Weltziehn, Carl

Über die Zerlegung

Berlin
1882

Weltzien

1882

Über die Zerlegung
einer
ganzen homogenen Funktion von mehreren Veränderlichen in lineare Faktoren.

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR
ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE
VON DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT
DER
FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
GENEHMIGT
UND
ÖFFENTLICH ZU VERTHEIDIGEN
am 28. April 1882
VON

Carl Weltzien
aus Schwerin in Mecklenburg.

OPPONENTEN:
Leo Grunmach, Dr. phil.
Theodor Gross, Dr. phil.
Leo Saigge, Reg.-Baumeister.

BERLIN.
BUCHDRUCKEREI VON GUSTAV SCHADE (OTTO FRANCKE).
Linienstr. 158.

Soll eine ganze homogene Funktion $n$ter Ordnung von 3 Veränderlichen x_0, x_1, x_2 (geometrisch: eine Kurve $n$ter Ordnung)

$$x_0^n + (b_1 x_1 + b_2 x_2)\, x_0^{n-1} + (b_{11} x_1^2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{22} x_2^2)\, x_0^{n-2} + \cdots\cdot$$

ein Produkt von n linearen Faktoren

$$(x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\,(x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)\,(x_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) \cdots\cdot$$

darstellen, so ergiebt sich ein System von

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2} - 1$$

Bedingungsgleichungen für die $2n$ Grössen $\alpha_1, \alpha_2;\ \beta_1, \beta_2;\ \gamma_1, \gamma_2;\ \ldots\ldots$; dasselbe soll immer mit I bezeichnet werden. Eliminiert man hieraus zunächst alle $2n$ Grössen mit Ausnahme der Koefficienten eines Faktors, z. B. α_1, α_2, so erhält man ein anderes System von $n+1$ Gleichungen, das sich leicht zu

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2}$$

ergänzen lässt, von denen nur $n+1$ von einander unabhängig sind; dasselbe soll stets mit II bezeichnet werden. Aus seiner Herleitung ist klar, dass es auch für die Koefficienten jedes anderen Faktors gilt. Die letzten

$$\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}$$

dieser Gleichungen enthalten weder ein von α_1, α_2 unabhängiges Glied, noch ein solches erster Ordnung; addiert man zu jeder derselben diejenigen Gleichungen, welche sich aus ihr dadurch ergeben, dass $\beta_1, \beta_2;\ \gamma_1, \gamma_2;\ \ldots\ldots$ für α_1, α_2 gesetzt werden, so treten an die Stelle der Terme

$$\alpha_1^\lambda\, \alpha_2^\mu$$

Ausdrücke

$$\alpha_1^\lambda\, \alpha_2^\mu + \beta_1^\lambda\, \beta_2^\mu + \gamma_1^\lambda\, \gamma_2^\mu + \cdots\cdot,$$

welche sich in Folge von I rational durch die Koefficienten $b_1, b_2, b_{11}, b_{12}, b_{22}, \ldots\ldots$ ausdrücken lassen. Man erhält dadurch $\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$ Gleichungen, welche in den Koefficienten $b_1, b_2, \ldots\ldots$ von der $(n+1)$ten Ordnung sind.

Dies Verfahren wird im folgenden als allgemeine Methode bezeichnet und für die 2te, 3te, 4te und 5te Ordnung durchgeführt; ausserdem werden für die 2te und 3te Ordnung noch auf anderem Wege die Bedingungsgleichungen hergeleitet und für den 3ten Grad die Aufgabe: „wann die Funktion in eine 1ter und eine 2ter Ordnung zerfällt“ gelöst.

Die Gleichungen II sind die Bedingungen, unter denen die vorgelegte Funktion einen linearen Faktor enthält (oder gleich dem Produkte einer Funktion $(n-1)$ter und einer 1ter Ordnung ist). Man erhält dieselben daher einfacher, indem man die Koefficienten der Funktion den entsprechenden des Produktes gleichsetzt und die Koefficienten der Funktion $(n-1)$ ter Ordnung eliminiert; die letzteren lassen sich rational durch α_1, α_2 ausdrücken.

Eine andere Methode zur Herleitung der Gleichungen II ist folgende. Fügt man zu den beiden Gleichungen der gleich Null gesetzten vorgelegten Funktionen $n$ter und 1ter Ordnung noch

$$u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0$$

hinzu und eliminiert hieraus x_0, x_1, x_2, so erhält man eine Gleichung in u_0, u_1, u_2. Diese ergiebt durch Spezialisierung von u_0, u_1, u_2 diejenigen Werte von $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}$, welche die beiden Funktionen (diejenige $n$ter Ordnung und $x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$) gleichzeitig zum Verschwinden bringen. (Für diesen Zweck hat Hesse dies Verfahren oft benutzt.) Soll nun $x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ in der anderen Funktion als Faktor enthalten sein, so müssen die Koefficienten der für u_0, u_1, u_2 aufgestellten Gleichung sämmtlich verschwinden.

Während im Falle der Existenz eines linearen Faktors die Koefficienten rational sind, ergeben sich bei n linearen Faktoren die Koefficienten nicht rational. Dies folgt aus der speziellen Natur des Systems I. Da dasselbe sich nicht ändert, wenn zugleich α_1 mit β_1 (oder γ_1 oder $\delta_1 \ldots$) und α_2 mit β_2 (oder γ_2 oder $\delta_2 \ldots$) vertauscht wird, so müsste ein rationaler Wert von α_1 auch für $\beta_1, \gamma_1, \delta_1, \ldots$ zulässig, oder $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 \ldots$, ebenso $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = \delta_2 \ldots$ sein, was im allgemeinen nicht stattfindet.

Für $n = 2$, wo die Bedingung für die Existenz eines und zweier linearen Faktoren dieselbe ist, sind $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2$ nicht rational. Dies folgt auch daraus, dass nach Elimination von α_2 aus den 3 ersten Gleichungen von II sich 2 Gleichungen 2ten Grades für α_1 ergeben, die in den Koefficienten von α_1^2 und α_1 zur Übereinstimmung gebracht werden können, also entweder keine oder beide Wurzeln gemeinsam haben; das Eliminationsresultat giebt daher die Bedingung an, dass das letztere stattfindet (vergleiche § 1, C 1).

§ 1. Zerlegung einer ganzen homogenen Funktion 2ter Ordnung von 3 Veränderlichen in 2 lineare Faktoren.

A. Allgemeine Methode.

Soll

$$x_0^2 + (b_1 x_1 + b_2 x_2) x_0 + b_{11} x_1^2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{22} x_2^2$$

gleich dem Produkte

$$(x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)$$

sein, so müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$\text{I.} \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1 + \beta_1 = b_1 & \alpha_2 + \beta_2 = b_2 \\ \alpha_1 \beta_1 = b_{11} & \alpha_2 \beta_2 = b_{22} \\ \multicolumn{2}{c}{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 = b_{12}.} \end{array} \right.$$

Durch Elimination von β_1, β_2 erhält man:

$$-\alpha_2^2 + b_2 \alpha_2 - b_{22} = 0$$
$$2 \alpha_1 \alpha_2 - b_1 \alpha_2 - b_2 \alpha_1 + b_{12} = 0$$
$$-\alpha_1^2 + b_1 \alpha_1 - b_{11} = 0.$$

Eliminiert man aus je zwei aufeinanderfolgenden Gleichungen diejenigen Glieder, welche keine der Grössen $b_1, b_2, \ldots$ zu Koefficienten haben, so erhält man:

$$-b_2 \alpha_1 \alpha_2 + b_1 \alpha_2^2 - b_{12} \alpha_2 + 2 b_{22} \alpha_1 = 0$$
$$b_2 \alpha_1^2 - b_1 \alpha_1 \alpha_2 - b_{12} \alpha_1 + 2 b_{11} \alpha_2 = 0.$$

Eliminiert man endlich aus diesen beiden Gleichungen diejenigen Glieder, deren Koefficient b_2 ist, so erhält man:

$$b_{22} \alpha_1^2 - b_{12} \alpha_1 \alpha_2 + b_{11} \alpha_2^2 = 0.$$

Diese 6 Gleichungen bilden das System II.

Addiert man zu der letzten Gleichung diejenige, welche aus ihr hervorgeht, wenn α_1, α_2 durch β_1, β_2 ersetzt werden, nämlich:

$$b_{22} \beta_1^2 - b_{12} \beta_1 \beta_2 + b_{11} \beta_2^2 = 0$$

und bedenkt, dass aus I sich ergiebt:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = b_1^2 - 2 b_{11} \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = b_2^2 - 2 b_{22}$$
$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 = b_1 b_2 - b_{12},$$

so erhält man die Bedingungsgleichung:

$$\text{III.} \quad b_{11} b_2^2 + b_{22} b_1^2 + b_{12}^2 - b_1 b_2 b_{12} - 4 b_{11} b_{22} = 0.$$

Den 3 ersten Gleichungen von II kann man die Form geben:

$$(2 \alpha_2 - b_2) \alpha_2 - b_2 \alpha_2 + 2 b_{22} = 0$$
$$(2 \alpha_2 - b_2) \alpha_1 - b_1 \alpha_2 + b_{12} = 0 \quad \text{oder} \quad (2 \alpha_1 - b_1) \alpha_2 - b_2 \alpha_1 + b_{12} = 0$$
$$(2 \alpha_1 - b_1) \alpha_1 - b_1 \alpha_1 + 2 b_{11} = 0.$$

Soll daher:

$$x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

sein, so müssen auch folgende Gleichungen bestehen:

$$\begin{array}{ll} 2 \alpha_2 - b_2 = 0 & 2 \alpha_1 - b_1 = 0 \\ -b_2 \alpha_2 + 2 b_{22} = 0 & -b_1 \alpha_1 + 2 b_{11} = 0 \\ -b_1 \alpha_2 + b_{12} = 0 & -b_2 \alpha_1 + b_{12} = 0. \end{array}$$

Daraus folgt:

$$\alpha_1 = \frac{b_1}{2} = \frac{2 b_{11}}{b_1} = \frac{b_{12}}{b_2}$$

$$\alpha_2 = \frac{b_2}{2} = \frac{2 b_{22}}{b_2} = \frac{b_{12}}{b_1}.$$

Methoden, bei denen entweder das Gleichungssystem I oder II allein zu Grunde gelegt wird.

