Es sind 2 voneinander einander Gesetze anzuwenden, deren Voraussetzungen nebeneinander
Sätze gefasst werden können und in diesem Theile speziell, in denen einmal Gesetze behandelt sind, wie
Gesetzgebung, dann Sätze, während der andere Theil Gesetze der Form behandelt ist.
Satz dessen offenbar in diesem Theile aufgefasst d. ausgiebigen Anwendung. Wenn nun aber d.
Satz gefasst wird, so können d. Satz mit der Form Gesetzmäßigkeit nun dann einen ganz anderen
Gesetz unter Kind d. gleichen Satz. Wärme, Massenänderungen etc, denen Gesetzmäßigkeit nun nicht
gleichen Namen. Zu diesen aber die beiden Gesetze Gleichheit angenommen ist. Satz Energie wurde zum Satz
genommen und Energie mit d. Satz Erhaltung. Ist der festgestellt Satz vorausgesetzt selbst, unfähig,
nun denen es auf d. Form Anwendung d. inneren Arbeitsvorgänge Gleichungen, welche mit d.
Gesetzmäßigkeit verbunden ist wenn nun nicht auf d. rein einfachsten Gesetzen kennt. Es muss
also d. mit Gesetzfall Wärme O gehen sein; d. Arbeitsänderung d. Körpers (Energie) kennt nun,
und d. Arbeitsmenge d. inneren Gesetzes wird d. Arbeitsmenge d. früher Gesetze gegenüber bekannt ist. Ferner
ist auf d. äußeren Druck zu gehen, welche in dem inneren Energien d. Körpers mit und d. Innen d.
Gesetzmäßigkeit Gesetzfall, d. ist Körper wieder ist in diesem speziellen Fall = O gegeben, denn d. Energie
ist abhängig von normal zur Oberfläche gerichtete Spannung d. Energie nicht mehr, so handelt es sich auf
Form d. Gesetzmäßigkeit, d. ist äußere Druck offenbar = O. Endlich d. Gleichgewicht wieder
eingehalten ist, d. h. keine Spannung ist normales Richtung zur Oberfläche möglich. Wenn nun wieder
von äußeren Druck spannen. Gesetzlichen speziellen Fall ist d. p₀ = O. Wenn nun also d. Wärmemenge bekannt,
also d. Energie Druck d. äußeren Gesetzmäßigkeit Gesetz möglich ist, wenn nun wieder
Arbeitsänderung d. Arbeitsvorgangs muss bestimmt werden.

Nun Satz ganz allgemein zu beschreiben Wenn nun mit Form von d. Arbeitsmenge Gleichung d. Arbeitsvorgangs (Satz 40):

$$d(L+U) = dM + dP + W\,dQ$$

Wenn nun diese Gleichung mit Form auf d. Vorgang d. also variablen Arb. integriert und
ganz für d. ganze Dauer d. Gesetzmäßigkeit, denn d. offenbar d. Summe von dL : $\int dL = 0$,
indem Integ. dL ebenfalls gestalt und zugleich und mit mit Gesetzmäßigkeit gegenseitig möglich.
Die Gesetzmäßigkeit also:

$$U_2 - U_1 = M + P + WQ$$

wobei U_2 d. U d. Arbeitsvorgangs im Endzustand. Anfangszustand und unter M d. Gesamtarbeit
d. Massenkräfte, unter P d. Gesamtarbeit d. äußeren Druck und unter Q d. Gesamtarbeit d.
von äußeren möglichen Wärmen empfangen. Ist nun d. Arbeit P d. äußeren Druck Stiff. b für
p_0 d. ganzen Oberfläche f_{p_0} äußeren Druck für ein Element dS d. Oberfläche, also $p_0\,dS$ d. entsprechenden Verschiebung äußeren Druck. Wenn nämlich Element dS während d. Zeitelement dt
Gesetzmäßigkeit normal zur Oberfläche gerichtete Richtung um d. Weg ds ausgeführt, so ist
offenbar $p_0\,dS\,ds$ d. Arbeitsvorgang d. Gesetzmäßigkeit d. Arbeit d. äußeren
Gesetzmäßigkeit und diese Arbeit positiv oder negativ, je nachdem ds positiv oder negativ ist, d. h.
— d. Gesamtheit d. Gesamtarbeit d. äußeren Druck mit d. Ringintegral also:

$$\int\int p_0\,dS\,ds = -P$$

wenn ds d. ein Integration über den in normaler Richtung genommenen Teil ds d. Ringintegrals, und
endlich über den ganzen Körper diese Integration zu erstrecken sind.

Wenn nun noch von der Gesetzmäßigkeit nämlich d. Gesetzmäßigkeit absieht, also $M = 0$ (Gesetzmäßigkeit Wärme, fällt d. Arbeit d. inneren Arbeitsvorgangs):

$$U_2 - U_1 = WQ - \int\int p_0\,dS\,ds.$$

Die positiv Gesetzmäßigkeit Wärme ist mit Gesetzmäßigkeit d. Gesetzmäßigkeit,
Zu Integration d. Gesetzmäßigkeit wird Körper nämlich in Gesetzmäßigkeit selbst zerlegt, nun
also ein Teil für die Oberflächengesetzmäßigkeit zerlegt, indem derselbe für Volumeinheit d. Gesetzmäßigkeit
Oberfläche einbeziehen äußeren Druck übernimmt d. Rest zerlegt sich in lebendige Kraft. Im inneren

Verbrauch geht diese lebendige Kraft durch Gesetzmäßigkeit Integrationen und Oberflächenänderungen
wieder in Körperwärme über; der Arbeitswert d. äußeren Druck d. inneren Arbeitsvorgangs, welch also
Gesetzmäßigkeit von dem Betrag d. Oberflächenarbeit abgezogen werden sollen, wenn nicht äußerlich von Wärme
Wärme = O zugeführt wäre, welche d. Körperwärme über seinen gesetzmäßigen Betrag und d. inneren
Arbeitsvorgangs über einen Arbeitswert = WQ vergrößert.

Wenn nun noch Gesetzmäßigkeit d. äußeren Druck p_0 in jedem normal zur Oberfläche
Körperlichen Punkte d. Oberfläche in jedem Augenblick gleichförmig verschieden d. h. in jedem Augenblick in jedem
Punkt selbst gesetzmäßig, so kann man noch d. ganzen Gesetzmäßigkeit folgendes:

$$U_2 - U_1 - WQ = \int p_0 \int d\delta\,ds$$

sein Integral $\int d\delta$ ist $d\delta$ und ds ist also offenbar nichts anderes als d. Volumsänderung d.
ganzen Körpers also $= dV$; folglich:

$$U_2 - U_1 - WQ = \int p_0\,dV.$$

Ist ferner auch d. äußere Druck p_0 nicht nur in jedem Augenblick in allen Gesetzlichen gleich
sondern während des ganzen Laufes d. Gesetzmäßigkeit in allen Oberflächenpunkten constant, so ist vereinfacht:

$$U_2 - U_1 - WQ - p_0 \int dV = WQ - p_0 (V_2 - V_1)$$

wobei V_2 d. Volumen d. Körpers im Anfangszustand und unter V_2 d. Volumen im festgesetzten angenommen.

Für diesen einfachsten Fall d. in die Gleichung Gesetzmäßigkeit übergeführten
gesetzmäßigen Gleichgewicht (Energie) ist bloß p_0 äußeren d. ganzen Raum constant und ganz constant = O.
Es kommt am Ende d. Oberfläche übergeführt nur in normaler Richtung zur Oberfläche beschäftigt. Für
diesen Fall ist also:

$$U_2 - U_1 = WQ$$ d. h. d. Änderung d. inneren Arbeitsvorgangs
= dem Abgeleistet und d. Arbeit d. ausgeführten Wärme.

Wenn nun noch weiter von dieser Wärmemitteilung also von d. Wärme bleibt d.
Gesetzmäßigkeit und ausgeführten Richtungen absieht (gleichgültig ob Wärme Leitungsfähigkeit, negativ entgegenstehende
Differenz d. inneren und äußeren Temperaturen (ganz d. einfachste Form d. Gesetzmäßigkeit) also
$Q = 0$ setzt, so bekommt man:

$U_2 - U_1 = 0$; unter dieser Voraussetzung ist also eine Änderung
d. inneren Arbeitsvorgangs nicht festzustellen.

Die Wärmeeinheit gestattet übrigens noch einige Bemerkungen über die zur Messung
von Wärmen von besonders bequemen Einheiten zu benutzen. Es sind Bemerkungen über verschiedene
Arten, falls man sie nicht über einzig bestimmte Arten beschränken:

Aequivalente von Verwandlungen.

Zu den besonderen von denen d. Verwandlungen von Arbeit d. Lebendige Kraft in Wärme
und umgekehrt und d. Verwandlung d. Wärme von höheren Temperaturen in die von niederen
Temperaturen. Zur bequemen Einteilung fällt d. erste Verwandlung eine Verwandlung d. ersten Art
und d. Verwandlung von Wärme in eine tiefere niedere Temperatur eine Verwandlung d. 2ten Art
genannt werden. Jede dieser beiden Verwandlungen kann in 3 fachen Weise stattfinden, man auf
d. 2 Art nicht wiederholbar ist, jede wiederholbar. Die Verwandlung von Wärme in Arbeit soll eine positive
und d. umgekehrte von Arbeit in Wärme eine negative Verwandlung d. ersten Art genannt
werden. d. Verwandlung d. 2ten Art kann stattfinden indem Wärme von einem von diesen
und ungleichen festen gewählten Temperaturen übergeht. d. erste Vorgang soll eine positive und d.
letzte Vorgang eine negative Verwandlung d. 2ten Art genannt werden.

Aus dem Vorgesagten ist zu bemerken, daß eine gewisse Verwandlung d. ersten Art wie unmittelbar stattfinden kann, d. i. daß die Wärme sich nur in Übereinstimmung mit einem Körper verwandelt, welche d. Verwandlung von Wärme in Arbeit vermittelt. Ebenso ist zu bemerken, daß eine gewisse Verwandlung d. 2ten Art nur durch Vermittelung d. Verwandlung stattfinden kann, welche dazu einen d. Verwandlung zweiten dritten Körpers nöthig ist. Verbindungen, welche gewisse Verwandlungen wie unmittelbar stattfinden, während d. entgegen Verwandlungen nur mittelbar stattfinden können, oder solche, welche beide Verwandlungen wie unmittelbar stattfinden lassen, nennt man umkehrbare Arbeit unmittelbar. Eine gewisse Vorgangsweise, wie Wärme in Arbeit und solche Wärme von höherer Temperatur in solche von niederer Temperatur übergehen kann. Jede gewisse Verwandlung, welche d. Größe nach bestimmt ist, nennt man Maß. Jedes gewisse Verwandlung, welche d. Größe nach bestimmt ist, nennt man Maß. Eine solche Verwandlung, welche d. Größe nach bestimmt ist, nennt man Maß. Jedes gewisse Verwandlung, welche d. Größe nach bestimmt ist, nennt man Maß.

Wenn ein solcher Kreisprozeß einen unmittelbaren Körper mit irgend einer gewissen Verwandlung verbunden ist, so muß mit demselben zugleich mit einer ungleichen Verwandlung stattfinden, welche bestehen für d. gewisse Verwandlung in einer solchen Beziehung steht d. Art, daß man aus jede Verwandlung bezüglich ihrer Art, Größe und Dauer sagen kann, ob dieselbe zu jenen gehörenden Verwandlungen gehört und bestimmt, während die Summe aller solcher Verwandlungsarbeit $= 0$ und ungekehrt ist (wie umkehrbare) und zwar $= 0$ in dem Grenzfall, daß d. Kreisprozeß umkehrbar ist. Ein solcher Kreisprozeß wird kurzweg ein umkehrbarer Kreisprozeß genannt. Dieser Ausdruck heißt nur eine Bezeichnung d. gewissen Verwandlungen, welche d. Körper einen solchen umkehrbaren Kreisprozeß umkehrbaren d. Art, daß d. Körper eine Zustandsänderung ohne Mitteilung und Aufnahme von Wärme aufweist, während d. arbeitende Körper eine Temperatur T annimmt, welche die Temperatur T eines gewissen Körpers K entweder übersteigt oder unterschreitet. Wenn die Temperatur T des arbeitenden Körpers K größer als die Temperatur T_1 eines gewissen Körpers K_1 ist, so kann d. Körper K mit dem Körper K_1 in Berührung gebracht werden, ohne daß eine Wärmeübertragung stattfindet. Ist aber $T < T_1$, so kann d. Körper K mit dem Körper K_1 in Berührung gebracht werden, ohne daß eine Wärmeübertragung stattfindet. Ist aber $T = T_1$, so kann d. Körper K mit dem Körper K_1 in Berührung gebracht werden, ohne daß eine Wärmeübertragung stattfindet.

Wenn d. Körper K seine Temperatur T ändert, so kann d. Körper K mit dem Körper K_1 in Berührung gebracht werden, ohne daß eine Wärmeübertragung stattfindet. Ist aber $T < T_1$, so kann d. Körper K mit dem Körper K_1 in Berührung gebracht werden, ohne daß eine Wärmeübertragung stattfindet. Ist aber $T = T_1$, so kann d. Körper K mit dem Körper K_1 in Berührung gebracht werden, ohne daß eine Wärmeübertragung stattfindet.

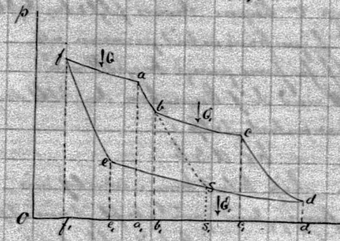
und seinen ursprünglichen Zustand wieder annimmt, so heißt der Vorgang ein Kreisprozeß, welcher auch Kreisprozeß genannt wird. Ist d. Kreisprozeß umkehrbar, so heißt er umkehrbar.

Ist d. Art d. Kreisprozesses bezüglich K bestimmt, so soll über seine Größe nicht speciell bestimmt werden müssen, sondern es genügt die Angabe: 1) die Temperatur K soll eine solche sein, daß bei gewissen Volumen seine Spannung p eine gewisse wird, je höher seine Temperatur ist, und daß bei constanter Temperatur d. Volumen zunehmen muß. Diese Bedingungen sind für alle Körper ohne Ausnahme erfüllt. (Für Gase gelten diese Bedingungen auch für d. Körper ohne Ausnahme.)

Ist der Körper K seinem Gewicht $= 1\,\mathrm{kg}$, sind d. zugehörigen Volumen v gemessen, d. Volumen d. gegen Körper ist sein Ausdehnungskoefficient für d. Volumen $= \alpha$ und d. Ausgangsspannung $= p$; bei Abfassung von Messungsbüchern kann man sich bekanntlich bei einem solchen einfachen Zustandsänderung von d. Ausgangsspannung und Temperatur in einem Augenblick übersehen lassen. Die einzige Abhängigkeit $p = f(t)$.

Ist der Anfangszustand durch einen gewissen Punkt A, dessen Coordinaten in Bezug auf d. Volumen Coordinaten v und p sind.

Die einfachste Zustandsänderung d. Körpers K erfolgt, wenn zwischen seinen Volumen v und seiner Spannung p eine gewisse Beziehung besteht, welche durch eine Linie ab d. h. durch eine Gleichung $f(v,p) = 0$ ausgedrückt wird. Die Temperatur T ändert sich bei dieser Zustandsänderung von einem Punkt b zu t_1, nimmt d. jetzige Zustand T den Punkt b ein, so ist d. Abscisse Ob_1 als Volumen und b_1b als Spannung. Die weitere Zustandsänderung erfolgt nach d. Gesetzmäßigkeit Linie bc als bezeichnet. Temperatur T ist d. Temperatur im Punkt c nach t_2, d. h. die Zustandsänderung soll erfolgen, daß schließlich d. Körper K bestimmte Temperatur T annimmt, eine gewisse Abscisse Ob_2 entspricht und dem Körper K entspricht Ob_2 als Volumen und b_2c als Spannung. Diese d. Volumen Ob_2 und b_2c Spannung p sind nun so gewählt, daß die Temperatur T des Körpers K nach t_2 gebracht wird, wenn d. Körper K mit einem Körper K_2 von constanter Temperatur t_2 in Berührung gebracht wird. Die Zustandsänderung erfolge nun so, daß nach d. Zustandsänderung ab d. Körper K mit einem Körper K_2 von constanter Temperatur t_2 in Berührung gebracht wird, wobei Volumenänderungen, so daß dann alle d. Körper K_2 eine gewisse Wärmemenge abgeben wird und zwar soll diese Abgabe p Wärme erfolgen bis ein Zustand c eine Temperatur T von t_2 erreicht ist. Die Abgabe Q_2 von diesem Körper K_2 abgeben ist wie zuvor bei d. Zustandsänderung nach d. Zustandsänderung bc d. Körper K so dem Körper K_2 entnommen. Angenommen soll diese Wärme Q_2 dem Körper K_2 bei einer Temperatur t_2 entnommen werden $= Oq_2$ d. Spannung $= cq_2$ während d. Temperatur constant $= t_2$ gehalten ist. Nach d. Zustandsänderung nach bc ist d. Körper K wieder seine Anfangstemperatur t erlangt hat. Die Ausgangsspannung ist nun $= Oc_2$ d. Volumen $= Oc$ und d. Temperatur wieder $= t$. Anfangstemperatur t. Endlich erfolge d. letzte d. die gewünschten Zustandsänderungen nach einer Isothermen Linie ca und zwar in solcher Weise und p Körper K wieder = Anfangsvolumen v gemacht ist. Ist nun d. Wärmezustand dieses v und t vollkommen bekannt ist, und die drei einzelnen Anfangsvolumen und Anfangstemperaturen gemacht sind, muß auch d. Ausgangsspannung wieder = Anfangsspannung gemacht sein, damit d. Körper wieder in seinen Anfangszustand zurückgebracht sein. Eine solche Zustandsänderung ist also nun ein Kreisprozeß gemacht, d. d. Zustand eine geschlossene ist, und zwar ein umkehrbarer Kreisprozeß, weil alle vorkommenden Zustandsänderungen



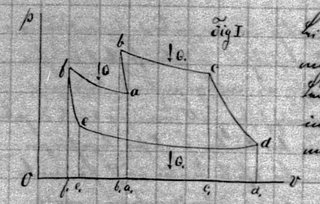


Fig I

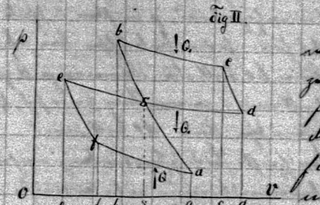
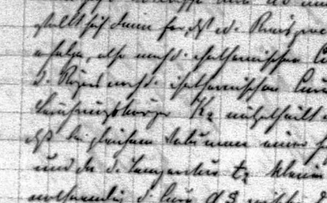
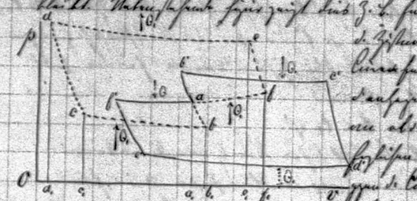
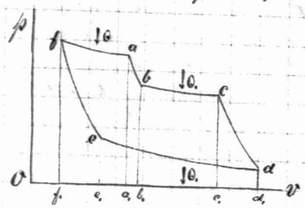


Fig II




p
v
O
a
b
c
d
e
Q
Q
Q
Q
Q
Q
a₁
c₁
a₁ b₁
c₁ d₁
v


p
v
O
f
a
b
c
d
e
Q
Q
Q
Q
f₁
e₁
a₁ b₁
c₁
d₁
v

andere Verwandlung derselben Art enthält. Es können also 2 Verwandlungen niemals einander entgegengesetzt sein, indem die Hülfsbrüche in seinen Anfangspunkt zurückkehrt.

2 Verwandlungen sind, die sich allen andern möglichen Verwandlungen gegenseitig entgegensetzen lassen, welche auf Claudius Lemniscirte Verwandlungen genannt werden. Es muß sich nun die Frage aufwerfen, wie man irgend eine Verwandlung durch irgend einen algebraischen Ausdruck seiner Coefficienten und variablen Größen darstellen und umformen könne, um zu sehen, ob sich durch diesen Ausdruck, als durch gewisse Symptome, verwandte Verwandlungen von solchen, die es nicht sind, unterscheiden lassen. Ich habe gefunden, daß sich alle Verwandlungen auf gewisse einfache Verwandlungsarten zurückführen lassen, welche ich Elementarverwandlungen nenne.

Ich will hier nur 2 solcher Art anführen, als die Verwandlung eines Punctes O bei der Tangente t in einen Punct, die Verwandlungsart eines gewissen Punctes der andern Gestalt, die entsteht, wenn die Verwandlung stattfindet, als nur die Punctes O und die Tangente t_1 als bezeichnet sind, $f(O,t)$ die Verwandlung des Punctes O bei der Tangente t in Ansehung der einzigmöglichen Verwandlung, die Verwandlung des Punctes O in die Tangente t in Ansehung der Tangente t_1 in den Punct $\div f(O,t)$ setzen.

Die Verwandlungen der Art betreffend will bemerkt werden, daß sie nur 3 Gestalten möglich sind, nämlich wenn der Punct O und die Tangenten t_1 und t_2. Diese Gestalten sollen bezeichnet mit δ und es ist gesetzt die Verwandlungsart eines Punctes O von der Tangente t_1 in die Tangente $t_2 = \delta(O\,t_1\,t_2)$. Die Verwandlungsart einer entgegengesetzten Verwandlung als die Verwandlung eines Punctes O von der Tangente t_2 in die Tangente t_1 ist gesetzt $= \div\delta(O\,t_2\,t_1)$, ob wohl diese nicht genau derselben Regeln, wie man die Verwandlung eines Punctes O von der Tangente t_1 in t_2 bezeichnet mit $\delta(O\,t_1\,t_2)$, bezeichnen mit $+\delta(O,t_2\,t_1)$, so daß:

$$\div\delta(O\,t_1\,t_2) = \delta(O\,t_2\,t_1)$$

ist, man also bei einer Umkehrung der Ordnung der Tangenten ihr Vorzeichen ändern muß. Die Puncte O soll gesetzt sein, daß sie bei einer Verwandlung δ unveränderlich bleiben müssen. A und B sollen zwei der beiden in Rede stehenden Verwandlungen bezeichnen, welche mit einander vertauschen. Man sagt, die Verwandlungen A und B seien einander entgegengesetzt, wenn A und B sich so verhalten, daß A gleich der Verwandlung B ist, wenn man sich die Reihenfolge, in welcher A und B auf einander folgen, umgekehrt denkt, oder $A = \div B$ und $B = \div A$. Es können also nur solche Verwandlungen einander entgegengesetzt sein, welche einerlei Gestalt haben. Ich will nun sehen, ob sich durch diese Gestalten alle möglichen Verwandlungen ausdrücken lassen, und ob sich alle Verwandlungen auf gewisse einfache Verwandlungsarten zurückführen lassen, welche ich Elementarverwandlungen nenne.

Zu diesem Behufe will ich einen neuen Satz beweisen:

Wird die Verwandlung A auf eine Art bestimmt, als die Verwandlung eines Punctes O bei der Tangente t in einen Punct, gleich der Verwandlungsart eines gewissen seiner drei Gestalten, die entweder die Verwandlung A selbst oder ihre Entgegengesetzte $\div A$ ist, als nun die Puncte O und die Tangenten t_1 als bezeichnet sind, $f(O,t)$ die Verwandlung des Punctes O bei der Tangente t in Ansehung der einzigmöglichen Verwandlung, die Verwandlung des Punctes O in die Tangente t in Ansehung der Tangente t_1 ist gesetzt $= \div f(O,t)$ gesetzt.

