Schröder, Ernst

Über eine eigenthümliche

Berlin
1881

Ueber eine eigenthümliche Bestimmung einer Function durch formale Anforderungen.

(Von Herrn *Ernst Schröder* in Karlsruhe.)

Bei meinen Untersuchungen über die Functionalgleichungen, welche Beziehungen mehrargumentiger Functionen zu sich selbst und ihren Umkehrungen ausdrücken, bin ich gelegentlich des Studiums einer an sich sehr merkwürdigen Gruppe von solchen Gleichungen zu der Wahrnehmung gelangt, dass dieselben bisweilen hinreichen, nicht nur innerhalb abgeschlossener Zahlensysteme die Function vollständig zu definiren, sondern überhaupt in folgender Art Aufschluss über dieselbe zu geben.

Irgend ein Argumentwerthepaar der (nur hinsichtlich zweier Argumente in's Auge zu fassenden) Function bestimmt allemal ein gewisses System von Werthen, zu welchem jene selbst und auch noch andere gehören und deren Anzahl für die in Betrachtung gezogene Gruppe von Functionalgleichungen charakteristisch ist. Wir mögen dieses System von Werthen ein *endliches Zahlensystem*, und zwar das jenem Argumentwerthepaar zugeordnete nennen. Zu je zwei Zahlenwerthen, die man aus diesem endlichen Zahlensysteme herausgreifen und (in bestimmter Folge) als Argumentwerthe annehmen mag, gehören alsdann Functionswerthe, die ebenfalls immer nur Zahlen des genannten Systemes sind — sodass die Definition der Function auch innerhalb des letzteren abgeschlossen werden könnte — und zwar ist die Zuordnung der Functionswerthe zu den Argumentwerthzusammenstellungen eine vollkommen bestimmte, eine unter Ausschluss jeder Willkür durch die Functionalgleichungen mit Nothwendigkeit bedingte.

Ich werde dies an der gedachten speciellen Gruppe von Functionalgleichungen eingehend nachweisen, und lege damit ein Bruchstück jener

Untersuchungen vor, welche sich als functionentheoretischer Beitrag zur Lehre von den endlichen sowohl als den unendlichen Mannigfaltigkeiten ansehen lassen werden, insofern sie mit Aufschluss geben über die in formaler Hinsicht bemerkenswerthesten Weisen, auf welche die Elemente einer Mannigfaltigkeit ihren eigenen Zusammenstellungen eindeutig und eindeutig umkehrbar zugeordnet werden können.

Die Schlussparagraphen werden eine hiemit im Zusammenhang stehende Episode aus der Lehre von der Zusammensetzung linearer Transformationen behandeln.

§. 1.

Eine Function f_1 von mehreren Argumenten fasse ich nur hinsichtlich zweier derselben in's Auge, die ich als allgemeine Zahlen eines Zahlengebietes betrachtet, mit a, b oder c bezeichne. Anstatt $f_1(a, b)$ schreibe ich aber kürzer bloss $a.b$ oder ab, was ich auch ein ***symbolisches Product*** nennen werde. Diese Schreibweise ist, solange man nur mit einer einzigen Function zu thun hat, hinreichend ausdrucksvoll, da das blosse Nebeneinanderstellen der Argumentwerthe in einer bestimmten Ordnung genügt, den Functionswerth zu bestimmen. Die Einführung dieser Abkürzung — der grösstmöglichen, welche überhaupt gedacht werden kann — wird zudem durch das nachfolgende genugsam gerechtfertigt erscheinen, und Verwechselungen beuge ich durch die Erklärung vor, dass (mit einer aus dem Text leicht erkenntlichen Ausnahme) bis zu den drei Schlussparagraphen in dem ganzen Aufsatze niemals von gewöhnlichen, sondern ausschliesslich nur von dergleichen symbolischen Producten die Rede sein wird.

Dies vorausgesetzt muthe ich der Function ab folgende Eigenschaften zu.

1. Dieselbe soll sammt ihren nach a oder b genommenen beiden Umkehrungen ***vollkommen eindeutig*** sein, namentlich also auch für jedes Werthesystem der Argumente wirklich einen dem Werthgebiet der letzteren angehörigen Zahlenwerth besitzen.

2. Dieselbe soll die durch die Formel

$$(1.)\qquad aa = a$$

ausgedrückte Eigenschaft allgemein besitzen. Ich nenne diese Eigenschaft λ_0, um daran zu erinnern, dass sie ein specifisches Gesetz der Operationen des Logikcalculs*) ausdrückt. Dieselbe stellt das einfachste formale Gesetz vor, welchem die Function überhaupt unterworfen werden kann, woferne nur das Vorkommen specieller Zahlenwerthe und Zahlenverknüpfungsweisen in den allgemeinen Formeln ausgeschlossen wird.

3. Die Function soll ausserdem die etwas complicirtere Functionalgleichung:

$$(2.)\qquad (cb)\{b(ac)\} = a^{**}),$$

in welcher a, b, c von einander unabhängig beliebige Zahlen bedeuten, befriedigen. Für die Wahl gerade dieser Functionalgleichung werde ich weiter unten gewichtige Motive anführen.

Ich behaupte dann, dass (bei Ausschluss von Zahlengebieten, die nur eine einzige Zahl enthalten würden) die Anzahl der Werthe, deren die Function ab sowie ihre Argumente a und b fähig sind, nicht kleiner sein kann, als *acht*. Für ein Zahlensystem von acht Werthen aber könnte die Definition der Function schon zum Abschluss gebracht werden. Wie man diese Werthe festsetzt, ist an sich gleichgültig, da es bei der Function nur auf das Entsprechen der Werthsysteme beider Argumente und des Functionswerthes ankommt, mit andern Worten lediglich ankommt auf die Zuordnung des Productwerthes zu den Factorenwerthen. Nennen wir die Werthe einfach $1, 2, 3, \dots 8$, so werden natürlich diese Namen unter sich vertauscht werden dürfen. Abgesehen von diesen Vertauschungen ist aber — wie sich ferner behaupten lässt — das ganze System von Functionswerthen ein völlig bestimmtes, so wie es weiter unten von uns abgeleitet wird. Und mit den gefundenen analoge — man könnte sagen „congruente" — Beziehungen oder Zuordnungen bestehen für jedes Octupel von Werthen, welches durch zwei verschiedene beliebige (von ihnen) bestimmt wird, derart, dass durch blossen Namenwechsel der Argumentwerthe die neuen Beziehungen aus den einmal gefundenen hervorgehen.

Indem wir diese Behauptungen nun eingehend zu begründen beginnen, werden sich ausserdem bemerkenswerthe Aufschlüsse ergeben über gleichzeitige Geltung, über gegenseitiges Bedingen oder auch einseitiges Zurfolgehaben von gewissen Functionalgleichungen oder Gruppen von solchen.

---

*) Vergl. meine Schrift: der Operationskreis des Logikkalkuls, Leipzig, Teubner 1877, 37 Seiten.

**) In der gewöhnlichen Schreibweise würden also die Formeln (1.) und (2.) lauten: $f_1(a, a) = a$ und $f_1[f_1(c, b), f_1\{b, f_1(a, c)\}] = a$.

Die Formel, deren Geltung wir als dritte Eigenschaft unserer Function beilegten, könnte beiläufig auch ersetzt werden durch jede der beiden folgenden:

$$(3.)\qquad b[\{(cb)a\}c] = a, \qquad \{(cb)(ba)\}c = a;$$

dieselbe kann jedoch nicht eher in ihrem richtigen Lichte dargestellt werden, als bis man auch die inversen Functionen zu der fraglichen mit in den Bereich der Betrachtung zieht.

§ 2.

Die Auflösung einer Gleichung, wie:

$$f_1(a, b) = g$$

nach den Unbekannten a oder b wird vermittelt durch je eine neue Function, die man etwa mit:

$$b = f_2(g, a) \quad \text{resp.} \quad a = f_3(b, g)$$

bezeichnen könnte. Von diesen neuen Functionen wurde bereits §. 1. sub 1. ausgemacht, dass sie niemals mehrdeutig und auch niemals sinnlos oder undeutig sein sollten.

Gleichwie wir aber die erste dieser Gleichungen kürzer mit

$$ab = g$$

darzustellen übereingekommen sind, wollen wir auch die beiden letzteren Gleichungen kürzer so schreiben:

$$b = g:a, \quad a = \frac{g}{b},$$

mithin die inversen Functionen der gegebenen symbolisch als Quotienten darstellen.

An andern Orten*) habe ich schon angeführt, dass alsdann nicht bloss für die vorliegende sondern für jede sammt ihren Umkehrungen eindeutige Function ab wie in der Arithmetik die Formeln gelten:

$$(4.)\qquad b(a:b) = \frac{a}{b}\,b = b:\frac{b}{a} = (ba):b = \frac{ab}{b} = \frac{b}{b:a} = a.$$

Aus diesen „Fundamentalrelationen" folgt dann umgekehrt leicht —

*) Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende, I. Band, Leipzig, Teubner 1873; Ueber die formalen Elemente der absoluten Algebra, Stuttgart, Schweizerbart 1874; vergleiche auch: Ueber *v. Staudts* Rechnung mit Würfen und verwandte Processe, Math. Ann. Bd. 10, S. 305 u. flg.

immer mit Rücksicht auf die vorausgesetzte Eindeutigkeit — dass die drei *„Grundfunctionen"* ab, $a:b$ und $\frac{b}{a}$ in der angegebenen Beziehung der Umkehrung zu einander stehen — in Anbetracht dass gleiche Operationen an gleichen Zahlen ausgeführt (eben der Eindeutigkeit wegen) gleiche Resultate liefern müssen.

Es giebt aber 5 *Vertauschungen* unter den 3 symbolischen Operationen, welche obiges System von Relationen (4.) nur in sich selbst transformiren (natürlich ungerechnet die „identische" Vertauschung, bei welcher alles ungeändert gelassen wird).

c_1, das soll heissen: Vertauschung der beiden Factoren in jedem vorkommenden Producte, sowie von Doppelpunkt und Bruchstrich, ist ein erstes dieser 5 Vertauschungsprincipien; es sind das diejenigen Vertauschungen, welche im Fall der Commutativität der symbolischen Multiplication, d. h. Symmetrie der Function f_1 absolut gestattet sind, und zu welchen die Formeln:

$$(C_1.)\qquad ab = ba, \quad a:b = \frac{a}{b}$$

die Autorisation ausdrücken würden.

Absolut sind diese Vertauschungen bei irgend einer Function oder symbolischen Operation nun allerdings im allgemeinen nicht gestattet. Wenn z. B. für eine specielle solche Operation eine Formel gilt, wie etwa (2.), so wird die durch die Vertauschung c_1 daraus hervorgehende Formel — das wäre $\{(ca)b\}(bc) = a$ — durchaus nicht zu gelten brauchen.

Wohl aber ist die erwähnte Vertauschung *relativ* gestattet. Wenn nämlich aus einem Formelsystem ein anderes lediglich auf Grund der vorausgesetzten Eindeutigkeit sowie der Fundamentalrelationen (4.) gefolgert worden ist, so wird der analoge Zusammenhang auch zwischen den beiden eventuell neuen Formelsystemen bestehen, welche durch die vorstehende (sowie überhaupt durch eine der erwähnten 5 Vertauschungen) aus den beiden gegebenen Systemen hervorgehen. Das zweite transformirte System wird gelten müssen, sobald nur die Geltung des ersten ~~transformirten~~ Systemes feststeht, welche allerdings zutreffen oder auch fehlen kann.