B. 1) Will man I allein benutzen, so liegt es nahe, die sich aus den 4 ersten Gleichungen ergebenden Werte:

$$\alpha_1 = \frac{b_1 + W_1}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{b_2 + W_2}{2}$$
$$\beta_1 = \frac{b_1 - W_1}{2} \qquad \beta_1 = \frac{b_2 - W_2}{2}$$

in die 5te einzuführen; hierbei ist gesetzt:

$$b_1^2 - 4\,b_{11} = W_1^2$$
$$b_2^2 - 4\,b_{22} = W_2^2.$$

Dadurch erhält man:

$$W_1\,W_2 = b_1\,b_2 - 2\,b_{12},$$

woraus sich durch Quadrierung und eine leichte Reduktion die Bedingungsgleichung ergiebt.

2) Aus

$$\alpha_1 + \quad \beta_1 = b_1$$
$$\beta_2\,\alpha_1 + \alpha_2\,\beta_1 = b_{12}$$

folgt:

$$(\alpha_2 - \beta_2)\,\alpha_1 = \quad b_1\,\alpha_2 - b_{12}$$
$$(\alpha_2 - \beta_2)\,\beta_1 = - b_1\,\beta_2 + b_{12}$$

und durch Multiplikation beider Gleichungen:

$$(\alpha_2 - \beta_2)^2\,\alpha_1\,\beta_1 = -b_1^2\,\alpha_2\,\beta_2 + b_1\,b_{12}\,(\alpha_2 + \beta_2) - b_{12}^2$$

und hieraus unter Benutzung der Gleichungen I die Bedingungsgleichung.

C. Unter alleiniger Benutzung von II kann man folgendermassen verfahren:

1) Aus der 2ten Gleichung ergiebt sich:

$$\alpha_2 = \frac{b_2\,\alpha_1 - b_{12}}{2\,\alpha_1 - b_1};$$

setzt man diesen Wert für α_2 in die 3te Gleichung ein, so erhält man:

$$(4\,b_{22} - b_2^2)\,(\alpha_1^2 - b_1\,\alpha_1) + b_{12}^2 - b_1\,b_2\,b_{12} + b_{22}\,b_1^2 = 0;$$

soll diese Gleichung mit der ersten:

$$(\alpha_1^2 - b_1\,\alpha_1) + b_{22} = 0$$

verträglich sein, so muss

$$(4\,b_{22} - b_2^2)\,b_{11} - b_{12}^2 + b_1\,b_2\,b_{12} - b_{22}\,b_1^2 = 0$$

sein; unter dieser Bedingung haben beide Gleichungen jedoch beide Wurzeln gemeinsam, die letzteren sind daher nicht rational.

2) Giebt man der 1ten, 3ten, 6ten Gleichung die Form:

$$(2\,\alpha_2 - b_2)\,\alpha_2 - (b_2\,\alpha_2 - 2\,b_{22}) = 0$$
$$(2\,b_{22} - b_{12}\,\alpha_2)\,\alpha_1 - (b_{12}\,\alpha_1 - 2\,b_{11}\,\alpha_2)\,\alpha_2 = 0$$
$$(2\,b_{11} - b_1\,\alpha_1) \quad - (b_1 - 2\,\alpha_1)\,\alpha_1 = 0,$$

so ergiebt sich:

$$(2\,\alpha_2 - b_2)\,(2\,b_{22} - b_{12}\,\alpha_2)\,(2\,b_{11} - b_1\,\alpha_1) = (b_2\,\alpha_2 - 2\,b_{22})\,(b_{12}\,\alpha_1 - 2\,b_{11}\,\alpha_2)\,(b_1 - 2\,\alpha_1)\text{*)}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}&(b_2\,b_{12} - 2\,b_1\,b_{22})\,(\alpha_1^2 - b_1\,\alpha_1 + b_{11})\,\alpha_2 + (b_1\,b_{12} - 2\,b_2\,b_{11})\,(\alpha_2^2 - b_2\,\alpha_2 + b_{22})\,\alpha_1\\ &+ (b_1 b_2 - 2 b_{12})\,(b_{22}\alpha_1^2 - b_{12}\alpha_1\alpha_2 + b_{11}\alpha_2^2) - 2(b_{11}\,b_2^2 + b_{22}b_1^2 + b_{12}^2 - b_1\,b_2\,b_{12} - 4b_{11}b_{22})\,\alpha_1\alpha_2\end{aligned}\right\} = 0,$$

oder:

$$b_{11}\,b_2^2 + b_{22}\,b_1^2 + b_{12}^2 - b_1\,b_2\,b_{12} - 4\,b_{11}\,b_{22} = 0.$$

3) Betrachtet man die 6 Gleichungen II als linear in den 6 Termen α_1^2, $\alpha_1\,\alpha_2$, α_2^2, α_1, α_2, 1, so muss ihre Determinante verschwinden. — Zweckmässiger ist jedoch folgende Modifikation. Durch Elimination der Terme α_1^2, $\alpha_1\,\alpha_2$, α_2^2 erhält man:

$$(4\,b_{22} - b_2^2)\,\alpha_1 + (b_1\,b_2 - 2\,b_{12})\,\alpha_2 + b_2\,b_{12} - 2\,b_1\,b_{22} = 0$$
$$(b_1\,b_2 - 2\,b_{12})\,\alpha_1 + (4\,b_{11} - b_1^2)\,\alpha_2 + b_1\,b_{12} - 2\,b_2\,b_{11} = 0$$
$$(b_2\,b_{12} - 2\,b_1\,b_{22})\,\alpha_1 + (b_1\,b_{12} - 2\,b_2\,b_{11})\,\alpha_2 + 4\,b_{11}\,b_{22} - b_{12}^2 = 0.$$

Die Determinante dieser Gleichungen ist das Quadrat von

$$\begin{vmatrix} 2\,b_{11} & b_{12} & b_1 \\ b_{12} & 2\,b_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & 2 \end{vmatrix},$$

da sie ihr adjungiert ist; jene und daher auch diese muss verschwinden. Unter dieser Bedingung sind 2 von den 3 Gleichungen Folgen der dritten.

Da die 3 Gleichungen auch für β_1, β_2 gelten, so geben die Verhältnisse der Koefficienten, nämlich z. B.:

$$\frac{4\,b_{22} - b_2^2}{b_2\,b_{12} - 2\,b_1\,b_{22}}, \qquad \frac{b_2\,b_1 - 2\,b_{12}}{b_2\,b_{12} - 2\,b_1\,b_{22}}$$

diejenigen Werte von $\frac{x_1}{x_0}$, $\frac{x_2}{x_0}$, welche $x_0 + \alpha_1\,x_1 + \alpha_2\,x_2$, $x_0 + \beta_1\,x_1 + \beta_2\,x_2$ gleichzeitig zum Verschwinden bringen (geometrisch: die Koordinaten des Durchschnittspunkts der beiden Geraden); sie sind rational, während die Koefficienten der Geraden von einer Quadratwurzel abhängen.

§ 2. Zerlegung einer ganzen homogenen Funktion 3ter Ordnung von 3 Veränderlichen in drei lineare Faktoren, sowie in eine Funktion 2ter und 1ter Ordnung.

A. Allgemeine Methode.

Soll

$$x_0^3 + (b_1\,x_1 + b_2\,x_2)\,x_0^2 + (b_{11}\,x_1^2 + b_{12}\,x_1\,x_2 + b_{22}\,x_2^2)\,x_0 + b_{111}\,x_1^3 + b_{112}\,x_1^2\,x_2 + b_{221}\,x_1\,x_2^2 + b_{222}\,x_2^3$$

gleich dem Produkte

$$(x_0 + \alpha_1\,x_1 + \alpha_2\,x_2)\,(x_0 + \beta_1\,x_1 + \beta_2\,x_2)\,(x_0 + \gamma_1\,x_1 + \gamma_2\,x_2)$$

sein, so müssen folgende Gleichungen bestehen:

*) Setzt man in den Gleichungen $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_0}$ für α_1, α_2 und multipliziert mit α_0^2, so ist dies die Funktionaldeterminante.

$$
\text{I.}\left\{\begin{array}{lll}
\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=b_1 & \alpha_2+\beta_2+\gamma_2=b_2 & \alpha_1\beta_2\gamma_2+\beta_1\gamma_2\alpha_2+\gamma_1\alpha_2\beta_2=b_{221}\\
\beta_1\gamma_1+\gamma_1\alpha_1+\alpha_1\beta_1=b_{11} & \beta_2\gamma_2+\gamma_2\alpha_2+\alpha_2\beta_2=b_{22} & \alpha_2\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_1\beta_1=b_{112}\\
\alpha_1\beta_1\gamma_1=b_{111} & \alpha_2\beta_2\gamma_2=b_{222} & \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1+\gamma_1\alpha_2+\gamma_2\alpha_1=\beta_{12}.
\end{array}\right.
$$

