bewegung wird durch die dritte der Gleichungen (10) also durch

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -m_2\psi + p_2\left[P\sin.(\alpha_0 - \omega t) - P_1\cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

bestimmt. Das Integrale dieser Gleichung kann nach der von Lagrange gelehrten Methode der Variation der Constanten integrirt werden. Dieser Weg führt jedoch zu weitläufigen Rechnungen, die man sich ersparen kann, indem die Form disses Integrales errathen werden kann. Es ist nämlich die Vermuthung eine sehr nahe liegende, dass alle einzelnen Schwingungen, aus welchen das Gaukeln besteht, nach ähnlichen Gesetzen erfolgen, wie die Schwingungen der Saiten oder elastischen Körper. Es ist daher wahrscheinlich, dass wir der Gleichung (1) genügen werden, wenn wir setzen

$$\psi = \mathfrak{A}\sin.kt + \mathfrak{B}\cos.kt + \mathfrak{M}\sin.(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{N}\cos.(\alpha_0 - \omega t) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Wenn diese Annahme eine richtige ist, so muss die Gleichung (1) durch Einführung dieses Werthes von ψ eine identische werden.

Aus (2) folgt durch zweimaliges Differenziren nach t.

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -k^2(\mathfrak{A}\sin.kt + \mathfrak{B}\cos.kt) - \mathfrak{M}\,\omega^2\sin.(\alpha_0 - \omega t) - \mathfrak{N}\,\omega^2\cos.(\alpha_0 - \omega t) \quad \ldots \quad (3)$$

Substituirt man diese Werthe von ψ und $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ in (1) so findet man:

$$-k^2(\mathfrak{A}\sin.kt + \mathfrak{B}\,\alpha\cos.kt) - \mathfrak{M}\,\omega^2\cos.^2\sin.(\alpha_0 - \omega t) - \mathfrak{N}\,\omega^2\cos.(\alpha_0 - \omega t) =$$

$$-m_2(\mathfrak{A}\sin.kt. + \mathfrak{B}\cos.kt) - \mathfrak{M}\,m_2\sin.(\alpha_0 - \omega t - \mathfrak{N}\,m_2\cos.(\alpha_0 - \omega t)$$

$$+ p_2 P\sin.(\alpha_0 - \omega t) - p_2 P_1\cos.(\alpha_0 - \omega t)$$

Diese Gleichung wird, wenn ω^2 nicht gleich m_2 ist, eine identische, wenn man setzt

$$k^2 = m_2 \qquad -\mathfrak{M}\,\omega^2 = -\mathfrak{M}\,m_2 + p_2 P \qquad -\mathfrak{N}\,\omega^2 = \mathfrak{N}\,m_2 - p_2 P_1$$

d. h. wenn

$$\left.\begin{aligned} K &= \sqrt{m_2} \\ \mathfrak{M} &= \frac{p_2 P}{m_2 - \omega^2} \\ \mathfrak{N} &= -\frac{p_2 P_1}{m_2 - \omega^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

genommen wird.

Setzt man die Werthe in (2), so findet man für das Integrale der Gleichung (1), wenn ω^2 nicht gleich m_2 ist folgenden Ausdruck:

$$\psi = \mathfrak{A}\sin.\sqrt{m_2}\,t + \mathfrak{B}\cos.\sqrt{m_2}\,t + \frac{p_2}{m_2 - \omega^2}\left[P\sin.(\alpha_0 - \omega t) - P_1\cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] \quad \ldots \quad (5)$$

in welchem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die beiden Constanten des Integrals bezeichnen. Den besonderen Fall, wen $\omega^2 = m_2$ ist, werden wir in der Folge ins Auge fassen.

Die Gleichung (5) zeigt, dass die wankende Bewegung aus vier periodisch wiederkehrenden Schwingungen besteht. Die von ω, P und P_1 unabhängigen Schwingungen $\mathfrak{A}\sin.\sqrt{m_2}\,t$, $\mathfrak{B}\cos.\sqrt{m_2}\,t$, wollen wir Grundschwingungen nennen. Diese bleiben sich gleich, es mag die Lokomotive schnell oder langsam laufen, stark oder schwach getrieben werden. Sie treten allein auf, wenn man die Wirkung des Dampfes auf die Maschine aufhebt, und die Lokomotive nur durch die Trägheit ihrer Massen auf der Bahn fortläuft.

Wenn die Zeit t um $\frac{2\pi}{\sqrt{m_2}}$ wächst, kehrt die Lokomotive in die Lage zurück, in welcher sie sich zur Zeit t befand, $\frac{2\pi}{\sqrt{m_2}}$ ist daher die Zeit T eine Grundschwingung. Setzt man für m_2 seinen Werth, so findet man:

$$T = \frac{2\pi}{\varepsilon}\sqrt{\frac{A}{f_1 + f_2 + f_3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Diese Zeit fällt klein aus, oder die Grundschwingungen folgen schnell aufeinander, 1) wenn $f_1 + f_2 + f_3$ gross, d. h. wenn die Federn starr sind, 2) wenn A klein, d. h. wenn das Trägheitsmoment des beweglichen Baues in Bezug auf die Längenaxe klein ist, 3) wenn ε gross ist, d. h. wenn die Federn möglichst weit aussen am Baue angebracht sind.