Formelsysteme, von denen durch c_1 das eine aus dem andern (also auch umgekehrt) hervorgeht, heissen einander *conjugirt*.

Eine zweite und dritte in demselben Sinne zulässige Vertauschung c_2 resp. c_3 deuten analog die Formeln an:

$$(C_2.)\quad a:b = b:a, \quad \frac{b}{a} = ba;$$

$$(C_3.)\quad \frac{b}{a} = \frac{a}{b}, \quad ab = b:a.$$

Das vierte c_{45} (anderwärts c_0' von mir genannte) und das fünfte c_{54} (oder c_0'') zu nennende Vertauschungsverfahren besteht darin, dass, wo immer Ausdrücke von den Formen

$$ab, \quad a:b, \quad \frac{a}{b}$$

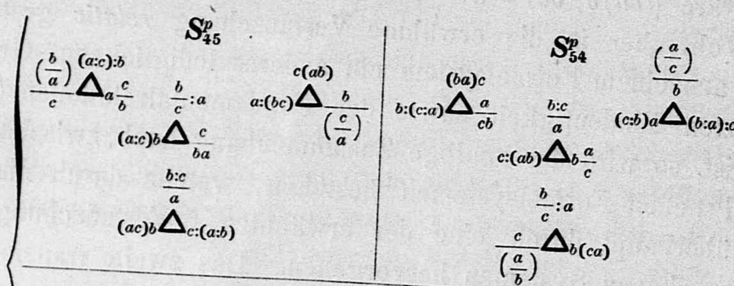
sich finden, man dieselben vorwärts, resp. rückwärts cyklisch vertauscht.

Formelsysteme, welche durch eines von diesen 5 Vertauschungsprincipien aus einander ableitbar sind, werden von mir zu einerlei „*Art*“ gezählt. Von diesen *folgt* nicht etwa eines aus dem andern, aber, wenn allenfalls ein logischer Zusammenhang zwischen den Formeln des einen Systems besteht, so muss eine ähnliche Abhängigkeit zwischen den entsprechenden Formeln des andern Systemes stattfinden.

§. 3.

Nunmehr fasse man das folgende Tableau von Formeln in's Auge, in welchem links und rechts vom Mittelstriche vier Dreiecke zu erblicken sind, deren Seiten als Gleichheitszeichen zwischen den an die Ecken gesetzten Ausdrücken interpretirt werden sollen:

(5.)



S_0

$$(ca):b = (ba):c, \qquad \frac{ab}{c} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{b}{c:a} = \frac{c}{b:a}, \qquad c(a:b) = b(a:c)$$

$$\frac{a}{c}b = \frac{a}{b}c, \qquad c:\frac{b}{a} = b:\frac{c}{a}.$$

Wir unterscheiden drei Systeme S_{45}^p, S_{54}^p und S_0 von zwölf, zwölf und sechs allgemeinen Gleichungen.

Von Charakter sind diese Gleichungen keineswegs complicirter als diejenigen, welche in der elementaren Arithmetik von der eigentlichen Multiplication und ihren Umkehrungen gelten, und von welchen ich beispielsweise das Associationsgesetz: $b(ac) = (ba)c$ oder eine der ihm äquivalenten Formeln, wie $c(b:a) = \frac{c}{a}b$, $\frac{a:c}{b} = \frac{a}{b}:c$, $c:(b:a) = (ac):b$, etc. anführen will.

Durch ebenso einfache Schlussfolgerungen als die sind, durch welche man in der elementaren Algebra diese letzteren Gleichungen aus einander ableitet (vergl. mein schon citirtes Lehrbuch) gelingt es leicht auch, zu zeigen, zunächst, dass von den sechs Gleichungen S_0 eine beliebige, als gültig angenommen, für eine eindeutige und eindeutig umkehrbare Function ab auch die Geltung der fünf übrigen Gleichungen zur nothwendigen Folge hat, sodass also diese sechs einander gegenseitig bedingen.

Weiter lässt sich durch nicht minder elementare Methoden zeigen, dass auch die Gruppe der zwölf Gleichungen S_{45}^p solidarisch ist, nämlich keine derselben ohne die übrigen bestehen kann; und gleiches gilt von der Gruppe S_{54}^p. Jede von diesen Gruppen, oder also auch nur eine von deren Gleichungen, zieht aber ausserdem noch die sechs Gleichungen S_0 mit logischer Nothwendigkeit nach sich — welcher Schluss indessen nicht umkehrbar ist.

Es mögen, obschon die Folgerungen hier etwas weniger nahe liegen, dieselben ebenfalls dem Leser überlassen sein.

Eine jede von den Gleichungen S_{45}^p z. B. bildet demnach eine ausreichende Prämisse zu der Gruppe von achtzehn Gleichungen (wobei sie selbst eingerechnet ist), welche durch die Vereinigung der Gruppen S_{45}^p und S_0 entstehen. Ich werde die Gesammtheit dieser Gleichungen mit S_{45} bezeichnen, sodass kurzmöglichst ausgedrückt:

$$S_{45} = S_{45}^p + S_0$$

ist; analog werde $S_{54}^p + S_0 = S_{54}$ bezeichnet. Am Schlusse unserer Betrachtungen wird es erwiesen erscheinen, dass die Annahmen S_{45} und S_{54} — abgesehen davon, dass ihnen die Formelgruppe S_0 gemeinsam ist — auch unabhängig von einander bestehen können.

Ein derartiges System logisch mit einander zusammenhängender

Formeln, von denen z. B., wie hier bei S_{45}, alle aus einer einzigen von ihnen — wenn auch nicht aus einer jeden — folgen, pflege ich einen ***Algorithmus*** zu nennen, wobei mir vor Augen schwebt, dass für die Functionen, für welche der Algorithmus gilt, die Formeln desselben ganz ähnlich als ***Rechenvorschriften*** zur allgemeinen Umformung von Buchstabenausdrücken benutzt werden können, wie in der allgemeinen Arithmetik die oben erwähnten Gleichungen, als da sind $a(bc) = (ab)c$, $c:(b:a) = (ac):b$ und andere, welche für die gewöhnliche Multiplication massgebend und als eine Norm der Buchstabenrechnung geläufig sind.

Der Algorithmus bildet eine ***logische Einheit*** und unterscheidet sich dadurch von der bloss äusserlichen Formelzusammenstellung, dass er niemals getrennt von demjenigen, was etwa noch aus den Gleichungen desselben gefolgert werden könnte, also stets im Zusammenhange mit seinen Consequenzen zu denken ist. S^p_{45} ist bloss ein Formelsystem, S_{45} ein dasselbe neben S_0 in sich begreifender Algorithmus, von dem jenes System die „Prämissen“ zusammenfasst, d. h. diejenigen Gleichungen, deren jede, für sich allein als geltend angenommen, schon den ganzen Algorithmus nach sich zieht.

Die sämmtlichen vorstehend zur Sprache gebrachten Gleichungen besitzen die gemeinsame Form:

$$\varphi(a, b, c) = \psi(a, b, c),$$

woferne unter φ und ψ das Ergebniss der Verknüpfung von a, b und c vermittelst zweier successiven von den drei symbolischen Grundoperationen (mal, zu und durch, oder f_1, f_2, f_3) verstanden wird.

Von den beiläufig 1008 (oder — 18 Identitäten abgerechnet — 990) denkbaren Gleichungen des genannten Formelgebietes, sowie von allen erdenklichen Combinationen derselben, sind nun S_{45} und S_{54} die beiden einzigen Algorithmen, ***welche einer zweigliedrigen*) Art angehören***, eine solche zusammen ausmachen.

Durch jede der Vertauschungen c_1, c_2, c_3 geht nämlich das System S_{45} in das S_{54} über und umgekehrt (eventuell auch unter Buchstabenwechsel), sodass diese beiden Algorithmen auch als zu einander conjugirte bezeichnet werden dürfen.

---

*) *n-gliedrig* soll eine Art genannt werden, wenn sie n verschiedene individuelle Algorithmen in sich begreift; es kann nur 1, 2, 3 oder 6-gliedrige Arten geben.

Durch jede der Vertauschungen c_{45} und c_{54} geht ferner das System S_{45} nur in sich selbst über, wobei die peripherischen Dreiecke cyklisch unter sich vertauscht werden, während das Mitteldreieck nur eine Drehung in sich selbst erleidet. Das nämliche muss daher auch von S_{54} gelten.

Ich werde S_{45} und S_{54} ***die beiden schiefen Algorithmen*** nennen (den ersteren ***rechtsdrehend*** und den zweiten ***linksdrehend***), weil sich an ihnen zwei entgegengesetzte Drehungsrichtungen (welche mit Bezug auf c_{45} von dem angegebenen Sinne sind) unterscheiden lassen.

Der Nachweis, dass in dem ganzen Formelgebiete $\varphi(a, b, c) = \psi(a, b, c)$ keine andern dergestalt einander dual entsprechenden Algorithmen möglich sind, kann hier natürlich nicht gegeben werden; derselbe würde unter anderem ein umfassendes lexicalisches Beiwerk erheischen, welches ich indess gelegentlich einer zusammenhängenden Darstellung der hierauf mitbezüglichen allgemeinen Theorie der Verknüpfung einmal zu veröffentlichen hoffe.

Der den beiden schiefen Algorithmen untergeordnete Algorithmus S_0 bietet ein Beispiel einer ***eingliedrigen*** Art, indem derselbe durch jede der fünf Vertauschungen nur in sich selbst übergeht. Es existiren allerdings noch mehrere (im ganzen zwölf) Algorithmen, welche die gleiche Eigenschaft besitzen, auf dem genannten Formelgebiete.

Auch der Algorithmus λ_0 stellt eine eingliedrige Art von Algorithmen vor, in Anbetracht, dass aus der Gleichung $aa = a$ auch folgt: $a:a = a$ und $\frac{a}{a} = a$, welche drei Gleichungen durch die erlaubten Vertauschungen nur in sich selbst oder in einander übergehen.

Der rechtsdrehende Algorithmus drückt nun für sich allein die *dritte* der Eigenschaften aus, welche wir in §. 1 unserer Function $f_1(a, b)$ oder ab zumutheten.

In der That gehen die Gleichungen S^p_{45} sämmtlich in eine der drei dort angegebenen Productformeln (2.) und (3.) über, sobald man sie — unter Benutzung von (4.) — auf irgend eine Weise von den in ihnen vorkommenden Divisoren befreit.

§. 4.

Aus S_{45} allein folgt leicht, dass:

$$(6.) \qquad \{(cb)a\}c = a:b \quad \text{und} \quad (bc)(ca) = \frac{a}{b}$$

unabhängig von c sein muss [vergl. (3.)]. Es sind das Gleichungen, welche zeigen, wie für die dem Algorithmus S_{45} gehorchende Function die beiderlei symbolischen Quotienten jeweils als Producte angeschrieben werden können.