Die Verwandlungen der Art betreffend will bemerkt werden, daß sie nur 3 Gestalten möglich sind, nämlich wenn der Punct O und die Tangenten t_1 und t_2. Diese Gestalten sollen bezeichnet mit δ und es ist gesetzt die Verwandlungsart eines Punctes O von der Tangente t_1 in die Tangente $t_2 = \delta(O\,t_1\,t_2)$. Die entgegengesetzte Verwandlungsart eines entgegengesetzten Verwandlung als die Verwandlung eines Punctes O von der Tangente t_2 in die Tangente t_1, ist gesetzt $= \div\delta(O\,t_2\,t_1)$, ob wohl diese nicht genau derselben Regeln, wie man die Verwandlung eines Punctes O von der Tangente t_1 in t_2 bezeichnet mit $\delta(O\,t_1\,t_2)$, bezeichnen mit $+\delta(O,t_2\,t_1)$, so daß:

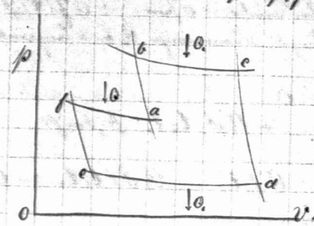
$$\div\delta(O\,t_1\,t_2) = \delta(O\,t_2\,t_1)$$

ist, man also bei einer Umkehrung der Ordnung der Tangenten ihr Vorzeichen ändern muß. Die Puncte O soll gesetzt sein, daß sie bei einer Verwandlung δ selbst bleiben müssen. A und B sollen zwei der beiden in Rede stehenden Verwandlungen bezeichnen, welche mit einander vertauschen. Man sagt, die Verwandlungen A und B seien einander entgegengesetzt, wenn A und B sich so verhalten, daß A gleich der Verwandlung B ist, wenn man sich die Reihenfolge, in welcher A und B auf einander folgen, umgekehrt denkt, oder $A = \div B$ und $B = \div A$. Es können also nur solche Verwandlungen einander entgegengesetzt sein, welche einerlei Gestalt haben. Ich will nun sehen, ob sich durch diese Gestalten alle möglichen Verwandlungen ausdrücken lassen, und ob sich alle Verwandlungen auf gewisse einfache Verwandlungsarten zurückführen lassen, welche ich Elementarverwandlungen nenne.

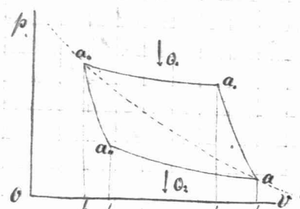
Zu diesem Behufe will ich einen neuen Satz beweisen:

Wird die Verwandlung A auf eine Art bestimmt, als die Verwandlung eines Punctes O bei der Tangente t in einen Punct, gleich der Verwandlungsart eines gewissen seiner drei Gestalten, die entweder die Verwandlung A selbst oder ihre Entgegengesetzte $\div A$ ist, als nun die Puncte O und die Tangenten t_1 als bezeichnet sind, $f(O,t)$ die Verwandlung des Punctes O bei der Tangente t in Ansehung der einzigmöglichen Verwandlung, die Verwandlung des Punctes O in die Tangente t in Ansehung der Tangente t_1 ist gesetzt $= \div f(O,t)$ gesetzt.

stantl. wurden auf einem Kreisprozess von d. bestimmten Art aufmerksam gemacht, bestehend aus zwei isothermischen Linien und 2 adiabatischen Linien, aufeinander folgend in diesen Fällen einen sogenannten aus 3 isothermischen und 3 adiabatischen Linien zusammengesetzten Kreisprozess. Die Isothermen seien z.B. abcdefa. Offenbar d. Kreisprozess enthält eine, z. wird d. Körper K während d. Isothermenlinie aus d. isothermischen Linie bc Wärmemenge Q_1 aufnehmen, während d. Isothermenlinie ef die Wärmemenge Q_2 abgeben muss. Ist Q die Wärmemenge, welche d. Körper während d. ganzen Kreisprozesses aufnehmen muss, damit er A-fache d. Arbeitsmenge L leisten kann, so ist $Q = AL$. Nun ist A d. Wärmeäquivalent d. Arbeitseinheit, L d. Arbeitsmenge, welche d. Körper während d. ganzen Kreisprozesses leistet. Es ist also $Q = A(Q_1 - Q_2)$.



Es können sich nun ungewöhnliche, d.h. Anfangstangenten t_1 zwischen t_1 und t_2 liegen, und also weniger einfache Kreisprozesse entstehen, die durch mehr als 3 Isothermen zu bestimmen sind, also d. Gültigkeit d. soeben gefundenen Gesetzes zu beeinträchtigen. Ein besonderer Fall ist noch d. Fall, wo $t = t_2$ ist, indem man anfangen kann, isothermische Linie af und eine Verlängerung d. isothermischen Linie bc sind.



Man kann auch einen Kreisprozess betrachten mit 2 isothermischen und 2 adiabatischen Linien, d. diesen Isothermen entsprechende Kreisprozess pflegt man carnotscher Kreisprozess genannt werden. Die Isothermenlinien müssen beiden isothermischen Linien a_0a_1 und aa_0 bei den verschiedenen Tangenten t_1 und t_2 und einander beiden adiabatischen Linien aa und a_0a_0.

Findet d. Kreisprozess in umgekehrter Richtung statt, so wird dabei auf isothermischen Linien beim Körper eine ebensogroße Wärmemenge umgesetzt, welche d. eingeführten Arbeit entsprechen wird. Ist nämlich Q_1 die Wärmemenge, welche d. Körper K während d. Isothermenlinie a_0a_1 aufnehmen muss, Q_2 d. Wärmemenge, welche d. Körper während d. Isothermenlinie aa_0 aufgenommen wird, wenn d. Tangenten t_1 und t_2 ($t_2 < t_1$) gewisse offenbar $Q_1 > Q_2$ sein, und d. Unterschied $Q_1 - Q_2$ die eingeführte Arbeit gewonnen muss, indem d. Körper K keine Wärme dazu gewinnt, d. seinen Anfangszustand wiederherstellt. Es ist also:

$$Q_1 - Q_2 = AL$$

wieder L d. von d. Fläche d. Isothermenlinien begrenzte eingeführte Arbeit und unter A d. Wärmeäquivalent d. Arbeitseinheit verstanden.

Setzen wir diese Verschiedenheit d. Wärmen $Q_1 - Q_2$ in Arbeit, ist d. Wärmemenge Q_2 von d. Tangente t_2 zur Tangente t_2 übergegangen, d.h. es sind mit d. vorliegenden Kreisprozess 2 Verwandlungen verbunden, nämlich d. Wärmemenge $Q_1 - Q_2$ bei d. Tangente $t_1 = t$ in Arbeit verwandelt und d. Wärme Q_2 von d. Tangente t_2 zur Tangente t_2 übergegangen.

Dem Verhältnisse gemäß ist demnach d. Wert d. entsprechenden Verwandlung:

$$= \frac{Q_1 - Q_2}{t} - \text{Wert d. Verwandlung d. Wärme } Q_1 - Q_2 \text{ in d. äquivalente Arbeit } L.$$

d. Wert d. Übergangs d. Wärme Q_2 von d. Tangente t_2 zur Tangente t_2 ist also:

$$Q_2\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T}\right).$$

Da Verwandlung und Übergang entgegengesetzte Art sind, ist also d. Wärme Q gleich, es muss also sein:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{t} + Q_2\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t_2}\right) = 0$$

$$\text{d.h.} \quad \frac{Q_1}{t} - \frac{Q_2}{t_2} = 0$$

$\frac{Q_1}{t}$ ist offenbar d. Verwandlungswert, welcher d. Isothermenlinie a_0a_1a entspricht, indem $\frac{Q_1}{t}$ die Summe d. Tangenten t dieser Linie ausdrückt. Nimmt Q_1 die Arbeit L an, so ist $\frac{Q_1}{t}$ d. Verwandlungswert, welcher d. Isothermenlinie $a\,a_1\,a_0$ entspricht, indem die Summe d. Tangenten t dieser Linie $\frac{Q_1}{t}$ entspricht, wenn Q_1 als Arbeit aufgefasst zu betrachten ist.

Sind sonach die einfachen einfachsten Kreisprozesse offenbar eine besondere wichtige Anwendung bei d. Untersuchungen d. carnotschen Arbeitsmaschinen.

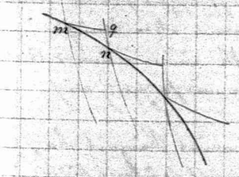
Findet d. soeben Kreisprozess in umgekehrter Richtung statt, so wird dadurch ein Niederfall, so dass also Arbeit L dazu verbraucht wird, um $Q_1 - Q_2$ Wärmeeinheiten aus einer Temperatur in eine andere zu bringen, und zwar Q_1 Wärmeeinheiten von der Temperatur t_1 in die Temperatur t_2. Es ist also $Q_1 - Q_2 = AL$.

Die Verwandlungswerte der Isothermenlinien a_0a_1a und aa_0a_0 sind resp. $\frac{Q_1}{t}$ und $-\frac{Q_2}{t_2}$; da diese beiden Verwandlungswerte einander entgegengesetzt gleich sind, so ist also:

$$\frac{Q_1}{t} - \frac{Q_2}{t_2} = 0.$$

Es ist nun einen ganz beliebigen Isothermenlinienzug zu betrachten, welcher abwechselnd eingeschalteten Isothermenlinienzügen benachbarter Tangenten, entsprechend einer Folge von isothermischen Linien und adiabatischen Linien oder Mittheilung d. Erhöhung von Wärme entsprechend adiabatischen Linien.

Für einen solchen Zug sollen nun die Isothermenlinienzüge zu Grunde gelegt werden, welche einem ganz beliebigen Gesetz entsprechend einen ganz beliebigen Isothermenzug bilden. Man kann sich dann diese Linien als die Grenze einer unendlich vielseitigen gebrochenen Linienzuges entstanden denken, indem man sich unendlich klein denken, so dass eine auf einer sehr beliebigen Isothermenlinie d. Isothermenzuges als Gerade anzusehen ist. Begrenzen nun diese gebrochenen Linienzug entsprechenden Isothermenlinien und deren Tangenten t eine Verwandlung, so ist $\frac{dQ}{t}$ der Verwandlungswert, welcher d. Isothermenlinie entspricht, wenn dQ die Wärmemenge bedeutet, welche d. Körper während d. Isothermenlinie aufnehmen muss, damit er A-fache d. Arbeitsmenge L leisten kann, wenn A d. Wärmeäquivalent d. Arbeitseinheit und L d. Arbeitsmenge, welche d. Körper während d. ganzen Kreisprozesses leistet.



Ist nun mn eine unendlich kleine Isothermenlinie d. Isothermenzuges, t d. Tangente entsprechend d. Zustand n, dQ sei d. Wärmemenge welche d. Körper bei entsprechender Tangente t einschaltet wird während d. Isothermenlinie und mn und dt sei dt eine Temperaturänderung bedeutet. Ausserdem d. unendlich kleinen Isothermenlinie mn, während entsprechend gleicher Zeit d. Tangente t in $t + dt$ übergeht und d. Wärmemenge dQ d. Körper einschaltet wird, kann man sich also denken, dass dQ eine Wärmemenge bedeutet, welche durch eine isothermische Linie mq und durch eine adiabatische Linie qn geschlossen werden. D. Isothermenlinie mn bei entsprechender Tangente t ist als Verwandlungswert $\frac{dQ}{t}$ unter t d. Wärmeäquivalent gedacht d. Tangente t aufgefasst. Weil d. adiabatischen Linie qn keine Verwandlung entspricht, so ist d. Verwandlungswert $= 0$, d.h. d. Verwandlungswert d. ganzen Linienzuges mnq ist $\frac{dQ}{t}$.

Ferner ist d. Verwandlungswert für einen Isothermenzug von endlich vielen und beliebigen Isothermenlinien:

$$N = \int \frac{dQ}{T}$$

Endlich ist noch ein ganz beliebig angenommener Kreisprozess, aufgefasst einen beliebigen geschlossenen Isothermenzug denken, welche Isothermenlinien so gedacht werden, dass sie einen Kreisprozess in eine unendliche Menge von einfachen Kreisprozessen zerlegt denken, welche Isothermenlinien sich unendlich klein und gegenseitig aufheben, so dass also nur die äussere Isothermenlinie übrig bleibt, welche mit dem gegebenen Isothermenzug zusammenfällt. Für jeden Elementar-Kreisprozess ist nun $\frac{dQ}{t} = 0$, also auch $\int \frac{dQ}{t} = 0$, d.h. der Verwandlungswert d. ganzen Isothermenzuges ist $= 0$.

einfache Kreisprocesse müssten genommen werden, die man für jeden dieser Temperaturen einsetzen
Kreisprocesse d. Temperaturdifferenz $= \int \frac{dQ}{T}$ ist. Es ist d. verschwindende Werth dieses Integrals
gegenen Kreisprocesses $N = \int \frac{dQ}{T}$, wobei aber d. Folge ist, dass ein nicht d. gegen Kreisprocess möglich
sein soll.

Daher muss für jeden möglichen umkehrbaren Kreisprocess d. Summe d. Verwandlungswerthe $= 0$ sein
müssen, damit nicht sein d. Verwandlungswerthe positiven d. beliebigen umkehrbaren Kreisprocess $= 0$ sein müsse:

$$N = \int \frac{dQ}{T} = 0.$$

Jenen muss bei jedem umkehrbaren in entgegengesetzt umkehrbaren Kreisprocess d. absolutes Wärmemenge =
d. Wärmemenge, welche positiv genommen Arbeit. Daraus folgt nicht unmittelbar, dass bei einer Wärme
Wärmen von verschiedenen umkehrbaren Kreisprocessen gleichzeitig verschiedenen beliebigen umkehrbaren Kreisprocess
sein soll:

$$\int dQ = AE$$

unter E d. absolut positiv genommen Arbeit verstanden,
welche übereinstimmt d. mit Einheit d. zur Erzeugung
von positiven Einheit und unter A d. Wärme equiv. d.
Arbeitseinheit verstanden.

Hierbei ist unter E absolut nicht dQ absolut positiv zu verstehen, sondern E unter positiv
und $\div E$ unter negativ zu verstehen, je nachdem positive Einheit von positiv $\div$ negativ
und $\div E$ einem negativ zu verstehenden Kreisprocess entspricht. Ist nun $\int dQ = Q$ so kann man:

$$Q = AE$$

wenn also Q und E absolut positiv mit positiven Wärmen
und genommen Arbeit, unter diese auch mit positiven Wärmen, auch genommen Arbeit verstanden
Arbeit, übereinstimmend gesetzt und ungleich sind. Für jede bestimmte E d. beiden Fälle $+E$ und $\div E$
muss auch jedenfalls zu unterscheiden, wenn nun eine Arbeit E $+$ positiv genommen und übereinstimmend
$\div E$ positiv.

Als Gesammtbedingung folgt nun es, dass bei jedem umkehrbaren Kreisprocesse unter Zugrundelegung
desselben absolut positiv verstandenen Wärmen = d. Wärmen welche absolut positiv
genommen od. verbrauchten Arbeit und d. entsprechenden Verwandlungswerthen
$= 0$ ist.

Es wurde bei diesen Untersuchungen immer stillschweigend vorausgesetzt, dass während der Verwandlung
d. Verwandlungswerthe, dQ in bestimmten Augenblick d. Temperatur t in allen Punkten d. Körpers $=$
allen Punkten d. Oberfläche gleich sei, widrigenfalls man d. Integral N nicht über den ganzen Körper ausdehnen
könnte. Gesetzt es sei nun irgend ein Körper, dessen Oberfläche mit d. Hülle, innerhalb aber ein
Gemisch dieser Hülle fester Art und verschiedener Temperatur, so dass insbesondere d. Unterschied
d. Temperatur einerseits, unter d. Hülle Gemisches d. einzelnen Massentheilchen d. äußerlich gleichen Temperatur
in allen Punkten nicht gleich sein. In diesem Falle müsste man offenbar einen Körper finden können, dessen
einzelne Theile zu einander umkehrbar wären, d. h. solche Temperaturen annehmen, dass
nahe gleiche Temperaturen in einander übergehen. Bezeichnet dS ein Element d. Oberfläche und dQ d. Wärmemenge,
welche positiv genommen d. Körper durch d. Theil d. Oberfläche dS ins Innere eindringt, so
wird, wenn $\int dQ . dS$ d. nämlich bei. Wärmemenge positiv genommen bezeichnet, welche durch d. Oberfläche dS
während d. Körper nicht stillsteht, ins Innere d. Körpers tritt, $\int dQ . dS$ d. nämlich bei. Zeitraum eindringende Wärmemenge $= \frac{dQ . dS}{T}$
wobei aber t und mithin T für jeden Punkt anzupassen sein kann.
d. umkehrbare Verwandlungswerth ist also:

$$N = \int\int \frac{dQ . dS}{T}$$

für einen Kreisprocess gelten, aber d. auch gesondert genommen Theilen Allgemeine nicht ist. Es kann also
auch in diesem Falle d. umkehrbare Verwandlungswerth $N = \int\int \frac{dQ\,dS}{T} = 0$.

Dieses wird nun mit dem Kreisprocess eine umkehrbare Verwandlung umkehren, dessen Werth $= 0$ ist,
wird also d. Verwandlungswerth positiv, so kommt man diesem positiven Werth entsprechend d. umkehrbare
Verwandlung als einen Uebergang von Wärme von niederer zu höherer Temperatur betrachten, ohne dass
damit eine andere weitere Veränderung verbunden wäre, und stimmt von Clausius aufgestellten
Princip d. Ungültigkeit von Verwandlungen überein, aber nicht mit seiner ungenauen
Fassung für den umkehrbaren Verwandlungswerth zu setzen, sondern bei Umkehrung d. Kreisprocesses d.
Verwandlungswerth N positiv werden würde, und somit dasselbe Widersprechen sich ergeben würde.

Also bei einem jeden umkehrbaren Kreisprocesse ist d. umkehrbare Verwandlungswerth $= 0$, ist man
also ungefähr die Temperaturen einer in einen Punkten stetig ist.

Zum Schlusse ist noch zu bemerken, dass alle abgeleiteten Sätze nicht nur für einen umkehrbaren
Kreisprocess gelten, sondern auch für einen Kreisprocess, welcher, wenn er jedem Augenblick umkehrbar zu
sein, mit einer umkehrbaren Zustandsänderungen verbunden ist, dass aber mit beliebiger Geschwindigkeit
stattfinden kann. Die beiden genannten Sätze gelten nämlich, wenn d. Kreisprocess mit nicht
umkehrbaren Verwandlungen verbunden ist, also wenn Temperaturunterschiede und unendlich kleine
Wärmeleitung in seinem d. Körper vorkommen; denn ist nämlich d. umkehrbare Verwandlungswerth
negativ, indem die Wärme von einer niedrigeren Temperatur mit negativer Wärme bezeichnet
werden sollten und d. Summe d. verschiedenen Verwandlungen mit negativer Wärme $= 0$, so
ist gewiss die Gesammtwärme positiv.

Hiermit ist also d. allgemeine zu Grunde liegende Satz der Wärmetheorie aufgestellt, dass es
unmöglich ist, einen Kreisprocess d. Körpers oder Verwandlungswerthe $= 0$ und negativ ist, und
zum Theil für den Fall, dass alle umkehrbaren Kreisprocesse d. gleiche sein, nämlich in allen
seinen Theilen mit umkehrbaren Zustandsänderungen besteht.

Verschiedene Formen d. Wärmegleichung.

Hauptgleichungen.

Es kann jeder stillschweigend Abhängigkeit gedacht werden, nämlich d. Abhängigkeit d.
absoluten Kraft d. Wärme, Spannung und d. Abhängigkeit d. inneren Arbeitsvermögens. D. Aufstellung d.
Abhängigkeit d. absoluten Kraft unterscheidet weiter keine Substanzen, indem durch sie mit d. innerlichen
Beschaffenheit bekannt wird. Die Wärmeleitung würde gelehrt, wenn man Temperaturen gegeben,
dagegen auf eine umkehrbare Aenderung d. Wärmezustandes folgt, die d. gegebene allgemeine Form:

$$W dQ = dU + p\,dv$$

für sich hat. Arbeitsvermögen Wärmemenge und, welche d. Beschaffenheit einer jeden bestimmt
einer bestimmten Aenderung d. Wärmezustandes entsprechend, dass diese Wärmemenge, wenn
gegebenen Aenderung dv d. Volumens, durch d. Aenderung dU d. gegebenen
Arbeitsvermögens und einem p d. augenblicklich Spannung bestimmt. d. h. eine Arbeitsmenge
U ist durch d. Wärmezustand bestimmt, so dass U eine function von v und p, wenn v und p als unabhängig
veränderlichen angenommen werden, welche d. Wärmezustand eines Körpers bestimmen. Somit wenn also auch
absolute Wärmemenge, und ausgehen kann auf unendlich kleinen Wege, wobei d. absolute function U
von v und p unter dU bekannt sein. Diese Bedingung ist jedoch nicht für jede und auch nicht einzelne
Wege ist es mit gewissen Specialfällen verbunden und kommen wichtig. U kann als function von v und p
aufgefunden. Auf diesem Grund aufgestellt d. wichtig weiteren Gesetzen stellt d. Arbeitsvermögen function eingeführt,
welche ebenfalls d. Wärmezustand bestimmen, aber einen Abhängigkeit nun sind mit Substanzen allgemein
kann und Stoffe gegeben bekannt sind; dann umfassend ist gestattet sind d. Wärmegleichungen mit anderen Formen

zu bringen. Löst diese Umformungen kann man auch so:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial v}\,dv + \frac{\partial U}{\partial p}\,dp \quad \text{nach den bekannten Regeln.}$$

Differentialgleichung rechter Seite für den Fall, wo T als Funktion von v u. p gegeben ist.

Wenn diese Gleichung Null wird, nachdem T als Funktion von v u. p eingeführt wird, so d. Übereinstimmung daß sie auf eine vollständige Differentialgleichung besteht, wenn wenn die beiden Glieder mit $\frac{1}{T}$ durchgedrückten dv u. dp Glied zusammengefaßt sind d. Daraus:

$$\frac{\partial U}{\partial v} + p = Y \quad \text{setzen, und wenn wir d.}$$

partielle Ableitung von Umf. p:

$$\frac{\partial U}{\partial p} \text{ mit } X \text{ bezeichnen.}$$

d. Wärmegleichung hat dann d. Form:

$$W dQ = Y dv + X dp$$

so daß wir wissen, daß d. Wärmegleichung sind unterdes X u. Y nicht Differentialausdrücke von v u. p, diese beiden Funktionen sind aber nicht unabhängig von einander, sondern sind durch eine Gleichung mit einander verbunden, wenn wenn mathematisch der Ausdruck sei: Y muß p allein sein und seine Abhängigkeit von v genommene Ableitung von X, p equill sein:

$$\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial p} + 1 - \frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial p} = 1$$

$$\text{also} \quad \frac{\partial Y}{\partial p} + \frac{\partial X}{\partial v} = 1$$

(Gleichung 2 Ordnung)

diese Gleichung stellt eine allgemeine, genau so auch Wärmebeziehung zwischen X und Y von v u. p dar, enthält in d. unseren Form d. Wärmegleichung an d. Stelle von U gebrochen sind.