Das Glied

$$\frac{p_2}{m_2 - \omega^2}\left[P \sin.(\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right]$$

bestimmt die Schwingungen, welche durch die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale veranlasst werden, wenn die Kolben durch Dampf getrieben werden. Diese Schwingungen richten sich genau nach den Kurbelbewegungen, wir wollen sie desshalb Kurbelschwingungen nennen. Die Dauer einer solchen Schwingung, d. h. die Zeit, in welcher die Lokomotive in Folge dieser Schwingungsweise in eine gewisse Lage zurückkehrt, ist $\frac{2\pi}{\omega}$ und stimmt genau mit der Umdrehung der Treibaxe überein. Je nachdem also die Lokomotive schnell oder langsam läuft, folgen diese Kurbelschwingungen schnell oder langsam aufeinander. Die grösste Ablenkung von der Ruheposition, welche in Folge dieser Schwingung eintritt, beträgt $\frac{p_2 P}{m_2 - \omega^2}$ oder wenn wir für p_2 und m_2 ihren Werth setzen:

$$\frac{P r e}{2 L A} \frac{1}{\frac{\varepsilon^2 (f_1 + f_2 + f_3)}{A} - \omega^2}$$

oder auch

$$\frac{P r e}{2 L} \frac{1}{\varepsilon^2 (f_1 + f_2 + f_3) - \omega^2 A} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Das durch die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale verursachte Wanken wird demnach bedenklich 1) wenn P gross ist, d. h. wenn die Maschinen kräftig wirken; 2) wenn e gross ist, d. h. wenn die Horizontaldistanz der Cylinder gross ist; 3) wenn $\frac{r}{L}$ gross ist, d. h. wenn die Schubstangen im Verhältniss zum Kurbelhalbmesser eine geringe Länge haben; 4) wenn ε klein ist, d. h. wenn die Federn eng gestellt sind; 5) wenn $f_1 + f_2 + f_3$ klein ist, d. h. wenn die Federn weich sind; 6) wenn die Geschwindigkeit der Lokomotive demjenigen Werth nahe kommt, für welchen

$$\omega = \varepsilon \sqrt{\frac{f_1 + f_2 + f_3}{A}}$$

wird, d. h. wenn die Umdrehungszeit der Triebaxe mit der Zeit einer Grundschwingung nahe übereinstimmt. Es gibt also für jede Lokomotive eine Winkelgeschwindigkeit der Triebaxe, bei welcher ein heftiges Wanken des beweglichen Baues eintreten muss.

Denkt man sich, dass eine Lokomotive ganz allmälig aus einem langsamen Bewegungszustand in einen extravagant schnellen übergeht, so wird anfänglich nur ein schwaches, dann ein stärkeres, hierauf ein sehr heftiges Wanken eintreten; hat man aber diesen gefährlichen Moment glücklich überstanden, so nimmt das Wanken bei noch weiter zunehmender Geschwindigkeit mehr und mehr ab, und würde bei einer grenzenlosen Geschwindigkeit so verschwinden, dass sich die Lokomotive ganz aufrecht stehend hielte.

Wir können auch die Einwirkungen der Unvollkommenheit der Bahn auf das Wanken der Lokomotive durch Rechnung verfolgen, wenn wir annehmen, dass diese Einwirkungen durch periodisch wiederkehrende Funktionen der Zeit ausgedrückt werden dürfen. Durch die Unebenheiten der Bahn werden die Räder, insbesondere an den Schienen-Verbindungen in die Höhe gestossen, werden ferner die Räder zwischen den Schienen hin und her geschoben. Durch diese Einwirkungen entstehen gewisse Drehungsmomente und wir wollen annehmen, dass dieselben durch

$$\varepsilon \mathfrak{B} (\sin. \lambda t + \cos. \gamma t) \text{ und } h \mathfrak{H} (\sin. \mu t + \cos. \mu t)$$

ausgedrückt werden dürfen, wobei 2ε der horizontale Abstand der rechtseitigen Federn von den linkseitigen und h die Höhe des Schwerpunktes des beweglichen Baues über den Axen der Räder bezeichnet. Ferner $\mathfrak{B}$ λ $\mathfrak{H}$ μ gewisse von dem Bau der Bahn und der Räder abhängige Constante sind.