Setzt man in dem System der Formeln S^0_{45} auf jede Art zwei Buchstaben einander gleich, und berücksichtigt λ_0, so ergeben sich die folgenden Gleichungen, in welchen die Ausdrücke einer jeden Zeile weniger unter sich, als vielmehr je mit dem ersten linkerhand verglichen zu denken sind.

$$(7.)\quad\begin{cases} ab \underset{\overset{\frown}{\rho_0}}{=} b:(ba) \underset{\overset{\frown}{\rho_0}}{=} \dfrac{a}{ba} \underset{\overset{\frown}{\sigma_{23}}}{=} a:(a:b) \underset{\overset{\frown}{\sigma_{31}}}{=} \dfrac{\left(\frac{b}{a}\right)}{b} \underset{\overset{\frown}{\sigma_{31}}}{=} \dfrac{b}{\left(\frac{a}{b}\right)} \underset{\overset{\frown}{\sigma_{12}}}{=} (a:b):b \underset{\overset{\frown}{\sigma_{12}}}{=} \dfrac{b}{a}:a \underset{\overset{\frown}{\sigma_{12}}}{=} \dfrac{b:a}{a}, \\[2ex] a:b \underset{\overset{\frown}{\rho_0}}{=} \dfrac{b:a}{b} \underset{\overset{\frown}{\rho_0}}{=} (b:a)\,a \underset{\overset{\frown}{\sigma_{31}}}{=} \dfrac{\left(\frac{b}{a}\right)}{a} \underset{\overset{\frown}{\sigma_{12}}}{=} b(ab) \underset{\overset{\frown}{\sigma_{12}}}{=} (ba)b \underset{\overset{\frown}{\sigma_{23}}}{=} \dfrac{b}{\left(\frac{b}{a}\right)} \underset{\overset{\frown}{\sigma_{23}}}{=} \dfrac{a}{ab} \underset{\overset{\frown}{\sigma_{23}}}{=} a\dfrac{a}{b}, \\[2ex] \dfrac{b}{a} \underset{\overset{\frown}{\rho_0}}{=} b\dfrac{a}{b} \underset{\overset{\frown}{\rho_0}}{=} \dfrac{a}{b}:a \underset{\overset{\frown}{\sigma_{12}}}{=} a(ab) \underset{\overset{\frown}{\sigma_{23}}}{=} b:(a:b) \underset{\overset{\frown}{\sigma_{23}}}{=} (b:a):b \underset{\overset{\frown}{\sigma_{31}}}{=} (ab)b \underset{\overset{\frown}{\sigma_{31}}}{=} (a:b)a \underset{\overset{\frown}{\sigma_{31}}}{=} a:(ba). \end{cases}$$

Auf dieselbe Weise fliessen aus S_0 die Gleichungen:

$$(8.)\quad\begin{cases} ab \underset{\overset{\frown}{\sigma_0}}{=} b(b:a) \underset{\overset{\frown}{\sigma_0}}{=} \dfrac{a}{b}a \\[2ex] a:b \underset{\overset{\frown}{\sigma_0}}{=} b:\dfrac{a}{b} \underset{\overset{\frown}{\sigma_0}}{=} (ba):a \\[2ex] \dfrac{b}{a} \underset{\overset{\frown}{\sigma_0}}{=} \dfrac{ba}{b} \underset{\overset{\frown}{\sigma_0}}{=} \dfrac{a}{b:a} \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind bedeutend einfacheren Charakters als die ursprünglichen S_{45}, insofern in dieselben (statt drei) nur mehr zwei allgemeine Zahlen als Operationsglieder oder Argumente eingehen; zudem sind diese rechterhand zwar ebenfalls durch zwei successive, linkerhand aber nur durch eine einzige von unsern drei symbolischen Grundoperationen mit einander verknüpft.

Das ganze Tableau erscheint als ein Conglomerat von fünf Formelgruppen:

$$\rho_0,\ (\sigma_{23},\ \sigma_{31},\ \sigma_{12}),\ \sigma_0,$$

bezüglich bestehend aus denjenigen Gleichungen, welche sich in (7.) und (8.) gleichnamig bezeichnet finden.

Von diesen bildet die erste und die letzte für sich allein eine eingliedrige Art, wogegen die drei mittleren die eine Hälfte einer sechsgliedrigen Art vorstellen, deren drei andre Glieder zu ihnen conjugirt sein würden, aber nicht mit ihnen zugleich zu gelten brauchen; diese würden mit σ_{32}, σ_{21}, σ_{13} zu bezeichnen sein.

Während man (weiter nichts als die Eindeutigkeit der drei Grundfunctionen und ihre durch (4.) ausgedrückten Beziehungen der Umkehrung zu einander voraussetzend) mit Leichtigkeit die Formeln einer jeden Gruppe auf einander zurückzuführen im Stande ist, besteht, wie ich beweisen könnte, ein solcher logischer Zusammenhang zwischen den verschiedenen Gruppen *nicht*. Diese fünf Gruppen werden daher als selbständige Algorithmen zu bezeichnen sein, welche auch ohne einander für gewisse Functionen einzeln Geltung haben können, und zwar verdienen die σ_{23} etc. besondre Beachtung als Algorithmen, welche einer der einfachsten sechsgliedrigen Arten, die es giebt, angehören.

Ich werde nun statt der ursprünglichen Gruppe λ_0+S_{45} von formalen Gesetzen lediglich die Formelgruppe (7.) [und (8.), welche letztere aber, wie man sogleich sehen wird, aus (7.) von selbst mit folgt] von unserer gesuchten Function als erfüllt annehmen. Zeigt sich durch diese die Function in der geschilderten Weise — namentlich also für ein acht Elemente umfassendes Zahlensystem vollkommen — bestimmt, so ist nicht nur die in §. 1 ausgesprochene Behauptung bewiesen, sondern auch erkannt, dass — für das begrenzte System wenigstens — die formalen Gesetze (7.) logisch äquivalent mit denen λ_0+S_{45} sein müssen.

Für die bevorstehende Untersuchung ist es zweckmässig, die Gleichungen (7.) und (8.) als *reine* Multiplicationsgesetze darzustellen, d. h. sie in Form von solchen Functionalgleichungen anzuschreiben, in welche ausschliesslich die Function f_1, nicht aber deren inverse Functionen f_2 und f_3 mehr eingehen. Auf welche Art man auch — unter Benutzung von (4.) — die Gleichungen (7.) und (8.) von ihren Divisoren befreit, immer wird man die fünferlei Gruppen derselben bezüglich äquivalent finden mit nachstehenden bloss auf die symbolische Multiplication bezüglichen Formeln:

$$(9.)\quad a=(ab)(ba),\quad \text{das ist } \rho_0;$$

$$(10.)\ ab = b\{(ab)a\}, \quad \text{das ist } \sigma_{23};$$

$$(11.)\ a = \{(ba)a\}b \quad \text{und} \quad (12.)\ a = \{b(ab)\}(ab), \quad \text{das ist } \sigma_{31};$$

$$(13.)\ a = \{b(ba)\}b, \quad (14.)\ a = b\{b(ab)\}, \quad (15.)\ a = b\{(ba)b\}, \quad \text{das ist } \sigma_{12};$$

$$(16.)\ a(ab) = (ab)b, \quad \text{das ist } \sigma_0 \text{ oder die Gruppe (8.)}.$$

Durch Vergleichung von (14.) mit (15.) zeigt sich nebenbei, dass auch stets

$$(17.)\qquad a(ba) = (ab)a$$

sein wird; ferner kann man aus (11.) und (13.) durch Vergleichung die Formel (16.) schliessen; womit der Nachweis erbracht ist, dass die Formelgruppe (8.) aus (7.) mit folgt.

Aus (7.) oder (16.) folgt leicht auch λ_0, indem man z. B. $a:a$ für b in (16.) setzend erhält: $a\{a(a:a)\} = \{a(a:a)\}(a:a)$, oder mit Rücksicht auf (4.): $aa = a(a:a) = a$.

§. 5.

Indem wir nun ein specielles Werthsystem der Function ab aufsuchen, ist es noch gut, folgende Bemerkungen allgemein vorauszuschicken:

α) Ich werde die Ungleichheit von Zahlenwerthen mit einem querdurchstrichenen Gleicheitszeichen andeuten, in Anbetracht, dass das bisweilen hiefür gebräuchliche aus „grösser oder kleiner" abgeleitete Zeichen $\gtrless$ auf manchen Zahlengebieten, wie z. B. schon auf dem der gemeinen complexen Zahlen, für diesen Zweck ungeeignet erscheint. Ein Ausspruch wie $\varkappa \neq \lambda$ soll also einfach die Gleichheit zwischen den speciellen Zahlen $\varkappa$ und λ verneinen.

β) Bedeuten $\mu \neq \varkappa$ und $\nu \neq \lambda$ specielle Zahlen und ist der Functionswerth $\varkappa\lambda = \tau$ bekannt, so folgt $\mu\lambda \neq \tau$ und $\varkappa\nu \neq \tau$.

Denn wäre $\mu\lambda = \tau$, so hätten wir $\mu\lambda = \varkappa\lambda$ und würde sich hierin wegen der Eindeutigkeit der symbolischen Theilung oder der bezüglichen inversen Function f_3 der symbolische Factor λ beiderseits „streichen" lassen; es ergäbe sich also $\mu = \varkappa$ im Widerspruch mit der Voraussetzung; u. s. w.

Sobald also für einzelne Werthepaare der Argumente die zugehörigen Functionswerthe in Zahlen bereits festgesetzt oder bekannt sind, werden ebendiese Zahlen für gewisse Reihen von andern Werthsystemen der Argumente als Functionswerthe fernerhin ausgeschlossen sein. Genauer:

Ist der Functionswerth $\varkappa\lambda = \tau$ gegeben, so ist der Zahlenwerth τ

unzulässig für alle übrigen symbolischen Producte, welche die Form $\varkappa a$ oder $a\lambda$ haben.

Ich werde die so von selbst für die Function gewisser Argumentsysteme nicht mehr disponibeln Zahlenwerthe künftighin kurz als *„direct" unzulässig* bezeichnen.

Vorstehende Bemerkung passt auf alle Functionen, welche die Eigenschaft 1. des §. 1 besitzen.

γ) Für zwei einander gleiche Argumentwerthe sind die zugehörigen Functionswerthe wegen λ_0 oder der Annahme 2. des §. 1 bereits bestimmt. Wofern man also den Argumenten die speciellen Werthe 1, 2, 3, ... überhaupt beilegen darf, so ist $1.1 = 1$, $2.2 = 2$, $3.3 = 3$, etc. — wobei die Malzeichen auch weggelassen werden mögen.

δ) Für unsere auch noch die formalen Gesetze (7.) erfüllende Function kann die symbolische Multiplication auch nicht einmal in einem speciellen Falle commutativ sein, d. h. für $\varkappa \neq \lambda$ ist stets $\varkappa\lambda \neq \lambda\varkappa$.

Denn wäre $\varkappa\lambda = \lambda\varkappa$, so könnten wir den Werth beider Producte τ nennen. Nach (9.) wäre dann einerseits

$$\varkappa = (\varkappa\lambda)(\lambda\varkappa) = \tau\tau, \quad \text{andrerseits} \quad \lambda = (\lambda\varkappa)(\varkappa\lambda) = \tau\tau,$$

also $\varkappa = \lambda$, im Widerspruch gegen die Annahme.