Nach Zeuner nennt einen diese Gleichung auch d. zweite Hauptgleichung d. mechanischen Wärmetheorie, diese zweite Hauptgleichung läßt sich unmittelbar aussprechen, d. h. Umwandlung auch ohne Umkehr unbegrenzt ist, wenn nämlich auch d. Gesetz bekannt sind, nach welchen d. Zustandsänderungen erfolgen so ergibt auch d. Abhängigkeit von v u. p von einander ist genau auch d. Gleichung d. Zustandsänderung, kennt ist also wenn wenn auch d. Wärmemenge Q bestimmt, welche d. Gewichtseinheit eines Körpers in mitgetheilt werden muß wenn eine gegebene Zustandsänderung zu bewirken, also d. Gesetz zu kennen, nach welchen diese Zustandsänderung erfolgen soll, nämlich wenn die allgemeingültige Differentialgl. auch dann:

$$\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = 0 \text{ soll} = 1 \text{ sein muß.}$$

Umgekehrt kann man auch aus der Gl. $\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = 1$ auf einem gedachten Wege mittheilbaren, dass man p messen kann, d. h. Arbeit ein vollständiges Differential und auch $\int \frac{dQ}{T} = 0$, nämlich d. Integral einer geschlossenen Kurve immer bekannten geometrischen Integrales d. ersten Art von Gl. 1. Wird nämlich eine Curve in und für einen Kreisprozeß $\int \frac{dQ}{T} = 0$, nämlich d. Integral einer geschlossenen Kurve immer bekannten muß, wenn d. Körper in seiner Ausgangszustand zurückkehrt, somit muß d. Satz $W \int \frac{dQ}{T}$ wie sie auch ein solches d. vorhandenen Zustandsänderung eines Körpers sie immer auch, dass dasselbe Wert wieder annehmen, wenn d. Körper in seinen Ausgangszustand zurückkehrt. Daraus kann d. Größe d. Körpers durch v u. p bestimmt ist, somit $\frac{dQ}{T}$ immer ein vollständiges Differential sein wenn v u. p. Ist also $\frac{dQ}{T}$ ein vollständiges Differential, somit auch $\int \frac{W dQ}{T} = 0$. ist $\frac{1}{T}$ nun auch Null:

$$W dQ = Y dv + X dp$$

und durch Multiplikation mit $\frac{1}{T}$:

$$\frac{W dQ}{T} = \frac{Y}{T} dv + \frac{X}{T} dp$$

und muß d. Gleichung integrabel sein. Hierzu ist noch zu bemerken, daß d. Abhängigkeit von $\frac{Y}{T}$ ebenso auch v genommene ist wie d. von $\frac{X}{T}$ auch p, d. h. daß also sein muß:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{Y}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{X}{T}\right)$$

es muß nun d. differentiiren entsteht:

$$\left(T\,\frac{\partial Y}{\partial p} - Y\,\frac{dT}{dp}\right)\frac{1}{T^2} = \left(T\,\frac{\partial X}{\partial v} - X\,\frac{dT}{dv}\right)\frac{1}{T^2}$$

es.

$$T\,\frac{\partial Y}{\partial p} + Y\,\frac{dT}{dp} = T\,\frac{\partial X}{\partial v} + X\,\frac{dT}{dv}$$

es.

$$T\left(\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v}\right) = Y\,\frac{dT}{dp} + X\,\frac{dT}{dv}$$

Nach erster Hauptgleichung muß sein: $\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = 1$

Also:

$$T = Y\,\frac{dT}{dp} + X\,\frac{dT}{dv}$$

diese Gleichung stellt nun Zeuner d. 2te Hauptgleichung genannt werden, sie ist eine besondere Ausdrucksform d. Gesetzes d. Äquivalenz d. Verwandlungen, während d. erste Hauptgleichung eine unmittelbare Folge d. Äquivalenz von Wärme und Arbeit ist.

Wenn keine diese Gleichung nun auf analytischem Wege entwickelt. Wenn nun die d. Gleichung $W dQ = Y dv + X dp$ den Ausdruck für Y der Differential d. 2ten Hauptgleichung ergibt, so findet sich:

$$W dQ = \frac{X\,\frac{dT}{dv} + T}{\frac{dT}{dp}}\,dv + X\,dp = \frac{X\left(\frac{dT}{dv}\,dv + \frac{dT}{dp}\,dp\right) + T\,dv}{\frac{dT}{dp}}$$

da nun T eine Function von t und t wiederum eine Function von v und p ist, so muß auch T eine Function von v und p sein, so daß d. Ausdruck auf d. rechten Seite in d. Klammer ein vollständiges Differential ist, partiell auf v u. p genommen nun dT, also ist:

$$\frac{dT}{dv}\,dv + \frac{dT}{dp}\,dp = dT$$

und folglich:

$$W dQ = \frac{X\,dT + T\,dv}{\frac{dT}{dp}}$$

Ist nun also in d. ersten Hauptgleichung d. Werth für X ein, d. ist auch d. 2ten Hauptgleichung erfüllt, so findet sich:

$$W dQ = Y dv + \frac{Y\,\frac{dT}{dp} - T}{\frac{dT}{dv}}\,dp = \frac{Y\left(\frac{dT}{dp}\,dp + \frac{dT}{dv}\,dv\right) - T\,dp}{\frac{dT}{dv}}$$

da nun auch $\frac{dT}{dp}\,dp + \frac{dT}{dv}\,dv$ das vollständige Differential von T ist, da T eine Function von v u. p = dT, genommen sein →

$$W dQ = \frac{Y dv - X dp}{\frac{dv}{dp}}$$

Setzen sich als speziell d. verschiedenen Formen d. Wärmeänderung ergeben, nämlich:

I. ——————— $W dQ = Y dv + X dp$

II. ——————— $W dQ = \frac{X dv + T dv}{\frac{dv}{dp}}$

III. ——————— $W dQ = \frac{Y dv - T dp}{\frac{dv}{dp}}$

In d. ersten dieser Gleichungen sind X und Y Funktionen von v u. p, während in d. zweiten Gleichung T noch eine weitere Veränderliche enthält. Diese ist entweder eine der beiden Variablen v u. p, oder eine von beiden verschiedene Größe, welche mit v u. p durch eine Gleichung verbunden ist. Da d. Wärmemenge dQ vollständig bestimmt ist, wenn v u. p bekannt sind, so müssen auch X u. Y vollständig bestimmt sein, wenn v u. p gegeben sind. Es müssen also X u. Y solche Funktionen von v u. p sein, daß $X dv + Y dp$ ein vollständiges Differential wird. Diese Bedingung drückt sich aus durch die Gleichung

IV. ——————— $0 = \frac{dY}{dp} - \frac{dX}{dv}$

Diese Gleichung ist also allgemeiner Ausdruck für die Bedingung, daß dQ ein vollständiges Differential sei. Jede Gleichung, welche diese Bedingung erfüllt, gehört zu einem möglichen Prozeß, und umgekehrt gehört jeder mögliche Prozeß zu einer solchen Gleichung. Jede Gleichung, welche diese Bedingung nicht erfüllt, gehört zu einem unmöglichen Prozeß. Jede Gleichung, welche diese Bedingung erfüllt, gehört zu einem möglichen Prozeß, aber nicht jeder mögliche Prozeß gehört zu einer solchen Gleichung. Es gibt unendlich viele mögliche Prozesse, welche durch eine und dieselbe Gleichung ausgedrückt werden, nämlich alle diejenigen, für welche T eine und dieselbe Funktion von v u. p ist. Jeder dieser Prozesse ist durch eine besondere Gleichung zwischen T, v u. p bestimmt.

Wenn T als Funktion d. Temperatur t bekannt ist, so ist T als Funktion von v u. p (durch d. Zustandsgleichung, im Falle einer gasförmigen Körper) für bestimmte d. Gleichungen III und V zur Bestimmung von X und Y in Gleichung d. Gleichung I nimmt dann die Form einer partiellen Differentialgleichung zwischen zwei unabhängigen Variablen an:

VI. ——————— $\frac{dU}{dv} = Y - p \quad \text{und} \quad \frac{dU}{dp} = X$

In allen jenen d. Gleichungen I bis V, wo T nicht eingeführt wurde, kann Gleichung 2 noch eine weitere physikalische Bedeutung haben. Statt X und Y kann man eine andere Bedeutung einführen, durch Einführung d. Temperatur t als Funktion von v und p. Es sind dann X und Y Funktionen von v und p, welche man erhält, wenn man T durch t ausdrückt. Setzt man diese Werte in Gleichung III d. Gleichung $dQ = \frac{Y dv - T dp}{\frac{dv}{dp}}$, so erhält man eine Gleichung, welche nur noch v und p enthält, und welche die Gleichung der Kurve darstellt, für welche $dQ = 0$ ist, d. h. die Gleichung der adiabatischen Kurve.

Die Differentialquotienten $\frac{dQ}{dv}$, unter d. Voraussetzung dp konstant also $dv = 0$ sei, werde bezeichnet mit C_v und $\frac{dQ}{dv}$ unter d. Voraussetzung, daß d. Spannung p konstant also $dp = 0$ sei, werde mit C_p bezeichnet. Offenbar stellen d. eingeführten Größen C_v und C_p in die frühere Gleichung für d. spezifische Wärme. Unter d. spez. Wärme eines Körpers für einen gewissen Zustand desselben versteht man die Wärmemenge, welche nötig ist, um die Temperatur d. Körpers, wenn er sich in diesem Zustande befindet, um 1° zu erhöhen, wenn dabei d. Körper keine äußere Arbeit leistet. Diese Definition setzt also voraus, daß d. Körper sich bei Zufuhr der Wärme nicht ausdehnt, daß also $dv = 0$ sei. Die spez. Wärme bei konstantem Volumen ist also C_v. Die spez. Wärme bei konstantem Druck ist C_p. Die spez. Wärme eines Körpers für einen gewissen Zustand ist also gleich dem Differentialquotienten $\frac{dQ}{dt}$, wenn dQ die Wärmemenge bedeutet, welche dem Körper zugeführt werden muß, damit seine Temperatur um dt wächst, während er sich in dem betreffenden Zustande befindet. Es ist also

$$C = \frac{dQ}{dt}$$

diesen Ausdruck wird, wenn nicht besonders C_v spez. Wärme für konstantes Volumen und C_p spez. Wärme für konstanten Druck bedeutet:

$$C = C_v \frac{dv}{dt} \quad \text{und} \quad C_1 = C_p \frac{dp}{dt}$$

Nimmt man den ersten Fall $C = \frac{dQ}{dt}$ entsprechend $dv = 0$ ist, dieser Ausdruck ist $= \frac{dQ}{dT} \cdot \frac{dT}{dt}$ und da $\frac{dQ}{dt} = C_v$, so ist somit für C der erstgedachte Ausdruck. Im zweiten Falle ist:

$$C_1 = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dT} \cdot \frac{dT}{dt} = C_p \frac{dT}{dt} \quad \text{entsprechend } C_1\, dp = 0.$$

Damit also neue Größen bestimmt sind, welchen d. zwei eingeführten Größen eine bestimmte Bedeutung haben. Nun kann zunächst bemerkt werden, daß sich d. Zahl der Größen, welche T eine Funktion von v und t oder p und t sein soll, durch die Gleichung von T und t nur 1 ist. Also die Größen C_v und C_p, die wir allgemeines nicht als Funktionen von v und p zu betrachten sind, haben nur 3 Gleichungen, welche sie verbinden, zu haben. Somit kann man nur noch X und Y durch C_v und C_p ausdrücken.

Wenn nun in Gleichung II d. Voraussetzung $dv = 0$ gemacht, also d. Fall d. Erhitzung eines Körpers bei konstantem Volumen betrachtet, so soll nun hierbei der Differentialquotient $\frac{dQ}{dT}$, welche entsprechend d. Voraussetzung $dv = 0$, $= C_v$ sein muß, durch C_v ausgedrückt werden. Somit ist:

$$C_v = \frac{X}{W \frac{dT}{dp}} \quad \text{u. d.} \quad X = W C_v \frac{dT}{dp} \qquad \text{VII}$$

Setzen wir in Gleichung III d. Voraussetzung p = einer Konstanten also $dp = 0$ u. $p\,T\,dp$ verfällt, so bekommt man, wenn mit $W\,dQ$ dividiert wird:

$$C_p = \frac{Y}{W \frac{dT}{dv}} \quad \text{u.} \quad Y = W C_p \frac{dT}{dv} \qquad \text{VII}$$

Durch Verbindung sind nun in d. Gleichungen einzuführen, wobei zu bemerken ist, daß $A = \frac{1}{W}$ und folglich $AW = 1$ ist, zwischen diesen Gleichungen. Die Gleichung I wird nun mit A multipliziert (wobei A bekanntlich Wärmeaquivalent d. Arbeitseinheit bedeutet) und nun bekommt man mit $A \cdot W = 1$:

$$dQ = C_p \frac{dT}{dv} dv + C_v \frac{dT}{dp} dp \qquad \text{VIII}$$

Ebenso wird nun Gleichung II mit A und früher Werte für X und Y eingeführt, so bekommt man:

$$dQ = C_v\, dT + \frac{A\,T}{\frac{dT}{dp}} dv \qquad \text{IX}$$

Aus Gleichung III ergibt man in derselben Weise:

$$dQ = C_p\, dT - \frac{A\,T}{\frac{dT}{dv}} dp \qquad \text{X}$$

Diese Gleichungen stellt mit Hilfe derselben Bemerkungen mit d. ersten Gleichung: $\frac{dY}{dp} - \frac{dX}{dv} = 0$:

$$A = \frac{d}{dp}\left(C_p \frac{dT}{dv}\right) - \frac{d}{dv}\left(C_v \frac{dT}{dp}\right) \qquad \text{XI}$$

und mit d. 2ten Gleichung:

$$A\,T = C_p \frac{dT}{dv} \cdot \frac{dv}{dp} - C_v \frac{dT}{dp} \cdot \frac{dv}{dv} = (C_p - C_v) \frac{dT}{dp} \cdot \frac{dT}{dv} \qquad \text{XII}$$

In diesen Formeln wurden die allgemeinen Gleichungen nicht weiterhin angewendet.

Es würden sowohl zwischen den Variablen v und δ als auch zwischen p und δ einfache umkehrbare Beziehungen bestehen, wenn allgemein die Zustandsgleichung des Körpers bekannt wäre, und es könnten dann die Differentialcoefficienten $\frac{d\delta}{dv}$ und $\frac{d\delta}{dp}$ berechnet werden. Nun kann jedoch auch irgendeine andere Größe zur Charakterisirung des Körperzustandes dienen; es kann z. B. diese Größe möglicherweise auch für bestimmte Zustände des Körpers mehrere Werthe annehmen, und es kann somit der Fall sein, daß zwischen v und p und δ irgendeine Gleichung $f(v,p,\delta)=0$ besteht, welche nicht nach jeder dieser drei Größen auflösbar ist. Wenn jedoch diese drei Größen v, p und δ durch eine Gleichung der Form $f(v,p,\delta)=0$ mit einander verbunden sind, so kann jede dieser drei Größen als eine Function der beiden anderen betrachtet werden, und es können somit die Differentialcoefficienten

$$\frac{dv}{dp} \quad \frac{dv}{d\delta} \quad \frac{dp}{dv} \quad \frac{dp}{d\delta} \quad \frac{d\delta}{dv} \quad \frac{d\delta}{dp}$$

gebildet werden.

Wenn nun v und δ gegeben sind, so ist p eine bestimmte Function von v und δ, und es ist

$$\frac{dp}{dv} \text{ und } \frac{dp}{d\delta}$$

die Tangente des Neigungswinkels der Curve, welche die Abhängigkeit der Größe p von v bei constantem δ bezw. von δ bei constantem v darstellt.

Wenn p und δ gegeben sind, so ist v eine bestimmte Function von p und δ, und es ist

$$\frac{dv}{dp} \text{ und } \frac{dv}{d\delta}$$

die Tangente des Neigungswinkels der Curve, welche die Abhängigkeit der Größe v von p bezw. von δ darstellt.

Nun sind zwischen diesen 6 Differentialcoefficienten 6 Gleichungen möglich. Es können nämlich die 6 Differentialcoefficienten berechnet werden durch je 2 derselben, welche gewisse umkehrbare Beziehungen zwischen v und p, v und δ, oder p und δ liefern, so daß die übrigen 4 nicht berechnet zu werden brauchen. Diese sind natürlich 4 Relationen zwischen diesen 6 Differentialcoefficienten selbst, welche sich also durch Elimination finden lassen.

Zunächst ist natürlich klar, daß von diesen 6 Differentialcoefficienten immer 2 und 2 reciproke sind, somit allgemein Gleichungen existiren, welche immer eine der Größen v, p oder δ als constant voraussetzen, von den übrigen aber keine; andere allein betrachtet, ist z. B. $\frac{dp}{dv}$ ein Differentialcoefficient, welcher auch nur dann einen Sinn hat, wenn eine der Größen v, p oder δ als constant vorausgesetzt wird. Diese 3 Gleichungen lauten also:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{d\delta}\cdot\frac{d\delta}{dp} &= 1 \\ \frac{dv}{dp}\cdot\frac{dp}{dv} &= 1 \\ \frac{d\delta}{dv}\cdot\frac{dv}{d\delta} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{XIII}$$

Zu diesen vorläufigen 6 Gleichungen gelangen wir auf folgendem Wege, welcher Gleichungen offenbar zu finden gestattet, welche 2 der 6 Differentialcoefficienten

$$\frac{dp}{d\delta}, \frac{d\delta}{dv}, \frac{dv}{dp} \text{ und } \frac{d\delta}{dp}, \frac{dv}{d\delta}, \frac{dp}{dv}$$

geben können, wenn diese 2 der 6 Differentialcoefficienten der übrigen 4 entsprechen.

Angenommen nun, es sei δ als Function von v und p, so wie v und p als unabhängig veränderliche gegeben, so ist natürlich auch die Differentialgleichung:

$$d\delta = \frac{d\delta}{dv}dv + \frac{d\delta}{dp}dp.$$

Bestimmen wir nun δ als constant, somit auch $d\delta = 0$, so wird natürlich v eine Function von p und umgekehrt p eine Function von v also:

$$dv = \frac{dv}{dp}dp \quad \text{und somit mit der obigen Differentialgleichung}$$

mit $d\delta = 0$ und durch dieselbe mit dp:

$$0 = \frac{d\delta}{dv}\frac{dv}{dp} + \frac{d\delta}{dp}$$

Wenn nun nach dieser Gleichung der Differentialcoefficient von δ nach p Null wird, so kommt dies offenbar ganz auf dasselbe hinaus, wenn man mit dem Differentialcoefficienten von p nach δ $= \frac{dp}{d\delta}$ multiplicirt, dies muß offenbar gelten:

$$0 = \frac{dp}{d\delta}\cdot\frac{d\delta}{dv}\cdot\frac{dv}{dp} + 1$$

oder:

$$\frac{dp}{d\delta}\cdot\frac{d\delta}{dv}\cdot\frac{dv}{dp} = -1 \qquad \text{XIV}$$

Mit dieser Gleichung ist nun auch die 4. Relation gefunden; auf Gleichung XIII, wird nämlich das reciproke Product aus je 2 der 3 Producten $= 1$ sein, mithin aber auch $= -1$ ist, so müssen auch sein:

$$\frac{d\delta}{dp}\cdot\frac{dv}{d\delta}\cdot\frac{dp}{dv} = -1$$

Diese 4 Gleichungen (XIII — XIV) genügen vollständig um durch je 2 der 6 partiellen Differentialcoefficienten, welche sich auf 3 einfache umkehrbare Beziehungen $v-p$, $v-\delta$ oder $p-\delta$ beziehen, die übrigen 4 auch finden zu können, und somit also auch die Gleichungen aufgefunden werden können, welche zwischen $v-p$, zwischen $v-\delta$ oder $p-\delta$ als den Körperzustand charakterisirenden unabhängig veränderlichen vorkommt.

Zur Bestimmung der Wärme dQ, welche ein Gewichtstheil eines Körpers braucht, um eine unendlich kleine Zustandsänderung mitmachen zu können, sollen wir 3 verschiedene Gleichungsformen gefunden haben (I II III und VIII IX X). Nehmen wir v und p als unabhängig Veränderliche zur Bestimmung der Körperzustände an, so ist jene Formel, welche dQ als Function von T und VIII von v und dp darstellt. Nehmen wir v und δ zur Charakterisirung des Körperzustandes als unabhängig Veränderliche an, so ist jene Gleichung dQ in welcher Gleichungen II und IX vorkommen, jene, welche dQ als Function von δ und v und $d\delta$ und dv darstellt. Nehmen wir p und δ als unabhängig Veränderliche an, so ist jene Gleichung dQ in welcher Gleichungen III und X vorkommen, jene, welche dQ als Function von δ und p und $d\delta$ und dp darstellt. Diese Gleichungen sind:

$$dQ = C_v\,d\delta + A\delta\,\frac{dp}{d\delta}\,dv$$

$$dQ = C_p\,d\delta - A\delta\,\frac{dv}{d\delta}\,dp.$$

Die einfachste Weise wurden wir durch beide Gleichungen XI und XII für den vorliegenden Fall Wasserdampf zu arbeiten suchen.

Zur Berechnung der Größe $\frac{dp}{d\delta}$ dient Gleichung XII, wenn wir p und δ als unabhängig Veränderliche annehmen zur Charakterisirung des Körperzustandes. In Gleichung XII sind nun δ und p als Functionen von p i. v, v als Function von p und δ zu betrachten und also partielle Differentiationen von δ nach p i. v partielle Differentiationen von v nach p und δ zu berücksichtigen; wir wollen somit die Gleichungen (XIII — XIV) zuerst in folgender Differentialgestalt schreiben. Nun bekommt diese Gleichung XII:

$$C_p - C_v = A\delta\,\frac{dv}{d\delta}\cdot\frac{dp}{d\delta}.$$

Hier ist nun offenbar $\frac{dv}{d\delta}$ eine Größe, die sich durch Messung finden kann, während $\frac{dp}{d\delta}$ natürlich von δ als Function von v und p gefunden werden muß. Sie wird gefunden mit Hilfe der 4. Relation XIV, welche wir soeben

mittels mit Rücksicht auf d. Gleichung XIV:

$$\frac{dp}{d\sigma} = \div \frac{\frac{dv}{d\sigma}}{\frac{dv}{dp}}$$

diese Wert in die obige Gleichung für $c_p - c_v$ eingesetzt, so bekommt man d. 2. Gleichung in folgender Form:

$$c_p \div c_v = A\sigma \frac{\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2}{\div \frac{dv}{dp}}$$

Diese Gl. sind nun zu gewissen Zwecken sehr nützlich zu machen, zunächst ist daraus ersichtlich, daß c_p immer $>$ c_v ist, denn A und σ sind d. allgemeinen Grundsätze zufolge absolut positive Größen, also jedenfalls positiv, und $\frac{dv}{d\sigma}$ bedeutet, da v mit σ abnimmt, d. Tangente des Winkels, welchen die Tangente an die Curve v σ mit der Axe σ bildet, also jedenfalls negativ. Ferner ist $\frac{dv}{dp}$ in derselben Weise, da v mit p abnimmt, ebenfalls negativ. Folglich ist $\frac{dv}{d\sigma}$ in beiden Fällen negativ, und $\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2$ positiv; ebenso ist $\div \frac{dv}{dp}$ positiv. Nun ist aber $\frac{dv}{dp}$ negativ und $\div \frac{dv}{dp}$ positiv, folglich ist $c_p > c_v$.