Wir erhalten nun statt der Gleichung (1) die folgende

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = -m_2 \psi + p_2 \left[P \sin.(\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] + \frac{\varepsilon \mathfrak{B}}{2 A} (\sin. \lambda t + \cos. \lambda t) + \frac{h \mathfrak{H}}{2 A} (\sin. \mu t + \cos. \mu t)$$

Vorausgesezt dass m_2 weder gleich ω^2 noch gleich λ^2 und auch nicht gleich μ^2 ist, findet man für das Integrale dieser Gleichung folgenden Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} -\psi = {} & \mathfrak{A} \sin. \sqrt{m_2}\, t + \mathfrak{B} \cos. \sqrt{m_2}\, t + \frac{p_2}{m_2 - \omega^2}\left[P \sin.(\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] \\ & + \frac{\varepsilon \mathfrak{B}}{2 A (m_2 - \lambda^2)} (\sin. \lambda t + \cos. \lambda t) \\ & + \frac{h \mathfrak{H}}{2 A (m_2 - \mu^2)} (\sin. \mu t + \cos. \mu t) \end{aligned}\right\} \quad . (8)$$

Da sowohl $\sin. \lambda t + \cos. \lambda t$ als auch $\sin. \mu t + \cos. \mu t$ nicht grösser als $\sqrt{2}$ werden kann, so ist die grösste Neigung, die durch das Aufspringen der Räder verursacht werden kann,

$$\sqrt{2}\, \frac{\varepsilon \mathfrak{B}}{2 A (m_2 - \lambda^2)} = \frac{1}{2} \sqrt{2}\, \frac{\varepsilon \mathfrak{B}}{\varepsilon^2 (f_1 + f_2 + f_3) - \lambda^2 A}$$

und die gröste Neigung, die aus der Hin- uüd Herbewegung der Räder zwischen den Schienen entstehen kann

$$\sqrt{2}\, \frac{h \mathfrak{H}}{2 A (m_2 - \mu^2)} = \frac{1}{2} \sqrt{2}\, \frac{h \mathfrak{H}}{\varepsilon^2 (f_1 + f_2 + f_3) - \mu A}$$

Hieraus sieht man, dass die Einwirkung der Bahn auf das Wanken der Lokomotive gross ausfällt: 1) wenn sich der Schwerpunkt des beweglichen Baues in einer beträchtlichen Höhe über den Axen der Räder befindet, 2) wenn m_2 nahe gleich λ^2 oder nahe gleich μ^2 wird. Diess ist aber dann der Fall, wenn die Zeit $\frac{2\pi}{\sqrt{m_2}}$ einer Grundschwingung nahe gleich ist der Zeit $\frac{2\pi}{\lambda}$ von einem Radaufsprung bis zum nächsten, oder nahe gleich ist der Zeit $\frac{2\pi}{\mu}$ des Hin- und Herganges der Räder zwischen dem Geleise. Da die störenden Einwirkungen der Bahn vorzugsweise an den Schienenstössen stattfinden, so werden wir der Wahrheit ziemlich nahe kommen, wenn wir diese Zeiten $\frac{2\pi}{\lambda}$ und $\frac{2\pi}{\mu}$ gleich setzen der Zeit, in der die Lokomotive über eine Schienenlänge läuft; diese Zeit ist aber wenn wir die Laufgeschwindigkeit der Lokomotive mit V und die Länge einer Schiene mit S bezeichnen $\frac{S}{V}$. Durch die Einwirkung einer aus gleich langen Schienen bestehenden Bahn kann also das Wanken bedeutend werden, wenn annähernd

$$\frac{S}{V} = \frac{2\pi}{\sqrt{m_2}} = \frac{2\pi}{\varepsilon} \sqrt{\frac{A}{f_1 + f_2 + f_3}}$$

oder annähernd

$$v = \frac{S\,\varepsilon}{2\,\pi}\sqrt{\frac{f_1 + f_2 + f_3}{A}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (9)$$

wird. Denkt man sich, dass eine Lokomotive aus einem sehr langsamen Beharrungszustand allmählig in einen extravagant raschen übergeht, so wird die Bahn anfangs nur ein schwaches, dann ein stärkeres, zuletzt aber, wenn die Geschwindigkeit sehr gross geworden ist, nur noch ein äusserst schwaches Wanken verursachen. Es gibt also auch hinsichtlich der Einwirkung der Bahn auf das Wanken eine gefährliche Geschwindigkeit; auch ist aus dem Gesagten klar, dass man sich durch ungleich lange Schienen gegen die Einwirkung der Bahn theilweise schützen könnte.

Gehen wir nun zur Behandlung der Ausnahmsfälle über, in welchen der Ausdruck (9) das Integrale der Differenzialgleichung (8) nicht mehr darstellen kann.

Ausnahmsfälle, in welchen die für das Wanken aufgefundenen Ausdrücke unrichtig sind.