Ich gebe die nachfolgende Herleitung mit einiger Ausführlichkeit, weil mir dieselbe als ein vorzügliches Paradigma zur Erläuterung der Methode erscheint, durch welche ich noch sehr zahlreiche Resultate ähnlicher Natur (Functionstafeln) gewonnen habe, die ich in späteren Mittheilungen dann ohne weitere Andeutung über ihre Herleitung zu verwerthen gedenke.

§. 6.

Wenn ein Zahlengebiet (sit venia verbo!) nur aus einer einzigen Zahl bestände, welche ich 1 nennen will, so wäre auf diesem Gebiete die Function ab durch die Gleichung $11 = 1$ vollständig definirt, und würden alsdann die sämmtlichen formalen Gesetze, von welchen in diesem Aufsatz gesprochen — ja alle erdenklichen, in denen Zahlen nur durch die drei Grundfunctionen sich verknüpft finden — identisch befriedigt sein, in Anbetracht, dass für die Argumente $a, b, c, \ldots$ überhaupt nur die Annahme $a = b = c = \cdots = 1$ gestattet erscheint.

Da dieser Fall weiter kein Interesse besitzt, würde schon in §. 1 als eine selbstverständliche die Annahme eingeflochten, dass das zu betrachtende Zahlengebiet *mehr als eine* Zahl enthalte, welche als Werth von den Argumenten sowie der Function angenommen werden kann.

Es existiren dann mehrere (mindestens zwei) von einander verschiedene Zahlen in dem Gebiete, von welchen nichts hindert, zwei erste ins Auge zu fassende — anstatt etwa mit α_1 und α_2 — kürzer mit 1 und 2 selbst zu bezeichnen.

Nach γ) ist dann $11 = 1$ und $22 = 2$.

Da in der Bezeichnung von a, b als „allgemeine Zahlen" die Annahme stillschweigend eingeschlossen lag, dass diese Argumente innerhalb des Zahlengebiets unbeschränkt variabel seien, so können sie auch die Werthezusammenstellung 1, 2 sowie die 2, 1 annehmen. Für die Producte 12 und 21 sind aber nach β) die Werthe 1 und 2 als Functionswerthe bereits direct ausgeschlossen und nach δ) müssen beide Producte einen verschiedenen Werth haben.

Daher muss das Zahlensystem zum mindesten vier Elemente enthalten, und indem wir festsetzen, dass

$$(A.)\qquad 12 = 3 \quad \text{und} \quad 21 = 4$$

sein solle, thun wir weiter nichts, als geeignete Namen für diese beiden neuen Werthe einführen. Auch für diese muss $33 = 3$ und $44 = 4$ sein. Ausserdem folgt nach (9.): $1 = (12)(21)$ und $2 = (21)(12)$ und demnach ist auch

$$34 = 1 \quad \text{und} \quad 43 = 2$$

bekannt. Die Gleichungen (16.) und (17.) je auf beide möglichen Arten auf die Zahlen 1 und 2 angewendet geben aber:

$$13 = 32, \quad 24 = 41, \quad 31 = 14, \quad 42 = 23.$$

Für die Producte $13 = 32$ sind nun durch das bisherige die Werthe 1, 2 und 3 von vornherein ausgeschlossen, nämlich für 13 direct die Werthe 1 und 3, für 32 die 3 und 2, für beide also, da sie einander gleich sein sollen, alle drei Werthe.

Wäre aber $13 = 4$, so würde sich nach Gleichung (14.) in Gestalt von $1 = 3\{3(13)\}$ ergeben $1 = 3(34) = 31 = 11$, also $3 = 1$, im Widerspruch mit dem früheren. Es muss also auch $13 = 32$ eine neue von 1, 2, 3, 4 verschiedene Zahl sein.

Dasselbe gilt von $24 = 41$ — für welche Producte die Werthe 1, 2, 4 bereits ausgeschlossen erscheinen — da die Annahme $24 = 41 = 3$ nach (14.) liefern würde $2 = 4\{4(24)\} = 4(43) = 42$ im Widerspruch mit $2 = 22$. Dies hätte auch mit Rücksicht auf die Symmetrie schon ohne Weiteres behauptet werden können.

Nicht minder müssen die Producte $31 = 14$ sowie die $42 = 23$ zunächst von 1, 2, 3, 4 verschieden sein, was für die ersteren nur bezüglich des Werthes 2, für die letzteren bezüglich 1 besonders nachzuweisen ist. Die Annahme $31 = 14 = 2$ würde aber nach (14.) geben: $3 = 1\{1(31)\} = 1(12) = 13$, was unverträglich ist mit $3 = 33$. [Ebenso würde die Annahme $42 = 23 = 1$ das Ergebniss liefern: $4 = 2\{2(42)\} = 2(21) = 24$ entgegen der Gleichung $4 = 44$].

Die Werthe 13 und 14 sind nun zuverlässig verschieden; daher müssen

$$(B.)\qquad 13 = 32 = 5 \quad \text{und} \quad 31 = 14 = 6$$

zwei weitere Zahlen des Gebietes sein.

Auch von diesen müssen ferner die Producte $24 = 41$ und $42 = 23$ sich wiederum unterscheiden. Denn wäre $24 = 41 = 6$, so müsste nach (9.) sein $1 = (14)(41) = 66$ im Widerspruch mit $66 = 6$. Wenn ferner $42 = 23 = 5$ wäre, würde ebenso folgen: $2 = (23)(32) = 55 = 5$, was der Beziehung $2 \neq 5$ widerspricht. Man könnte hier auch auf δ) sich berufen.

Bleibt also nur noch $41 \neq 5$ und $23 \neq 6$ zu zeigen.

Nach (9.) muss nun $1 = (13)(31) = 56$ und $3 = (31)(13) = 65$ sein. Wäre aber $41 = 5$, so erhielten wir nach (9.): $4 = (41)(14) = 56$ entgegen dem ersteren, und wäre $23 = 6$, so erhielten wir ebenso $2 = (23)(32) = 65$ entgegen dem letzteren von diesen Ergebnissen.

Es müssen daher 41 und $23 = 42$ abermals zwei neue und zwar von einander verschiedene Zahlen sein, weshalb nichts übrig bleibt, als zu setzen:

$$(C.)\qquad 41 = 24 = 7 \quad \text{und} \quad 42 = 23 = 8.$$

Das Zahlensystem enthält sonach mindestens acht Elemente.

Wendet man aber die Gleichung (9.) ebenso wie oben auf die Wertheparre (1, 2) und (1, 3) auch noch auf die Paare (1, 4), (2, 3), (2, 4) [und (3, 4)] an, so gewinnt man noch sechs neue Beziehungen, welche mit den früher gefundenen übersichtlich zusammengestellt, sich als die im nachfolgenden Tableau links vom Striche befindlichen darstellen:

$$\begin{array}{l|l|l}
1 = 11 = 34 = 56 & = 67 & = 28 = 45 = 72 = 83, \\
2 = 22 = 43 = 78 & = 85 & = 16 = 37 = 51 = 64, \\
3 = 33 = 12 = 65 & = 58 & = 47 = 26 = 84 = 71, \\
4 = 44 = 21 = 87 & = 76 & = 35 = 18 = 63 = 52, \\
\hline
5 = 55 = 13 = 32 & = 27 & = 74 = 46 = [68 = 81], \\
6 = 66 = 31 = 14 & = 48 & = 82 = 25 = [57 = 73], \\
7 = 77 = 24 = 41 & = 15 & = 53 = 38 = [86 = 62], \\
8 = 88 = 42 = 23 & = 36 & = 61 = 17 = [75 = 54].
\end{array}$$

Man könnte nun zeigen, dass, wenn die Grundgleichungen (9.) bis (17.) unseres Algorithmus auch nur für das erste Quadrupel von Werthen 1, 2, 3, 4 durchweg erfüllt sein sollen, auch noch die übrigen von den vorstehend angegebenen Gleichungen gelten müssen mit Ausnahme derer für die in eckige Klammer gesetzten Ausdrücke.

Am raschesten möchten jedoch die noch ausstehenden Gleichungen auf folgendem Wege zu gewinnen sein.

Nach (14.) schliesse man:

$$1 = 2\{2(12)\} = 28, \quad 2 = 1\{1(21)\} = 16, \quad 3 = 4\{4(34)\} = 47, \quad 4 = 3\{3(43)\} = 35$$

und hieraus sogleich nach (16.) weiter:

$$2(28) = (28)8, \quad 1(16) = (16)6, \quad 4(47) = (47)7, \quad 3(35) = (35)5$$

oder bezüglich:

$$4 = 18, \qquad 3 = 26, \qquad 2 = 37, \qquad 1 = 45;$$

desgleichen aus früheren Gleichungen:

$$(78)8 = 7(78), \quad (56)6 = 5(56), \quad (87)7 = 8(87), \quad (65)5 = 6(65),$$

d. h.

$$1 = 72, \qquad 2 = 51, \qquad 3 = 84, \qquad 4 = 63;$$

endlich:

$$(72)2 = 7(72), \quad (51)1 = 5(51), \quad (84)4 = 8(84), \quad (63)3 = 6(63),$$

d. h.

$$3 = 71, \qquad 4 = 52, \qquad 1 = 83, \qquad 2 = 64.$$

Damit sind alsdann die Werthe der ersten vier Zeilen unseres Tableaus sämmtlich gewonnen. Daraus schliesse man nur etwa noch: $4(45) = (45)5$ und $2(26) = (26)6$, d. h. $7 = 15$ und $8 = 36$, und bemerke nun, dass die bisherigen Gleichungen — indem man aus den Doppelgleichungen (*B.*), (*C.*) je die eine Hälfte auswählt — angesehen werden können als die auf Grund von (7.) aus den Prämissen

$$12 = 3, \quad 21 = 4, \quad 13 = 5, \quad 31 = 6, \quad 24 = 7, \quad 42 = 8$$

gezogenen Folgerungen. (Die vier letzten von diesen Prämissengleichungen sind übrigens selbst von den beiden ersten wenigstens insofern Folgerungen, als die vier Producte linker Hand jedenfalls von den früheren und von einander verschiedene Zahlen sein mussten. Nur insofern als sie für diese neuen Zahlen bestimmte Namen oder Werthe festsetzen, sind diese vier Gleichungen auch als Definitionen zu betrachten.)

Vergleicht man aber damit die unter den schon gewonnenen in dem Tableau sich ebenfalls findenden Gleichungen:

$$13 = 5, \quad 31 = 6, \quad 15 = 7, \quad 51 = 2, \quad 36 = 8, \quad 63 = 4,$$

so sieht man, dass es, wofern der Algorithmus auch für das Quadrupel 1, 3, 5, 6 gelten soll, gestattet sein muss, die Werthe

$$12345678$$

bezüglich zu ersetzen durch

$$13567284,$$

mit anderen Worten die (2357846) cyklisch zu vertauschen.

So aber folgen die noch fehlenden Werthe von 6 sofort aus den bekannten von 4; aus denen von 3 folgen direct die von 5, daraus dann die von 7, endlich die von 8. Und hiemit ist das ganze Tableau nunmehr gewonnen.