Diese besondere Eigenschaft d. Function c_p kann nun mit Vortheil für d. Aufsuchung einer Form d. Gleichung $pv = f(\sigma)$ benutzt werden, indem c_p d. Differentialquotienten $\frac{dq}{d\sigma}$ einer Curve ist, deren Ordinaten q den Logarithmen d. Volumina v proportional sind, und deren Abscissen σ die Logarithmen d. Spannungen p sind, so daß $\frac{dq}{d\sigma}$ d. Differentialquotient d. Logarithmen d. Volumina nach d. Logarithmen d. Spannungen ist. Da nun c_p immer positiv ist, so ist auch $\frac{dq}{d\sigma}$ immer positiv, d. h. die Curve, deren Ordinaten q den Logarithmen d. Volumina v proportional sind, wenn die Abscissen σ den Logarithmen d. Spannungen p proportional sind, hat überall eine positive Tangente, d. h. sie steigt beständig, wenn man sie von links nach rechts verfolgt.

Da nun c_p immer $>$ c_v ist, so ist auch $\frac{dq}{d\sigma}$ immer $>$ $\frac{dq}{d\sigma}$ für c_v, d. h. die Tangente an die Curve q σ für c_p ist immer steiler als die Tangente an die Curve q σ für c_v, wenn beide Curven in demselben Punkte d. Abscissenaxe σ begegnen. Hieraus folgt, daß die Curve q σ für c_p immer concav gegen die Axe σ ist, und daß die Curve q σ für c_v entweder eine Gerade oder eine gegen die Axe σ convexe Curve ist, welche die Axe σ höchstens in einem Punkte schneiden kann.

Es kann nun die gefundene Eigenschaft d. Curven c_p und c_v dazu benutzt werden, um die Gestalt der Curve q σ für c_v zu finden, wenn die Curve q σ für c_p gegeben ist, indem man die Curve q σ für c_p als Einhüllende einer Schaar von Geraden betrachtet, welche die Curve q σ für c_v berühren, und deren Gleichungen sich aus der Gleichung der Curve q σ für c_p und aus der Gleichung $pv = f(\sigma)$ ableiten lassen. Wenn man nämlich die Gleichung der Curve q σ für c_p in der Form $q = \varphi(\sigma)$ kennt, wo φ eine gegebene Function bedeutet, und wenn man die Gleichung der Tangente an die Curve q σ für c_v in der Form $q = \alpha\sigma + \beta$ annimmt, wo α und β Constanten bedeuten, welche sich für jede Tangente ändern, so ist $\alpha = \frac{dq}{d\sigma}$ d. h. α ist gleich dem Differentialquotienten $\frac{dq}{d\sigma}$ der Curve q σ für c_p, und β ist gleich dem Abschnitte, welchen die Tangente auf der Axe q abschneidet. Es ist also $\alpha = \varphi'(\sigma)$ und $\beta = \varphi(\sigma) - \sigma\varphi'(\sigma)$, folglich ist die Gleichung der Tangente an die Curve q σ für c_v:

$$q = \varphi'(\sigma)\sigma + \varphi(\sigma) - \sigma\varphi'(\sigma)$$

Da nun $q = \log v$ und $\sigma = \log p$ ist, so ist auch die Gleichung der Curve v p für c_v gefunden, wenn man $\log v$ für q und $\log p$ für σ in die gefundene Gleichung setzt. Setzt man $\log p$ für σ in $\varphi'(\sigma)$, so kann man $\varphi'(\log p)$ kürzer durch $\psi(p)$ ausdrücken, und erhält dann die Gleichung:

$$\log v = \psi(p)\log p + \varphi(\log p) - \log p\,\psi(p)$$

Diese Gleichung ist für jede Function φ richtig, wenn nur c_p immer $>$ c_v ist, und wenn $\frac{dq}{d\sigma}$ immer positiv ist, d. h. wenn die Curve q σ für c_p überall eine positive Tangente hat.

Wenn z. B. die Curve q σ für c_p eine Gerade ist, deren Gleichung $q = \alpha\sigma + \beta$ ist, so ist $\varphi(\sigma) = \alpha\sigma + \beta$, $\varphi'(\sigma) = \alpha$, $\varphi(\log p) = \alpha\log p + \beta$, und die Gleichung der Curve v p für c_v wird:

$$\log v = \alpha\log p + \beta - \log p\,\alpha$$

oder

$$\log v = \beta$$

oder

$$v = \text{Const.}$$

Diese Curve ist also eine Gerade, welche der Axe p parallel ist.

Wenn die Curve q σ für c_p eine Gerade ist, welche mit der Axe σ einen Winkel φ bildet, dessen Tangente $= \frac{1}{k}$ ist, so ist $\alpha = \frac{1}{k}$, und β ist gleich dem Abschnitte, welchen die Gerade auf der Axe q abschneidet, also $= \log c$, wenn c die Constante bedeutet, welche in der Gleichung $pv = c$ vorkommt. Es ist also $\varphi(\sigma) = \frac{\sigma}{k} + \log c$, $\varphi'(\sigma) = \frac{1}{k}$, $\varphi(\log p) = \frac{\log p}{k} + \log c$, und die Gleichung der Curve v p für c_v wird:

$$\log v = \frac{\log p}{k} + \log c - \log p \frac{1}{k}$$

oder

$$\log v = \log c$$

oder

$$v = c$$

Diese Curve ist also eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die Axen v und p sind.

Wenn die Curve q σ für c_p eine Gerade ist, welche mit der Axe σ einen Winkel φ bildet, dessen Tangente $= \frac{1}{k}$ ist, so ist $\alpha = \frac{1}{k}$, und β ist gleich dem Abschnitte, welchen die Gerade auf der Axe q abschneidet, also $= \log c$, wenn c die Constante bedeutet, welche in der Gleichung $pv = c$ vorkommt. Es ist also $\varphi(\sigma) = \frac{\sigma}{k} + \log c$, $\varphi'(\sigma) = \frac{1}{k}$, $\varphi(\log p) = \frac{\log p}{k} + \log c$, und die Gleichung der Curve v p für c_v wird:

$$\log v = \frac{\log p}{k} + \log c - \log p \frac{1}{k}$$

oder

$$\log v = \log c$$

oder

$$v = c$$

Diese Curve ist also eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die Axen v und p sind.

Die geometrische Darstellung d. Vorgänge bei umkehrbaren Zustandsänderungen

Im Allgemeinen werden bei den Zustandsänderungen, welche in der Praxis vorkommen, die Spannungen p und die Volumina v sich fortwährend ändern, und es ist daher für die Darstellung der Zustandsänderungen durch Curven nöthig, die Abhängigkeit d. Spannungen p von den Volumina v zu kennen, d. h. es muß bekannt sein, welche Spannungen p den Volumina v entsprechen, während d. Zustandsänderung fortschreitet. Diese Abhängigkeit kann entweder durch eine Gleichung $pv = f(\sigma)$ ausgedrückt sein, oder sie kann durch eine Curve dargestellt werden, welche die Axen v und p in solchen Entfernungen v und p vom Anfangspunkte schneidet, daß $pv = f(\sigma)$ ist. Ist eine solche Curve gegeben, so kann man für jeden Punkt derselben v und p messen, und dann $f(\sigma) = pv$ berechnen. Ist aber eine Gleichung $pv = f(\sigma)$ gegeben, so kann man eine Curve construiren, welche die Axen v und p in solchen Entfernungen v und p vom Anfangspunkte schneidet, daß $pv = f(\sigma)$ ist.

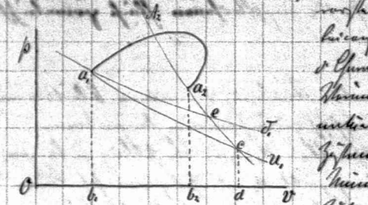
Ferner ist es nöthig, die Arbeit A zu kennen, welche bei einer Zustandsänderung von einem Anfangszustande, für welchen $v = v_1$ und $p = p_1$ ist, bis zu einem Endzustande, für welchen $v = v_2$ und $p = p_2$ ist, nach außen abgegeben wird. Diese Arbeit ist gleich dem Integrale $\int p\,dv$, wenn p eine Function von v ist, welche durch die Gleichung $pv = f(\sigma)$ gegeben ist, und wenn die Integration zwischen den Grenzen $v = v_1$ und $v = v_2$ ausgeführt wird. Ist p eine Function von v, welche durch eine Curve gegeben ist, so kann man die Arbeit A durch Messung und Berechnung des Flächeninhaltes finden, welcher von der Curve, von den Ordinaten p_1 und p_2, und von der Abscissenaxe begrenzt wird.

Es kann nun ein gegebener Körper von v_1 p_1 t_1 σ_1 U_1 durch eine Zustandsänderung, während welcher $pv = f(\sigma)$ ist, in einen Zustand v_2 p_2 t_2 σ_2 U_2 übergeführt werden, und es kann dabei eine Arbeit A nach außen abgegeben werden. Ferner kann dem Körper während der Zustandsänderung eine Wärmemenge Q zugeführt werden. Es fragt sich nun, welche Beziehungen zwischen diesen Größen bestehen, und wie man dieselben durch Curven darstellen kann.

Diese Fragen können nur dann vollständig beantwortet werden, wenn man weiß, in welcher Weise die Zustandsänderung vor sich geht, d. h. wenn man weiß, welche Zustände der Körper während der Zustandsänderung durchläuft, und in welcher Reihenfolge diese Zustände auf einander folgen. Es ist daher nöthig, die Zustandsänderungen, welche in der Praxis vorkommen, in solche einzutheilen, welche sich durch Curven darstellen lassen, und in solche, welche sich nicht durch Curven darstellen lassen. Zu den letzteren gehören alle diejenigen Zustandsänderungen, bei welchen während der Zustandsänderung Wirbelbewegungen oder Diffusionen im Innern des Körpers auftreten, oder bei welchen Theile des Körpers mit verschiedenen Temperaturen sich berühren, ohne daß zwischen ihnen Wärme übergeht, oder bei welchen Theile des Körpers mit verschiedenen Spannungen sich berühren, ohne daß Arbeit nach außen abgegeben wird, oder bei welchen Theile des Körpers mit verschiedenen Geschwindigkeiten

dieser Stelle wird durch d. Ordinate d. Endpunkt a_2 d. Isothermenkurve in 2 Teile geteilt, von welchen d. eine, begrenzt von d. Isothermenkurve $a_1 a_2$ = d. Isothermenarbeit L d. Luftmenge, begrenzt d. adiabatischen Kurve $k_2 = U_2 - U_1$ = d. Zunahme d. inneren Arbeitsvermögens in folge d. Isothermenänderung ist. Da hier sind die Endpunkte dieser Strecken gegeben od. ungefähr zu setzen d. Arb. N kann so von einem beliebigen Punkte d. Adiabate a_1 aus zur Ermittlung d. Strecke $= L$ und $= WQ$ von d. Ordinate d. Anfangspunktes a_1 aus zur Ermittlung d. Strecke $= U_2 - U_1$ von d. Ordinate d. Endpunktes a_2 d. Isothermenkurve aus gefunden werden, indem man d. Punkte, durch welche adiabatische Kurven gehen, die mit d. Isothermenkurve beziehungsweise mit d. Ordinaten a_1 und a_2 gleiche Flächeninhalte einschließen, ermittelt.

Will man nun aus $N = \int \frac{dQ}{T}$, welche d. Isothermenänderung zwischen d. Isothermenkurve $a_1 a_2$ enthält, auf eine geometrische Darstellung zurückgehen, so gelangt man durch Einführung der Temperatur t und U zur Fläche eines Kreises, welche Fläche $= \frac{Q}{T}$ ist, wenn d. Wärme von 1 kg, welche d. isothermischen Kurve $a_1 a_2$ entspricht, Q und d. absolute Temperatur T bedeutet. Wenn nun Q eine veränderliche Größe ist, so kann d. Wärme von 1 kg, welche d. isothermischen Kurve $a_1 a_2$ entspricht, $= Q$ gesetzt werden, wenn d. Temperatur T, welche d. Isothermenänderung $a_1 a_2$ entspricht, als eine mittlere Temperatur t_1 gedacht wird, welche zwischen t und t_2 liegt, und welche so gewählt ist, daß die Fläche $a_1 a_2 e a_1$ = d. Fläche $a_1 a_2 e a_1$ ist.



Nimmt man nun t_1 so an, daß die Isothermenänderung zwischen d. Isothermenkurven $a_1 a_2$ beendigt ist, die Isothermenänderung fortgesetzt wird zwischen adiabatischer Kurve $k_2 e$ und dieser zwischen d. isothermischen Kurve $e a_1$, also fortgesetzt wird auf jenen Isothermen d. Mittelpunkt von Wärmen und diese bei konstanter Temperatur t_1 = Anfangstemperatur, so sind beide Isothermenänderungen vertauschbar, und bei d. Isothermenänderung d. Wärme von d. Temperatur t_1 in folge von t_2 und darauf weiter gehend von t_2 auf t_1 (adiabatische Kurve $a_2 e$) bei d. Isothermenänderung $a_1 a_2$ bei a_1 verbrauchten Verwandlungswerte sind also:

$$N = \int \frac{dQ}{T} \quad \text{und} \quad N_1 = \div \frac{Q_1}{T_1}$$

wobei während d. Isothermenänderung zwischen d. isothermischen Kurve $e a_1$ d. Temperatur konstant $= t_1$ ist, so kann man d. Verwandlungswert schreiben:

$$N_1 = \frac{1}{T_1} \int dQ = \div \frac{Q_1}{T_1}$$

wobei $\div Q_1$ wie d. vom Körper während d. gegen Arbeitung auf $e a_1$ aufgenommene Wärmemenge anzusehen ist.

Endlich sehe, wenn die Isothermenänderung $a_1 a_2$ fortgesetzt gedacht ist auf $a_1 e a_1$, ist dieselbe zu einem einschließenden Kreisprozeß $a_1 a_2 e a_1$ geworden, dessen Verwandlungswert natürlich = d. Summe beider ist $= N + N_1 = \int \frac{dQ}{T} \div \frac{Q_1}{T_1}$ ist.

Schließlich ist aber für jeden einschließenden Kreisprozeß d. Summe d. Verwandlungswerte d. aufgenommenen Verwandlungswerte $= 0$, also:

$$N \div \frac{Q_1}{T_1} = 0.$$

$$\text{od.} \quad N = \frac{Q_1}{T_1}$$

d. Arbeitswert d. Wärme $L = WQ_1 = WNT_1$ kann also auf dem Wege wie d. Bestimmung von $L = WQ$ mit Hilfe von 2 Kurven, einer durch d. Anfangspunkt gehenden adiabatischen und einer durch d. Endpunkt gehenden isothermischen Kurve, deren eine beide Kurven schon gegeben sind = U. und N, bestimmt werden, wobei die beiden festen Kurven schon gegeben sind = U. und N, für welchen vorausgesetzten Fall d. Wärme von d. Wärme Q_1:

$$WQ_1 = WNT_1 = \text{Fläche } b_1 a_1 e c d$$

Man findet diese Fläche ebenso durch WQ_1 zu bestimmen wie d. bildliche Darstellung d. Verwandlungswertes N zu bestimmen war, welcher der Isothermenänderung zwischen d. gegebenen Isothermenkurve $a_1 a_2$ entspricht.

Mit Hilfe d. 3 Kurven, adiabatische, isothermische und adiabatische, kann man also, wie gezeigt, die einer gegebenen adiabatischen Isothermenänderung (Ausdehnung), ebenso wie die zu dieser gehörende Isothermenänderung (Zusammendrückung) d. einem adiabatischen Vorgang entsprechende Verwandlungswert d. wirksamen Wärme und ebenso d. Verwandlungswert der Luftmenge zur bildlichen Darstellung bringen.

Bemerkenswert ist noch d. Gleichung $N = \frac{Q_1}{T_1}$ d. Verwandlungswertes ganz unabhängig ist von d. Druck a_2 auf d. adiabatische Kurve $k_2 e$ und unabhängig von d. Größe d. Isothermenänderung von a_1 aus a_2 stattfindet d. h. unabhängig von d. Form d. Isothermenkurve $a_1 a_2$, indem d. Größe Q_1 nur abhängig ist von d. gegebenen Punkten a_1 und e also hier d. Punkt a_1 und d. isothermischen Kurve k_2 bestimmt ist und T_1 unabhängig von d. Spannung d. Punktes e d. h. d. isothermischen Kurve k_2 bestimmt ist und T_1 unabhängig von d. Größe d. Isothermenänderung. D. Wert N wechselt also mit seinen Änderungen, wenn a_2 auf d. adiabatischen Kurve k_2 verändert, da er immer gleich bei N, den d. adiabatischen Kurve k_2 eigentümlichen Wert hat, so oft d. Isothermenkurven $a_1 a_2$ d. adiabatische Kurve schneidet. Demnach also in einer Fläche zwei d. zusammengehörigen Endpunktkurven in d. Mannigfaltigkeit, während d. adiabatischen Kurven den Kurven konstanter N entsprechen.

Der soeben gefundene Wert N kann auf besondere Fälle angewendet werden, wenn dabei mit d. Annahmen d. Gase und Dämpfe vorgegangen wird, daß dieselben in Übereinstimmung gebracht werden mit d. Erfahrungen, aus welchen d. Zustandsänderung d. Temperatur T_1 zu ermitteln, welche in den allgemeinen Gleichungen eine bestimmende Rolle spielt, so wird es möglich sein, wenn man die gewonnenen Gleichungen schließlich mit einfachen einfachen und allein sicher bekannten Größen, welche d. Verhalten d. Gase ein- für allemal vorgeschrieben, gebrauchen können.

Verhalten d. Gase, insbesondere d. atmosphärischen Luft.

Zunächst müssen wir auf einige physikalische Begriffe und Gesetze zurückkommen.

Wenn man sich unter einem gasförmigen Körper od. auf einen Gase ein ausgedehntes Bild einer Luftmenge, welche uns bis jetzt nur als Gase bekannt ist, denken, so sind d. zur Erklärung d. Fortpflanzung d. Schwingungen (Schallwellen) dienenden Gesetze, welche in den elastischen Flüssigkeiten gelten, auch für gasförmige Körper gültig, und ebenso sind d. zu Erklärung d. Verdampfung, Verdunstung, Kondensation, Wasserbildung, Luftfeuchtigkeit, Nebel, Wolken, Regen, Schnee, Hagel, Tau, Reif, Eis, Gletscher etc. bestimmt d. Gesetze dieser Körper, welche sich in Gase verwandeln, oder mit Gasen gemischt sind, auf Gase anwendbar.

Die Gesetze, welche für gasförmige Körper gelten, sind nur genaue Annäherungen an d. einfache Gesetze, welche sich an d. Molekularkräfte knüpfen, und welche für die Gase, welche in der Natur vorkommen, nicht genau bestimmt sind, sondern nur durch Annäherung gefunden werden können.

Diese Gesetze gelten nun d. einfachen Gase nicht nur für bestimmte, sondern in allen Fällen, wenn auch d. Größe d. Abweichungen mit d. Größe d. Zustandsänderung wächst, und es ist daher immer möglich, mit einer Annäherung, welche bis zu einem angenommenen Grade genau ist, die Gesetze der gasförmigen Körper auf die wirklichen Gase anzuwenden.

Die Gesetze gelten nun d. einfachen gasförmigen Körper nicht nur für bestimmte, sondern in allen Fällen, wenn auch d. Größe d. Abweichungen mit d. Größe d. Zustandsänderung wächst, und es ist daher immer möglich, mit einer Annäherung, welche bis zu einem angenommenen Grade genau ist, die Gesetze der gasförmigen Körper auf die wirklichen Gase anzuwenden.

Das Verhalten d. gasförmigen Körper ist durch zwei Annahmen, welche sich an d. Molekularkräfte knüpfen, und welche für die Gase, welche in der Natur vorkommen, nicht genau bestimmt sind, sondern nur durch Annäherung gefunden werden können, bestimmt.

Diese Gesetze gelten nun d. einfachen gasförmigen Körper nicht nur für bestimmte, sondern in allen Fällen, wenn auch d. Größe d. Abweichungen mit d. Größe d. Zustandsänderung wächst, und es ist daher immer möglich, mit einer Annäherung, welche bis zu einem angenommenen Grade genau ist, die Gesetze der gasförmigen Körper auf die wirklichen Gase anzuwenden.

Man nennt den festen normalen Druck einer Flüssigkeit auf die Flächeneinheit ihren Druck p, die Größe des Volumens, welches eine Gewichtseinheit der Flüssigkeit einnimmt, ihr spezifisches Volumen v. Das spezifische Volumen ist der reziproke Wert der Dichte, also $v = \frac{1}{\delta}$.

Es handelt sich nun darum, die Abhängigkeit dieser drei Größen voneinander festzustellen, d. h. es ist eine solche Gleichung zu suchen, welche bei irgendeiner Temperatur zwischen p und v besteht und welche sich mit der Temperatur ändert, damit man für jede Temperatur das spezifische Volumen eines Gases berechnen kann, wenn sein Druck gegeben ist.

Es handelt sich zunächst darum, die Gleichung für die Isotherme aufzustellen, unter der man eine Kurve versteht, welche die Abhängigkeit zwischen p und v bei konstanter Temperatur t zum Ausdruck bringt. Da nun bei konstanter Temperatur t nur ein einziger Wert des Produktes pv möglich ist, welcher sich mit wechselndem Drucke p ändert, so ist die Gleichung der Isotherme:

$$pv = f(t)$$

wobei f eine noch unbekannte Funktion bedeutet, welche nur für jeden besonderen Wert von t einen bestimmten Wert annimmt.

Wenn nun endlich p als konstant angenommen wird, und wenn die Gleichung differenziert wird, so bekommt man:

$$pdv = f'(t)\,dt$$

wobei $f'(t)$ den Temperaturkoeffizienten der Funktion $f(t)$ bedeutet, also $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$.

Wenn das Gas nun einen vollkommen festen Körper bildet und wenn also der konstante Druck p = dem normalen Atmosphärendruck, so wird die Temperaturänderung proportional der Volumenänderung vergrößert oder verkleinert werden müssen, damit die spezifische Definition der Temperatur (Seite 20) stets $\frac{dv}{dt}$ konstant wird und damit $f'(t)$ konstant wird. Nun kann aber $\frac{dv}{dt}$ für alle Gase nur dann konstant sein, wenn die Temperatur t müssen gültig für den normalen Luftthermometer sind, welche für alle Gase nur dann gültig sind, wenn sie alle $f(t)$ für alle Gase eine lineare Funktion der Temperatur sind und ist also $f(t)$ für alle Gase eine lineare Funktion der normalen Temperatur p = einer Konstanten, vorausgesetzt, wenn diese Konstante mit R bezeichnet wird:

$$\text{also } f(t) = Rt \text{ , so lässt sich } pdv = f'(t)\,dt \text{ mit der linken Gleichung:}$$

$$pv = S + Rt$$

unter S einen weiteren Konstanten verstehen.

= Zustandsgleichung der Gase, wenn R und S für verschiedene Gase verschiedene Werte haben können.

(Wie man diese Gleichung der Zustandsgleichung vervollständigt, ist ein Allgemeinen der Form der Zustandsgleichungen abhängig von der Annahme der Abweichungen des Gases vom vollkommenen Zustande. Da nun aber diese Abweichungen bei verschiedenen Gasen verschieden sind, so folgt natürlich, daß die Konstanten S und R für verschiedene Gase verschiedene Werte haben müssen. Genau genommen gilt also die Gleichung nur für ein bestimmtes Gas, aber allgemein für alle Gase, sofern S und R für verschiedene Gase verschiedene Werte haben können.)