Es gibt drei Fälle, in welchen die Gleichung (9) den wahren Werth von ψ nicht mehr richtig darstellt. Diese Fälle treten ein, wenn m_2 entweder gleich ω^2 oder gleich λ^2 oder endlich gleich μ^2 ist, d. h. wenn die Dauer $\frac{2\pi}{\sqrt{m_2}}$ entweder gleich ist der Umdrehungszeit $\frac{2\pi}{\omega}$ der Triebaxe oder gleich ist einer der Perioden $\frac{2\pi}{\lambda}$ $\frac{2\pi}{\mu}$ der Bahneinwirkungen. Die analytische Praxis lässt vermuthen, dass in einem dieser drei Fälle das wahre Integrale der Gleichung (8) ein mit der Zeit t multiplizirtes Glied enthalten müsse. Prüft man diese Vermuthung, so findet man, dass der Differenzialgleichung (8) in der That durch folgende Ausdrücke entsprochen wird:

1. Wenn $\omega^2 = m_2$ ist:

$$\psi = \mathfrak{A} \sin.\omega t + \mathfrak{B} \cos.\omega t + \frac{p_2}{2\sqrt{m_2}}\left[P \sin.(\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] t$$

$$+ \frac{\varepsilon\,\mathfrak{B}}{2\,A\,(m_2 - \lambda^2)}(\sin.\lambda t + \cos.\lambda t)$$

$$+ \frac{h\,\mathfrak{H}}{2\,A\,(m_2 - \mu^2)}(\sin.\mu t + \cos.\mu t)$$

2. Wenn $\lambda^2 = m_2$ ist

$$\psi = \mathfrak{A} \sin.\sqrt{m_2}\,t + \mathfrak{B} \cos.\sqrt{m_2}\,t + \frac{p_2}{m_2 - \omega^2}\left[P \sin.(\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right]$$

$$+ \frac{\varepsilon\,\mathfrak{B}}{4\,A\sqrt{m_2}}(\sin.\sqrt{m_2}\,t - \cos.\sqrt{m_2}\,t)\,t$$

$$+ \frac{h\,\mathfrak{H}}{2\,A\,(m_2 - \mu^2)}(\sin.\mu t + \cos.\mu t)$$

Wenn $\mu^2 = m_2$ ist:

$$\psi = \mathfrak{A} \sin.\sqrt{m_2}\,t + \mathfrak{B} \cos.\sqrt{m_2}\,t + \frac{p_2}{m_2 - \omega^2}\left[P \sin.(\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right]$$

$$+ \frac{\varepsilon\,\mathfrak{B}}{2\,A\,(m_2 - \lambda^2)}(\sin.\lambda t + \cos\lambda t)$$

$$+ \frac{h\,\mathfrak{H}}{4\,A\sqrt{m_2}}(\sin.\sqrt{m_2}\,t - \cos.\sqrt{m_2}\,t)\,t$$

Wäre gleichzeitig $\omega^2 = m_2$ und $\lambda^2 = m_2$ oder $\omega^2 = m_2$ und $\mu^2 = m_2$ oder endlich $\lambda^2 = m_2$ und $\mu^2 = m_2$, so würden in dem Ausdruck für ψ zwei mit der Zeit t multiplizirte Glieder vorkommen. Wäre gleichzeitig $m_2 = \omega^2 = \lambda^2 = \mu^2$ so würden in ψ drei mit t multiplizirte Glieder vorkommen.

In allen diesen Fällen wird das Wanken der Lokomotive mit der Zeit immer stärker und stärker, kann demnach mit der Zeit sehr drohend werden. Es ist daher von praktischem Interesse zu erfahren, was zu thun ist, damit in der Wirklichkeit diese gefährlichen Gleichheiten: $\omega^2 = m_2$ $\lambda^2 = m_2$ $\mu^2 = m_2$ nicht eintreten können.

Wenn die gefährliche Gleichheit $\omega^2 = m_2$ nicht eintreten soll, muss die grösste Winkelgeschwindigkeit, die in der Benutzung einer Lokomotive eintreten kann, kleiner sein als $\sqrt{m_2}$. Nennen wir V die grösste Laufgeschwindigkeit, bis zu welcher hin man eine Lokomotive laufen lassen will, D den Durchmesser eines Triebrades, so ist der grösste Werth von $\omega = 2\frac{V}{D}$. Die gefährliche Gleichheit $\omega^2 = m_2$ wird also bei keiner der Geschwindigkeiten, mit welcher man die Lokomotive laufen lassen will, eintreten, wenn

$$2\frac{V}{D} < \sqrt{m_2}$$

oder wenn

$$D > \frac{2\,V}{\sqrt{m_2}}$$

oder wenn

$$D > 2\,\frac{V}{\varepsilon}\sqrt{\frac{A}{f_1 + f_2 + f_3}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Diesem Ausdrucke kann man eine mehr sprechende Form geben. Das Federwerk einer Lokomotive soll, wie wir in der Folge sehen werden, immer so angeordnet werden, dass in unbewegtem Zustande der Lokomotive alle Federn gleich stark zusammengedrückt sind. Dieser Anforderung wird, wie Seite 142, Gleichung (5) erklärt wurde entsprochen, wenn

$$\left.\begin{aligned} f_1\,\Delta_1 + f_2\,\Delta_2 - f_3\,\Delta_3 &= 0 \\ f_1 + f_2 + f_3 &= \frac{G}{2\,s} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

$s = z$ gesetzt ist, wobei s die Zusammendrückung jeder Feder bedeutet. Wir wollen annehmen, das Federwerk der Lokomotive entspreche dieser Anforderung.