§. 7.

Wenn noch 2 mit 8 vertauscht wird, so stellt sich das im vorigen Paragraphen gefundene System von Beziehungen am elegantesten, und zwar wie folgt, dar:

$$(18.) \quad \begin{cases}
1 = 11 = 23 = 34 = 45 = 56 = 67 = 78 = 82, \\
2 = 22 = 17 = 75 = 54 = 48 = 83 = 36 = 61, \\
3 = 33 = 71 = 18 = 86 = 65 = 52 = 24 = 47, \\
4 = 44 = 58 = 81 = 12 = 27 = 76 = 63 = 35, \\
5 = 55 = 46 = 62 = 21 = 13 = 38 = 87 = 74, \\
6 = 66 = 85 = 57 = 73 = 31 = 14 = 42 = 28, \\
7 = 77 = 32 = 26 = 68 = 84 = 41 = 15 = 53, \\
8 = 88 = 64 = 43 = 37 = 72 = 25 = 51 = 16,
\end{cases}$$

oder in leicht verständlicher Abkürzung:

$$(19.)\quad \left\{\begin{array}{l} 1-2345678,\\ 2-1754836,\\ 3-7186524,\\ 4-5812763,\\ 5-4621387,\\ 6-8573142,\\ 7-3268415,\\ 8-6437251. \end{array}\right.$$

Es ist dieses Ergebniss (18.) weiter nichts als eine ***symbolisch als Einmaleins geschriebene Tabelle von Functionswerthen***, und zwar definirt die Tafel unsere Function vollständig für ein aus acht Werthen bestehendes Zahlengebiet, aus welchem die Argumentwerthe ad libitum herausgegriffen werden können; demselben Gebiete gehören aber auch stets die zugehörigen Functionswerthe an, sodass man bei der Erklärung der Function bei diesen acht Werthen stehen bleiben, mit ihnen das ganze Zahlengebiet abschliessen könnte. Die acht Elemente dieses Zahlengebietes sind ursprünglich von völlig beliebigem Werthe, da man, wie schon oben erwähnt, die Nummern 1 bis 8 auch bloss als Indices einer Buchstabengrösse α ansehen kann. Durch irgend zwei von ihnen wie α_1 und α_8, welche also a priori ebenfalls ganz beliebige Werthe vorstellen können, sind aber begrifflich vollkommen diejenigen sechs bestimmt, welche sich noch durch Multiplication (unmittelbar oder mittelbar) aus ihnen ableiten lassen, wie $\alpha_1\alpha_8$, $\alpha_8\alpha_1$, $\alpha_1(\alpha_1\alpha_8)$, etc., und es leuchtet aus unserer Herleitung des Tableaus (18.) die Thatsache ein, dass — was das Wesen der Function ausmacht — die ***Zuordnungsweise*** zwischen diesen achterlei Functionswerthen und den aus ihnen herausgegriffenen Argumentwerthepaaren durch unsere formalen Anforderungen λ_0+S_{45} oder (7.) ***eindeutig bestimmt*** ist — dergestalt, dass zwischen den aus irgend zwei andern Argumentwerthen α_1', α_8' durch Multiplication ableitbaren Werthen ein dem vorigen „congruentes“ System von Zuordnungen bestehen muss, welches sich durch blossen Namenwechsel der Elemente (nämlich einfach durch Vertauschung der α' mit den α) in jenes überführen lässt.

Entsprechend der eindeutigen Umkehrbarkeit unserer Function f_1 muss aber auch unser symbolisches Einmaleins eindeutig umkehrbar sein; es liefert in der That ein ebenso in sich vollendetes ***„Einszueins“*** sowie ***„Einsdurcheins“***. Diese beiden lauten bezüglich:

$$(20^a.)\quad \left\{\begin{array}{l} 1=1:1=2:6=6:3=3:7=7:4=4:8=8:5=5:2\\ 2=2:2=1:8=8:7=7:3=3:5=5:6=6:4=4:1\\ 3=3:3=7:5=5:1=1:2=2:8=8:4=4:6=6:7\\ 4=4:4=5:7=7:8=8:6=6:1=1:3=3:2=2:5\\ 5=5:5=4:3=3:6=6:8=8:2=2:7=7:1=1:4\\ 6=6:6=8:1=1:5=5:4=4:7=7:2=2:3=3:8\\ 7=7:7=3:4=4:2=2:1=1:6=6:5=5:8=8:3\\ 8=8:8=6:2=2:4=4:5=5:3=3:1=1:7=7:6, \end{array}\right.$$

resp.

$$(20^b.)\quad \left\{\begin{array}{l} 1=1|1=2|4=4|6=6|8=8|3=3|5=5|7=7|2\\ 2=2|2=1|5=5|8=8|6=6|7=7|4=4|3=3|1\\ 3=3|3=7|8=8|5=5|4=4|1=1|6=6|2=2|7\\ 4=4|4=5|1=1|7=7|3=3|8=8|2=2|6=6|5\\ 5=5|5=4|2=2|3=3|7=7|6=6|1=1|8=8|4\\ 6=6|6=8|7=7|1=1|2=2|5=5|3=3|4=4|8\\ 7=7|7=3|6=6|4=4|5=5|2=2|8=8|1=1|3\\ 8=8|8=6|3=3|2=2|1=1|4=4|7=7|5=5|6, \end{array}\right.$$

wofern wir bezüglich des letzteren — was schon im Hinblick auf §. 2 durch die Symmetrie geboten erscheint — die Brüche ***aufwärts*** gelesen denken, statt $\frac{b}{a}$ also auch $a|b$ (lies: a *in* b) schreiben.

Durch diese beiden Tafeln, deren letztere genauer also als ***„Einsineins“*** zu bezeichnen wäre, erscheinen die beiden inversen Functionen f_2 und f_3 der gesuchten ebenso eindeutig und innerhalb unseres achtelementigen Zahlensystems vollständig explicirt, wie f_1 durch (18.).

Hiernach ist nun ersichtlich, dass von den denkbaren Verknüpfungen der Elemente unseres Systems durch irgendwelche von den drei Grundfunctionen keine aus diesem System herausführen kann; vielmehr sind alle (symbolischen) Grundoperationen unbedingt ausführbar innerhalb des begrenzten Zahlensystems selbst, oder innerhalb der Octade von Werthen.

Nunmehr müssen wir uns aber noch überzeugen, dass für die durch (18.) tabellarisch definirte Function f_1 wirklich die Gesetze des Algorithmus

S_{45} allgemein erfüllt sind, welche drei von den acht Werthen man auch unter a, b, c verstehen mag, d. h. für jede Triade von Werthen. Es genügt, für eine einzige von den zwölf Gleichungen S_{45}^{p} diesen Nachweis zu leisten.

Eine Frage derart, ob in dem System (d. i. für die in ihm gegebene Function) ein Algorithmus gelte oder nicht gelte, kann nicht anders als empirisch entschieden werden. Doch wird die Untersuchung ausserordentlich vereinfacht durch die Wahrnehmung der *Vertauschungen, welche das System* — hier (18.) — *in sich selbst transformiren.*

Es genügt in dieser Beziehung fünfzehn Substitutionen ins Auge zu fassen, und zwar die folgenden acht cyklischen Vertauschungen von je sieben Elementen, wobei das vor die Klammer gesetzte achte jeweils unverändert festzuhalten ist, sowie die daneben gesetzten Quadrupel von (einfachen) „Verwechselungen" d. h. Producte von je vier Transpositionen:

$$(21.)\quad \left\{\begin{array}{l} 1-(3572468) \\ 2-(7431586) \\ 3-(1627854) \\ 4-(8265173) \\ 5-(6184237) \\ 6-(5348712) \\ 7-(2813645) \\ 8-(4756321) \end{array}\right| \begin{array}{l} (12)(37)(45)(68) \\ (13)(48)(56)(72) \\ (14)(52)(67)(83) \\ (15)(63)(78)(24) \\ (16)(74)(82)(35) \\ (17)(85)(23)(46) \\ (18)(26)(34)(57) \end{array}\right\} \quad (22.)$$

Nachdem die Zulässigkeit der ersten Substitutionen von diesen beiden Systemen an dem Schema (19.) direct erkannt ist, wird man die folgenden am besten durch Multiplication nach den für Substitutionen geltenden Regeln aus ihnen ableiten.

Mit Hülfe vorstehender Substitutionen lassen nun aber von den bezüglich acht, achtundzwanzig und sechsundfünfzig Combinationen der Elemente 1 bis 8 zur ersten, zweiten und dritten Klasse alle folgenden sich aus einer einzigen, z. B. der ersten der Klasse ableiten. Der Nachweis für die Gültigkeit einer drei allgemeine Zahlen a, b, c enthaltenden Formel auf dem Zahlengebiete wird daher vollständig erbracht sein, sobald man nur die Formel für die drei Triaden 111, 112 und 123 von Werthen, die letzteren mit allen ihren Permutationen angesetzt, verificirt hat. Diese $1+3+6=$ zehn Verificationen etwa mit der Formel (2.) vorzunehmen, verursacht nur ein Minimum von Rechnung, und werden damit die Gesetze λ_0+S_{45} als durchgängig gültige erkannt sein.

Von Wichtigkeit für die Constatirung der Gültigkeit von Algorithmen auf unserem Zahlensysteme kann auch noch die Bemerkung werden, welche sich bei einer Vergleichung der drei Functionstabellen (18.) und (20.) aufdrängt: dass die Substitution:

$$(23.)\qquad (364)(578)$$

desgleichen natürlich alle diejenigen Substitutionen, welche sich noch aus ihr durch Verbindung mit denen (21.) oder (22.) neu ergeben würden, den Erfolg besitzt, die erste Tabelle in die zweite, diese in die dritte und letztere wieder in die erste überzuführen, wofern man nur mit den operativen Verknüpfungszeichen . , : und | gleichzeitig im Kreise vorrrückt.

Es ist, mit anderen Worten, die gleichzeitige Anwendung der Substitutionen (23.) mit der cyklischen Vertauschung c_{45} der drei Elementarausdrücke oder Grundoperationen zulässig, indem sie das ganze System der drei Functionstabellen nur in sich selbst herumschwingt, und hieraus folgt, dass, wenn eine Formel auf dem Gebiete (18.) gilt, zugleich auch diejenigen Formeln auf ihm gelten müssen, welche sich durch (ein- oder zweimalige) Anwendung von c_{45} aus jener ergeben (die dreimalige Anwendung von c_{45} führt die Formel nothwendig wieder in sich selbst zurück). Mit anderen Worten die Functionen f_2 und f_3 oder $a:b$ und $a|b$ oder $\frac{b}{a}$ würden, wenn man sie mit ab bezeichnete, denselben formalen Gesetzen genügen, wie f_1.

Letzteres gilt indessen keineswegs auch von den Functionen ba, $b:a$ und $b|a=\frac{a}{b}$, wie aus folgendem erhellt.