Durch Elimination von $\beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2$ erhält man:

$$
\begin{array}{l}
-\alpha_2^3+b_2\alpha_2^2-b_{22}\alpha_2+b_{222}=0\\
3\alpha_1\alpha_2^2-2b_2\alpha_1\alpha_2-b_1\alpha_2^2+b_{22}\alpha_1+b_{12}\alpha_2-b_{221}=0\\
-3\alpha_1^2\alpha_2+b_2\alpha_1^2+2b_1\alpha_1\alpha_2-b_{12}\alpha_1-b_{11}\alpha_2+b_{112}=0\\
\alpha_1^3-b_1\alpha_1^2+b_{11}\alpha_1-b_{111}=0
\end{array}
$$

und hieraus:

$$
\text{II.}\left\{\begin{array}{l}
-b_2\alpha_1\alpha_2^2+b_1\alpha_2^3+2b_{22}\alpha_1\alpha_2-b_{12}\alpha_2^2-3b_{222}\alpha_1+b_{221}\alpha_2=0\\
b_2\alpha_1^2\alpha_2-b_1\alpha_1\alpha_2^2-b_{22}\alpha_1^2+b_{11}\alpha_2^2+b_{221}\alpha_1-b_{112}\alpha_2=0\\
-b_2\alpha_1^3+b_1\alpha_1^2\alpha_2+b_{12}\alpha_1^2-2b_{11}\alpha_1\alpha_2-b_{112}\alpha_1+3b_{111}\alpha_2=0\\
-b_{22}\alpha_1^2\alpha_2+b_{12}\alpha_1\alpha_2^2-b_{11}\alpha_2^3+3b_{222}\alpha_1^2-2b_{221}\alpha_1\alpha_2+b_{112}\alpha_2^2=0\\
b_{22}\alpha_1^3-b_{12}\alpha_1^2\alpha_2+b_{22}\alpha_1\alpha_2^2-b_{221}\alpha_1^2+2b_{112}\alpha_1\alpha_2-3b_{111}\alpha_2^2=0\\
-b_{222}\alpha_1^3+b_{221}\alpha_1^2\alpha_2-b_{112}\alpha_1\alpha_2^2-b_{111}\alpha_2^3=0.
\end{array}\right.
$$

Addiert man zu jeder der 3 letzten Gleichungen die entsprechenden und bedenkt, dass aus I folgt:

$$
\begin{array}{ll}
\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=b_1^2-2b_{11} & \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=b_2^2-2b_{22}\\
\alpha_1^3+\beta_1^3+\gamma_1^3=b_1^3-3b_1b_{11}+3b_{111} & \alpha_2^3+\beta_2^3+\gamma_2^3=b_2^3-3b_2b_{22}+3b_{222}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=b_1b_2-b_{12}\\
\alpha_1^2\alpha_2+\beta_1^2\beta_2+\gamma_1^2\gamma_2=b_1^2b_2-b_1b_{12}-b_2b_{11}+b_{112}\\
\alpha_1\alpha_2^2+\beta_1\beta_2^2+\gamma_1\gamma_2^2=b_2^2b_1-b_2b_{12}-b_1b_{22}+b_{221},
\end{array}
$$

so erhält man die Bedingungsgleichungen:

$$
\text{III.}\left\{\begin{array}{l}
b_1^3b_{22}-b_1^2b_{221}-b_1^2b_2b_{12}+2b_1b_2b_{112}+b_1b_2^2b_{11}-3b_2^2b_{111}-4b_1b_{11}b_{22}+b_1b_{12}^2+9b_{22}b_{111}-b_{12}b_{112}+b_{11}b_{221}=0\\
b_2^3b_{11}-b_2^2b_{112}-b_2^2b_1b_{12}+2b_1b_2b_{221}+b_1^2b_2b_{22}-3b_1^2b_{222}-4b_2b_{11}b_{22}+b_2b_{12}^2+9b_{11}b_{222}-b_{12}b_{222}+b_{22}b_{112}=0\\
b_1^3b_{222}-b_1^2b_2b_{221}+b_1b_2^2b_{112}-b_2^3b_{111}-3b_1b_{11}b_{222}+b_1b_{22}b_{112}+b_1b_{12}b_{221}+b_2b_{11}b_{221}-b_2b_{12}b_{112}+3b_2b_{22}b_{111}=0.
\end{array}\right.
$$

Sollen 2 der linearen Faktoren einander gleich werden, so müssen α_1 und α_2 Doppelwurzeln der Gleichungen II sein, also die Ableitungen nach α_1 und α_2 verschwinden:

$$
\begin{array}{lll}
3\alpha_1^2-2b_1\alpha_1+b_{11}=0 & 6\alpha_1\alpha_2-2b_2\alpha_1-2b_1\alpha_2+b_{12}=0 & 3\alpha_2^2-2b_2\alpha_2+b_{22}=0\\
b_1\alpha_1^2-2b_{11}\alpha_1+3b_{111}=0 & 2b_1\alpha_1\alpha_2-b_{12}\alpha_1-2b_{11}\alpha_2+2b_{112}=0 & b_1\alpha_2^2-b_{12}\alpha_2+b_{221}=0\\
b_2\alpha_1^2-b_{12}\alpha_1+b_{112}=0 & 2b_2\alpha_1\alpha_2-2b_{22}\alpha_1-b_{12}\alpha_2+2b_{221}=0 & b_2\alpha_2^2-2b_{22}\alpha_2+3b_{222}=0.
\end{array}
$$

Daher:

$$
\begin{vmatrix} 3 & 2b_1 & b_{11}\\ b_1 & 2b_{11} & 3b_{111}\\ b_2 & b_{12} & b_{112} \end{vmatrix}=0
\qquad
\begin{vmatrix} 3 & 2b_2 & b_{22}\\ b_1 & b_{12} & b_{221}\\ b_2 & 2b_{22} & 3b_{222} \end{vmatrix}=0.
$$

Ausserdem ergeben sich für α_1 und α_2 in bekannter Weise die Verhältnisse der Unterdeterminanten.

Neben diesen Gleichungen besteht noch folgende:

$$
\begin{vmatrix} 3b_{222} & 2b_{221} & b_{112}\\ b_{221} & 2b_{112} & 3b_{111}\\ b_{22} & b_{12} & b_{11} \end{vmatrix}=0.
$$

Man erhält dieselbe durch folgende Betrachtung. Denkt man statt der Grössen $\alpha_1, \alpha_2; b_1, b_2, \ldots$ resp. $\frac{b_1}{b_{000}}, \frac{b_2}{b_{000}}, \ldots \frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \frac{\alpha_2}{\alpha_0}$ gesetzt, so ändert sich nichts in der vorgelegten Funktion, sobald $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2; b_{000}, b_{111}, b_{222}, \ldots$ verwandelt werden in resp. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_0; b_{111}, b_{222}, b_{000}, \ldots$ oder in $\alpha_2, \alpha_0, \alpha_1; b_{222}, b_{000}, b_{111}, \ldots$. Dadurch erhält man überhaupt aus jeder Gleichung 2 andere.

Eliminiert man ferner auch aus den 3 Gleichungen jeder Horizontalreihe α_1, α_2 z. B. nach den Methoden C des § 1, so erhält man:

$$
\begin{vmatrix} 3 & 2b_2 & 2b_1\\ b_2 & 2b_{22} & b_{12}\\ b_1 & b_{12} & 2b_{22} \end{vmatrix}=0
\qquad
\begin{vmatrix} 2b_1 & b_{12} & b_{22}\\ b_{12} & 2b_{221} & b_{112}\\ 2b_{11} & 2b_{112} & 3b_{111} \end{vmatrix}=0
\qquad
\begin{vmatrix} 2b_2 & b_{22} & b_{12}\\ 2b_{22} & 3b_{222} & 2b_{221}\\ b_{12} & b_{221} & 2b_{112} \end{vmatrix}=0.
$$

Jede dieser 3 letzten Gleichungen einzeln giebt die Bedingung an, dass die 3 Gleichungen: $x_0+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2=0$, $x_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2=0$, $x_0+\gamma_1x_1+\gamma_2x_2=0$ ein Wertsystem gemeinsam haben. Denn diese Bedingung lautet:

$$
\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1\\ \beta_1 & \beta_2 & 1\\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix}=0.
$$

Das Quadrat dieser Determinante ist jedoch:

$$
\begin{vmatrix} b_1^2-2b_{11} & b_1b_2-b_{12} & b_1\\ b_1b_2-b_{12} & b_2^2-2b_{22} & b_2\\ b_1 & b_2 & 3 \end{vmatrix},
$$

woraus sich durch leichte Umformung die erste der 3 Determinanten ergiebt.