Um das Trägheitsmoment A des beweglichen Baues in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe auszudrücken, sei d_4 der Durchmesser eines Cylinders, dessen Gewicht gleich G und dessen Trägheitsmoment (als Masse ausgedrückt) in Bezug auf seine geometrische Axe gleich A ist, so hat man

$$A = \frac{G}{2g} \quad \frac{d_1^2}{8} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Vermittelst dieses Werthes von A und des Werthes, den die zweite der Bedingungen (2) für $f_1 + f_2 + f_3$ darbietet, wird die Beziehung (1)

$$D > \frac{1}{2} \frac{d_1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2s}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Die Zusammendrückung s der Federn durch das Gewicht des beweglihen Baues beträgt gewöhnlich 0·05 Meter, $\frac{d_1}{\varepsilon}$ ist für die Lokomotive von *Crampton* annähernd gleich 2·5, $g = 9{\cdot}808$. Die grösste, bei Personenschnellzügen vorkommende Geschwindigkeit V kann zu 16 Meter angenommen werden. Mit diesen Daten findet man aus (4)

$$D > 2 \text{ Meter.}$$

Diese numerische Rechnung ist nun allerdings nicht ganz zuverlässig, weil das Verhältniss $\frac{d_1}{\varepsilon}$ nur nach einer ungefähren Schätzung genommen wurde, aber jedenfalls werden wir durch den Ausdruck (4) belehrt, dass weiche Federn (für welche s gross ist) und eine grosse Fahrgeschwindigkeit V grosse Triebräder erfordern, damit das Wanken nicht zu stark wird.

Untersuchen wir nun ferner, unter welchen Bedingungen die gefährlichen Gleichheiten $\lambda^2 = n_2$ und $\mu^2 = m_2$ vermieden werden können.

Die störenden Einwirkungen der Bahn auf die Bewegung der Lokomotive geschehen vorzugsweise an den Schienenverbindungen; es ist daher der Natur der Sache angemessen, wenn wir die Perioden $\frac{2\pi}{\mu}$ und $\frac{2\pi}{\lambda}$ gleich setzen der Zeit, in welcher die Lokomotive eine Schienenlänge durchläuft. Nennen wir also S eine Schienenlänge, V die Laufgeschwindigkeit der Lokomotive, so ist $\frac{S}{V}$ die Zeit, in der die Lokomotive eine Schienenlänge zurücklegt. Wir setzen daher

$$\frac{2\pi}{\mu} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{S}{V}$$

oder

$$\lambda = \mu = 2\pi \frac{V}{S} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Damit nun bei keiner von den Geschwindigkeiten, die in der Wirklichkeit vorkommen, die gefährliche Gleichheit $\lambda^2 = m_2$ eintritt, muss, selbst für den grössten Werth von V, $\lambda < \sqrt{m_2}$ sein. Wir erhalten daher die Bedingung

$$2\pi \frac{V}{S} < \varepsilon \sqrt{\frac{f_1 + f_2 + f_3}{A}}$$

oder

$$S > 2\pi \frac{V}{\varepsilon} \sqrt{\frac{A}{f_1 + f_2 + f_3}}$$

oder endlich wenn wir für A und $f_1 + f_2 + f_3$ die Werthe setzen, welchen die Gleichungen (2) und (3) darbieten

$$S > \frac{\pi}{2} \frac{d_1}{\varepsilon} V \sqrt{\frac{2s}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Weiche Federn (für welche s gross ist), eine grosse Fahrgeschwindigkeit und eine kleine Federdistanz ε erfordern also lange Schienen.

Setzen wir auch hier $\frac{d_1}{\varepsilon} = 2{\cdot}5$, $V = 16$, $s = 0{\cdot}05$, $g = 9{\cdot}81$, so folgt aus (5)

$$S > 6{\cdot}28 \text{ Meter.}$$

Diese Schienenlänge stimmt mit den gegenwärtig üblichen Schienenlängen beinahe überein.