Nennen wir die Tafel (18.) kurz ein *„Lösungsgebiet"* der Functionalgleichungen oder des Algorithmus λ_0+S_{45}, so muss nach dem vorhin gesagten auch jedes der beiden Schemata (20.) ein solches Lösungsgebiet sein, wofern man Doppelpunkt oder verticalen Bruchstrich durch das Malzeichen ersetzt. Dagegen stellt (18.) keineswegs ein Lösungsgebiet des anderen Algorithmus λ_0+S_{54} vor, da man an irgend einem Beispiel — etwa für die Indicestriade 1, 2, 3 — sich leichtlich überzeugt, dass die zu (2.) conjugirte Gleichung von S_{54} hier nicht erfüllt wird.

Will man aber ein Lösungsgebiet von $S_{54}+\lambda_0$ erhalten, so braucht man nur in (18.) die sämmtlichen Producte rückwärts zu lesen. Auf diese

Weise ergiebt sich nämlich das zu dem (18.) conjugirte Einmaleins, welches auch dem zu $\lambda_0 + S_{45}$ conjugirten Algorithmus Genüge leisten muss. Durch blosse Permutation der Zahlenelemente lässt sich dagegen dieses Einmaleins auf keine Weise aus jenem ableiten.

Gleichwie der Algorithmus eine zweigliedrige „Art" von Algorithmen bestimmte, so charakterisirt also auch das Einmaleins oder die Multiplicationstafel (18.) eine zweigliedrige „Gattung" von Multiplicationstafeln. Solche werden wir zu einer *Gattung* zählen, wenn sie durch irgendwelche von den fünf Vertauschungsprincipien $c_1, \dots c_{54}$, also durch Vertauschungen unter den Grundoperationen, in einander übergeführt werden können, zu einerlei *Art* aber nur, wenn dies schon durch Substitutionen oder Vertauschungen der Zahlenelemente allein hingebracht werden kann.

Aus dem Lösungsgebiet (18.) folgten aber durch c_{45} die beiden Systeme (20.), welche hiernach, wie oben gezeigt, zu derselben Art wie (18.) gehören. Durch c_1, c_2, c_3 folgen aus (18.) drei neue Multiplicationstafeln, deren erste die zu (18.) conjugirte ist, deren beide andern dann durch c_{45} aus ihr hervorgehen, und die zweite Art der Gattung zusammen ausmachen.

§. 8.

Mittelst des Lösungsgebietes (18.) könnte überhaupt nun leicht gezeigt werden, dass von dem Gebiete der 990 Gleichungen der Form $\varphi(a, b, c) = \psi(a, b, c)$ keine andern, als die bereits in S^0_{45} und S_0 zusammengefassten, aus irgend einer Formel von S^0_{45} folgen können. Für eine jede Gleichung dieses letzteren Systems ist also die *„Tragweite"* auf dem genannten Formelgebiete gleich *achtzehn* erwiesen; so gross ist nämlich sicher die Anzahl derjenigen Gleichungen dieses Gebietes, welche — sie selber eingerechnet — aus ihr gefolgert werden können. Unsere Angabe über die Consequenzen jenes Algorithmus auf diesem Formelgebiete ist mit anderen Worten vollständig, oder der Algorithmus $\lambda_0 + S_{45}$ ist auf dem Gebiete zuverlässig „complet".

In gleicher Weise erscheint der Algorithmus $\lambda_0 + S_0$ hinsichtlich seiner Consequenzen auf dem Gebiete nunmehr unzweifelhaft abgegrenzt oder „limitirt". Als das „logische Product" — d. i. als der *gemeinsame* Formelcomplex — der beiden zu einander conjugirten Algorithmen $\lambda_0 + S_{45}$ und $S_{54} + \lambda_0$ kann derselbe keine ausserhalb des angegebenen Systemes S_0

liegende Gleichung des Gebietes $\varphi(a, b, c) = \psi(a, b, c)$ mehr zur Folge haben, oder die Tragweite einer jeden Gleichung von S_0 innerhalb gedachten Formelgebietes ist definitiv gleich *sechs.*

Dies sind Ergebnisse, die auf anderem Wege wohl schwer zu gewinnen sein möchten.

Dass übrigens die Annahmen S_0 und S_{45} auch unabhängig von der λ_0 gemacht werden können, zeigt das symbolische Einmaleins:

$$(24.)\quad \begin{cases} 1 = 11 = 23 = 34 = 45 = 56 = 67 = 78 = 82 \\ 2 = 44 = 86 = 61 = 17 = 73 = 35 = 52 = 28 \\ 3 = 55 = 32 = 27 = 71 = 18 = 84 = 46 = 63 \\ 4 = 66 = 74 = 43 = 38 = 81 = 12 = 25 = 57 \\ 5 = 77 = 68 = 85 = 54 = 42 = 21 = 13 = 36 \\ 6 = 88 = 47 = 72 = 26 = 65 = 53 = 31 = 14 \\ 7 = 22 = 15 = 58 = 83 = 37 = 76 = 64 = 41 \\ 8 = 33 = 51 = 16 = 62 = 24 = 48 = 87 = 75, \end{cases}$$

welches sich durch ein dem des §. 5 analoges Verfahren gewinnen liesse, nur mit dem Unterschiede, dass dabei der Abschluss des Systems nicht mit der gleichen Nothwendigkeit, wie dort, erfolgt. Immerhin ist vorstehendes das einfachste mögliche von den mehr als *ein* Element enthaltenden Lösungsgebieten des Algorithmus S_{45} ohne den λ_0, welches nicht auch noch anderen Gleichungen des Gebietes $\varphi(a, b, c) = \psi(a, b, c)$ genügte.

Um nachzuweisen, dass die Gesetze S_{45} in (24.) überhaupt erfüllt sind, muss man zunächst beachten, dass das Element 1 hier bevorzugt erscheint, und es darum nicht mehr als die sechs folgenden Substitutionen:

$$(25.)\quad \begin{cases} (2345678), \\ (2468357), \\ (2584736), \\ (2637485), \\ (2753864), \\ (2876543) \end{cases}$$

giebt, welche das System in sich selbst verwandeln.

Durch diese Substitutionen — und zwar schon durch die erste derselben — lassen sich aus den Unionen, resp. Binionen, Ternionen:

1	12	123
2	23	124
	24	125
	25	234
		235
		236
		237
		246

alle übrigen ableiten. Folglich braucht nur für diese in allen resp. Permutationen, im ganzen also für $2\times1+4\times6+8\times6 = 74$ Fälle, die Gültigkeit von S_{45} wirklich nachgewiesen zu werden, und stimmt in der That die Probe.

Da auch die Algorithmen des §. 4 auf dem Gebiete (24.) sämmtlich keine Geltung haben, so ist die Unabhängigkeit der Algorithmen S_{45}, S_{54} und S_0 auch von den dortigen, überhaupt von allen hier zur Sprache gebrachten Functionalgleichungen erwiesen; auch diese Algorithmen sind auf gedachtem Formelgebiete „complet", und man kann — auf diesem wenigstens — geradezu S_0 als das logische Product $S_{45}.S_{54}$ bezeichnen.

Die Art und Weise, wie durch die Anforderungen λ_0+S_{45} in §. 7 unsere Function ab bestimmt erschien, ist insofern in der That eine *eigenthümliche,* als sich bei anderen Algorithmen in der Regel herausstellt, dass irgend zwei Argumentwerthen keineswegs ein endliches Zahlengebiet zugeordnet ist, innerhalb dessen die Definition der Function abgeschlossen werden könnte *und zugleich die Functionswerthe durch den Algorithmus völlig bestimmt erschienen.*

Einen Algorithmus, der letztere Eigenschaft besitzt, könnte man mit einer gewissen Berechtigung einen *„gesättigten"* nennen.

Das Associationsgesetz, sowie überhaupt jede von der eigentlichen Multiplication erfüllte Formelgruppe, würde dann Beispiele von nicht gesättigten Algorithmen liefern.

§. 9.

Zum Schlusse will ich noch für die vorstehend zur Sprache gebrachten Algorithmen oder Gruppen von Functionalgleichungen diejenigen Lösungen vollständig angeben, welche auf dem Gebiet der *linearen* Functionen gemeiner complexer Zahlen existiren. Diese Lösungen verdienen

schon darum, weil sie eindeutig und eindeutig umkehrbar im allgemeinen sind, ein ganz besonderes Interesse, weshalb ich sie für alle von mir untersuchten Algorithmen jeweils aufgesucht habe. Mit der Aufführung derselben wird zugleich ein Beitrag zur Theorie der *Zusammensetzung linearer Transformationen* geleistet sein, indem die hier in Betracht kommenden eventuell mit sich selbst in bestimmter durch die Formeln des Algorithmus ausgedrückter Weise sich zu ihresgleichen zusammensetzen müssen.

Von der nunmehr erstmalig auftretenden gewöhnlichen oder *eigentlichen* Multiplication muss aber die symbolische — etwa durch Einklammerung ihres Malzeichens — fortan unterschieden werden.

Es handelt sich dann um die Functionen der Form:

$$(26.)\qquad a(.)b = f_1(a,b) = \frac{\delta ab+\alpha a+\beta b+\gamma}{\delta_1 ab+\alpha_1 a+\beta_1 b+\gamma_1},$$

welche den Gesetzen unserer Algorithmen Genüge leisten, sobald man diese vollständiger als bisher, nämlich durch Einklammerung der Multiplications- und Divisionszeichen anschreibt — vorausgesetzt natürlich, dass unter den „Coefficienten" δ, α, β, γ, δ_1 etc. von a, b unabhängige Constante verstanden werden.

Wie sehr leicht zu sehen, sind die linearen Lösungen des Algorithmus λ_0 in der Formel enthalten:

$$(27.)\qquad \Lambda\lambda_0)\quad a(.)b = \frac{(\alpha_1+\beta_1)ab+\alpha a+\beta b}{\alpha_1 a+\beta_1 b+\alpha+\beta}.$$

Durch eine übereinstimmende linear gebrochene Transformation für a, b und $a(.)b$ kann dieser Ausdruck, wenn die Determinante $\alpha\alpha_1-\beta\beta_1$ von 0 verschieden ist, auf jede der sechs „kanonischen" Formen gebracht werden:

$$(28.)\qquad \left\{\begin{array}{ll} a(.)b = \dfrac{\varrho b}{a-b+\varrho}, & \dfrac{a}{1+\varrho(b-a)} \\ a+\varrho\left(\dfrac{a}{b}-1\right), & \dfrac{\varrho ab+b-a}{\varrho a} \\ b\,\dfrac{1+\varrho a}{1+\varrho b}, & a\,\dfrac{b+\varrho}{a+\varrho}, \end{array}\right.$$

deren geometrische Deutung nicht ohne Interesse wäre. Diese Formen enthalten die minimale Anzahl, nämlich gar keinen Parameter mehr, in Anbetracht, dass ϱ auch bei gegebenen Coefficienten von (27.) doch beliebig gewählt und z. B. gleich 1 specialisirt werden kann (während allerdings die Werthe 0 und ∞ dafür ausgeschlossen bleiben).