Sollen alle 3 linearen Faktoren einander gleich werden, so müssen auch die 2ten Ableitungen verschwinden:

$$
\begin{array}{llll}
-3\alpha_1+b_1=0 & -3\alpha_2+b_2=0 & 2b_2\alpha_1-b_{12}=0 & 2b_1\alpha_2-b_{12}=0\\
2b_1\alpha_1-2b_{11}=0 & 2b_2\alpha_2-2b_{22}=0 & -b_{22}\alpha_1+b_{221}=0 & -b_{11}\alpha_2+b_{112}=0.\\
-b_{11}\alpha_1+3b_{111}=0 & -b_{22}\alpha_2+3b_{222}=0 & &
\end{array}
$$

Daher:

$$
\alpha_1=\frac{b_1}{3}=\frac{b_{11}}{b_1}=\frac{3b_{111}}{b_{11}}=\frac{b_{12}}{2b_2}=\frac{b_{221}}{b_{22}}
$$

$$
\alpha_2=\frac{b_2}{3}=\frac{b_{22}}{b_2}=\frac{3b_{222}}{b_{22}}=\frac{b_{12}}{2b_1}=\frac{b_{112}}{b_{11}}.
$$

B. Zerlegung einer ganzen homogenen Funktion 3ter Ordnung von 3 Veränderlichen in eine 1ter und 2ter Ordnung.

Betrachtet man die 10 Gleichungen II als linear in den Termen

$$\alpha_1^3, \alpha_1^2\alpha_2, \alpha_1\alpha_2^2, \alpha_2^3, \alpha_1^2, \alpha_1\alpha_2, \alpha_2^2, \alpha_1, \alpha_2, 1,$$

so muss die Determinante, welche, abgesehen von dem Faktor 2, die Form:

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & -b_{22} & b_{222} \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -b_2 & -b_1 & b_{22} & b_{12} & -b_{221} \\
0 & -3 & 0 & 0 & b_2 & b_1 & 0 & -b_{12} & -b_{11} & b_{112} \\
1 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & 0 & 0 & b_{11} & 0 & -b_{111} \\
0 & 0 & -b_2 & b_1 & 0 & b_{22} & -b_{12} & -3b_{222} & b_{221} & 0 \\
0 & b_2 & -b_1 & 0 & -b_{22} & 0 & b_{11} & b_{221} & -b_{112} & 0 \\
-b_2 & b_1 & 0 & 0 & b_{12} & -b_{11} & 0 & -b_{112} & -3b_{111} & 0 \\
0 & -b_{22} & b_{12} & -b_{11} & -3b_{222} & -b_{221} & b_{112} & 0 & 0 & 0 \\
b_{22} & -b_{12} & b_{11} & 0 & -b_{221} & b_{112} & -3b_{111} & 0 & 0 & 0 \\
-b_{222} & b_{221} & -b_{112} & b_{111} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

hat, verschwinden; sie ist von der Art, dass die Glieder der Diagonale Null und die zu dieser symmetrischen Glieder entgegengesetzt sind; da sie gerader Ordnung ist, so ist sie also ein vollständiges Quadrat*). Die Ausrechnung ergiebt jedoch weiter, dass sie identisch verschwindet. Diejenige Unterdeterminante 9ter Ordnung, welche man erhält durch Fortlassung der letzten Horizontal- und Vertikal-Reihe, verschwindet als Determinante derselben Art von ungerader Ordnung**); daher müssen auch die übrigen Unterdeterminanten 9ter Ordnung verschwinden. Es ergeben sich so 9 Gleichungen für die Existenz eines linearen Faktors, resp. die Zerlegung in einen linearen und einen quadratischen Faktor, von denen 2 unabhängig sind. Diese Gleichungen sind jedoch 9ter Ordnung in den Koefficienten der vorgelegten Funktion. Da aber diese Bedingungen sich als Gleichungen 8ter Ordnung darstellen lassen, so sollen sie auf anderem Wege hergeleitet werden.

Benutzt man nur die ersten 8 Gleichungen, so kann man 8 Terme durch die übrigen ausdrücken, z. B.

$$\alpha_1^3 \quad \alpha_1^2\alpha_2 \quad \alpha_1\alpha_2^2 \quad \alpha_2^3 \quad \alpha_1^2 \quad \alpha_1\alpha_2 \quad \alpha_2^2 \quad \alpha_1$$

durch α_2 und 1. Man erhält dadurch folgende Gleichungen***):

$$\text{IV.}\begin{cases}
-(B_2 - B\,b_2)\,\alpha_1^3 = (B_1\,b_{11} - B_{11}\,b_1)\,\alpha_2 + B_{111}\,b_2 - B_2\,b_{111} \\
(B_2 - B\,b_2)\,\alpha_1^2\alpha_2 = (B_{112} - B\,b_{112})\,\alpha_2 + \tfrac{1}{3}(B_2\,b_{112} - B_{112}\,b_2) \\
-(B_2 - B\,b_2)\,\alpha_1\alpha_2^2 = (B\,b_{221} - B_{221})\,\alpha_2 + B_{221}\,b_2 - B_2\,b_{221} \\
(B_2 - B\,b_2)\,\alpha_2^3 = (B_{22}\,b_2 - B_2\,b_{22})\,\alpha_2 + B_2\,b_{222} - B_{222}\,b_2 \\
-(B_2 - B\,b_2)\,\alpha_1^2 = (B\,b_{11} - B_{11})\,\alpha_2 + \tfrac{1}{3}(B_{11}\,b_2 - B_2\,b_{11}) \\
(B_2 - B\,b_2)\,\alpha_1\alpha_2 = (B_{12} - B\,b_{12})\,\alpha_2 + \tfrac{1}{3}(B_2\,b_{12} - B_{12}\,b_2) \\
-(B_2 - B\,b_2)\,\alpha_2^2 = (B\,b_{22} - B_{22})\,\alpha_2 + B_{22}\,b_2 - B_2\,b_{22} \\
(B_2 - B\,b_2)\,\alpha_1 = (B_1 - B\,b_1)\,\alpha_2 + \tfrac{1}{3}(B_2\,b_1 - B_1\,b_2)
\end{cases}$$

worin zur Abkürzung†) gesetzt ist:

---

*) Baltzer: Determinanten 1870. § 7, 1.

**) Baltzer: Determinanten 1870. § 3, 14.

***) Baltzer: Determinanten 1870. § 8, 4.

†) Salmon: Höhere ebene Curven, deutsch von Fiedler. 1873.

$$\text{V.}\begin{cases}
B_{111} = 3\,b_{111}\,b_{221}\,b_1 + b_{112}\,b_{11}\,b_{12} - \tfrac{3}{4}b_{111}\,b_{12}^2 - b_{221}\,b_{11}^2 - b_{112}^2\,b_1 \\
B_{222} = 3\,b_{222}\,b_{112}\,b_2 + b_{221}\,b_{12}\,b_{22} - \tfrac{3}{4}b_{222}\,b_{12}^2 - b_{112}\,b_{22}^2 - b_{221}^2\,b_2 \\
B = 3\,b_{11}\,b_{22} + b_{12}\,b_1\,b_2 - \tfrac{3}{4}b_{12}^2 - b_{11}\,b_2^2 - b_{22}\,b_1^2 \\
B_{112} = 9\,b_{111}\,b_{222}\,b_1 - 3\,b_{111}\,b_{12}\,b_{22} + 3\,b_{111}\,b_{221}\,b_2 - 3\,b_{222}\,b_{11}^2 + \tfrac{1}{4}b_{112}\,b_{12}^2 - b_{112}\,b_{221}\,b_1 + 2\,b_{112}\,b_{11}\,b_{22} - b_{112}^2\,b_2 \\
B_{11} = 9\,b_{111}\,b_{221} - 3\,b_{111}\,b_{12}\,b_2 + 3\,b_{111}\,b_{22}\,b_1 - 3\,b_{112}^2 + \tfrac{1}{4}b_{11}\,b_{12}^2 - b_{221}\,b_{11}\,b_1 + 2\,b_{112}\,b_{11}\,b_2 - b_{11}^2\,b_{22} \\
B_{221} = 9\,b_{111}\,b_{222}\,b_2 - 3\,b_{222}\,b_{11}\,b_{12} + 3\,b_{222}\,b_{112}\,b_1 - 3\,b_{111}\,b_{22}^2 + \tfrac{1}{4}b_{221}\,b_{12}^2 - b_{112}\,b_{221}\,b_2 + 2\,b_{221}\,b_{11}\,b_{22} - b_{221}^2\,b_1 \\
B_{22} = 9\,b_{222}\,b_{112} - 3\,b_{222}\,b_{12}\,b_1 + 3\,b_{222}\,b_{11}\,b_2 - 3\,b_{221}^2 + \tfrac{1}{4}b_{22}\,b_{12}^2 - b_{112}\,b_{22}\,b_2 + 2\,b_{221}\,b_{22}\,b_1 - b_{22}^2\,b_{11} \\
B_1 = 9\,b_{111}\,b_{22} - 3\,b_{112}\,b_{12} + 3\,b_{221}\,b_{11} - 3\,b_{111}\,b_2^2 + \tfrac{1}{4}b_1\,b_{12}^2 - b_{11}\,b_{22}\,b_1 + 2\,b_{112}\,b_1\,b_2 - b_{221}\,b_1^2 \\
B_2 = 9\,b_{222}\,b_{11} - 3\,b_{221}\,b_{12} + 3\,b_{112}\,b_{22} - 3\,b_{222}\,b_1^2 + \tfrac{1}{4}b_2\,b_{12}^2 - b_{11}\,b_{22}\,b_2 + 2\,b_{221}\,b_1\,b_2 - b_{112}\,b_2^2 \\
B_{12} = 27\,b_{111}\,b_{222} - 3(b_{111}\,b_{22}\,b_2 + b_{222}b_{11}b_1 + b_{112}b_{221}) + \tfrac{1}{4}b_{12}^3 - b_{12}(b_{112}b_2 + b_{221}b_1 + b_{11}b_{22}) + 3(b_{112}\,b_{22}\,b_1 + b_{221}b_{11}b_2).
\end{cases}$$