Für den ersten Augenblick wird es wohl Jedermann befremdend finden, dass gewisse, beinahe mässige Fahrgeschwindigkeiten gefährlicher sein können als extravagante Geschwindigkeiten, und ich muss gestehen, dass mir dieses Ergebniss der Analysis anfänglich mit der Natur der Sache so sehr im Widerspruche zu sein schien, dass ich irgend einen Rechnungsfehler begangen zu haben vermuthete. Lange suchte ich vergeblich nach diesem vermeintlichen Fehler, bewerkstelligte die Integration der Differenzialgleichung (1) Seite 148 durch verschiedene Methoden, kam aber immer zu dem gleichen Endresultate. Endlich wurde es mir klar, dass die Rechnung recht habe, dass sich das Ergebniss mit der Natur der Sache sehr wohl vertrage, und dass ähnliche Erscheinungen in sehr vielen Fällen vorkommen. Es ist nämlich nicht schwer einzusehen, dass eine vorhandene periodisch schwingende Bewegung immer heftiger und heftiger werden muss, wenn dieselbe in Zeitintervallen, die der Schwingungsperiode gleich kommen, auf gleiche Weise gestört wird. Wenn z. B. auf ein schwingendes Pendel nach jedem Schwung ein wenn auch nur schwacher Schlag ausgeübt wird, so müssen die Schwingungen zuletzt immer grösser und grösser werden. Oder wenn gegen ein im Wasser schwankendes Schiff Wellenschläge einwirken, die in Zeitintervallen aufeinander folgen, welche der Schwingungszeit des Schiffes gleich sind, so muss nothwendig das Schwanken des Schiffes zuletzt immer stärker und stärker werden. Auch in der Astronomie kommt ein merkwürdiges Beispiel vor, das hier angeführt zu werden verdient.

La Place hat zuerst gezeigt, dass die Störung, welche in der Bewegung eines Planeten A durch einen Planeten B eintritt, wesentlich von dem Verhältniss der Umlaufszeiten dieser Planeten abhängt, und dass diese Störung fort und fort zunehmen muss, wenn die Umlaufszeit des einen Planeten ein Vielfaches von der Umlaufszeit des anderen Planeten ist.

In der später folgenden Untersuchung über das Nicken und Wogen werden wir ebenfalls der Erscheinung begegnen, dass sich unter gewissen Umständen die störenden Bewegungen immer mehr und mehr anhäufen können, und es ist meine Ueberzeugung, dass darin manche in den Bewegungen der Lokomotive vorkommende Erscheinungen ihren Grund haben, und dass namentlich oftmals Axenbrüche durch Ansammlung von störenden Bewegungen geschehen mögen.

Bedingungen, bei deren Erfüllung die wankenden Bewegungen einer Lokomotive nur in einem schwachen Grade eintreten.

Aus dieser Untersuchung über die wankenden Bewegungen geht hervor, dass diese störenden Bewegungen nur in einem schwachen Grade eintreten werden, wenn folgenden Bedingungen entsprochen wird.

A) Die wankenden Bewegungen, welche die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale verursachen, fallen vermöge des Ausdruckes (7) Seite 150 klein aus:

1. Wenn die Lokomotive nur mit schwacher Kraft getrieben wird, oder nur einen verhältnissmässig kleinen Widerstand zu überwinden hat.
2. Wenn die Schubstangen im Verhältniss zum Kurbelhalbmesser sehr lang sind.
3. Wenn die Cylinder der beiden Maschinen möglichst nah neben einander liegen. Innen liegende Cylinder sind also hinsichtlich des Wankens den aussen liegenden vorzuziehen.
4. Wenn die Federn einen hohen Grad von Starrheit besitzen.
5. Wenn die parallel mit den Axen der Räder gemessene Horizontaldistanz der Federn gross ist. Hinsichtlich des Wankens ist es also besser, wenn die Federn nicht innerhalb, sondern wenn sie ausserhalb der Räder angebracht werden. Auch ist eine grosse Spurweite vortheilhaft.
6. Wenn die beim schnellsten Lauf der Lokomotive eintretende Umdrehungszeit der Triebräder kleiner ist als die Zeit einer Grundschwingung des auf den Federn liegenden Baues.

B) Die wankenden Bewegungen, welche aus den Einwirkungen der Bahn gegen die Räder entstehen, fallen klein aus.

7. Wenn der Schwerpunkt des Baues möglichst tief liegt.
8. Wenn die Federn, nach der Richtung der Triebaxe gemessen, weit auseinander angebracht sind.
9. Wenn die Federn starr sind, in welchem Fall jedoch harte Stösse eintreten, die noch nachtheiliger sind, als schwankende Bewegungen.
10. Wenn die Schienen der Bahn sehr lang sind, so dass die Zeit, welche die Lokomotive braucht, um über eine Schiene zu laufen, beträchtlich grösser ist, als die Zeit einer Grundschwingung des Baues.

Die hinsichtlich des Wankens vortheilhaften Bedingungen sind also, wenn man sie in kurzen Worten zusammenfasst: Mässige Anstrengung der Lokomotive, lange Schubstangen, kleine Kurbelhalbmesser, innen liegende Cylinder, starre aussen liegende Federn, grosse Triebräder, tief liegender Schwerpunkt, lange Bahnschienen, grosse Spurweite.

Diese Untersuchung über das Wanken hat eine reichere Ausbeute geliefert, als das Studium über das Zucken und Schlingern; noch reicher ist die Ausbeute, welche die Untersuchung über das Wogen und Nicken liefert

Bestimmung des hinsichtlich des Wankens vortheilhaftesten Durchmessers der Triebräder.

Der Ausdruck (7) Seite 150, welcher die Grösse des Wankens bestimmt, kann in eine Form gebracht werden, die über den Einfluss des Durchmessers der Triebräder auf das Wanken Aufschluss gibt.