Wenn dagegen $\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 = 0$ ist, so kann man nach Belieben transformiren auf eine der beiden Formen:

$$(29.) \qquad a(.)b = \frac{(\alpha_1+\beta_1)ab}{\alpha_1 a + \beta_1 b}, \quad a(.)b = \frac{\alpha a + \beta b}{\alpha + \beta},$$

in denen die Coefficienten dieselben Werthe haben müssen, welche ihnen in (27.) zukommen, sodass also in der Form hier noch *ein* Parameter $\beta:\alpha = \alpha_1:\beta_1$ zurückbleibt. Die zweite Form schreibt geometrisch vor: die Theilung der die Punkte a, b in der Ebene der complexen Zahlen verbindenden Strecke in dem gegebenen Verhältniss $\beta:\alpha$ und stellt den Theilpunkt als das Product der Factorenpunkte hin, während die erste Form von ebendieser Construction die Transformation nach dem Princip der reciproken Radien vorstellt.

Soll die linear gebrochene Function (26.) den Gesetzen S_0 gehorchen, so müssen (wenn man sich zuerst an eine der beiden ersten unter (5.) angeführten Gleichungen S_0 hält) die Coefficienten derselben folgende sechs Gleichungen erfüllen:

$$(30.) \qquad \begin{cases} (\beta\delta_1-\beta_1\delta)(\mu-\nu)=0,\ (\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma)(\mu-\nu)=0,\ \mu(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)+\nu(\gamma\delta_1-\gamma_1\delta)=0 \\ (\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)(\mu+\nu)=0,\ (\alpha\delta_1-\alpha_1\delta)(\mu+\nu)=0,\ \nu(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)+\mu(\gamma\delta_1-\gamma_1\delta)=0, \end{cases}$$

worin μ, ν unbestimmte Constante bedeuten.

Diesen Gleichungen kann durch geeignete Bestimmung der Coefficienten als Functionen unabhängiger Parameter zwar allgemein (und in symmetrischer Weise) genügt werden, und es ergeben sich durch Einsetzung der so erhältlichen Werthe zweierlei Lösungen. Die eine lautet:

$$(31.) \qquad a(.)b = \frac{p}{q}\cdot\frac{\frac{\varkappa_3\lambda_4}{\varkappa_2\lambda_1}ab+\frac{\varkappa_1\lambda_4}{\varkappa_2\lambda_3}a+\frac{\varkappa_2\lambda_3}{\varkappa_1\lambda_4}b+\frac{\varkappa_2\lambda_1}{\varkappa_3\lambda_4}}{\frac{\varkappa_4\lambda_3}{\varkappa_1\lambda_2}ab+\frac{\varkappa_4\lambda_1}{\varkappa_3\lambda_2}a+\frac{\varkappa_3\lambda_2}{\varkappa_4\lambda_1}b+\frac{\varkappa_1\lambda_2}{\varkappa_4\lambda_3}}.$$

Aber dieser Bruch reducirt sich durch Streichung des in Zähler und Nenner gemeinsamen Factors $b+\frac{\varkappa_1\lambda_1}{\varkappa_3\lambda_3}$ zu:

$$(32.) \qquad a(.)b = \frac{p}{q}\cdot\frac{\frac{\varkappa_3\lambda_4}{\varkappa_2\lambda_1}a+\frac{\varkappa_2\lambda_3}{\varkappa_1\lambda_4}}{\frac{\varkappa_4\lambda_3}{\varkappa_1\lambda_2}a+\frac{\varkappa_3\lambda_2}{\varkappa_4\lambda_1}}.$$

Die andere Lösung ist hiezu conjugirt, geht also, indem man rechts b mit a vertauscht, aus der angegebenen hervor, d. h. man würde sie definirt erhalten, wenn man die rechte Seite selbst $= b(.)a$ setzte.

Sobald aber $a(.)b$ von einem der symbolischen Factoren a, b unabhängig ausfällt, ist die eine der zugehörigen Umkehrungen nicht mehr eindeutig sondern im allgemeinen unmöglich (undeutig). Die andere umgekehrte oder inverse Function von $a(.)b$ dagegen wird eben dann absolut unbestimmt oder unendlich vieldeutig. Vier andere Lösungen einzelner Gleichungen von S_0 (und zwar derjenigen der zweiten resp. dritten Zeile in (5.)) erhielte man noch definirt, wenn man den Ausdruck von $a(.)b$ in (32.) gleich $a(:)b$ oder $b(:)a$ resp. $(\frac{b}{a})$ oder $(\frac{a}{b})$ setzte. In dem vorliegenden Falle existiren also sechs unter sich völlig disparate Lösungen der Gleichungen von S_0, für welche immer eine der drei Grundfunctionen eindeutig, eine zweite alldeutig und die dritte undeutig wird.

Da ein solcher Fall mit unserer Voraussetzung der vollkommnen Eindeutigkeit unserer drei Grundfunctionen sich nicht verträgt (zufolge deren ja erst die sechs Gleichungen S_0 einander gegenseitig bedingen mussten), *werde ich dergleichen reducible Lösungen künftig unerwähnt lassen.*

Wir müssen hiernach sagen, dass der Algorithmus S_0, und um so mehr also auch die ihm übergeordneten S_{45} und S_{54}, im Gebiet der linearen Functionen *keine* Lösung besitzt.

Das gleiche stellt sich schon in Bezug auf den noch einfacheren Algorithmus σ_0 heraus, oder es ist in unserer symbolischen Schreibweise auf dem genannten Gebiete:

$$(33.) \qquad \Lambda\sigma_0 = 0, \quad \Lambda S_0 = 0, \quad \Lambda S_{45} = 0.$$

§. 10.

Im Gegensatz hiezu besitzt der Algorithmus σ_{23} fünferlei einander ausschliessende Lösungen, welche sich ungezwungen in zwei Ausdrücke zusammenfassen lassen.

Soll die Form (26.) der ersten Gleichung (7.) von σ_{23} und damit auch den übrigen Gleichungen dieses Algorithmus genügen, so müssen die Coefficienten derselben identisch die Gleichungen erfüllen:

$$(34.) \qquad \begin{cases} \alpha_1^2-\gamma_1\delta_1=\mu\delta,\ (\alpha_1-\beta_1)\gamma_1=\mu\alpha, \\ \gamma\delta_1+\gamma_1\delta-2\alpha\alpha_1=\mu\beta+\nu\delta, \\ (\beta-\alpha)\gamma_1+(\beta_1-\alpha_1)\gamma=\mu\gamma+\nu\alpha, \\ \alpha^2-\gamma\delta=\nu\beta,\ (\alpha-\beta)\gamma=\nu\gamma, \end{cases} \left| \begin{array}{l} (\beta_1-\alpha_1)\delta_1=\mu\delta_1,\ \beta_1^2-\gamma_1\delta_1=\mu\alpha_1, \\ (\alpha_1-\beta_1)\delta+(\alpha-\beta)\delta_1=\mu\beta_1+\nu\delta_1, \\ \gamma\delta_1+\gamma_1\delta-2\beta\beta_1=\mu\gamma_1+\nu\alpha_1, \\ (\beta-\alpha)\delta=\nu\beta_1,\ \beta^2-\gamma\delta=\nu\gamma_1, \end{array}\right.$$

worin wieder μ, ν unbestimmte Constante vorstellen.

Eine erste Lösung giebt nun, wenn man zur Abkürzung $e^{\frac{i\pi}{3}} = \varepsilon$ setzt, der Ausdruck an:

$$(35.)\qquad \underset{+}{\Lambda}\sigma_{23})\quad a(.)b = \frac{p}{q}\cdot\frac{\frac{q}{p}(r+1-\varepsilon)ab-(r-1+\varepsilon)a-(r+1+\varepsilon)b+\frac{p}{q}(r-1+3\varepsilon)}{\frac{q}{p}(r+1-3\varepsilon)ab-(r-1-\varepsilon)a-(r+1-\varepsilon)b+\frac{p}{q}(r-1+\varepsilon)},$$

wobei sich $\mu = 2p$, $\nu = -2q$ bestimmt.

Eine zweite hiermit disparate Lösung, die ich $\underset{-}{\Lambda}\sigma_{23}$ nennen will, geht aus dem vorstehenden Ausdruck hervor, indem man i mit $-i$ vertauscht, d. h. ε durch $\varepsilon^{-1} = 1-\varepsilon$ ersetzt.

Definirte man also ε nur als Wurzel der Gleichung $\varepsilon^2-\varepsilon+1 = 0$, so würde der vorstehende alsdann mit $\underset{\pm}{\Lambda}\sigma_{23}$ zu bezeichnende Ausdruck die beiden Lösungen in sich vereinigen.

Ersichtlichermassen wird nun eine der Umkehrungen der vorstehenden Function durch Vertauschung von a und b mit ihr selbst identisch, sodass sich die Gleichungen eines der einfachsten Algorithmen auch noch erfüllt zeigen, den ich — dem Vertauschungsprincip c_2 entsprechend — mit C_2 bezeichne, nämlich als symbolische verstanden:

$$(36.)\qquad C_2)\quad a:b = b:a,\quad \frac{b}{a} = ba;$$

woraus dann folgt, dass unser Ausdruck zugleich dem Algorithmus σ_{21} genügt und zwar dessen entsprechende Lösung vorstellt, vollständiger also mit $\underset{\pm}{\Lambda}(\sigma_{23}+\sigma_{21})$ zu bezeichnen sein wird.

Uebersichtlicher stellt sich dieses Ergebniss dar, wenn man ein anderes Paar von Algorithmen der in Rede stehenden sechsgliedrigen Art ins Auge fasst. Darnach erhalten wir als $\underset{\pm}{\Lambda}(\sigma_{12}+\sigma_{13})$ die ***symmetrische*** Function:

$$(37.)\qquad a(.)b = \frac{p}{q}\cdot\frac{\frac{q}{p}(r-1-\varepsilon)ab-(r-1+\varepsilon)(a+b)+\frac{p}{q}(r-1+3\varepsilon)}{\frac{q}{p}(r+1-3\varepsilon)ab-(r+1-\varepsilon)(a+b)+\frac{p}{q}(r+1+\varepsilon)},$$

zugleich also auch dem „Commutationsgesetze" der symbolischen Multiplication oder den Functionalgleichungen:

$$(38.)\qquad C_1)\quad a(.)b = b(.)a,\quad a(:)b = (\frac{a}{b})$$

genügend.

Die bisherigen Lösungen enthalten zwei willkürliche Parameter: $\frac{p}{q}$ und r.

Durch lineare Transformation lässt sich aber $\underset{\pm}{\Lambda}\sigma_{23}$ auf eine beliebige der beiden kanonischen Formen bringen:

$$(39.)\qquad a(.)b = -a-\varepsilon b+\gamma \quad\text{und}\quad a(.)b = \frac{ab}{\gamma ab-\varepsilon a-b},$$

in welchen γ auch beliebig specialisirt und z. B. gleich 0 gesetzt werden kann.