Eliminiert man nun mit Hülfe der Gleichungen IV aus der 1ten und 3ten Gleichung des Systems II die Terme $\alpha_1^3\ \alpha_1^2\alpha_2\ \alpha_1^2\ \alpha_1\alpha_2\ \alpha_1$, so erhält man

$$\text{VI.}\begin{cases}
(B_{22}\,b_2 - B_2\,b_{22})\,\alpha_2 = B_{222}\,b_2 - B_2\,b_{222} \\
(B\,b_{12} - B_{12})\,\alpha_2 = \tfrac{1}{3}(B_2\,b_{12} - B_{12}\,b_2).
\end{cases}$$

Durch Vertauschung der Indizes 1 und 2 erhält man:

$$\text{VI.}\begin{cases}
(B_{11}\,b_1 - B_1\,b_{11})\,\alpha_1 = B_{111}\,b_1 - B_1\,b_{111} \\
(B\,b_{12} - B_{12})\,\alpha_1 = \tfrac{1}{3}(B_1\,b_{12} - B_{12}\,b_1).
\end{cases}$$

Dadurch ergeben sich als Bedingungen für das Zerfallen der vorgelegten Funktion 3ter Ordnung in eine 1ter und 2ter Ordnung die beiden Gleichungen

$$(B_{22}\,b_2 - B_2\,b_{22})\,(B_{12}\,b_2 - B_2\,b_{12}) = 3\,(B_{222}\,b_2 - B_2\,b_{222})\,(B_{12} - B\,b_{12})$$
$$(B_{11}\,b_1 - B_1\,b_{11})\,(B_{12}\,b_1 - B_1\,b_{12}) = 3\,(B_{111}\,b_1 - B_1\,b_{111})\,(B_{12} - B\,b_{12}),$$

welche in den Koefficienten der vorgelegten Funktion von der 8ten Ordnung sind.

C. Andere Methoden für die Zerlegung der Funktion in 3 lineare Faktoren.

Soll jedoch die Funktion in 3 lineare Faktoren zerfallen, so müssen die Gleichungen VI auch bestehen, wenn α_1, α_2 durch β_1, β_2 oder durch γ_1, γ_2 ersetzt werden; daraus ergeben sich die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
B_{22}\,b_2 - B_2\,b_{22} &= 0 \\
B_{12}\,b_2 - B_2\,b_{12} &= 0 \\
B_{11}\,b_1 - B_1\,b_{11} &= 0 \\
B_{12} - B\,b_{12} &= 0 \\
B_{222}\,b_2 - B_2\,b_{222} &= 0 \\
B_{111}\,b_1 - B_1\,b_{111} &= 0.
\end{aligned}$$

Von diesen Gleichungen sind nur 3 unabhängig. Diese Bedingungen lassen sich auch aus dem System IV herleiten; denn auch hier muss für die Existenz von 3 linearen Faktoren jeder Koefficient verschwinden. Betrachtet man nämlich z. B. die letzte Gleichung

$$(B_2 - B\,b_2)\,\alpha_2 = (B_1 - B\,b_1)\,\alpha_1 + \tfrac{1}{3}(B_2\,b_1 - B_1\,b_2),$$

so müssen neben ihr auch die Gleichungen

$$(B_2 - B\,b_2)\,\beta_2 = (B_1 - B\,b_1)\,\beta_1 + \tfrac{1}{3}(B_2\,b_1 - B_1\,b_2)$$
$$(B_2 - B\,b_2)\,\gamma_2 = (B_1 - B\,b_1)\,\gamma_1 + \tfrac{1}{3}(B_2\,b_1 - B_1\,b_2)$$

erfüllt sein. Dies ist aber im Allgemeinen, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, wie oben gezeigt, nur möglich, wenn die Koefficienten dieser Gleichung, sowie aller Gleichungen IV einzeln verschwinden.

Es zeigt sich hierdurch, dass im Falle der Existenz eines linearen Faktors die Koefficienten desselben rational sind, während im Falle der Existenz von 3 linearen Faktoren die Koefficienten von einer Gleichung 3ten Grades abhängen.

Zerfällt die Funktion in eine 1ter und eine 2ter Ordnung

$$x_0 + \alpha_1\,x_1 + \alpha_2\,x_2,\quad x_0^2 + (\beta_1\,x_1 + \beta_2\,x_2)\,x_0 + \beta_{11}\,x_1^2 + \beta_{12}\,x_1\,x_2 + \beta_{22}\,x_2^2,$$

so ergeben sich $\beta_1, \beta_2, \ldots$ als rationale Funktionen von α_1, α_2:

$$\beta_1 = b_1 - \alpha_1 \qquad \beta_2 = b_2 - \alpha_2$$
$$\beta_{11} = b_{11} - b_1\,\alpha_1 + \alpha_1^2 \qquad \beta_{22} = b_{22} - b_2\,\alpha_2 + \alpha_2^2 \qquad \beta_{12} = b_{12} - b_1\,\alpha_2 - b_2\,\alpha_1 + 2\,\alpha_1\,\alpha_2;$$

da α_1, α_2 rationale Funktionen der Grössen $b_1, b_2, \ldots$ sind, so gilt dies auch von β_1, β_2; $\beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{12}$. —

Eine C 1) des § 1 entsprechende Methode ist folgende: Setzt man aus der 3ten Gleichung von II den Wert von α_2 in die 2te ein, so erhält man eine Gleichung 5ten Grades für α_1; ihr Grad kann mit Hülfe der 4ten Gleichung auf 3 erniedrigt werden und zwar so, dass die Koefficienten, welche in den Grössen $b_1, b_2, \ldots$ von der 3ten Ordnung sind, auch nach der Reduktion des Grades dieselbe Ordnung haben. Sollen nun beide Gleichungen auch für β_1, γ_1 erfüllt sein, so ist — da eine gemeinsame rationale Wurzel $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1$ zur Folge haben würde — dies nur möglich, wenn die Koefficienten der einen Gleichung denen der anderen proportional sind. Durch Vertauschung der Indizes 1 und 2 ergeben sich ausser den hierdurch erhaltenen 3 Gleichungen noch 3 andere; von diesen 6 Gleichungen sind nur 3 unabhängig.

§ 3. Allgemeine Methode für die Zerlegung einer ganzen homogenen Funktion 4ter Ordnung von 3 Veränderlichen in 4 lineare Faktoren.

Soll die Funktion

$$x_0^4 + (b_1\,x_1 + b_2\,x_2)\,x_0^3 + (b_{11}\,x_1^2 + b_{12}\,x_1\,x_2 + b_{22}\,x_2^2)\,x_0^2 + (b_{111}\,x_1^3 + b_{112}\,x_1^2\,x_2 + b_{221}\,x_1\,x_2^2 + b_{222}\,x_2^3)\,x_0 + b_{1111}\,x_1^4 + b_{1112}\,x_1^3\,x_2 + b_{1122}\,x_1^2\,x_2^2 + b_{2221}\,x_1\,x_2^3 + b_{2222}\,x_2^4$$

gleich dem Produkte

$$(x_0 + \alpha_1\,x_1 + \alpha_2\,x_2)\,(x_0 + \beta_1\,x_1 + \beta_2\,x_2)\,(x_0 + \gamma_1\,x_1 + \gamma_2\,x_2)\,(x_0 + \delta_1\,x_1 + \delta_2\,x_2)$$

sein, so müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$\text{I.}\quad \begin{cases}
\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = b_1 & \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \delta_2 = b_2 \\
\alpha_1\,\beta_1 + \alpha_1\,\gamma_1 + \alpha_1\,\delta_1 + \beta_1\,\gamma_1 + \beta_1\,\delta_1 + \gamma_1\,\delta_1 = b_{11} & \alpha_2\,\beta_2 + \alpha_2\,\gamma_2 + \alpha_2\,\delta_2 + \beta_2\,\gamma_2 + \beta_2\,\delta_2 + \gamma_2\,\delta_2 = b_{22} \\
\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1 + \alpha_1\,\beta_1\,\delta_1 + \alpha_1\,\gamma_1\,\delta_1 + \beta_1\,\gamma_1\,\delta_1 = b_{111} & \alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2 + \alpha_2\,\beta_2\,\delta_2 + \alpha_2\,\gamma_2\,\delta_2 + \beta_2\,\gamma_2\,\delta_2 = b_{222} \\
\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\,\delta_1 = b_{1111} & \alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2\,\delta_2 = b_{2222} \\
\alpha_1\,\beta_2\,\gamma_2\,\delta_2 + \beta_1\,\alpha_2\,\gamma_2\,\delta_2 + \gamma_1\,\alpha_2\,\beta_2\,\delta_2 + \delta_1\,\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2 = a_{2221} \\
\alpha_2\,\beta_1\,\gamma_1\,\delta_1 + \beta_2\,\alpha_1\,\gamma_1\,\delta_1 + \gamma_2\,\alpha_1\,\beta_1\,\delta_1 + \delta_2\,\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1 = a_{1112} \\
\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_2\,\delta_2 + \alpha_1\,\gamma_1\,\beta_2\,\delta_2 + \alpha_1\,\delta_1\,\beta_2\,\gamma_2 + \beta_1\,\gamma_1\,\alpha_2\,\delta_2 + \beta_1\,\delta_1\,\alpha_2\,\gamma_2 + \gamma_1\,\delta_1\,\alpha_2\,\beta_2 = a_{1122} \\
\alpha_1\,\beta_2 + \alpha_2\,\beta_1 + \alpha_1\,\gamma_2 + \alpha_2\,\gamma_1 + \alpha_1\,\delta_2 + \alpha_2\,\delta_1 + \beta_1\,\gamma_2 + \beta_2\,\gamma_1 + \beta_1\,\delta_2 + \beta_2\,\delta_1 + \gamma_1\,\delta_2 + \gamma_2\,\delta_1 = a_{12} \\
\alpha_1(\beta_2\gamma_2 + \beta_2\delta_2 + \gamma_2\delta_2) + \beta_1(\alpha_2\gamma_2 + \alpha_2\delta_2 + \gamma_2\delta_2) + \gamma_1(\alpha_2\beta_2 + \alpha_2\delta_2 + \beta_2\delta_2) + \delta_1(\alpha_2\beta_2 + \alpha_2\gamma_2 + \beta_2\gamma_2) = a_{221} \\
\alpha_2(\beta_1\,\gamma_1 + \beta_1\,\delta_1 + \gamma_1\,\delta_1) + \beta_2(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_1\delta_1 + \gamma_1\delta_1) + \gamma_2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\,\delta_1 + \beta_1\,\delta_1) + \delta_2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\gamma_1 + \beta_1\gamma_1) = a_{112}.
\end{cases}$$