Nennt man W den totalen Widerstand des Trains mit Einschluss des Widerstandes der Lokomotive. D den Durchmesser eines Triebrades. V die Fahrgeschwindigkeit der Lokomotive, so ist

$$\mathrm{Pr} = \frac{\pi}{8} D W \qquad \omega = \frac{2V}{D}$$

Vermittelst dieser Werthe wird der Ausdruck (7), wenn man denselben zur Abkürzang mit X bezeichnet und $f_1 + f_2 + f_3 = F_1$ setzt:

$$X = \frac{\pi}{16} W \frac{e}{L} \frac{D^3}{\varepsilon^2 D^2 F_1 - 4 V^2 A} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Es entsteht nun die Frage, wie gross für eine neu zu erbauende Lokomotive, die mit einer gewissen Geschwindigkeit V zu laufen bestimmt ist, der Durchmesser D genommen werden soll, damit das Wanken X so klein als möglich ausfällt. Der Ausdruck (1) zeigt, dass X verschwindet, wenn $D = 0$ ist. Dass aber X sowohl für $D = \infty$ als auch für $D = 2 \frac{V}{\varepsilon} \sqrt{\frac{A}{F_1}}$ unendlich gross ausfällt; es muss also zwischen diesen Werthen von D ein Werth von D liegen, für welchen X ein relatives Minimum wird, d. h. es gibt einen hinsichtlich des Wankens vortheilhaftesten Durchmesser der Triebräder. Wir finden denselben, wenn wir den Differenzialquotienten $\frac{dX}{dD}$ suchen und gleich Null setzen.

Es ist nun

$$\frac{dX}{dD} = \frac{\pi}{16} W \frac{e}{L} \frac{(\varepsilon^2 D^2 F_1 - 4 V^2 A) 3 D^2 - 2 D^4 \varepsilon^2 F_1}{(\varepsilon^2 D^2 F_1 - 4 V^2 A)^2}$$

Der Zähler dieses Ausdruckes verschwindet, wenn $D = 0$, so wie auch wenn

$$D = \frac{V}{\varepsilon} \sqrt{12 \frac{A}{F_1}} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

ist, und dies ist der hinsichtlich des Wankens vortheilhafteste Raddurchmesser. Führt man diesen Werth von D in (1) ein, so erhält man

$$X_{\text{min.}} = \frac{3\pi}{32} W \frac{e V}{\varepsilon^3 F_1 L} \sqrt{\frac{12 A}{F_1}} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Setzt man in diese Ausdrücke (2) und (3) für A und $F_1 = f_2 + f_2 + f_3$ die Werthe, welche die Gleichungen (2) und (3) Seite 153 und 154 darbieten, so wird:

$$D = V \frac{d_1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{s}{g}} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

$$X_{\text{min.}} = \frac{6\pi}{32} \frac{W}{G} \frac{e V s d_1}{\varepsilon^3 L} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{s}{g}} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

für die Lokomotive von *Crampton* ohne Blindaxe ist annähernd: $s = 0{\cdot}05$, $g = 9{\cdot}81$, $\frac{d_1}{\varepsilon} = 2{\cdot}5.$, $\varepsilon = 0.7$, $e = 0{\cdot}9$ Meter, $L = 2{\cdot}2$, $\frac{W}{G} = \frac{1}{20}$. Für diese Werthe findet man:

$$\left.\begin{aligned} D &= 0.22\,V \\ X_{\text{min.}} &= \frac{V}{3750} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Dieser Durchmesser ist sehr gross, denn er wird schon für die sehr mässige Fahrgeschwindigkeit von 10 Meter 2·2 Meter. Allein man sieht auch aus dem Werth von X, dass dieses schwächste Wanken verschwindend klein ist.

Wir wollen sehen, wie stark das Wanken wird, wenn der Durchmesser der Triebräder von dem vortheilhaftesten Werth abweicht.

Nehmen wir

$$D = m \frac{V}{\varepsilon} \sqrt{12 \frac{A}{F_1}} = m V \frac{d_1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{s}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

wobei m irgend eine beliebige Zahl bezeichnet. Sezt man $m = 1$, so gibt (7) den vortheilhaftesten Durchmesser.