Die drei anderen linearen Lösungen von σ_{23} sind in dem Ausdrucke enthalten:

$$(40.)\qquad \underset{1,2,3}{\Lambda}\sigma_{23})\quad a(.)b = \frac{(\varrho+1)qab+pa+p\varrho b}{q\varrho a+qb+p(\varrho+1)},\quad\text{wo}\quad \varrho^3-\varrho-1 = 0$$

als Wurzel einer cubischen Gleichung die Zahl ϱ bestimmt. Dabei stellt sich heraus:

$$\mu = q(\varrho^2-1),\quad \nu = p(\varrho^2-1).$$

Wenn

$$(41.)\qquad \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{18}\sqrt{69}} = 0{,}986991\cdots = u,\quad \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{18}\sqrt{69}} = 0{,}337727\cdots = v$$

und

$$\varrho_1 = u+v,\quad \varrho_2 = -\varepsilon^2 u-\varepsilon v,\quad \varrho_3 = -\varepsilon u-\varepsilon^2 v$$

genannt wird, so mag dem Λ das Suffixum 1, 2 oder 3 gegeben werden, je nachdem man für ϱ die erste, zweite oder dritte von diesen Wurzeln gewählt. Die Cubikwurzeln (41.) lassen sich in der Form $\alpha\pm\beta\sqrt{\gamma}$, wo α, β, γ rational sind, nicht ausziehen.

Die Lösungen der vorliegenden Gruppe (40.), die nur einen Parameter $p:q$ enthalten, lassen durch lineare Umformung sich auf jede der beiden kanonischen Formen bringen:

$$(42.)\qquad a(.)b = \frac{a+\varrho b}{1+\varrho},\quad a(.)b = \frac{(\varrho+1)ab}{\varrho a+b},$$

welche auch mit den (für $\gamma = 0$ sich ergebenden) kanonischen Formen (39.) zusammenfassbar sind in die einheitlichen Ausdrücke:

$$(43.)\qquad a(.)b = \frac{a+\varrho b}{\varrho^3},\quad\text{resp.}\quad a(.)b = \frac{\varrho^3 ab}{\varrho a+b},$$

wo ϱ der Gleichung zu genügen hat: $\varrho^5 = \varrho^4+1$.

Von diesen Ausdrücken geben die vorangehenden die allgemeinste projective Verwandlung an, und erschöpfen dieselben alle möglichen Lösungen des Algorithmus σ_{23} im linearen Functionsgebiete.

Ebenso wie σ_{12} und σ_{13} können zwar auch σ_{21} und σ_{31} zu einem commutativen Algorithmus zusammentreten, welcher jedoch im linearen Gebiete einer Lösung entbehrt.

Die Algorithmen σ_{23} und σ_{32} dagegen sind *„unverträglich"* mit einander, d. h. sie können nicht ohne Widerspruch zu der vorausgesetzten Eindeutigkeit der Grundfunctionen gleichzeitig bestehen.

Da nun, wie leicht zu sehen, die Annahme $\sigma_{31}+\sigma_{12}$ mit logischer Nothwendigkeit auch die Geltung von σ_{23} nach sich zieht, so werden keine anderen als folgende drei Arten von acht Combinationen zwischen unseren sechs σ-Algorithmen bestehen können, nämlich erstens die durch $\sigma_{23}+\sigma_{31}+\sigma_{12}$ repräsentirte zweigliedrige Art, deren anderer Repräsentant also durch Rückwärtslesen der Indices erhalten wird, sodann die beiden dreigliedrigen Arten, welche $\sigma_{12}+\sigma_{13}$ resp. $\sigma_{21}+\sigma_{31}$ vertritt, woraus dann die übrigen Vertreter durch cyklische Vertauschung von 1, 2, 3 hervorgehen.

§. 11.

Es ist endlich der Algorithmus ϱ_0 durch das Vorhandensein einer noch reicheren Fülle von Lösungen ausgezeichnet, welche es keineswegs mühelos ist, durch eine erschöpfende Untersuchung ausfindig zu machen.

Jener Algorithmus umfasste die Gleichungen:

$$(44.)\qquad \varrho_0)\ \begin{cases} a:(ab) = \ ba = \dfrac{b}{ab} \\ \dfrac{a:b}{a} \quad = b:a = (a:b)\,b \\ a\dfrac{b}{a} \quad = \dfrac{a}{b} \ = \dfrac{b}{a}:b. \end{cases}$$

Soll die linear gebrochene Function (26.) auch nur der ersten $a(:)\{a(.)b\} = b(.)a$ von diesen Gleichungen (und folglich bei vollkommner Eindeutigkeit der drei Grundoperationen auch den übrigen) genügen, so müssen die zwölf Relationen erfüllt sein:

$$(45.)\qquad \left\{\begin{array}{c|c} \alpha_1\delta+\gamma_1\delta_1 = -\mu\delta,\ \alpha_1(\alpha+\gamma_1) = -\mu\beta, & (\beta_1+\delta)\delta_1 = \mu\delta_1,\ \alpha\delta_1+\alpha_1\beta_1 = \mu\beta_1, \\ \alpha\delta+\gamma\delta_1-\alpha_1\beta-\beta_1\gamma_1 = \mu\alpha+\nu\delta, & \beta_1^2-\delta^2 = \mu\alpha_1+\nu\delta_1, \\ \alpha^2-\gamma_1^2 = \mu\gamma+\nu\beta, & \beta_1\gamma_1+\gamma\delta_1-\alpha\delta-\alpha_1\beta = \mu\gamma_1+\nu\beta_1, \\ \alpha\beta+\beta_1\gamma = \nu\alpha,\ (\alpha+\gamma_1)\gamma = \nu\gamma, & \beta(\beta_1+\delta) = -\nu\alpha_1,\ \beta\gamma_1+\gamma\delta = -\nu\gamma_1, \end{array}\right.$$

in denen μ und ν unbestimmte Constante vorstellen.

Diesen Gleichungen genügen identisch diejenigen Werthe der Coefficienten, welche aus der Vergleichung von (26.) mit der folgenden Lösung unmittelbar zu entnehmen sind:

$$(46.)\qquad \varLambda^{23}\varrho_0)\ a(.)\,b = \frac{p}{q}\cdot\frac{\frac{q}{p}\varrho(\varkappa+\varrho)ab-\varrho(\varkappa-\lambda)a-\varkappa(\varrho-\lambda)b+\frac{p}{q}(\varkappa-\varrho)(\varrho-\lambda)}{\frac{q}{p}(\varkappa+\varrho)(\varrho+\lambda)ab-\varkappa(\varrho+\lambda)a-\varrho(\varkappa-\lambda)b+\frac{p}{q}\varrho(\varkappa-\varrho)},$$

wobei sich $\mu = q\varrho(\varrho+\lambda)$, $\nu = -p\varrho(\varrho-\lambda)$ bestimmt.

Diese Lösung enthält drei arbiträre Parameter: $\frac{p}{q}$, $\frac{\varkappa}{\varrho}$ und $\frac{\lambda}{\varrho}$, und sie umfasst als Particular- oder auch als Grenzfälle alle überhaupt möglichen linearen Lösungen von ϱ_0.

Stellt man zu der Lösung $\varLambda^{23}$ nach der im §. 9 angegebenen Methode die übrigen fünf Ausdrücke auf, welche mit ihr als zu derselben „Gattung" von Lösungen gehörige zu bezeichnen und mit $\varLambda^{32}\varrho_0$, $\varLambda^{31}$, $\varLambda^{13}$, $\varLambda^{12}$, $\varLambda^{21}$ von ϱ_0 zu benennen sein werden, so hat man sechs verschieden gebaute Ausdrücke; dieselben unterscheiden sich nämlich dadurch, dass zwischen den nur ϱ, $\varkappa$, λ enthaltenden Factoren der drei letzten Nennerund der drei ersten Zählercoefficienten ein Platzwechsel theilweise stattgefunden hat.

Demungeachtet decken sich aber diese sechs Ausdrücke; sie sind *gleichumfassend* oder äquivalent, solange die Parameter als ganz beliebige Zahlen aufgefasst werden, und sind daher in gleicher Weise berechtigt, die allgemeine Lösung $\varLambda\varrho_0$ des Algorithmus ϱ_0 zu repräsentiren. Im allgemeinen, d. h. mit Ausnahme der Particularfälle, wo gewisse Relationen zwischen den Parametern der einen bestehen, lässt sich nämlich jede von diesen sechs ebenbürtigen Formen der $\varLambda\varrho_0$ in jede andere transformiren dadurch, dass man die Parameter der ersten geeignet bestimmt als Functionen von den (natürlich anders zu bezeichnenden, etwa zu accentuirenden) Parametern der zweiten.

Hierbei finden allerdings kritische Fälle eben dann statt, wenn der behufs völliger Umformung des einen Bruchs in den andern zu streichende Reductionsfactor Null oder unendlich wird. Allein die diesen Fällen entsprechenden Formen der zweiten in Rede stehenden Lösung können dann wenigstens durch einen Grenzenübergang aus der ersten Lösung abgeleitet werden.

Da dieser Process, bei dem man einzelne Parameter unendlich werden, andere in bestimmter davon abhängiger Weise verschwinden zu lassen hat, nicht selten (hier in den vier ersten der sechs unten folgenden Fälle) ein ziemlich complicirter ist, so thut man gut, zu einer allgemeinen Lösung dergleichen Grenzfälle ausdrücklich mit anzuführen.

In diesem Sinne ist die Angabe (46.) zu ergänzen durch die der folgenden sechs specielleren (nur zwei Parameter enthaltenden) Lösungen:

$$a(.)b =$$

$$(47.)\quad \left\{\begin{array}{l|l}
\Lambda_1^{31}\varrho_0)\ \dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{\dfrac{q}{p}\lambda ab-\lambda b}{2\dfrac{q}{p}\varkappa ab-\varkappa a-(\varkappa+\lambda)b+\dfrac{p}{q}\lambda}, & \Lambda_1^{32}\varrho_0)\ \dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{\dfrac{q}{p}\varkappa ab-\lambda b}{2\dfrac{q}{p}\varkappa ab-\lambda a-(\varkappa+\lambda)b+\dfrac{p}{q}\lambda}, \\
\Lambda_2^{31}\varrho_0)\ \dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{\dfrac{q}{p}\varkappa ab-(\varkappa+\lambda)a-\lambda b+2\dfrac{p}{q}\lambda}{-\varkappa a+\dfrac{p}{q}\varkappa}, & \Lambda_2^{32}\varrho_0)\ \dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{\dfrac{q}{p}\varkappa ab-(\varkappa+\lambda)a-\varkappa b+2\dfrac{p}{q}\lambda}{-\varkappa a+\dfrac{p}{q}\lambda}, \\
\Lambda_3^{23}\varrho_0)\ \dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{\lambda a+\varkappa b-\dfrac{p}{q}(\varkappa-\lambda)}{\dfrac{q}{p}(\varkappa+\lambda)ab-\varkappa a+\lambda b}, & \Lambda_3^{32}\varrho_0)\ \dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{\varkappa a+\lambda b-\dfrac{p}{q}(\varkappa-\lambda)}{\dfrac{q}{p}(\varkappa+\lambda)ab+\lambda a-\varkappa b},
\end{array}\right.$$

welche also nicht als Particularfälle (im strengen Sinn des Worts) in $\Lambda^{23}\varrho_0$ enthalten sind.

Auf die kanonischen Formen der Lösung $\Lambda\varrho_0$ beabsichtige ich bei einer anderen Gelegenheit einzugehen.

Karlsruhe, im Mai 1880.

Abdruck aus dem „Journal für die reine und angewandte Mathematik", Bd. 90.
Druck von G. Reimer in Berlin.