Wenn man in der Gleichung der Zustandsgleichung $\frac{R}{S} = \alpha$ setzt:

I. . . . . $pv = S(1+\alpha t)$

II. . . . . $pv = R(a+t)$ wenn $a = \frac{1}{\alpha}$ = einen reziproken Wert von α.

Was nun den Koeffizienten α betrifft, so ist derselbe innerhalb der Grenzen, innerhalb deren die Zustandsgleichung gültig ist, nicht konstant, sondern variiert mit der Temperatur, so zwar, daß der Temperaturkoeffizient α mit steigender Temperatur abnimmt. Für Temperaturänderungen von 1° innerhalb der Grenzen 0° und 100° kann man jedoch α als konstant annehmen, ohne einen großen Fehler zu begehen.

Wird nun α konstant angenommen, so kann man $\frac{dv}{dt}$ durch $\frac{v_1 - v_0}{100}$ ersetzen, wobei v_1 das spezifische Volumen bei 100° und v_0 das spezifische Volumen bei 0° unter derselben Spannung bedeutet. Es ist also $\frac{dv}{dt} = \frac{v_1 - v_0}{100}$ und $dt = 1$ gesetzt, so ist $pdv = f'(t)$:

$$pdv = \frac{v_1 - v_0}{100}$$

Nun ist aber $v_0 = \frac{1}{\delta_0}$ und $v_1 = \frac{1}{\delta_1}$, wobei δ_0 und δ_1 die Dichten bei 0° und 100° bedeuten, also:

$$pdv = \frac{\delta_0 - \delta_1}{100\,\delta_0\,\delta_1}$$

Wird nun die Änderung des Volumens dv sehr klein, so kann man $\delta_0 - \delta_1 = d\delta$ setzen, wobei $d\delta$ die Änderung der Dichte bedeutet, welche der Volumänderung dv entspricht, also:

$$pdv = \frac{d\delta}{100\,\delta_0\,\delta_1}$$

Da nun δ_0 und δ_1 nur sehr wenig voneinander verschieden sind, so kann man $\delta_0 \cdot \delta_1 = \delta^2$ setzen, wobei δ die Dichte bei einer Temperatur zwischen 0° und 100° bedeutet, also:

$$pdv = \frac{d\delta}{100\,\delta^2}$$

Da nun $\delta = \frac{1}{v}$, so ist $d\delta = -\frac{dv}{v^2}$, also:

$$pdv = -\frac{dv}{100\,v^2}$$

Integriert man diese Gleichung, so erhält man:

$$pv = \frac{1}{100} + C$$

Da nun $\frac{1}{100} = S\alpha$, so ist:

$$pv = S\alpha + C$$

Da nun für $p = \infty$, $v = 0$ sein muß, so ist $C = 0$, also:

$$pv = S\alpha$$

Ist nun v_0 das Volumen von v, welches bei derselben Spannung p, bei der Temperatur $t = 0$ entspricht, so ist nun nach I:

$$pv_0 = S$$

und folglich durch Division beider Gleichungen:

$$\alpha = \frac{dv}{v_0} = \text{der Ausdehnungskoeffizient der Gase.}$$

Man sieht also nun, daß der reziproke Wert des Ausdehnungskoeffizienten $\frac{R}{S}$ und S nur für gleiche Gase und für gleiche Spannung konstant sei. Da nun aber nur für vollkommene Gase $\frac{R}{S}$ und S für alle Gase konstant sind, so kann man $\frac{R}{S}$ für alle Gase konstant sei.

Man sieht zu experimentellen Zwecken muß man also den Ausdehnungskoeffizienten α für verschiedene Gase durch Versuche zu bestimmen suchen, und benutzt dabei entweder die Gleichung I oder II. Nehmen wir die Gleichung I:

$$pv = S(1+\alpha t) = S + S\alpha t$$

$pv - t$ durch Beobachtung zu bestimmen, diese in die Gleichung einsetzen, so können S und α berechnet und also nun die Gleichung für die Spannung von α völlig bekannt.

Es empfiehlt sich, die Beobachtungen zur Bestimmung von α zwischen den Temperaturen $t = 0°$ und $t = 100°$ zu machen, indem man diese Temperaturen leicht genau herstellen und halten kann durch Verbindung von Eis und Wasser und Dampf.

Es seien nun p_0 und v_0 die beobachteten Werte von p und v bei der Temperatur $t = 0°$

und p_1 " v_1 " " " " " " " $t = 100°$

und Gase, für welche

$$p_0 v_0 = S(1 + \alpha \cdot 0) = S(1 + \alpha \cdot 0) = S$$
$$p_1 v_1 = S(1 + 100\alpha)$$

also $\frac{p_1 v_1}{p_0 v_0} = 1 + 100\alpha$ oder $\alpha = \frac{p_1 v_1 - p_0 v_0}{100\, p_0 v_0}$

Von verschiedenen Forschern sind in dieser Hinsicht Versuche gemacht worden und zwar namentlich für Luft, welche deshalb meistens in beiden Fällen, d. h. bei der Berechnung (zur Feststellung der beiden Größen $\frac{R}{S}$ und S) bei verschiedenen Volumen oder auch bei verschiedener Spannung vorgenommen.

Handelt es sich in beiden Fällen um Spannung gleich also $p_0 = p_1$, so hat man zur Bestimmung von α die Formel:

$$\alpha = \frac{v_1 - v_0}{100\, v_0}$$

und handelt es sich in beiden Fällen um Volumen constant also $v_0 = v_1$, so hat man:

$$\alpha = \frac{p_1 - p_0}{100\, p_0}$$ zur Bestimmung des Ausdehnungskoeffizienten.

Hat man nun in beiden Fällen das Gas, welches in beiden Versuchen (Messung von $\frac{R}{S}$ und S) genau festgestellt worden sein, hat man also α bestimmt, so kann man nun für jedes Gas, welches in beiden Fällen für verschiedene Volumen und verschiedene Spannungen $\frac{R}{S}$ und S bestimmt worden ist, α berechnen und also nun die Gleichung für die Spannung von α völlig bekannt.

Es ist nun noch zu untersuchen, ob die Gleichung $pv = S(1+\alpha t)$ oder $pv = R(a+t)$ für alle Gase gleich gut gilt, oder ob sie nur für gewisse Gase gilt, und ob sie für alle Gase gilt, wenn man für jedes Gas die entsprechenden Werte von S und R einsetzt.

Es ist nun bekannt, daß die Gleichung $pv = S(1+\alpha t)$ für alle Gase nur annähernd gilt, daß sie also nur für gewisse Gase gilt, und daß sie für alle Gase nur dann gilt, wenn man für jedes Gas die entsprechenden Werte von S und R einsetzt.

Es ist nun bekannt, daß die Gleichung $pv = S(1+\alpha t)$ für alle Gase nur annähernd gilt, daß sie also nur für gewisse Gase gilt, und daß sie für alle Gase nur dann gilt, wenn man für jedes Gas die entsprechenden Werte von S und R einsetzt.

Nimmt man d. Ausdehnungscoefficient α für den Gasförmigen Zustand einer vollkommenen Flüssigkeit als einen von d. Zustand unabhängig Constante zu betrachten und diesen Werth von α festhaltend, gleichzeitig für jeden Körper und Zustand desselben irgend welchen Temperaturen beobachtete specifische Gewichte γ und γ_0 bestimmt, so gestatten beobachtete Temperaturen t und t_0 jener Körper, d. zugehörigen Volumina v und v_0 mit einander zu vergleichen. Diese Gleichung lautet:

$$\alpha = 0{,}00366$$

welche für Wasserdampf neuerdings wieder besser bestimmt gefunden wurde, indem d. beobachteten Drucke bei Temperaturen von $t = 100°$ unter normalem Atmosphärendruck genauer wurden. Bei Wasserdampf ist jedoch zu beachten, daß jene von allen permanenten Gasen bei weitem d. Wasserdampf ist, für welchen α noch einige Unsicherheit bleibt. Es scheint also am sichersten d. oben für permanente Gase und vollkommene Gase angenommene Werth $\alpha = 0{,}00366$ auch für Wasserdampf beibehalten zu werden.

Ist d. Gas, für welches α gesucht werden soll, nicht vollkommen, so ist d. Gleichung $pv = R(a+t)$ zu ersetzen durch $pv = S(1+\delta t)$ und es ist δ der Ausdehnungscoefficient eines solchen Gases bei constantem Volumen, S eine Constante, welche nur für jedes Gas einen besonderen Werth hat, und p d. Spannung, welche d. Gas bei d. Temperatur t und dem Volumen v ausübt.

Ist $\frac{1}{\delta} = a$ und d. Gleichung mit δ multiplicirt, so wird:

$$pv = \delta S(a+t)$$

Während nun S für verschiedene Gase sehr verschiedene Zahlenwerthe hat, ist δS für alle Gase nahezu constant, so daß man $\delta S = R$ setzen kann, wodurch die Gleichung übergeht in:

$$pv = R(a+t)$$

Setzt man nun $t = -a$, so wird $pv = 0$, d. h. es ist $-a$ diejenige Temperatur, bei welcher das Volumen eines Gases unter jedem Drucke verschwindend klein wird, oder bei welcher die Gase ihre Expansivkraft verlieren. Diese Temperatur heißt d. absolute Temperatur und wird gefunden, wenn man $t = 0$ setzt, also a selbst ist. Bezeichnet man d. absolute Temperatur mit T, so ist:

$$T = a + t$$

und somit d. Gleichung:

$$pv = RT$$

Während nun diese Constante a in d. Gleichung $pv = R(a+t)$ für alle Gase denselben Werth $= \frac{1}{0{,}00366} = 273$ hat, ist R für verschiedene Gase sehr verschieden gefunden worden. Um diese Werthe für R zu bestimmen, muß man eine Größe zu bestimmen gesuchte Werthe von v p t kennen. Da d. absolute Temperatur T als die für d. Ausdehnung maßgebende Größe zu betrachten ist, so ergiebt sich eine besondere Bedeutung für diese absolute Temperatur T d. Constanten R zu bestimmen. Sie stellt nämlich d. einfache physikalische Thatsache dar, daß 1 Liter Luft bei normalem Barometerstand und d. Temperatur $t = 0$ — 1,2932 Kgr wiegt, so daß also ist γ d. Gewicht

$$\gamma = \frac{1}{v} = 1{,}2932$$

des normalen Barometerstandes ist bekanntlich jene Quecksilbersäule, deren Gewicht gleich ist mit einer Quecksilbersäule von 1 qcm Querschnitt und 0,76 m Höhe bei 0° Temperatur d. Quecksilbers, d. normale Atmosphärendruck ist also = dem Gewicht einer Quecksilbersäule von 1 qcm Querschnitt und 0,76 m Höhe bei 0° Temperatur d. Quecksilbers multiplicirt in kgr pr qcm

d. Gewicht d. Quecksilbersäule ist nun = Volumen . spec. Gewicht
= 0,76 Cubm . spec. Gewicht.

Und d. spec. Gewicht d. Quecksilber beträgt, spec. Schwere d. Quecksilber bei 0° 13,596 mal so groß als d. Schwere d. Wassers bei 4°; ferner wiegt bekanntlich ein Cubicmeter d. Wassers d. Kgr 1 Cubicm. Wasser 1 Kgr also 1 Cubm natürlich 1000 Kgr. Demnach ist also d. Gewicht d. Quecksilbers pr Cubm bei 0° = 13,596 . 1000 = 13596 Kgr

und also d. Gewicht d. Quecksilbersäule = 0,76 . 13596 = 10333 Kgr

dies Gewicht ist aber = d. Atmosphärendruck also:

$$p = 10333 \text{ Kgr pr qcm.}$$

Nun fand also unter gewöhnlichen Umständen pr v p t, nämlich:

$\frac{1}{v} = 1{,}2932$ $p = 10333$ Kgr pr qcm und $t = 0°$

Durch d. obigen Gleichung ergab:

$$R = \frac{pv}{273+t} = \frac{10333}{1{,}2932\,(273+0)} = \frac{10333}{1{,}2932 \cdot 273} = 29{,}27.$$

Daraus ersehen wir, daß R oder δR als reine constante Größe für diejenigen Gase, deren Ausdehnung, wenn man nur nicht R bestimmen will für ein anderes Gas, dessen Dichtigkeit nur im Stillstand gemessen, diejenigen Gase bezeichnet, welche annähernd vollkommen sind und Nichts mit ihrer Spannung und Temperatur.

Durch Substitution in $pv = R(a+t)$ sind nunmehr sämmtliche d. Constanten R genau bestimmt, welche d. Gase in ihrem Verhalten gegen Spannung und Temperatur charakterisiren. Nur bei denjenigen Gasen, welche sich nicht vollkommen verhalten, ist δ d. Dichtigkeit eines solchen Gases, d. h. d. Verhältniß seiner Dichtigkeit zu d. Dichtigkeit eines vollkommenen Gases bei gleicher Spannung und Temperatur, noch besonders zu bestimmen, d. h. d. Coefficient δ:

$$\delta = \frac{29{,}27}{R}$$

Es muß jedoch hier bemerkt werden, daß Werth $R = 29{,}27$ für viele solche Gase nicht genau ist, welche ganz vorzüglich vollkommen elastisch sind (Wasserstoff, Sauerstoff etc) da sie 1 cubicm Gewicht von 1 cubicm Luft = 1,2932 Kgr ist nur annähernd richtig ist, während diese Relation genau bestimmt werden kann. Es liegt dies daran, daß Luft nicht vollkommen elastisch ist, und daß sie daher nicht genau nach den Gesetzen vollkommener Gase sich ausdehnt und zusammendrückt läßt. Es ist daher nöthig, für jedes Gas, welches nicht vollkommen elastisch ist, d. Coefficient δ zu bestimmen, wodurch dann R für jedes solche Gas genau bestimmt wird.

Es ist nun leicht, δ für jedes Gas zu bestimmen, wenn man nur R für dasselbe kennt. Man hat nämlich nur nöthig, d. Gewicht eines Cubicmeters dieses Gases bei gegebener Spannung und Temperatur zu bestimmen, und dieses durch d. Gewicht eines Cubicmeters Luft unter gleicher Spannung und Temperatur zu dividiren, um δ zu erhalten.

Es ist nämlich d. Gewicht eines Cubicmeters Luft bei 0° und 10333 Kgr Spannung = 1,2932 Kgr, d. Gewicht eines Cubicmeters eines Gases, dessen Dichtigkeit δ ist, bei gleicher Spannung und Temperatur = $\delta \cdot 1{,}2932$ Kgr, also ist δ d. Quotient:

$$\delta = \frac{\text{Gewicht eines Cubicmeters des Gases}}{1{,}2932}$$

Es ist nun leicht, δ für jedes Gas zu bestimmen, wenn man nur R für dasselbe kennt. Man hat nämlich nur nöthig, d. Gewicht eines Cubicmeters dieses Gases bei gegebener Spannung und Temperatur zu bestimmen, und dieses durch d. Gewicht eines Cubicmeters Luft unter gleicher Spannung und Temperatur zu dividiren, um δ zu erhalten. Es ist nämlich d. Gewicht eines Cubicmeters Luft bei 0° und 10333 Kgr Spannung = 1,2932 Kgr, d. Gewicht eines Cubicmeters eines Gases, dessen Dichtigkeit δ ist, bei gleicher Spannung und Temperatur, $= \delta \cdot 1{,}2932$ Kgr, also ist δ d. Quotient:

$$\delta = \frac{\text{Gewicht eines Cubicmeters des Gases}}{1{,}2932}$$

Es ist nun leicht, δ für jedes Gas zu bestimmen, wenn man nur R für dasselbe kennt. Man hat nämlich nur nöthig, d. Gewicht eines Cubicmeters dieses Gases bei gegebener Spannung und Temperatur zu bestimmen, und dieses durch d. Gewicht eines Cubicmeters Luft unter gleicher Spannung und Temperatur zu dividiren, um δ zu erhalten. Es ist nämlich d. Gewicht eines Cubicmeters Luft bei 0° und 10333 Kgr Spannung = 1,2932 Kgr, d. Gewicht eines Cubicmeters eines Gases, dessen Dichtigkeit δ ist, bei gleicher Spannung und Temperatur, $= \delta \cdot 1{,}2932$ Kgr, also ist δ d. Quotient:

$$\delta = \frac{\text{Gewicht eines Cubicmeters des Gases}}{1{,}2932}$$

Es ist nun leicht, δ für jedes Gas zu bestimmen, wenn man nur R für dasselbe kennt. Man hat nämlich nur nöthig, d. Gewicht eines Cubicmeters dieses Gases bei gegebener Spannung und Temperatur zu bestimmen, und dieses durch d. Gewicht eines Cubicmeters Luft unter gleicher Spannung und Temperatur zu dividiren, um δ zu erhalten. Es ist nämlich d. Gewicht eines Cubicmeters Luft bei 0° und 10333 Kgr Spannung = 1,2932 Kgr, d. Gewicht eines Cubicmeters eines Gases, dessen Dichtigkeit δ ist, bei gleicher Spannung und Temperatur, $= \delta \cdot 1{,}2932$ Kgr, also ist δ d. Quotient:

$$\delta = \frac{\text{Gewicht eines Cubicmeters des Gases}}{1{,}2932}$$

Da d. spez. Wärme c bei constantem Volumen d. Gase bestimmt, so ist dieselbe einfach direct zu bestimmen, sondern man sucht dieselbe meist indirect zu ermitteln mittels d. Verhältniß $n = \frac{c_p}{c}$, welches Verhältniß man mit verschiedenartige Mittel und Methoden bestimmt hat, wie später weiter angeführt werden soll. Nach neueren Versuchen ist für d. atmosphärische Luft ein Mittel aus verschiedenen Versuchen

$$n = 1{,}41.$$

und also $c = \frac{c_p}{n} = \frac{0{,}2375}{1{,}41} = 0{,}1684.$

für irgend ein anderes Gas kann d. spez. Wärme c theoretisch ermittelt werden aus seiner spez. Wärme c_1 seiner Dichtheit δ in Vergleich mit atmosphärischer Luft und mit den Werthen von c und c_1 für atmosphärische Luft, so daß z. Berechnung d. Werthes c aus c_1 für jedes Gas nur den nöthigen Werth der Dichtheit δ einzuführen ist, für welche Berechnung d. Werth $c = 0{,}1684$ für d. spez. Wärme der atmosphärischen Luft und d. Verhältniß $n = 1{,}41$ stets constant sei mit d. spez. Wärme $c_1 = 0{,}2375$. Die hierzu erforderlichen specifischen, und zwischen $n = 1{,}41$ stattfindenden Werth d. Verhältniß n für alle Gase berechnet, wird später vorläufig zusammengestellt und genauer gezeigt werden, wie diese Zahlen zu berechnen sind.

Die specifische Wärme c bei constantem Volumen und c_1 bei constantem Druck sind Größen, welche in besonderer Beziehung stehen zu d. spez. Wärmen C und C_1 und v. Temperaturfunction ϑ, es war nämlich: (Seite 66–67):

$$C_v = \frac{dQ}{d\vartheta} \text{ im Falle } v = \text{const.} \quad \text{und} \quad C_p = \frac{dQ}{d\vartheta} \text{ im Falle } p = \text{Const.}$$

und ferner: $C = C_v \frac{d\vartheta}{dt}$ und $C_1 = C_p \frac{d\vartheta}{dt}$

Hieraus wurde d. Abkürzung $\frac{d\vartheta}{dt} = \vartheta'$ benutzt, so folgt:

$$C = C_v \vartheta' \quad \text{und} \quad C_1 = C_p \vartheta'$$

$$\text{oder} \quad C_v = \frac{C}{\vartheta'} \quad \text{und} \quad C_p = \frac{C_1}{\vartheta'}$$

Hieraus ergibt sich d. partielle Abhängigkeit von ϑ auf v, indem ϑ eine mittelbare Function von v ist, d. i. ϑ eine Function von t und t wieder eine Function von v ist, daher ist nun d. partielle Abhängigkeit von ϑ auf t mit d. partiellen Abhängigkeit von t auf v vorläufig darzustellen:

$$\frac{d\vartheta}{dv} = \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \frac{dt}{dv} = \vartheta' \cdot \frac{dt}{dv}$$

$$\text{und ebenso} \quad \frac{d\vartheta}{dp} = \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \frac{dt}{dp} = \vartheta' \frac{dt}{dp}$$

Hier wurde d. beiden Abhängigkeiten von t auf v und p benutzt, t kann durch Eliminiren mit d. Zustandsgleichung d. Gase – Differentiirt nun einfach partiell auf v, resp. also p als Constante an, so ergibt sich:

$$\frac{dt}{dv} = \frac{p}{R}$$

und Differentiirt nun partiell auf p, also unter Annahme v = Constante, so erhält man:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{v}{R}$$

Die Substitution dieser Ausdrücke nun in den beiden obigen Gleichungen, so wurden diese beiden Specialle auf Gase angewandt, und nun erhält dann diese nun für Gase geltenden Formen:

Aus d. ersten: $$A = \frac{d}{dp}\left(C_1 \frac{p}{R}\right) - \frac{d}{dv}\left(C \frac{v}{R}\right)$$

Nach d. bezeichneten Annahmen, d. spez. Wärmen C und C_1 und d. Coefficient R für ein und dasselbe Gas constant sind, sind C, C_1 und R als unabhängig von den, d. Wärmegrad und specifischen Größen v u. p zu betrachten, nun folgt demnach:

$$A = \frac{(C_1 - C)}{R} \cdot \frac{dp}{dp} - \frac{dv}{dv}$$

$$A = \frac{C_1}{R}\frac{dp}{dp} - \frac{C}{R}\frac{dv}{dv} = \frac{C_1 - C}{R}$$

$$A = \frac{d}{dp}\left(c_p \cdot \frac{d\vartheta}{dv}\right) - \frac{d}{dv}\left(c_v \cdot \frac{d\vartheta}{dp}\right)$$

$$A\vartheta = (c_p - c_v)\,\frac{d\vartheta}{dp} \cdot \frac{d\vartheta}{dv}$$

In diesen beiden Gleichungen bedeuten c_p und c_v gewisse Functionen v. den Wärmen u. specifischen Größen, welche in besonderer Beziehung stehen zu d. spez. Wärmen C und C_1 und v. Temperaturfunction ϑ, es war nämlich: (Seite 66–67):

$$C_v = \frac{dQ}{d\vartheta} \text{ im Falle } v = \text{const.} \quad \text{und} \quad C_p = \frac{dQ}{d\vartheta} \text{ im Falle } p = \text{Const.}$$

und ferner: $C = C_v \frac{d\vartheta}{dt}$ und $C_1 = C_p \frac{d\vartheta}{dt}$

Hieraus wurde d. Abkürzung $\frac{d\vartheta}{dt} = \vartheta'$ benutzt, so folgt:

$$C = C_v \vartheta' \quad \text{und} \quad C_1 = C_p \vartheta'$$

$$\text{oder} \quad C_v = \frac{C}{\vartheta'} \quad \text{und} \quad C_p = \frac{C_1}{\vartheta'}$$

Hieraus ergibt sich d. partielle Abhängigkeit von ϑ auf v, indem ϑ eine mittelbare Function von v ist, d. i. ϑ eine Function von t und t wieder eine Function von v ist, daher ist nun d. partielle Abhängigkeit von ϑ auf t mit d. partiellen Abhängigkeit von t auf v vorläufig darzustellen:

$$\frac{d\vartheta}{dv} = \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \frac{dt}{dv} = \vartheta' \cdot \frac{dt}{dv}$$

$$\text{und ebenso} \quad \frac{d\vartheta}{dp} = \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \frac{dt}{dp} = \vartheta' \frac{dt}{dp}$$

Hier wurde d. beiden Abhängigkeiten von t auf v und p benutzt, t kann durch Eliminiren mit d. Zustandsgleichung d. Gase – Differentiirt nun einfach partiell auf v, resp. also p als Constante an, so ergibt sich:

$$\frac{dt}{dv} = \frac{p}{R}$$

und Differentiirt nun partiell auf p, also unter Annahme v = Constante, so erhält man:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{v}{R}$$

Die Substitution dieser Ausdrücke nun in den beiden obigen Gleichungen, so wurden diese beiden Specialle auf Gase angewandt, und nun erhält dann diese nun für Gase geltenden Formen:

Aus d. ersten: $$A = \frac{d}{dp}\left(C_1 \frac{p}{R}\right) - \frac{d}{dv}\left(C \frac{v}{R}\right)$$

Nach d. bezeichneten Annahmen, d. spez. Wärmen C und C_1 und d. Coefficient R für ein und dasselbe Gas constant sind, sind C, C_1 und R als unabhängig von den, d. Wärmegrad und specifischen Größen v u. p zu betrachten, nun folgt demnach:

$$A = \frac{(C_1 - C)}{R} \cdot \frac{dp}{dp} - \frac{dv}{dv}$$

$$A = \frac{C_1}{R}\frac{dp}{dp} - \frac{C}{R}\frac{dv}{dv} = \frac{C_1 - C}{R}$$

Bestimmung d. Temperaturfunction ϑ.