Durch Elimination von $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ erhält man 5 Gleichungen, aus denen sich durch das analoge Verfahren, wie beim 3ten Grad, schliesslich folgende 6 Gleichungen ergeben:

$$\text{II.}\quad \begin{cases}
-b_{22}\alpha_1^2\alpha_2^2 + b_{12}\alpha_1\alpha_2^3 - b_{11}\alpha_2^4 - 2b_{221}\alpha_1\alpha_2^2 + b_{112}\alpha_2^3 + 3b_{222}\,\alpha_1^2\alpha_2 - b_{1122}\alpha_2^2 + 3b_{2221}\alpha_1\alpha_2 - 6b_{2222}\,\alpha_1^2 = 0 \\
2b_{22}\alpha_1^3\alpha_2 - 2b_{12}\alpha_1^2\alpha_2^2 + 2b_{11}\alpha_1\alpha_2^3 + b_{221}\alpha_1^2\alpha_2 + b_{112}\alpha_1\alpha_2^2 - 3b_{111}\alpha_2^3 - 4b_{1122}\alpha_1\alpha_2 + 3b_{1112}\alpha_2^2 - 3b_{222}\alpha_1^3 = 0 \\
-b_{22}\,\alpha_1^4 + b_{12}\,\alpha_1^3\alpha_2 - b_{11}\,\alpha_1^2\alpha_2^2 + b_{221}\,\alpha_1^3 - 2b_{112}\,\alpha_1^2\alpha_2 + 3b_{111}\,\alpha_1\,\alpha_2^2 - b_{1122}\,\alpha_1^2 + 3b_{1112}\,\alpha_1\,\alpha_2 - 6b_{1111}\,\alpha_2^2 = 0 \\
-b_{222}\,\alpha_1^3\alpha_2 + b_{221}\,\alpha_1^2\alpha_2^2 - b_{112}\,\alpha_1\,\alpha_2^3 + b_{111}\,\alpha_2^4 - 3b_{2221}\,\alpha_1^2\alpha_2 + 2b_{1122}\,\alpha_1\,\alpha_2^2 - b_{1112}\,\alpha_2^3 + 4b_{2222}\,\alpha_1^3 = 0 \\
b_{222}\,\alpha_1^4 - b_{221}\,\alpha_1^3\alpha_2 + b_{112}\,\alpha_1^2\alpha_2^2 - b_{111}\,\alpha_1\,\alpha_2^3 - b_{2221}\,\alpha_1^3 + 2b_{1122}\,\alpha_1^2\alpha_2 - 3b_{1112}\,\alpha_1\,\alpha_2^2 + 4b_{1111}\,\alpha_2^3 = 0 \\
-b_{2222}\,\alpha_1^4 + b_{2221}\,\alpha_1^3\alpha_2 - b_{1122}\,\alpha_1^2\alpha_2^2 + b_{1112}\,\alpha_1\,\alpha_2^3 - b_{1111}\,\alpha_2^4 = 0.
\end{cases}$$

Addiert man zu jeder der 6 letzten Gleichungen die entsprechenden und bedenkt, dass aus I folgt:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1^2 &= b_1^2 - 2\,b_{11} \\
\alpha_1^3 + \beta_1^3 + \gamma_1^3 + \delta_1^3 &= b_1^3 - 3\,b_1\,b_{11} + 3\,b_{111} \\
\alpha_1^4 + \beta_1^4 + \gamma_1^4 + \delta_1^4 &= b_1^4 - 4\,b_1^2 b_{11} + 4\,b_1\,b_{111} + 2\,b_{11}^2 - 4\,b_{1111} \\
\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 + \delta_2^2 &= b_2^2 - 2\,b_{22} \\
\alpha_2^3 + \beta_2^3 + \gamma_2^3 + \delta_2^3 &= b_2^3 - 3\,b_2\,b_{22} + 3\,b_{222} \\
\alpha_2^4 + \beta_2^4 + \gamma_2^4 + \delta_2^4 &= b_2^4 - 4\,b_2^2 b_{22} + 4\,b_2 b_{222} + 2\,b_{22}^2 - 4\,b_{2222} \\
\alpha_1\,\alpha_2 + \beta_1\,\beta_2 + \gamma_1\,\gamma_2 + \delta_1\,\delta_2 &= b_1\,b_2 - b_{12} \\
\alpha_1^2\alpha_2 + \beta_1^2\beta_2 + \gamma_1^2\gamma_2 + \delta_1^2\delta_2 &= b_1^2 b_2 - b_1\,b_{12} - b_2\,b_{11} + b_{112} \\
\alpha_1\,\alpha_2^2 + \beta_1\,\beta_2^2 + \gamma_1\,\gamma_2^2 + \delta_1\,\delta_2^2 &= b_2^2 b_1 - b_2\,b_{12} - b_1\,b_{22} + b_{221} \\
\alpha_1^3\alpha_2 + \beta_1^3\beta_2 + \gamma_1^3\gamma_2 + \delta_1^3\delta_2 &= b_1^3 b_2 - b_1^2 b_{12} - 2\,b_1\,b_2\,b_{11} + b_1\,b_{112} + b_2\,b_{111} + b_{11}\,b_{12} - b_{1112} \\
\alpha_1\,\alpha_2^3 + \beta_1\,\beta_2^3 + \gamma_1\,\gamma_2^3 + \delta_1\,\delta_2^3 &= b_2^3 b_1 - b_2^2 b_{12} - 2\,b_1\,b_2\,b_{22} + b_2\,b_{221} + b_1\,b_{222} + b_{22}\,b_{12} - b_{2221} \\
3\,[\alpha_1^2\alpha_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2 + \gamma_1^2\gamma_2^2 + \delta_1^2\delta_2^2] &= 3\,b_1^2 b_2^2 - 4b_1 b_2 b_{12} - 2b_1^2 b_{22} - 2b_2^2 b_{11} + 2b_1 b_{221} + 2b_2 b_{112} + b_{12}^2 + 2b_{11} b_{22} - 2b_{1122},
\end{aligned}$$

so erhält man die 6 Bedingungsgleichungen.

§ 4. Allgemeine Methode für die Zerlegung einer ganzen homogenen Funktion 5ter Ordnung von 3 Veränderlichen in 5 lineare Faktoren.

Soll die Funktion:

$$x_0^5 + (b_1 x_1 + b_2 x_2)\,x_0^4 + (b_{11} x_1^2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{22} x_2^2)\,x_0^3 + (b_{111} x_1^3 + b_{112} x_1^2 x_2 + b_{221} x_1 x_2^2 + b_{222} x_2^3)\,x_0^2 + (b_{1111} x_1^4 + b_{1112} x_1^3 x_2 + b_{1122} x_1^2 x_2^2 + b_{2221} x_1 x_2^3 + b_{2222} x_2^4)\,x_0 + b_{11111} x_1^5 + b_{11112} x_1^4 x_2 + b_{11122} x_1^3 x_2^2 + b_{22211} x_1^2 x_2^3 + b_{22221} x_1 x_2^4 + b_{22222} x_2^5$$

gleich dem Produkte:

$$(x_0+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\,(x_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2)\,(x_0+\gamma_1 x_1+\gamma_2 x_2)\,(x_0+\delta_1 x_1+\delta_2 x_2)\,(x_0+\varepsilon_1 x_1+\varepsilon_2 x_2)$$

sein, so müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$\mathrm{I.}\left\{\begin{array}{ll} \alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1+\varepsilon_1=b_1 & \alpha_2+\beta_2+\gamma_2+\delta_2+\varepsilon_2=b_2 \\ \alpha_1\beta_1+\alpha_1\gamma_1+\cdots & \alpha_2\beta_2+\alpha_2\gamma_2+\cdots \\ \vdots & \vdots \end{array}\right.$$

Hieraus erhält man durch dasselbe Verfahren, wie für $n=2, 3, 4$ folgende Gleichungen:

II.