Der das Wanken messende allgemeine Werth von X wird für diesen Werth von D

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{3\pi}{16} \frac{W e V}{L \varepsilon^3 F_1} \sqrt{12 \frac{A}{F_1}} \frac{m^3}{3 m^2 - 1} \\ &\text{oder} \\ X &= \frac{6\pi}{16} \frac{W}{G} \frac{e V s d_1}{\varepsilon^3 L} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{s}{g}} \frac{m^3}{3 m^2 - 1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Setzen wir auch hier $s = 0{\cdot}05$ $g = 9{\cdot}81$ $\frac{d_1}{\varepsilon} = 2{\cdot}5$ $\varepsilon = 0{\cdot}7$ $e = 0{\cdot}9$ $L = 2{\cdot}2$ $\frac{W}{G} = \frac{1}{20}$ so findet man:

$$D = 0{\cdot}22\, m V$$

$$x = \frac{V}{1875} \frac{m^3}{3 m^2 - 1}$$

Für	$m = 1$	0·9	0·8	0·7	0·6	$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0{\cdot}577$
wird	$\frac{D}{V} = 0{\cdot}22$	0·20	0·176	0·154	0·132	0·127
und	$\frac{m^3}{3m^2-1} = 0{\cdot}50$	0·51	0·56	0·73	2·7	∞

Hieraus sieht man, dass ein bedenkliches Wanken erst dann eintritt, wenn der Durchmesser des Triebrades derjenigen Grenze ganz nahe kommt, bei welcher die Umdrehungszeit des Rades mit der Zeit einer Grundschwingung zusammen trifft. Für $m = 0.6$ wird $D = 0{\cdot}132\, V$ und $X = \frac{V}{694}$ und dieser Werth von X wird selbst für eine sehr grosse Geschwindigkeit von $V = 20$ nur $\frac{20}{694} = \frac{1}{34}$ d. h. die Lokomotive wankt dann nur im Winkel von 2° hin und her.

Das Wogen und Nicken.

Integration der Differenzialgleichungen, welche das Wogen und Nicken bestimmen.

Diese Differenzialgleichungen sind die beiden ersteren der Gleichungen (11) Seite 147 nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} &= - m \zeta_1 + n \varphi_1 + p \left[P \sin.(\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] \\ \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} &= + m_1 \zeta_1 - n_1 \varphi_1 + p_1 \left[P \sin(\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] \\ &\qquad + \frac{1}{2} (P + P_1) q_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Sowohl aus der Form dieser Gleichungen, als auch aus der Natur der Sache kann man vermuthen, dass diese Bewegungen des Nickens und Wogens aus Schwingungen bestehen werden, von denen jede einzelne entweder ein Gesetz von der Form $\mathfrak{M} \sin. kt$ oder ein Gesetz von der Form $\mathfrak{N} \cos. kt$ befolgt. Wir versuchen daher den Gleichungen (1) zu genügen, indem wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at + \mathfrak{P} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q} \sin.(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R} \cos.(\alpha_0 - \omega t) \\ \varphi_1 &= \mathfrak{C} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at + \mathfrak{P}_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q}_1 \sin.(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R}_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (2)$$

und es kommt nun darauf an, die Constanten $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}\ \mathfrak{D}\ \mathfrak{a}\ \mathfrak{P}\ \mathfrak{Q}\ \mathfrak{R}\ \mathfrak{P}_1\ \mathfrak{Q}_1\ \mathfrak{R}_1$ so zu bestimmen, dass die Ausdrücke (2) die Integralien von (1) in der That darstellen können.

Differenzirt man die Ausdrücke (2) zweimal nach t und substituirt sodann die sich ergebenden Werthe von $\frac{d^2\zeta_1}{dt^2}$ $\frac{d\varphi_1}{dt^2}$, sowie auch die Werthe von ζ_1 und φ_1 in die Gleichungen (1), so erhält man folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} & - a^2 (\mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) - 4 \omega^2 \mathfrak{P} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) - \omega^2 \mathfrak{Q} \sin.(\alpha_0 - \omega t) - \omega_2 \mathfrak{R} \cos.(\alpha_0 - \omega t) = \\ & - m (\mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) - m \mathfrak{P} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) - m \mathfrak{Q} \sin.(\alpha_0 - \omega t) - m \mathfrak{R} \cos.(\alpha_0 - \omega t) \\ & + n (\mathfrak{C} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at) + n \mathfrak{P}_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + n \mathfrak{Q}_1 \sin.(\alpha_0 - \omega t) + n \mathfrak{R}_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t) \\ & \qquad + p P \sin.(\alpha_0 - \omega t) + p P_1 \cos(\alpha_0 - \omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \alpha^2 (\mathfrak{C} \sin. at + \mathfrak{D} \cos at) - 4 \omega^2 \mathfrak{P}_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) - \omega^2 \mathfrak{Q}_1 \sin.(\alpha_0 - \omega t) - \omega^2 \mathfrak{R}_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t) = \\ & + m_1 (\mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) + n_1 \mathfrak{P} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + m_1 \mathfrak{Q} \sin.(\alpha_0 - \omega t) + m_1 \mathfrak{R} \cos.(\alpha_0 + \omega t) \\ & - n_1 (\mathfrak{C} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at) - n_1 \mathfrak{P}_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) - n_1 \mathfrak{Q}_1 \sin.(\alpha_0 - \omega t) - n_1 \mathfrak{R}_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t) \\ & \qquad + \frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + p_1 P \sin.(\alpha_0 - \omega t) + p_1 P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t) \end{aligned}$$

Damit die Ausdrücke (2) die Integrale von (1) darstellen können, müssen die so eben