Die erhaltenen specifischen Gleichungen d. Gase können nun dazu dienen, die Gleichungen d. Curven für Zustandsänderungen d. Temperaturfunction ϑ für jedes Gas genauer zu bestimmen, indem bekanntlich diese Function ϑ ganz unabhängig von d. Art und Aggregatform d. Körper ist, und für diesen Grund ist es nun auch einerlei, ob für einen Körper und für eine Function ϑ Temperaturen in Graden C. oder F. gemessen werden, indem diese Grade nur willkürliche Größen sind, welche d. Abstand zwischen den festen Temperaturen zu Grundlage nimmt, welche die einfachen und empfindlichsten sind, welche d. Ausdehnung d. Gase verschiedene sind, besonders geeignet.

Die erhaltenen specifischen Gleichungen sind Gleichungen, wenn N die Zustandsgleichung d. allgemeinen Form hat:

$$pv = S + R\vartheta = R(a + t)$$

wenn a eine Constante $= 273 =$ d. negativen Werth d. Grade unter dem Gefrierpunkt, t die constant angenommenen Ausdehnungscoefficienten δ bedeutet, während d. Constanten R und S für verschiedenartige Gase verschiedene Zahlenwerthe haben können, welche Werthe d. specifischen Gleichungen N d. spez. Wärmen C und C_1 für constant bleiben nach constanter Gestaltung für d. Gase sind. Gas constant sind also die Werthe nur von d. Art d. Gases und nicht von den verschiedenen Zuständen.

Die beiden Gleichungen, welche für beliebige andere nur die Anderung mit den genannten specifischen Eigenschaften d. Gase d. Temperaturfunction ϑ zu nennen, sollen auf Seite 67 XI und XII folgende allgemeine Gleichungen kommen:

Aus d. 1ten Hauptsatz ergibt sich nun folgende d. obige Analoge:

$$A\,dT = \frac{c_1 - c}{T'}\,(T')^2\,\frac{pv}{R^2} = \frac{c_1 - c}{R}\cdot T'\,\frac{pv}{R}$$

Nach d. Zustandsgleichung ist aber $\frac{pv}{R} = a + t$

also: $A\,dT = \frac{c_1 - c}{R}\,T'(a+t)$

Anstatt nun nun diese Gleichung dient. Function für A gefunden, so bekommt man:

$$T = T'(a+t)$$

Hier ist nun eine Differentialgleichung zur Bestimmung von T als Function von t, deren Lösung nichts für T' sein Analog, so bekommt man:

$$T = \frac{dT}{dt}(a+t)$$

$$\text{or} \quad \frac{dT}{T} = \frac{dt}{a+t}$$ nach d. Differentialrechnung ist aber auch bekanntlich:

$\frac{dT}{T} = d\,l(T)$ und $\frac{dt}{a+t} = d\,l(a+t)$ wobei l. natürliche Logarithmen bedeuten.

also: $d\,l(T) = d\,l(a+t)$

or durch Integration:

$$l(T) = l(a+t) + \text{Constante}(C)$$

$$= l[(a+t)C]$$

folglich: $T = (a+t)\,C$ wenn C eine willkürlich zu wählende Constante bedeutet und nicht als variabel Analog. Ausdehnung aufzufassen ist.

Nimmt man nun d. willkürlich zu wählende Constante $C = 1$, so folgt nun:

$$T = a + t = 273 + t.$$

Diese Temperaturfunction T unterscheidet sich also von d. Temperatur t nur durch einen constanten Summanden, für t also folgt eine Temperatur nur um einen andern Nullpunkt mit gemessen als d. Thermometerskala Temperatur t ist für t also eine Temperatur, welche nun um einen 273° unter d. Thermometerskala liegenden Nullpunkt = Gefrierpunkt d. Wassers gelegenen Nullpunkt mit gemessen werden muss. Man nennt diesen Nullpunkt auch d. absoluten Nullpunkt und bezeichnet T d. absolute Temperatur.

In diesen beiden Temperaturen T und t ist uns durch einen constanten Summanden unterschieden, da $a = 273$, so kann man mit d. Abkürzungen von T und t mit einander vertauschen und also in allen Gleichungen dT und dt bedeutig mit einander unterschieden werden.

ferner ist nun auch $T' = \frac{dT}{dt} = 1$ und daher auch d. früheren einfachen Sätze:

$$c_v = C \quad \text{und} \quad c_p = c_1$$ d.h. d. Grössen c_v und c_p nahe in Allgemeinen d. Bedeutung $\frac{dQ}{dT}$ bei constantem Volumen resp. bei constantem Druck, jedoch in besonderen Falle, nämlich wenn die Temperatur nach Celsius gerechnet wird, bedeuten also einfach nichts anderes als d. spec. Wärmen bei constantem Volumen resp. constantem Druck.

Für d. Fall wird nun die absolute Temperatur T an d. Stelle d. thermometrischen Temperatur t in allen Formeln eingeführt, wodurch dieselben in einfacher Gestalt dargestellt werden.

Für letzteren erhält man durch d. Zustandsgleichung einen Satz in d. einfachen Form:

für $a + t = T$:

$$pv = RT$$

Von d. Zustandsgleichungen, welche bei d. früheren Lehre von T als Function von t gefunden wurden, ist besonders eine Beziehung, nämlich diejenige zwischen den specifischen Wärmen gegen constanten Druck und constantes Volumen, welche sich aus d. ersten Hauptsatze ergab, wenn man diesen auf ein Gas anwendet:

$$A = \frac{c_1 - c}{R}$$

or $c_1 - c = A\,R.$

Dieser wichtige Satz wurde früher gefunden, indem zunächst d. allgemeinen Formeln d. Wärmelehre auf vollkommene Gase angewendet wurden, dann die Differenz der Wärmeeinheiten eines Gases d. allgemeinen Formeln d. Wärmelehre d.h. Unterschied für d. Wärmemenge dQ, welche einem Gase per 1 kgr bei einer unendlich kl. Temperaturänderung mitgetheilt werden muss, wenn (Seite 69 VIII und 70 u. 69):

$$dQ = c_p\,\frac{dT}{dv}\,dv + c_v\,\frac{dT}{dp}\,dp$$

$$dQ = c_v\,dT + A\,T\,\frac{dp}{dT}\,dv$$

$$dQ = c_p\,dT - A\,T\,\frac{dv}{dT}\,dp$$

wo nämlich d. erste entsprechend wird eine d. Wärmemenge dQ zu bestimmen, welche d. Gewicht per 1 kgr besitzt wenn dieselbe eine unendlich kl. Temperaturänderung mitgetheilt werden muss, wenn dabei das Volumen constant bleibt und $dv = 0$ u. s. 69):

$$dQ = c_p\,\frac{dT}{dv}\,dv + c_v\,\frac{dT}{dp}\,dp$$

$$dQ = c_v\,dT + A\,T\,\frac{dp}{dT}\,dv$$

$$dQ = c_p\,dT - A\,T\,\frac{dv}{dT}\,dp$$

wo nämlich d. erste entsprechend wird eine d. Wärmemenge dQ zu bestimmen, welche d. Gewicht per 1 kgr besitzt wenn dieselbe eine unendlich kl. Temperaturänderung mitgetheilt werden muss, wenn dabei das Volumen constant bleibt und $dv = 0$ ist. Nach d. Bedeutung d. Grössen c_v und c_p nahe in einfachen Gestalt dargestellt werden.

Für letzteren erhält man durch d. Zustandsgleichung einen Satz in d. einfachen Form:

für $a + t = T$:

$$pv = RT$$

Von d. Zustandsgleichungen, welche bei d. früheren Lehre von T als Function von t gefunden wurden, ist besonders eine Beziehung, nämlich diejenige zwischen den specifischen Wärmen gegen constanten Druck und constantes Volumen, welche sich aus d. ersten Hauptsatze ergab, wenn man diesen auf ein Gas anwendet:

$$A = \frac{c_1 - c}{R}$$

or $c_1 - c = A\,R.$

Dieser wichtige Satz wurde früher gefunden, indem zunächst d. allgemeinen Formeln d. Wärmelehre auf vollkommene Gase angewendet wurden, dann die Differenz der Wärmeeinheiten eines Gases d. allgemeinen Formeln d. Wärmelehre d.h. Unterschied für d. Wärmemenge dQ, welche einem Gase per 1 kgr bei einer unendlich kl. Temperaturänderung mitgetheilt werden muss, wenn (Seite 69 VIII und 70 u

Aus 1. 2. Hauptsatz wird:

$$dQ = c\,dT + \frac{A R T}{v}\,dv$$

und mit $v = \frac{RT}{p}$:

$$dQ = c_1\,dT - \frac{A R T}{p}\,dp$$

Diese Gleichungen sollen benutzt werden, um eine mit Rücksicht auf d. Zustandsgleichung $pv = RT$ fest:

$$\frac{RT}{v} = p \quad \text{und} \quad \frac{RT}{p} = v:$$

$$dQ = c\,dT + A p\,dv$$

$$dQ = c_1\,dT - A v\,dp$$

worin A d. Wärmeeinheit d. Arbeit = $\frac{1}{424}$ Calorien bedeutet. Diese zweckmäßigen Formen d. Wärmegleichung für Gase werden wir in vielen Aufgaben zu zweckmäßiger Verwendung bringen.

Wir setzen zunächst, gestützt d. Gleichung 1 welche für Gase beliebiger d. spez. Wärmen c und c_1 gilt, voraus:

$$c_1 - c = AR$$

wenn in beliebigen Zustandsänderungen. Zunächst können wir, da d. Differenz d. spez. Wärmen c_1 und c bei verschiedenen Gasen nur dann konstant gegenüber d. Differenz $c_1 - c$ bei verschiedenen Gasen nur dann konstant proportional d. Gasgewichten d. Gase sein kann, wenn AR mit der Zahl 77 als Maß d. Gasgewichts proportional d. Differenz $c_1 - c$ bei verschiedenen Gasen nur dann proportional d. Gasgewichten d. Gase ist, wenn AR für alle Gase gleich groß ist, wenn also die Gaskonstante R für alle Gase gleich groß ist. Läßt sich nun eine neue gemeinsame Eigenschaft und Größe d. Gase finden, welche für c_1 c und R eine gemeinsame Maßeinheit bildet, so können wir die Gleichung $c_1 - c = AR$ dazu benutzen, um A zu bestimmen, vorausgesetzt daß wir Gelegenheit haben, mit genügender Genauigkeit die Größen c_1 c und R für irgend ein Gas zu bestimmen. Diese Bedingungen sind nun in der Tat erfüllt. Nach Joule gemessene, mit genauen Versuchen übereinstimmende Mittelwerte von $A = \frac{1}{424}$ und mit diesen gemessene gemittelte Werthe von c_1 c und R für alle Gase.

Für d. meisten Gase wurde nun ein Verhältniß gefunden:

$$c_1 = 0{,}2375 \quad \text{und} \quad \frac{c_1}{c} = 1{,}41$$

also $c = \frac{c_1}{1{,}41} = \frac{0{,}2375}{1{,}41} = 0{,}1684.$

und $R = 29{,}27$

diese Werthe eingesetzt gibt:

$$\frac{1}{A} = W = \text{Arbeitswerth d. Wärmeeinheit} = \frac{R}{c_1 - c} = \frac{29{,}27}{0{,}2375 - 0{,}1684} = 423{,}6 \text{ Kgmm.}$$

Also wird Joule genauer diesen Werth fast genau mit d. Mittelwerth übereinstimmend, welcher mit d. Versuchen von Joule sich ergeben hatte.

Nach Gleichung:

$$c_1 - c = AR, \text{ wenn } A \text{ für alle Dinge constant} = \frac{1}{424} \text{ dagegen Räumlichkeit}$$

proportional d. Dichtigkeit d. entsprechenden Gase ist, müßte auch $c_1 - c$ räumlichkeitsproportional d. Dichtigkeit d. Gase sein, also kann für irgend ein bekanntes Gas diese Differenz $c_1 - c$ = gefunden werden d. bekannten Differenz für alles. Setzt beispielsweise Dichtigkeit d. Gases die Luft = 1 d. Dichtigkeit d. alles. Setzt von dieser Differenz gefunden $= 0{,}2375 - 0{,}1684 = 0{,}0691$

Also für ein beliebiges Gas:

$$c_1 - c = \frac{0{,}0691}{\delta}$$

wenn δ d. Dichtigkeit d. Gases gegenüber atmosphärischer Luft = 1 angenommen wird. D. Werth von δ und ebenso d. Werth von c_1 kennt man mit genügender Genauigkeit für verschiedene Gase, während d. Werth c nur mit großen Schwierigkeiten festgestellt werden können. Obige Formel ist nun eine gute Prüfung, ob welche neue spez. Wärmen meist Gase für constante Volumen und d. Constanten R und d. spez. Wärmen c_1 bei constanter Spannung benommen werden, neue neue experimentelle Dichtigkeit d. verschiedenen Gases in Bezug auf atmosphärische Luft Anwend. finden kann. Man hat diese Prüfungen auch für d. wichtigsten Gase, welche Oxidationen $n = \frac{c_1}{c}$ enthalten. Man hat diese Prüfungen auch für d. wichtigsten Gebilden ausgeführt, namentlich sind diese von Regnault angestellt und d. vollgiltige Werth von δ und c_1 aufgefunden. Gase wurden zu diesen Versuchen in Glasballons eingeschlossen, worauf die Luft durch Pumpen ausgepump

Auf Isothermen heißt Gleichung bekanntlich:

$$0 = dU - Wc\,dT \quad \text{od.:} \quad dU = Wc\,dT.$$

Auf diese Gleichung läßt sich, mit Hilfe d. spez. Wärmen und Gasgl. bei konstantem Volumen für d. reelle Gas empirisch ableiten, daß Wasserstoff und Luft bei gleicher Temperatur gleiche Zunahme d. Energie erfahren, wenn sie gleiche Volumina haben und gleichen Druck besitzen, und daß diese Zunahme d. Energie bei gleicher Temperaturerhöhung dT und dt mit einander im Verhältniß gleicher Zahlen wächst, wie $T = 273 + t$, d. h. die Änderung d. inneren Arbeitsvermögens eines Gases seiner Temperaturänderung proportional ist.

Bezeichnet man nun die Anfangsgrößen d. adiabatischen Temperatur mit T_1 und d. innere Arbeitsvermögen mit U_1, so erhält man durch Integration d. obigen Gleichung:

$$U - U_1 = Wc(T - T_1)$$

od. da mit Rücksicht auf d. Zustandsgleichung eines Gases:

$$T = \frac{pv}{R} \text{ und entsprechend } T_1 = \frac{p_1 v_1}{R}$$

unter p_1 und v_1 die den Anfangszustand entsprechenden Werthe von v u. p verstanden, und wenn man ferner noch $W = \frac{1}{A}$ setzt:

$$U - U_1 = \frac{c}{AR}(pv - p_1 v_1)$$

od. weil $AR = c_1 - c$ und für $\frac{c}{c} = n$ gesetzt wird:

$$U - U_1 = \frac{pv - p_1 v_1}{n-1} = \text{d. Unterschied d. inneren Arbeitsvermögens des Fluidums und Anfangszustand d. Zustandsänderung.}$$

Wir wollen nun zu besonderen Arten von Zustandsänderungen von Gasen übergehen, welche bei vielen technischen Anwendungen von Wichtigkeit sind.

Die wichtigsten dieser besonderen Arten von Zustandsänderungen lassen sich gemeinsam unter d. jener bis jetzt allgemeinen Voraussetzung, daß d. Zustandsänderung in einer solchen Weise erfolge, daß während derselben d. Function pv^n einen gegebenen constanten Werth annimmt, wo n eine Constante bedeutet, d. Zustandsgleichung, welche d. Gesetz d. stetigen Änderung von v u. p angiebt, d. h. man hat:

I $$p \cdot v^n = C.$$

Zunächst kommt nun zu untersuchen d. Verhalt d. Zustandsänderungen zu jenen d. d. Gesetz Mariotte's, welche d. Gesetz d. Zustandsänderung gemäß sich darstellt, festgestellten.

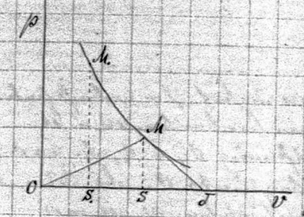
Zu dem Ende muß d. obige Zustandsgleichung differentiirt; man bekommt:

$$v^n dp + p \cdot n\, v^{n-1} dv = 0$$

daraus man findet $\frac{dp}{dv}$, welche Größe bekanntlich d. Tang. d. Winkels ist, welchen d. Tangente an d. Punkt (v,p) d. Zustandslinie mit d. v Axe bildet, so ergiebt sich:

II $$\frac{dp}{dv} = -n\frac{p}{v}$$

Setzt man nun in d. Zustandsgleichung $pv^n = C$, unter d. Voraussetzung daß d. Constanten n u. C endliche Werthe haben, $v = 0$, so wird nach Gl. I: $p = \infty$ und also nach Gl. II: $\frac{dp}{dv} = \infty$; es sind also $v = 0$, $p = \infty$ und $\frac{dp}{dv} = \infty$ gleichzeitig. Werthe, welche nach d. vorhergehenden Gesetzen bekanntlich gleichbedeutend ist mit dem Zusammenfallen d. p Axe mit der Adiabate.



Für $v = \infty$ ist entweder nach Gl. I, wenn n nicht unendlich, d. h. wenn C endliche Werthe haben: $p = 0$ und nach Gl. II $\frac{dp}{dv} = 0$. Also sind auch $v = \infty$, $p = 0$ und $\frac{dp}{dv} = 0$ gleichzeitig gewisse Werthe, welchen entsprechend unsere adiabatische Curve d. v Axe.

Die allgemeine Gleichung d. Zustandslinien, welche d. Zustandsänderung: $pv^n = C$ entspricht, ist hier, wo die Größe n constant bleibt, die bekannte Gleichung der Hyperbel.

Ist nun $SS = S$ d. Differenz d. Entfernungen der adiabatischen Zustandslinien vom Centrum O d. Zustandsebene mit d. Coordinaten $OS = v$ und $SM = p$, so ist für denselben:

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{p}{S} \text{ also mit Rücksicht auf } \frac{dp}{dv} = -m\frac{p}{v}$$

$$\text{d. h.: } m = \frac{v}{S} = \frac{OS}{SS}$$

Ist p_1 d. Spannung und v_1 d. absolute Temperatur, welche d. specifischen Volumen v_1 (mit $OS_1 = v_1$ dem Punkte N d. Zustandsebene) entspricht, so ist, da in jedem Zustande d. Gleichung $pv^m = \text{const.} C$ stattfinden soll, muß:

$$pv^m = v_1^m p_1 \text{ und also ist also:}$$

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^m$$

d. h. in 2 entsprechenden, während beliebigen Zuständen verhalten sich d. Spannungen umgekehrt wie d. m ten Potenzen d. spec. Volumina und umgekehrt wie die m ten Wurzeln aus diesen Volumina selbst. } III

Ferner ist nun d. allgemeine Zustandsgleichung d. Gase: $pv = RT$ und also auch:

$$\frac{T}{T_1} = \frac{pv}{p_1 v_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^m \frac{v}{v_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1} = \frac{p}{p_1}\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}.$$

Die Spannungsarbeit E welche von 1 Kgr. d. Gases beim Übergange aus d. Zustande $M_1(v_1 p_1 T_1)$ in den Zustand $M(v\,p\,T)$ verwandelt wird, ist nun d. allgemeine Formel:

$$E = S_1 M_1 M S = \int_{v_1}^{v} p\,dv = p_1 v_1^m \int_{v_1}^{v} \frac{dv}{v^m}$$

od. $$E = \frac{p_1 v_1^m}{m-1}\left(\frac{1}{v_1^{m-1}} - \frac{1}{v^{m-1}}\right) = \frac{p_1 v_1}{m-1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1}\right] \quad \text{IV}$$

Vermittelst d. Gleichungen III können in vorstehender Gleichung v durch p u. T unter Zuhilfenahme d. Anfangszustandes M_1 gegebenen Größen ausgedrückt werden.

Für spec. Wärme, welche als gleichen wie m sind, mit der bezeichnet sei, damit Rücksicht auf Gleichung auf S. 82: $dQ = c\,dT + Ap\,dv = c\,dT + \frac{AR}{v} T\,dv$ und mit Rücksicht auf d. Zustandsgleichung $pv = RT$:

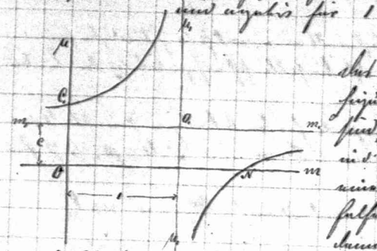
$$\mu = \frac{dQ}{dT} = c + Ap\frac{dv}{dT} = c + AR\frac{p\,dv}{d(pv)}$$

od. da: $c_1 - c = AR$ und $\frac{c_1}{c} = n$ also $AR = c(n-1)$ ist und ferner: $d(p.v) = p\,dv + v\,dp$ ist folgt:

$$\mu = c + \frac{c(n-1)\,p\,dv}{p\,dv + v\,dp} = c + \frac{c(n-1)}{1 + \frac{v\,dp}{p\,dv}}$$

V. ..... $\mu = \left(1 + \frac{n-1}{1-m}\right) c = \frac{m-n}{m-1} c$

diese spez. Wärme ist positiv für $m < 1$ und $m > n$
und negativ für $1 < m < n$



Auf Grund der Gleichung ist es möglich, die Veränderliche m in μ umzuformen und die Kurve, welche den Verlauf von μ mit m darstellt, deren Koordinaten m und μ sind, für jeden Gas, für welchen die Größe c bekannt ist, zu zeichnen. Man trägt dazu auf der Abszissenachse $OC = c$, die Abszisse m in der Entfernung $ON = n$ vom Anfangspunkt O. Die Kurve ist eine ganz typische Hyperbel mit den Asymptoten $m_1 m$ in der Entfernung $= 1$ von Oa und $\mu_1 \mu$ in der Entfernung $= 1$ von Oc; dann mit $m = m_1 + 1$ und $\mu = \mu_1 + c$

wird diese Gleichung für den Punkt C, und $C_1 \mu_1$:

$$m_1 \mu_1 = -(n-1)c = +(c_1 - c)$$

Ausdrücklich sei bemerkt, daß die negativen spez. Wärmen, welche der Gasformel $pv^m = \text{Const.}$ entsprechen, nicht mit Wärmeentziehung und Temperaturerniedrigung, sondern mit Wärmezufuhr und Temperaturerhöhung verbunden sind.