$$-b_{11}\alpha_1^3\alpha_2^2+b_{12}\alpha_1^4\alpha_2-b_{22}\alpha_1^5+3b_{111}\alpha_1^2\alpha_2^2-2b_{112}\alpha_1^3\alpha_2+b_{221}\alpha_1^4-6b_{1111}\alpha_1\alpha_2^2+3b_{1112}\alpha_1^2\alpha_2-b_{1122}\alpha_1^3+10b_{11111}\alpha_2^2-4b_{11112}\alpha_1\alpha_2+b_{11122}\alpha_1^2=$$
$$-b_{11}\alpha_1^2\alpha_2^3+b_{12}\alpha_1^3\alpha_2^2-b_{22}\alpha_1^4\alpha_2+2b_{111}\alpha_1\alpha_2^3-b_{112}\alpha_1^2\alpha_2^2+b_{222}\alpha_1^4-2b_{1111}\alpha_2^3-b_{2221}\alpha_1^3+b_{1122}\alpha_1^2\alpha_2+2b_{11112}\alpha_2^2-2b_{11122}\alpha_1\alpha_2+b_{22211}\alpha_1^2=0$$
$$-b_{11}\alpha_1\alpha_2^4+b_{12}\alpha_1^2\alpha_2^3-b_{22}\alpha_1^3\alpha_2^2+b_{111}\alpha_2^4-b_{221}\alpha_1^2\alpha_2^2+2b_{222}\alpha_1^3\alpha_2-b_{1112}\alpha_2^3+b_{1122}\alpha_1\alpha_2^2-2b_{2222}\alpha_1^3+b_{11122}\alpha_2^2-2b_{22211}\alpha_1\alpha_2+2b_{22221}\alpha_1^2=0$$
$$-b_{11}\alpha_2^5+b_{12}\alpha_1\alpha_2^4-b_{22}\alpha_1^2\alpha_2^3+b_{112}\alpha_2^4-2b_{221}\alpha_1\alpha_2^3+3b_{222}\alpha_1^2\alpha_2^2+3b_{2221}\alpha_1\alpha_2^2-b_{1122}\alpha_2^3-6b_{2222}\alpha^2\alpha_2+b_{22211}\alpha_2^2-4b_{22221}\alpha_1\alpha_2+10b_{22222}\alpha_2^3=$$
$$-b_{111}\alpha_1^2\alpha_2^3+b_{112}\alpha_1^3\alpha_2^2-b_{221}\alpha_1^4\alpha_2+b_{222}\alpha_1^5+4b_{1111}\alpha_1\alpha_2^3-3b_{1112}\alpha_1^2\alpha_2^2+2b_{1122}\alpha_1^3\alpha_2-b_{2221}\alpha_1^4-10b_{11111}\alpha_2^3+6b_{11112}\alpha_1\alpha_2^2-3b_{11122}\alpha_1^2\alpha_2+b_{22211}\alpha_1^3=$$
$$-b_{111}\alpha_1\alpha_2^4+b_{112}\alpha_1^2\alpha_2^3-b_{221}\alpha_1^3\alpha_2^2+b_{222}\alpha_1^4\alpha_2+2b_{1111}\alpha_2^4-b_{1112}\alpha_1\alpha_2^3+b_{2221}\alpha_1^3\alpha_2-2b_{2222}\alpha_1^4-2b_{11112}\alpha_2^3+3b_{11122}\alpha_1\alpha_2^2-3b_{22211}\alpha_1^2\alpha_2+2b_{22221}\alpha_1^3=$$
$$-b_{111}\alpha_2^5+b_{112}\alpha_1\alpha_2^4-b_{221}\alpha_1^2\alpha_2^3+b_{222}\alpha_1^3\alpha_2^2+b_{1112}\alpha_2^4-2b_{1122}\alpha_1\alpha_2^3+3b_{2221}\alpha_1^2\alpha_2^2-4b_{2222}\alpha_1^3\alpha_2-b_{11122}\alpha_2^3+3b_{22211}\alpha_1\alpha_2^2-6b_{22221}\alpha_1^2\alpha_2+10b_{22222}\alpha_1^3=$$
$$-b_{1111}\alpha_1\alpha_2^4+b_{1112}\alpha_1^2\alpha_2^3-b_{1122}\alpha_1^3\alpha_2^2+b_{2221}\alpha_1^4\alpha_2-b_{2222}\alpha_1^4+5b_{11111}\alpha_2^4-4b_{11112}\alpha_1\alpha_2^3+3b_{11122}\alpha_1^2\alpha_2^2-2b_{22211}\alpha_1^3\alpha_2-b_{22221}\alpha_1^4=0$$
$$-b_{1111}\alpha_2^5+b_{1112}\alpha_1\alpha_2^4-b_{1122}\alpha_1^2\alpha_2^3+b_{2221}\alpha_1^3\alpha_2^2-b_{2222}\alpha_1^4\alpha_2+b_{11112}\alpha_2^4-2b_{11122}\alpha_1\alpha_2^3+3b_{22211}\alpha_1^2\alpha_2^2-4b_{22221}\alpha_1^3\alpha_2+5b_{22222}\alpha_1^4=0$$
$$-b_{11111}\alpha_2^5+b_{11112}\alpha_2^4\alpha_1-b_{11122}\alpha_2^3\alpha_1^2+b_{22211}\alpha_2^2\alpha_1^3-b_{22221}\alpha_2\alpha_1^4+b_{22222}\alpha_1^5=0.$$

Addiert man zu jeder dieser 10 Gleichungen die entsprechenden und bedenkt, dass aus I folgt:

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2+\delta_1^2+\varepsilon_1^2=b_1^2-2b_{11}$$
$$\alpha_1^3+\beta_1^3+\gamma_1^3+\delta_1^3+\varepsilon_1^3=b_1^3-3b_1b_{11}+3b_{111}$$
$$\alpha_1^4+\beta_1^4+\gamma_1^4+\delta_1^4+\varepsilon_1^4=b_1^4-4b_1^2b_{11}+4b_1b_{111}-4b_{1111}+2b_{11}^2$$
$$\alpha_1^5+\beta_1^5+\gamma_1^5+\delta_1^5+\varepsilon_1^5=b_1^5-5b_1^3b_{11}+5b_1^2b_{111}-5(b_{1111}-b_{11}^2)\,b_1+5(b_{11111}-b_{11}b_{111})$$

$$\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2+\delta_2^2+\varepsilon_2^2=b_2^2-2b_{22}$$
$$\alpha_2^3+\beta_2^3+\gamma_2^3+\delta_2^3+\varepsilon_2^3=b_2^3-3b_2b_{22}+3b_{222}$$
$$\alpha_2^4+\beta_2^4+\gamma_2^4+\delta_2^4+\varepsilon_2^4=b_2^4-4b_2^2b_{22}+4b_2b_{222}-4b_{2222}+2b_{22}^2$$
$$\alpha_2^5+\beta_2^5+\gamma_2^5+\delta_2^5+\varepsilon_2^5=b_2^5-5b_2^3b_{22}+5b_2^2b_{222}-5(b_{2222}-b_{22}^2)\,b_2+5(b_{22222}-b_{22}b_{222})$$

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2+\delta_1\delta_2+\varepsilon_1\varepsilon_2=b_1b_2-b_{12}$$
$$\alpha_1^2\alpha_2+\beta_1^2\beta_2+\gamma_1^2\gamma_2+\delta_1^2\delta_2+\varepsilon_1^2\varepsilon_2=b_1^2b_2-b_1b_{12}-b_2b_{11}+b_{112}$$
$$\alpha_1\alpha_2^2+\beta_1\beta_2^2+\gamma_1\gamma_2^2+\delta_1\delta_2^2+\varepsilon_1\varepsilon_2^2=b_2^2b_1-b_2b_{12}-b_1b_{22}+b_{221}$$
$$\alpha_1^3\alpha_2+\beta_1^3\beta_2+\gamma_1^3\gamma_2+\delta_1^3\delta_2+\varepsilon_1^3\varepsilon_2=b_1^3b_2-b_1^2b_{12}-2b_1b_2b_{11}+b_1b_{112}+b_{11}b_{12}+b_{111}b_2-b_{1112}$$
$$\alpha_1\alpha_2^3+\beta_1\beta_2^3+\gamma_1\gamma_2^3+\delta_1\delta_2^3+\varepsilon_1\varepsilon_2^3=b_2^3b_1-b_2^2b_{12}-2b_1b_2b_{22}+b_2b_{221}+b_{22}b_{12}+b_{222}b_1-b_{2221}$$
$$3(\alpha_1^2\alpha_2^2+\beta_1^2\beta_2^2+\gamma_1^2\gamma_2^2+\delta_1^2\delta_2^2+\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2)=3b_1^2b_2^2-2b_1^2b_{22}-2b_2^2b_{11}-4b_1b_2b_{12}+2b_1b_{221}+2b_2b_{112}+b_{12}^2+2b_{11}b_{22}-2b_{1122}$$
$$\alpha_1^4\alpha_2+\beta_1^4\beta_2+\gamma_1^4\gamma_2+\delta_1^4\delta_2+\varepsilon_1^4\varepsilon_2=b_1^4b_2-b_1^3b_{12}-3b_1^2b_2b_{11}+b_1^2b_{112}+2b_1b_{11}b_{12}+2b_1b_2b_{111}-b_1b_{1112}+b_{11}^2b_2-b_{11}b_{112}-b_{111}b_{12}-b_{1111}b_2+b_{11\ldots}$$
$$\alpha_1\alpha_2^4+\beta_1\beta_2^4+\gamma_1\gamma_2^4+\delta_1\delta_2^4+\varepsilon_1\varepsilon_2^4=b_2^4b_1-b_2^3b_{12}-3b_2^2b_1b_{22}+b_2^2b_{221}+2b_2b_{22}b_{12}+2b_1b_2b_{222}-b_2b_{2221}+b_{22}^2b_1-b_{22}b_{221}-b_{222}b_{12}-b_{2222}b_1+b_{22\ldots}$$