III. ..... $Q = \mu (T - T_1)$

wenn man den Gleichungen III und I statt v und p entsprechende Werte einführt.

Es ist

$$T - T_1 = +\frac{p_1 v_1}{R}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1}\right] = +\frac{p_1 v_1}{R} \cdot \frac{m-1}{p_1 v_1} \cdot \mathcal{E}$$

$$= +\frac{m-1}{AR} \cdot A\mathcal{E} = +\frac{m-1}{c(n-1)} A\mathcal{E} = +\frac{m-n}{\mu(n-1)} A\mathcal{E}$$

somit:

VII ..... $Q = \frac{n-m}{n-1} A\mathcal{E}$

Also kann die aufgespeicherte Energie mit $\mathcal{E}$, ausgedrückt $m < n$ und $m > n$ sein.

Für Zustandsänderung nach der Art $pv^m = \text{Const.}$ kann ein Allgemeinausdruck, welcher sämtliche vorkommende veränderliche aufgespeicherte Energie $\mathcal{E}$ in Abhängigkeit von den Zustandsänderungen v der Gasse d. Wärmemittelpunkt mit gegebenen Anfangs- und Endzuständen $p_1 v_1$ und $p v$ ausdrückt, nicht gefunden werden. Dagegen kann $\mathcal{E}$ durch Integration der Gleichungen III und IV d. Werte von m für $pv^m = \text{Const.}$ unter m eine bestimmte aufgefaßte, unveränderliche, positive oder negative Größe, welche für jeden Gas, jeden Zustand und jede Zustandsänderung eine allgemeine Bedeutung d. mit der gegebenen Zustandsänderung verbundenen Wertes von m darstellt.

Diese allgemeinen Formeln können nun benützt werden, um d. aufgespeicherten Werte für verschiedene Zustandsänderungen zu ermitteln, wobei spezielle Fälle einer Erörterung unterzogen werden, wenn m bestimmte Werte besitzt.

1) Angenommen es sei $m = 0$

dann ist $v^m = v^0 = 1$ und also d. Zustandsgleichung:

$$p v^m = p = C$$ unter C eine Konstante verstanden.

Dann erfolgt somit also d. Zustandsänderung bei konstantem Druck p_1. Die aufgespeicherte Energie $\mathcal{E}$ ist also nur mit d. v Werte veränderlich. Setzt man $m = 0$ in d. spez. Wärmen: $\mu = \frac{-n}{-1} c$ und bekanntlich $n = \frac{c_p}{c}$

$\mu = c_1$ wie es auch zu erwarten war, indem c_1 eben d. spez. Wärme bei konstantem Druck bedeutet.

und d. Spannung ausdrückt, so ergibt sich, daß sie nur von der Spannung zwischen d. Temperatur und spez. Wärme in einfachster Weise abhängig ist. Diese Eigenschaften sind sogleich daraus mit Gleichung III festzustellen (wenn $p - p_1$ konstant):

$$\frac{T}{T_1} = \frac{v}{v_1}$$

Für d. Festgespanntsein erhält $\mathcal{E}$ offenbar einen den Anfangszustand $p = p_1$ und $m = 0$:

$$\mathcal{E} = p(v - v_1)$$

2) Ist für gegebenes $m = 1$, dann gelten d. Zustandsgleichung also in:

$$pv = \text{Const.}$$

Gemäß d. allgemeinen Zustandsgleichung d. Gase: $pv = RT$, wenn R für ein und denselben Gas eine konstante Größe bedeutet, somit $dpT = \text{const.}$ ist, so ist für d. Zustandsänderung bei konstantem Druck eine Isothermen eine Isobare Linie und umgekehrt. Diese Isobarenlinie ist eine gleichseitige Hyperbel, wegen ihrer Gleichung: $pv = \text{Const.}$

Somit ist in diesem Falle:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{v_1}{v}$$

und d. spez. Wärmen $\mu = \infty$ und $m - 1 = 0$ also d. Exponent $= \infty$ wird.

Für die festgespannte Luft $\mathcal{E}$ ergibt sich mit $m = 1$ aus Gleichung IIII ein unbestimmter Ausdruck, nämlich: $\mathcal{E} = \frac{p_1 v_1}{0}(1 - 1) = p_1 v_1 \frac{0}{0}$

Jedoch läßt sich $\mathcal{E}$ durch Einsetzen aus dem allgemeinen Ausdruck für d. festgespannte Luft ermitteln: $\mathcal{E} = \int p\,dv$

Nimmt man für p seinen Wert aus Gleichung III, den andern Wert und integriert d. entsprechenden Größen $p_1 v_1$ aus d. Integral, so folgt:

$$\mathcal{E} = p_1 v_1 \int_{v_1}^{v} \frac{dv}{v} = p_1 v_1 \ln\left(\frac{v}{v_1}\right)$$ wobei $\ln$ d. natürliche Logarithmus bedeutet.

Mit dieser Gleichung ist die Größe d. Spannungsänderung $\mathcal{E}$ bestimmt, indem für den Gas bekanntlich d. Formel für d. spez. Änderung d. inneren Arbeitsvermögens ist:

$$dU = Wc\,dT$$

wenn hier mit W und T unveränderlich sind, somit mit $dT = 0$ auch $dU = 0$ ist.

3) Für $m = n = \frac{c_p}{c}$ wird:

d. spez. Wärme: $\mu = 0$ und d. Zustandsänderung: $pv^n = \text{Const.}$

und somit auch: $dQ = 0$.

In diesem Falle geht also d. Zustandsänderung ohne Mitteilung od. Entziehung von Wärme als auch ohne äußerliche Leistung vor sich. Diese Gleichung $pv^n = \text{Const.}$ ist also diejenige, welche durch sämtliche Punkte (v, p) mit adiabatischer Zustandsänderung hindurchgeht, somit eine adiabatische Kurve darstellt, welche ausgehend von einem Punkte $p v$ der Ebene, mit unendlich vielen d. v Ordinaten alle diejenigen Punkte durchschneidet, welche auf d. Ordinaten v liegen, jedoch für jeden Punkt mit d. v Ordinate einen andern Wert p besitzen.

Nach Gleichung II:

$$\frac{p_2}{p} = \left(\frac{v}{v_2}\right)^n$$

somit ist $p_2 > p$, weil $v_2 < v$ ist.

Mit $m = n$ folgt nun weiter:

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^n \qquad \frac{T}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{n-1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

und $\mathcal{E} = \frac{p_1 v_1}{n-1}\left(1 - \left(\frac{v_1}{v}\right)^{n-1}\right)$

fallig 4) für $n = \infty$ ergeben; denn d. Zustandsänderung wird isothermisch sein:
aus $pv^n = C$ $\quad p^{\frac{1}{n}} v = \sqrt[n]{C} =$ Const., somit mit $n = \infty$ d. Zustandsänderung: $p^0 v = \text{const} \quad$ d.h. $\quad v = \text{const.}$ d.h. nun wieder muß die Zustandsänderung bei const. Volumen v.

Für diesen Wärmen ist in diesen Fällen entwickelt: $\frac{dQ}{dt} = C$

da v ein Zustandsgröße darstellt ist die Wärmemenge zwischen Anfangs- und Endzustand d. Änderung gleichen Zustandsänderung und Temperatur in d. entsprechenden Zustände; man setzt in diesen Fällen kommt:

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{p}{p_1}$$

die Spannungsverhältnisse $\frac{\sigma}{\sigma_1}$ sind unterschiedlich $= 0$, denn wenn keine Volumenänderung stattfindet, so können auch keine Spannungsverhältnisse vorhanden sein.

Bei diesen angenommenen Arten Zustandsänderungen, d.h. bei der Wärmeabgabe während d. Zustandsänderung ohne Wärmeaufnahme während d. Zustandsänderung, stellt sich ein anderes Verhältnis d. Wärmen ein, als bei einer isothermischen Änderung, nämlich $n = \frac{C_p}{C}$ und es ist diese interessant genug noch eine andere Charakteristik dieser Wärmen kennen.

Eine Methode zur Bestimmung von $n = \frac{C_p}{C}$ ist folgende:

In einem einfachen geraden Gefäß, welche mit einem verschließbaren Ausflußventil und mit einem Manometer zur Messung d. Druck in seinem d. Gefäßinhalt verbunden ist, befindet sich ein Gas, dessen Spannung $= p_1$ größer ist als d. die umgebenden Medium (z.B. d. Atmosphäre) entspricht. Durch allmähliches Öffnen (wieder allmähliches Schließen) des Ventils wird d. Spannung p_1 des Gases die Ausflußmündung wenig niedrige Größe annimmt und gleich einer Spannung die ein Gewicht einer Spannung $= p_2$ hat, welche der umgebenden Atmosphäre entspricht. Durch diese Ausflußmündung wird nun eine Gasmenge entweichen, und bleibt dann Rest d. zurückbleibenden Gasquantität mit der Spannung p_2 gefüllt, und d. bei Momentanes d. zurückbleibenden Spannung, einige Zeit nachdem Effekt d. Ausflußmündung auf d. Gases hinsichtlich gleichmäßig gehen kann, welche Spannung $= p_2$ d. Spannung d. Atmosphäre. Wenn nun nun die Zeit d. Spannung d. Ausflußmündung durch Gasquantität mit der gemessenen Spannung p_1 und p_2 und n bestimmen, so ist n nämlich aus d. Beziehungen:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{n}}$$

Durch Messen von d. Mündung d. Ausflußmündung gefunden ist, sind in folge d. früheren gegebenen Wärmen d. Zustandsänderung ohne Wärmeabgabe und Wärmeaufnahme σ_1, welche Werte als erwünscht zu bekommen ist, wenn d. Momentanes eine weitere Änderung auf p_3 gewünschte Spannung nicht mehr annimmt hat. In diesen Zustandsänderung d. im Gefäße abgesperrten Gases bei einfachen Volumen gelten wird d. Fall 4):

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{p_2}{p_3}$$

Nachdem nun diese Größe mit einander, so bekommt man:

$$1 = \frac{p_0}{p_2}\left(\frac{p_1}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{n}} = \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

und: $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^n$ nun folgt:

$$n = \frac{\log\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{\log\left(\frac{p_1}{p_2}\right)} = \frac{\log p_1 - \log p_2}{\log p_1 - \log p_2}$$

Auf diese Weise kann man nun d. Quotienten $n = \frac{C_p}{C}$ für bestimmte Körper und in d. Tabelle Tabellen und mit d. Tabellen Tabellen nun für die Berechnung von n in Formeln eingesetzt werden.

Verhalten d. Körper beim Übergange aus d. festen in d. flüssige Aggregatform.

Wenn ein fester Körper in d. Änderung seiner Aggregatform begriffen ist, also wenn ein fester Körper in Schmelzen und durch wenn ein Flüssiges in d. Erstarrung begriffen ist, so befindet er sich in einem Zustande, welche durch d. Bezeichnung Übergang d. Zustandes charakterisiert wird. Wird nun für einen solchen Zustand p als zugehörige Spannung, und t als zugehörige Temperatur, so kann man in einem gewissen Augenblicke und $p + dp$ $\quad t + dt$ entsprechende Werte der Spannung und Temperatur in einem gewissen Augenblicke d. Zeitpunkt p findet gewissen dp und dt eine bestimmte Bedeutung, welche Größe und Temperatur für gewöhnlich bestimmt sind. Man nun diese Bedeutung zu den gleichzeitigen Änderungen von Spannung und Temperatur bekommen, so: $\quad y : (1-y)$ d. Quantitäten-Verhältnis d. flüssigen und festen Teile in irgend einem Augenblicke und y d. Quantitätsmenge d. flüssigen Körpers ist $1-y$ d. Quantitätsmenge d. festen Körpers in 1 kgr d. Gemisches von Körper, welche Art aber unbestimmt Aggregatform, ist sei ferner w d. der bestimmte d. in Zustande begriffenen Körpers in d. festen und $w + \Delta$ d. spez. Volumen des Gemisches in d. flüssigen Aggregatform. Δ stellt offenbar in einem bestimmten Augenblick d. veränderlich und allen spez. Volumen v d. Gemisches:

$$v = (1-y)\,w + y(w+\Delta) = w + y\Delta.$$

Körper

Angenommen nun 1 kgr eines festen Gemisches für bestimmte Temperatur t und entsprechende Spannung p in d. Übergang begriffen. Denn sind w und Δ vollkommen bekannt durch p und t. Bei einem Werte von t und p sind also nur w und Δ constant und y einbestimmt. Bei diesem Vorgange von d. Größen y Volumen gemessen und messbar nun dv und y - für einen unendlich kleinen Zustandsänderung entsprechend einem unendlich kl. Übergangsvorgange stellt die entsprechenden Werte von $p+t$ und folgende Gleichung:

$$dv = \Delta\, dy$$

Durch allgemeinen Satz d. Wärmegleichung Nr. 29 ist nun d. Wärmemenge dQ, welche d. Körper bei einer unendlich kl. Zustandsänderung aufnimmt:

$$dQ = c_v\, dt + A\sigma \frac{dp}{dt}\, dv$$

d. Summe bekanntlich dt und dt aufeinander unabhängig sind:

$$dQ = c_v\, dt + A\sigma \frac{dp}{dt}\, dv$$

Innerhalb solch gleichen d. Zustandsänderung bei constanter Temperatur t stattfindenden, ist also auch $dt = 0$ und demnach, wenn nun noch $\frac{dp}{dt}$ und $\frac{dp}{dt}$ heißt:

$$dQ = A\sigma \frac{dp}{dt}\, dv \qquad \text{d. mit } dv = \Delta\, dy$$

$$dQ = A\sigma\Delta \frac{dp}{dt}\, dy$$

Setzt mit r d. spez. Verdampfungswärme bezeichnet d.jenige Wärmemenge, welche zur Verdampfung von 1 kgr d. Körpers bei d. Temperatur t d. entsprechenden Spannung p erforderlich ist. Die Wärmemenge dQ also, welche zum Verdampfen von dy kgr erforderlich ist:

$$dQ = r\, dy$$

Setzen diese beiden Ausdrücke für dQ einander gleich, so bekommt man:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{A\sigma\Delta}{r} \qquad \text{(a)}$$

= allgemeinen Gesetz, welches für $\frac{dp}{dt}$ Temperatur bei und Spannung für einen solchen Process d. Umgangs von d. festen in d. flüssige Aggregatform mit einander stets gegenseitig bedingt.

Offenbar gibt diese Gleichung $\frac{dt}{dp}$ allgemein für den Gesamtbetrag d. Änderung aus einer in eine andere Aggregatform und also auch eine diese Gleichung für den Übergang aus d. flüssigen in d. dampfförmigen Zustand gemacht werden, wenn unter Δ und v d. entsprechenden Differenzen verstanden werden.

Zu bemerken ist noch, dass diese Formel bei d. Ableitung d. Gleichg. d. Voraussetzungen gemacht wurde, dass d. Übergang bei constanter Temperatur statt mit Wärme aufnahme des Gesamtsystems verbunden ist. Die Allgemeingültigkeit dieser Gleichg. und somit d. damit berechneten Gleichungen müssen daher experimentell geprüft werden. Dabei ist es nötig, $\frac{dt}{dp}$ unmittelbar zu bestimmen, da Δ und v nicht direkt gemessen werden können. Es ist aber, da $\frac{dt}{dp}$ nur für kleine Δ und v gilt, nötig, diese Größen möglichst genau zu kennen. Die Bestimmung d. spec. Volumens d. flüssigen Aggregatform ist leicht, dagegen die d. spec. Volumens d. dampfförmigen Aggregatform sehr schwierig. Z.B. ist beim Übergang des Wassers bei $0°$ Δ negativ, indem d. Volumen d. Dampfes bei $0°$ kleiner ist als d. Volumen d. Eises bei $0°$. Dementsprechend ist auch für Eis $\frac{dt}{dp}$ negativ.

Andererseits kann v trotz Δ beim Übergang aus dem flüssigen in einen gasförmigen Zustand, also bei diesem Übergang auch d. spec. Volumen zunehmen, also ist bei diesem Übergang auch $\frac{dt}{dp}$ positiv.

Weiter ersieht man, dass $\frac{dt}{dp}$ für gesättigte Dämpfe d. ungesättigten unterhalb mit für gesättigte Dämpfe oberhalb der kritischen Temperatur positiv ist. Ferner ist $\frac{dt}{dp}$ für gesättigte Dämpfe stets positiv, da mit Zunahme d. Temperatur auch d. Dampfdruck zunimmt. Für Wasser ist $\frac{dt}{dp}$ negativ, da mit Zunahme d. Temperatur d. Dampfdruck d. Eises abnimmt.

gemessen v t und p. Diese Abhängigkeit gemessen pt und vp soll nun in d. Folge d. Zeichnung dieser d. Gemessene und Berechnete graphisch gemacht werden.

Hat man in d. Gleichungsform nun Kenntnis d. Konstanten d. gefundenen Gesetzes erhalten, so muß man noch die Größe zu bestimmen d. Temperaturintervall $t_0 - t_0$, innerhalb d. die Konstanten bestimmt wurden, gültig sind. Diese Größe t_0 kann, wegen d. Gültigkeit d. Gesetzes pt bis zu $t = 0$ hinab, nicht gleich Null gesetzt werden, sondern muß eine bestimmte Größe haben, die aus den Beobachtungen zu bestimmen ist. In einfachster Weise sind diese Konstanten aus den Werten zu berechnen, die für drei gleiche Intervalle d. Temperatur gefunden sind. Je nachdem diese Intervalle in d. Nähe von t_0 oder weiter davon entfernt liegen, werden sie mehr oder weniger genaue Resultate liefern. Man wählt also zweckmäßig die Intervalle so, daß sie in d. Nähe von t_0 liegen. Bei Regnault sind die Intervalle 10°, 100°, 200°. Bei Magnus sind sie 10°, 20°, 30°. Bei Wüllner sind sie 10°, 20°, 30°. Bei Broch sind sie 10°, 20°, 30°. Bei Kohlrausch sind sie 10°, 20°, 30°. Bei Holborn sind sie 10°, 20°, 30°. Bei Thiesen sind sie 10°, 20°, 30°. Bei Scheel sind sie 10°, 20°, 30°. Bei Heuse sind sie 10°, 20°, 30°. Bei Jäger sind sie 10°, 20°, 30°. Bei Diesselhorst sind sie 10°, 20°, 30°. Bei Henning sind sie 10°, 20°, 30°. Bei Holborn sind sie 10°, 20°, 30°. Bei Thiesen sind sie 10°, 20°, 30°. Bei Scheel sind sie 10°, 20°, 30°. Bei Heuse sind sie 10°, 20°, 30°. Bei Jäger sind sie 10°, 20°, 30°. Bei Diesselhorst sind sie 10°, 20°, 30°. Bei Henning sind sie 10°, 20°, 30°.

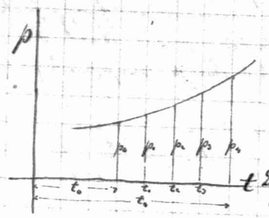
Regnault hat eine Reihe von Gesetzen, welche sich für verschiedene Temperaturintervalle verschieden gut bestätigen. Die allgemeine Form ist folgende:

I. $$\lg p = C + a\alpha^{t-t_0} + b\beta^{t-t_0}$$

wenn $\lg$ einen gewöhnlichen Logarithmus, p die Spannung in mm Quecksilberhöhe bedeutet, und welche durch Messungen mit 760 d. Spannung in Atmosphären erhalten wird, während bei Messungen mit 10333 d. Spannung in kgs pro qmm benutzt. t_0 ist einen Grenzwert d. Temperaturintervalls, für welches d. gemessene Werte d. Temperatur t die Konstanten $C a b \alpha \beta$ der Gleichung berechnet werden sollen und unter t eine beliebige Temperatur d. Temperaturintervalls verstanden. Man nennt diese Größen d. Wertes Konstanten $C a b \alpha \beta$ und d. Gleichung zur Berechnung empirische Regnault'sche Formeln.

Die Größe t_0 kann für jedes Temperaturintervall gefunden werden, wenn man pt mißt und Differenzen bildet und Abszissen die mittleren Temperaturen, Ordinaten die mittleren Spannungen aufträgt und die beobachteten Punkte durch eine möglichst ausgleichende Kurve verbindet. Das Temperaturintervall $t_0 - t_0$, innerhalb d. die Konstanten bestimmt werden sollen, wird in 4 gleiche Teile geteilt, so daß Δt:

$$\Delta t = t_0 - t_1 = t_1 - t_2 = t_2 - t_3 = t_3 - t_0$$



Man nun die Temperaturen $t_0\ t_1\ t_2\ t_3\ t_4$ die entsprechenden als Ordinaten aufgetragenen Spannungen $p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ p_4$ abgreifen werden.

Setzt man nun d. Größen:

$$\alpha^{\Delta t} = x \quad \text{und} \quad \beta^{\Delta t} = y$$

fest und mit Rücksicht auf d. obige Formel:

für $t - t_0$ also $t - t_0 = 0$: $\lg p_0 = C + a + b$
für $t = t_1$ also $t - t_0 = \Delta t$ $\lg p_1 = C + ax + by$
„ $t = t_2$ „ $t - t_0 = 2\Delta t$ $\lg p_2 = C + ax^2 + by^2$
„ $t = t_3$ „ $t - t_0 = 3\Delta t$ $\lg p_3 = C + ax^3 + by^3$
„ $t = t_4$ „ $t - t_0 = 4\Delta t$ $\lg p_4 = C + ax^4 + by^4$

Auf diese Weise hat man 5 Gleichungen bekommen zur Berechnung d. 5 Konstanten $C a b x y$, aus d. schließlich die Konstanten $\alpha \beta$ bestimmt.

Für den Gebrauch dieser Formel ist es oft bequemer, diese Gleichung in eine andere Form zu bringen:

Es ist nämlich bekanntlich:

$$\lg(a\alpha^{t-t_0}) = \lg a + (t-t_0)\lg\alpha$$

Ist $a\alpha^{t-t_0} = \text{num log}(a_0 + \alpha_0 t)$ unter a_0 und α_0 d. ersten Gleichung aufgefaßte Konstanten verstanden, dann kann man auch diese Gleichung auf eine Form bringen, die für jedes Temperaturintervall gültig ist.

$$\lg p = C \pm \text{num lg}(a' + \alpha' t) \pm \text{num lg}(b' + \beta' t)$$

für gesättigten Wasserdampf folgt aus den Regnault'schen Versuchen mit genügender Genauigkeit, welche für d. Grenzen $0 - 100°$ und $100 - 200°$ gelten, nun bis:

für $t = 0$ bis $100°$ d.: $\lg p = 4{,}739371 \div \text{num lg}(9{,}611741 \div 0{,}0032744\,6t) + \text{num lg}(\div 1{,}868009 + 0{,}0068649\,4t)$

für $t = 100°$ bis $200°$ $\lg p = 6{,}264035 \div \text{num lg}(0{,}659318 - 0{,}0016561\,4t) = \text{num lg}(0{,}020760 - 0{,}0059807\,1t)$

Hier ist der Druck gemessen in Millimeter Quecksilberhöhe mit 760 als Einheit, wenn mit Atmosphären gerechnet wird (1 Atm = 760 mm Quecksilberhöhe), und mit 10333 kgs pro qmm, wenn mit Kilogramm pro qmm gerechnet wird (1 Atm = 10333 kgs pro qmm).