$$2(\alpha_1^3\alpha_2^2+\beta_1^3\beta_2^2+\gamma_1^3\gamma_2^2+\delta_1^3\delta_2^2+\varepsilon_1^3\varepsilon_2^2)=\left\{\begin{array}{l}2b_1^3b_2^2-b_1^3b_{22}-3b_1^2b_2b_{12}-3b_1b_2^2b_{11}+b_1^2b_{221}+2b_1b_2b_{112}+b_2^2b_{111}+b_1b_{12}^2\\+2b_1b_{11}b_{22}+2b_2b_{11}b_{12}-b_1b_{1122}-b_2b_{1112}-b_{11}b_{221}-b_{22}b_{111}-b_{12}b_{112}+b_{11122}\end{array}\right.$$

$$2(\alpha_1^2\alpha_2^3+\beta_1^2\beta_2^3+\gamma_1^2\gamma_2^3+\delta_1^2\delta_2^3+\varepsilon_1^2\varepsilon_2^3)=\left\{\begin{array}{l}2b_2^3b_1^2-b_2^3b_{11}-3b_2^2b_1b_{12}-3b_2b_1^2b_{22}+b_2^2b_{112}+2b_1b_2b_{221}+b_1^2b_{222}+b_2b_{12}^2\\+2b_2b_{22}b_{11}+2b_1b_{22}b_{12}-b_2b_{1122}-b_1b_{2221}-b_{22}b_{112}-b_{11}b_{222}-b_{12}b_{221}+b_{22211},\end{array}\right.$$

so erhält man die 10 Bedingungsgleichungen.

§ 5. Zerlegung einer ganzen homogenen Funktion von mehr als 3 Veränderlichen in lineare Faktoren.

Für das Zerfallen einer Funktion von mehr als 3 Veränderlichen in lineare Faktoren lässt sich die allgemeine Methode anwenden. Für die 2te und 3te Ordnung reicht man mit einer Vertauschung der Indizes aus.

Für die ganze homogene Funktion 4ter Ordnung von 4 Veränderlichen

$$x_0^4+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)\,x_0^3+\cdots$$

bedarf man ausserdem noch besonders folgender Hülfsformeln:

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\beta_1\beta_2\beta_3+\gamma_1\gamma_2\gamma_3+\delta_1\delta_2\delta_3)=2b_1b_2b_3-b_1b_{23}-b_2b_{31}-b_3b_{12}+b_{123}$$
$$(\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3+\beta_1^2\beta_2\beta_3+\gamma_1^2\gamma_2\gamma_3+\delta_1^2\delta_2\delta_3)=3b_1^2b_2b_3-b_1^2b_{23}-2b_1b_2b_{31}-2b_2b_3b_{11}-2b_3b_1b_{12}+b_{11}b_{23}+b_{12}b_{31}+b_1b_{123}+b_2b_{113}+b_3b_{112}-b_{1123}.$$

Für die ganze homogene Funktion 5ter Ordnung von 5 Veränderlichen bedarf man ausserdem noch folgender Relationen:

$$4(\alpha_1^3\alpha_2\alpha_3+\beta_1^3\beta_2\beta_3+\gamma_1^3\gamma_2\gamma_3+\delta_1^3\delta_2\delta_3+\varepsilon_1^3\varepsilon_2\varepsilon_3)$$
$$=\left\{\begin{array}{l}4b_1^3b_2b_3-b_1^3b_{23}-3b_1^2b_2b_{31}-3b_1^2b_3b_{12}+b_1^2b_{123}-6b_1b_2b_3b_{11}+2b_1b_2b_{113}+2b_1b_3b_{112}+2b_2b_3b_{111}+2b_1b_{11}b_{23}\\+2b_2b_{11}b_{31}+2b_3b_{11}b_{12}+2b_1b_2b_{31}-b_1b_{1123}-b_2b_{1113}-b_3b_{1112}-b_{11}b_{123}-b_{12}b_{113}-b_{31}b_{112}-b_{23}b_{111}+b_{11123}\end{array}\right.$$

$$6(\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3+\beta_1^2\beta_2^2\beta_3+\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3+\delta_1^2\delta_2^2\delta_3+\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\varepsilon_3)$$
$$=\left\{\begin{array}{l}6b_1^2b_2^2b_3-3b_1^2b_2b_{23}-3b_1^2b_3b_{22}-3b_2^2b_1b_{31}-3b_2^2b_3b_{11}+b_1^2b_{223}+b_2^2b_{113}-6b_1b_2b_3b_{12}+2b_1b_2b_{123}+2b_2b_3b_{112}+2b_3b_1b_{221}+2b_1b_{22}b_{31}\\+2b_1b_{12}b_{23}+2b_2b_{11}b_{23}+2b_2b_{12}b_{31}+2b_3b_{11}b_{22}-b_1b_{2231}-b_2b_{1123}-b_3b_{1122}+b_3b_{12}^2-b_{11}b_{223}-b_{22}b_{113}-b_{12}b_{123}-b_{23}b_{112}-b_{31}b_{221}-b_{11233}\end{array}\right.$$

$$6(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4+\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4+\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)=$$
$$b_1b_2b_3b_4-2b_1b_2b_{34}-2b_1b_3b_{24}-2b_1b_4b_{23}-2b_2b_4b_{13}-2b_3b_4b_{12}+b_{12}b_{34}+b_{13}b_{24}+b_{14}b_{23}+b_1b_{234}+b_2b_{134}+b_3b_{124}+b_4b_{123}-b_{1234}$$

$$60(\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\beta_1^2\beta_2\beta_3\beta_4+\gamma_1^2\gamma_2\gamma_3\gamma_4+\delta_1^2\delta_2\delta_3\delta_4+\varepsilon_1^2\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)$$
$$=\left\{\begin{array}{l}60b_1^2b_2b_3b_4-15b_1^2b_2b_{34}+15b_1^2b_3b_{24}-15b_1^2b_4b_{23}-30b_2b_3b_4b_{11}-30b_1b_3b_4b_{12}-30b_1b_2b_4b_{13}-30b_1b_2b_3b_{14}+5b_1^2b_{234}\\+10b_1b_2b_{134}+10b_1b_3b_{124}+10b_1b_4b_{123}+10b_2b_3b_{114}+10b_2b_4b_{113}+10b_3b_4b_{112}+10b_1b_{12}b_{34}+10b_1b_{13}b_{24}+10b_1b_{14}b_{23}\\+10b_2b_{11}b_{34}+10b_2b_{13}b_{14}+10b_3b_{11}b_{24}+10b_3b_{12}b_{14}+10b_4b_{11}b_{23}+10b_4b_{12}b_{13}-5b_1b_{1234}-5b_2b_{1134}-5b_3b_{1124}\\-5b_4b_{1123}-5b_{11}b_{234}-5b_{12}b_{134}-5b_{13}b_{124}-5b_{14}b_{123}-5b_{23}b_{114}-5b_{24}b_{113}-5b_{34}b_{112}+5b_{11234}.\end{array}\right.$$

Die Bedingung, dass die 4 resp. 5 linearen Faktoren für ein gemeinsames Wertsystem verschwinden, sowie diejenigen, unter denen 2 oder mehr als 2 der linearen Faktoren gleich sind, lassen sich in analoger Weise aufstellen, wie bei der 3ten Ordnung.

THESEN.

I.

Die wichtigste Aufgabe der Philosophie besteht in einer möglichst einfachen und vollständigen Beschreibung der Wirklichkeit.

II.

In der Variationsrechnung ist es für den Fall einer ebenen Kurve zweckmässig, beide Koordinaten als Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen zu betrachten.

III.

Das Additionstheorem ist der beste Ausgangspunkt für die Theorie der elliptischen Funktionen.

IV.

Es ist wünschenswert, die Invariantentheorie in die Universitätsvorlesungen aufzunehmen.

VITA.

Natus sum Carolus Weltzien Suerini in urbe Megalopolis die XV mensis Augusti a. h. s. 52 patre Julio, matre Luisa e gente Hennemann. Fidei addictus sum evangelicae. Primis literarum elementis imbutus gymnasium Fridericianum adii; ad studia mathematica et physica me incitabant Ill. Bastian, Brauns, Hartwig. Maturitatis testimonio instructus anno h. s. 71 civibus Universitatis Fridericae Guilelmae Berolinensis adscriptus horum in numero per decem semestria commoratus sum. Exercitationibus seminarii mathematici, quas moderantur Ill. Kummer et Weierstrass, interfui per sex semestria. Disserentes audivi viros Ill. Aronhold, Bauer, Christoffel, Dove, Foerster, Helmholtz, Hertzer, Kummer, Kronecker, Liebe, Paalzow, Peters, Pochhammer, Poggendorff, Quincke, Sell, Tietjen, Weierstrass, Zeller.

Cum anno h. s. 75 examen, quod dicitur pro facultate docendi, superassem, in schola, quae dicitur Friedrichs-Werdersche Gewerbeschule, auspiciis Ill. Gallenkamp directoris praeceptoris munere fungor.

Omnibus, quorum scholis interfui, viris clarissimis, imprimis Ill. Christoffel, Kummer, Kronecker, Weierstrass gratias ago maximas semperque habebo.