Man kann nun leicht empirische Formeln gefunden haben, welche d. Zusammenhang zwischen pt für gesättigte Dämpfe bestimmen, trotzdem diese nicht in der obigen Form d. Zusammenhang zwischen Druck und Temperatur darstellen (Vergl. Gerhardt, Wärmetheorie § 26).

Für die einfachen Verhältnisse, die bei diesen nicht nur nicht d. Zusammenhang zwischen pt für gesättigte Dämpfe in einfacher Form zu bestimmen, sondern es kann $\frac{dp}{dt}$ als Funktion von pt ausgedrückt werden. Diese Form soll nun in folgender Weise gefunden:

Thomson setzt nun die empirische Formel aus $\lg p$ = Logarithmus zur Basis k = Logarithmus zur Basis k:

$$\ln p = k \log p$$

wenn k = natürlicher Logarithmus: $k = \ln 10 = 2{,}302585$

Thomson nun die von Regnault gefundene Gleichung I mit k potenziert, nun:

$$\ln p = kC + ka\alpha^{t-t_0} + kb\beta^{t-t_0}$$

Differenziert man diese Gleichung in Bezug auf t, bekommt man:

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = ka \cdot \ln\alpha \cdot \alpha^{t-t_0} + kb \cdot \ln\beta \cdot \beta^{t-t_0}$$

und da $\ln\alpha = k\lg\alpha$ und $\ln\beta = k\lg\beta$:

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{dt} = k^2 a \lg\alpha \cdot \alpha^{t-t_0} + k^2 b \lg\beta \cdot \beta^{t-t_0}$$

Nach dem Vorangehenden kann man nun die Konstanten $a b \alpha \beta$ als bekannt ansehen und bezeichnen:

$$k^2 a \lg\alpha = m \quad \text{und} \quad k^2 b \lg\beta = n$$

wenn die Konstanten m und n entsprechend d. Werten von $a b \alpha \beta$ und $k = 2{,}302585$ berechnet werden können, dann ist also:

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{dt} = m \cdot \alpha^{t-t_0} + n\beta^{t-t_0}$$

Für den Gebrauch ist es einfacher bequemer, d. Bezeichnung d. beiden Glieder mit einem Buchstaben zu bezeichnen, wodurch es dann leicht möglich ist, die Gleichung zur Berechnung von pt zu benutzen. Setzt man $\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = \alpha$, so kann man α als Differentialquotienten $\frac{dp}{dt}$ ansehen und p und t auseinander bestimmen. Setzt man nun in folgender Weise geschehen:

Thomson nun die natürlichen Logarithmen aus Logarithmen zur Basis 10 = Logarithmen zur Basis k:

Thomson findet:

$$\ln p = k \log p$$

wenn k = natürlicher Logarithmus: $k = \ln 10 = 2{,}302585$

Differenziert man nun die obige Gleichung I mit k potenziert, nun:

$$\ln p = kC + ka\alpha^{t-t_0} + kb\beta^{t-t_0}$$

Differenziert man diese Gleichung in Bezug auf t, bekommt man:

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = ka \cdot \ln\alpha \cdot \alpha^{t-t_0} + kb \cdot \ln\beta \cdot \beta^{t-t_0}$$

und da $\ln\alpha = k\lg\alpha$ und $\ln\beta = k\lg\beta$:

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{dt} = k^2 a \lg\alpha \cdot \alpha^{t-t_0} + k^2 b \lg\beta \cdot \beta^{t-t_0}$$

Nach dem Vorangehenden kann man nun die Konstanten $a b \alpha \beta$ als bekannt ansehen und bezeichnen:

$$k^2 a \lg\alpha = m \quad \text{und} \quad k^2 b \lg\beta = n$$

wenn die Konstanten m und n entsprechend d. Werten von $a b \alpha \beta$ und $k = 2{,}302585$ berechnet werden können, dann ist also:

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{dt} = m \cdot \alpha^{t-t_0} + n\beta^{t-t_0}$$

Für den Gebrauch ist es einfacher bequemer, d. Bezeichnung d. beiden Glieder mit einem Buchstaben zu bezeichnen, wodurch es dann leicht möglich ist, die Gleichung zur Berechnung von pt zu benutzen. Setzt man $\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = \alpha$, so kann man α als Differentialquotienten $\frac{dp}{dt}$ ansehen und p und t auseinander bestimmen. Setzt man nun in folgender Weise geschehen:

Thomson findet nun die empirische Formel

Bei den technischen Anwendungen wird d. Zustand gesättigten Wasserdampfes oft vorausgesetzt werden müssen, d.h. seine Temperatur soll durch seine Spannung, oder umgekehrt seine Spannung durch seine Temperatur gegeben sein. Für diesen Zustand ist meines Wissens bis d. technischen Anwendungen d. Wärmelehre fehlenden Tabellen für Wasserdampf, d. Regnault'schen Tabellen ist Zeuner empfehlenswerthe vielfach fehlende Tabellen. (Zeuner Grashof 329)

Insbesondere wird zunächst wichtig sein, die Abhängigkeit der Verdampfungswärme eines gesättigten Wasserdampfes von seiner Temperatur zu kennen. Für diese Verdampfungswärme eines Kilogramm einer gesättigten Flüssigkeit von der Temperatur t und auf Clausius d. Wärmemenge verstanden, welche zur Verwandlung in gesättigten Dampf von derselben Temperatur t aufgewendet werden muss, wenn dabei d. Volumen constant bleibt, bezeichnet man d. Verdampfungswärme bei constantem Volumen, welche d. Temperatur t d. betreffenden gesättigten Dampfes aufdrückt. Diese Verdampfungswärme für 1 kgr d. betreffenden Flüssigkeit wird d. Form. Verdampfungswärmen bei gleichem Fall mit r bezeichnet werden. Wenn dieselbe als eine für verschiedene Flüssigkeiten verschiedene Function von t und p betrachtet, mit Rücksicht auf d. empirisch gefundene gegebene p mit t vollständig bestimmte Function.

Ausschluss suchen wir t durch p zu ersetzen und r als Function von p allein darzustellen. Hierfür wird uns Regnault, welcher d. Grösse r für verschiedene Flüssigkeiten und insbesondere für Wasser durch sehr sorgfältige Versuche und für verschiedene Werthe von t und p bestimmt hat, aber nicht unmittelbar finden, sondern die Grösse r durch eine andere Grösse Q_0 ausdrücken, welche d. Wärmemenge bedeutet, welche nothwendig ist, um 1 kgr einer Flüssigkeit von der Temperatur t_0 auf die Temperatur t zu erwärmen, wenn dabei d. Spannung p auf constantem Werthe erhalten wird. Diese Wärmemenge Q_0 ist natürlich gleich $c_p(t-t_0)$ zu setzen, wenn c_p die specifische Wärme der betreffenden Flüssigkeit bei constantem Drucke p bezeichnet. Diese Wärmemenge Q_0 ist natürlich auch diejenige Wärmemenge, welche d. Flüssigkeit von d. Temperatur t_0 per 1 kgr aufgenommen werden muss, um sie bei constantem Drucke p auf die Temperatur t zu erwärmen. Diese Wärmemenge Q_0 ist nicht zu verwechseln mit der Wärmemenge, welche d. Flüssigkeit bei constantem Volumen von d. Temperatur t_0 auf die Temperatur t erwärmt werden muss, wenn sie bei constantem Drucke p auf d. Temperatur t erwärmt werden soll. Diese Wärmemenge Q_0 ist nicht zu verwechseln mit der Wärmemenge, welche d. Flüssigkeit bei constantem Volumen von d. Temperatur t_0 auf die Temperatur t erwärmt werden muss, wenn sie bei constantem Drucke p auf die Temperatur t erwärmt werden soll. Diese Wärmemenge Q_0 ist nicht zu verwechseln mit der Wärmemenge, welche d. Flüssigkeit bei constantem Volumen von d. Temperatur t_0 auf die Temperatur t erwärmt werden muss, wenn sie bei constantem Drucke p auf d. Temperatur t erwärmt werden soll. Diese Wärmemenge Q_0 ist nicht zu verwechseln mit der Wärmemenge, welche d. Flüssigkeit bei constantem Volumen von d. Temperatur t_0 auf die Temperatur t erwärmt werden muss, wenn sie bei constantem Drucke p auf d. Temperatur t erwärmt werden soll. Diese Wärmemenge Q_0 ist nicht zu verwechseln mit der Wärmemenge, welche d. Flüssigkeit bei constantem Volumen von d. Temperatur t_0 auf die Temperatur t erwärmt werden muss, wenn sie bei constantem Drucke p auf d. Temperatur t erwärmt werden soll. Diese Wärmemenge Q_0 ist nicht zu verwechseln mit der Wärmemenge, welche d. Flüssigkeit bei constantem Volumen von d. Temperatur t_0 auf die Temperatur t erwärmt werden muss, wenn sie bei constantem Drucke p auf d. Temperatur t erwärmt werden soll. Diese Wärmemenge Q_0 ist nicht zu verwechseln mit der Wärmemenge, welche d. Flüssigkeit bei constantem Volumen von d. Temperatur t_0 auf die Temperatur t erwärmt werden muss, wenn sie bei constantem Drucke p auf d. Temperatur t erwärmt werden soll. Diese Wärmemenge Q_0 ist nicht zu verwechseln mit der Wärmemenge, welche d. Flüssigkeit bei constantem Volumen von d. Temperatur t_0 auf die Temperatur t erwärmt werden muss, wenn sie bei constantem Drucke p auf d. Temperatur t erwärmt werden soll. Diese Wärmemenge Q_0 ist nicht zu verwechseln mit der Wärmemenge, welche d. Flüssigkeit bei constantem Volumen von d. Temperatur t_0 auf die Temperatur t erwärmt werden muss, wenn sie bei constantem Drucke p auf d. Temperatur t erwärmt werden soll. Diese Wärmemenge Q_0 ist nicht zu verwechseln mit der Wärmemenge, welche d. Flüssigkeit bei constantem Volumen von d. Temperatur t_0 auf die Temperatur t erwärmt werden muss, wenn sie bei constantem Drucke p auf d. Temperatur t erwärmt werden soll.

$$= \int_{t_0}^{t} c_p\,dt$$ unter c_p d. spec. Wärme bei constantem Drucke verstanden.

Zwischen dieser gesuchten specif. Flüssigkeit von d. Temperatur t bei constantem Drucke p in gesättigtem Zustande von derselben Temperatur t verstanden werden, und d. Verdampfungswärme entsprechend einer Wärmemenge $= r$ per 1 kgr d. Flüssigkeit erforderlich ist, besteht die Gleichung:

$$Q_0 = \int_{t_0}^{t} c_p\,dt + r$$

oder wenn d. Integral getheilt werden kann in: $\int_0^t c_p\,dt - \int_0^{t_0} c_p\,dt$:

$$Q_0 = \int_0^t c_p\,dt - \int_0^{t_0} c_p\,dt + r$$

Setzt man hierbei $\int_0^t c_p\,dt$ und $\int_0^{t_0} c_p\,dt$ diejenigen Wärmemengen, welche erforderlich werden um 1 kgr Flüssigkeit von d. Temperatur 0 bis $0°$ auf d. Temperatur t resp t_0 zu erwärmen. Bezeichnet man diese Wärmemenge resp mit q und q_0, so hat man:

$$Q_0 = q - q_0 + r$$

Bei d. einfachst gedachten Gasmaschinen benutzt d. Flüssigkeit, deren Dampf arbeitet, nur d. spec. Wärme bei constantem Drucke unmittelbar, d. Grösse d. Spannung p und q und q_0 als diejenigen Wärmemengen bezeichnen kann, welche erforderlich sind um 1 kgr Flüssigkeit bei constantem Drucke p von $0°$ auf $t°$ resp. $t_0°$ zu erwärmen. Diese Grössen q und q_0 würden nun durch bekannte Functionen von Regnault als Functionen von t bezeichnet und zwar wie es allemal gestattet erscheinen kann für constante Drucke. Spannung. Diesen Functionen gemäss, d.h. Wärmemenge q und gemachter Annahme für entsprechenden Flüssigkeiten und entsprechenden Werthen von t ausgedrückt werden kann. Durch eine algebraische Function d. Grades d. Temperatur t, also durch einen Ausdruck von d. Form:

$$q = at + bt^2 + ct^3$$

unter $a\,b\,c$ den betreffenden empirisch gefundenen Constanten verstanden, welche für entsprechenden Flüssigkeiten entsprechenden Werth bekommen.

Insbesondere für Wasser wird gefunden: $q = t + 0{,}000002\,t^2 + 0{,}0000003\,t^3$

wenn also q diejenige Wärmemenge bedeutet, welche erforderlich ist um 1 kgr Wasser von bestimmtem Drucke von $0°$ auf $t°$ zu erwärmen.

Nehmen wir in dieser Weise Q_0 q und q_0 für d. entsprechenden Fälle bekannt sind, dann aus d. Form. Verdampfungswärmen r berechnen. Hierfür gilt d. Formel: $Q_0 = q - q_0 + r$:

$$Q_0 + q_0 = q + r.$$

Diese Grösse $q + r$ ist nun offenbar diejenige Wärmemenge, welche 1 kgr einer gesättigten Flüssigkeit von $0°$ Temperatur aufgewendet werden muss, um sie bei constantem Drucke p in gesättigten Dampf von dieser Spannung p und von derselben Temperatur t zu verwandeln, wenn r d. von d. Flüssigkeit bei constantem Drucke p aufgenommene Verdampfungswärme bedeutet. Diese Wärmemenge hat Regnault d. Gesammtwärme d. Flüssigkeit genannt, und mag sie hier durch λ dargestellt werden. Diese Grösse hat nach Regnault im Allgemeinen nicht blos eine ganze function d. Temperatur t, welche d. Form:

$$\lambda = a + bt + ct^2$$

wenn $a\,b\,c$ empirisch bestimmte, welche für entsprechende Flüssigkeiten entsprechende Werthe annehmen können.

Für Wasserdampf genügte Regnault eine lineare Function für einen gewissen Verdampfungsbereich d. Form. bei constantem Drucke mit d. Beobachtungen, nämlich d. Function:

$$\lambda = 606{,}5 + 0{,}305\,t.$$

Dieser Ausdruck stellt also diejenige Wärmemenge dar, welche 1 kgr d. Wasserdampf von $0°$ Temperatur entwickelt werden muss, wenn er bei constantem Drucke p in gesättigten Dampf derselben Spannung und von der Temperatur t verwandelt.

Nachdem nun so diese Wärmemengen q und λ Gesammtwärmen λ dieser gesättigten Dampfarten entwickelt sind, ergibt sich nun nach d. Gleichung: $Q = q + r$ d. spec. Verdampfungswärmen r als Function von t endlich:

$$r = \lambda - q.$$

Für Wasserdampf ist diese spec. Verdampfungswärmen aus den obigen Ausdrücken:

$$r = \lambda - q = 606{,}5 + 0{,}305\,t - t - 0{,}000002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3$$

In diesem Ausdruck sind die Glieder mit t^2 und t^3 von weiter geringerer Bedeutung, so dass diese in einer weniger feinen Rechnung gegenüber r und λ und d. spec. Verdampfungswärmen r als Function von t vernachlässigt werden können. Dadurch ist es für die meisten technischen Berechnungen nun angemessen, d. Constanten a und b dieser neuen Function gemäss: $r = a - bt$ so zu wählen, dass sie besonders in d. Nähe von $t = 100°$ den thatsächlichen Verhältnissen möglichst genau entspricht.

Aus d. Gleichung $Q = q + r$ folgt nun also mit Rücksicht auf die angenommene Ausdrucksweise:

$$q = Q - r = 606{,}5 - a + (0{,}305 + b)\,t$$

und also $c_p = \frac{dq}{dt} = 0{,}305 + b$

Nachdem nun die angenommene Gleichung für q feststeht, muß noch die Differenz bestimmt werden:

$$c_p = \frac{dq}{dt} = 1 + 0{,}00004\,t + 0{,}0000009\,t^2$$

und insbesondere für $t = 100°$ C: $c_p = 1{,}013$

Durch Gleichsetzen erhält man:

$$c_p = 0{,}305 + b = 1{,}013$$

$$\text{also } b = 1{,}013 - 0{,}305 = 0{,}708$$

und demnach d. Formel für r:

$$r = a + 0{,}708\,t.$$

Somit also muß nun noch a nachträglich d. angenommene Gültigkeit für Wasser; sind hiezu nun die Versuche einem a entspricht, so ist r gemäß den gefundenen Versuchsresultaten mit Sicherheit für $t = 100°$. Nach Regnault ist nun für $t = 100°$:

$$r = 536{,}2$$

und demnach $a = r + 0{,}708\,t = 536{,}2 + 70{,}8 = 607$.

Dem Gesagten nach also gültig für d. spez. Verdampfungswärme d. Wassers d. gleich von Clausius empfohlene Formel, welche numerisch genau wie für $t = 100°$ genügend übereinstimmend aber auch für d. niedrigeren Temperaturen gilt:

$$r = 607 + 0{,}708\,t.$$

Diese spez. Verdampfungswärme r muß nun als mit 2 Werten behaftet betrachtet werden. Wärme ist bekanntlich Bewegung, also ist d. Aufgabe beim d. spez. Verdampfungswärme entspricht, 1 kg einer Flüssigkeit die von einer gewissen Temperatur t in gesättigten Dampf von derselben Temperatur zu verwandeln, außer d. spez. äußeren Arbeit noch = p – entgegen Spannung ist, welche d. Temperatur t d. betreffenden gesättigten Dampfes entspricht, so muß bei dieser Verwandlung aufgewendet werden:

1) eine Arbeitsmenge (d. Wärmemenge) welche nötig wäre, um 1 kg gesättigten Dampf von d. Temperatur t aus gesättigt werden Arbeitsmengen bis auf 1 kg. d. gesättigten Flüssigkeit von derselben Temperatur t.

2) muß hier eine gewisse Expansionsarbeit verrichtet werden, welche dazu dient um den entsprechenden Dampf d. äußeren Druck entgegen Platz zu schaffen.

Zu beiden Vorgängen muß eine bestimmte Wärmemenge verbraucht werden, welche beiden zusammen d. spez. Verdampfungswärme entsprechen. Diese beiden Elemente d. spez. Verdampfungswärme r stehen mit einander und mit der spez. Verdampfungswärme in Beziehung werden, welche d. innere spez. Wärme oder Verdampfungswärme genannt wird, während d. äußere spez. Verdampfungswärme zum Vorschein d. Arbeitsmenge dient während d. äußere spez. Verdampfungswärme zur Verrichtung d. äußeren Expansionsarbeit verwendet wird.

Diese äußere spez. Verdampfungswärme ist nun ziemlich leicht auszudrücken:

Nämlich Δ d. Volumsvermehrung d. spez. Volumens d. gesättigten Dampfes über d. spez. Volumen d. Flüssigkeit bei gleicher Temperatur, so ist $A\,p\,\Delta$ d. Volumsvermehrung, welche bei d. Verdampfung von 1 kg Flüssigkeit bei gleicher Temperatur t und gleichem Druck p (normalen gleichbleiben) ist, so ist bei dem ganzen Verdampfungsvorgange eine Arbeit $= p\,\Delta$ zu verrichten. Die Wärmeäquivalent dieser Expansionsarbeit $= A\,p\,\Delta$ ist also d. zweiten spez. Verdampfungswärme.

Demnach muß also mit ρ d. innere spez. Verdampfungswärme, $p\Delta$:

$$r = \rho + \Delta p A$$ wobei A bekanntlich d. Wärmeäquivalent d. Arbeitseinheit vorstellen.

Nachdem nun die Versuchsresultate d. spez. Verdampfungswärme r als Funktion d. Temperatur t durch Versuche abgeleitet ist, ist es nun möglich eine mittels d. die innere und äußere spez. Verdampfungswärme durch weitere Versuche unmittelbar zu bestimmen, indem dieselben auf Experimentellen Wege und den vorgeführten Resultaten abgeleitet werden können.

Es wurde zunächst bei d. Ableitung d. Verdampfungsgesetzes d. Begriff beim Übergange von einem Aggregatzustande in d. andere d. allgemeingültige Formel gefunden:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{A\,\sigma\,\Delta}{r}$$ wobei Δ und r ganz dieselben Größen wie oft vorkommen und wenn A wie d. bekannte Wert bedeutet $= \frac{1}{424}$ Cal und $\sigma = t + 273 =$ absolute Temperatur.

Nachdem nun wie d. obige Gleichung durch $\frac{r}{\sigma}$ und mittlerweile mit p multipliziert wurde:

$$A\,p\,\Delta = \frac{p \cdot r}{\sigma}\,\frac{dt}{dp} = \frac{r}{\sigma\,\frac{1}{p}\,\frac{dp}{dt}}$$

Nachdem Vorgesagtem ist aber $\frac{1}{p}\,\frac{dp}{dt}$ durch empirische Formeln als Funktion d. Temperatur t bekannt und daher auch r als empirische Temperatur Funktion gefunden werden. Mit Rücksicht auf $\sigma = 273 + t$ kann nun also mittels dieser Formel auch d. äußere spez. Verdampfungswärme als Funktion von t bestimmt und dann endlich auch gemäß d. Gleichung:

$$\rho = r - A\,p\,\Delta$$ d. innere spez. Verdampfungswärme als Temperatur Funktion entwickelt.

Genau wie r mit 2 Werte behaftet muß auch die Wärmemenge q, welche benötigt wird um 1 kg Flüssigkeit d. selben bei gesättigter Spannung von $0°$ auf $t°$ zu erwärmen, als mit 2 Werten behaftet betrachtet werden, nämlich mit dem Wärmegrade d. Flüssigkeit bei d. Temperatur $t°$ über derselben bei d. Temperatur $0°$ und mit dem (obigen mit Rücksicht) Wärmeäquivalent, welche bei d. Temperaturerhöhung eine entsprechende Vermehrung von d. Spannung wird. Gesetzmäßig sind d. Beziehungen eines Flüssigkeit als solche durch Versuche mit Rücksicht auf die Veränderungen d. Volumens, welche bei d. Erwärmung d. Aggregatform eintritt d. Veränderung d. Expansionskraft d. Flüssigkeit und d. Veränderung d. Wärmeinhalt der Flüssigkeit bei steigender Temperatur. Wenn dieses bekannt ist, so ist auch die Wärmemenge q, nämlich d. Wärme welche gesättigte Dampf als solche benötigt um 1 kg Flüssigkeit bei $t°$ über derselben bei $0°$ Ausgangspunkt d. Temperatur t zu bringen, nämlich d. Wärmeäquivalent d. Arbeit, welche bei d. Ausdehnung d. Dampfes q als Verbrauch d. Wärmemenge um 1 kg Flüssigkeit bei $t°$ über derselben bei $0°$ bekannt werden. Nach Zeuner nennt man diese Größe q d. selben auch d. spez. Flüssigkeitswärme.

Somit kann nun d. Größe $q + \rho$ als Verbrauch d. Wärmemenge um 1 kg gesättigten Dampf bei $t°$ über dieselbe um 1 kg d. betreffenden Flüssigkeit bei $0°$ bekannt und auch d. spez. Verdampfungswärme genannt werden.

Die Gesamtwärme Q kann nun wie folgt ausgedrückt werden:

$$Q = q + \rho + A\,p\,\Delta$$

Die obige Formel für $A\,p\,\Delta = $ d. äußeren spez. Verdampfungswärme, ist nun aber für die numerische Berechnung schwierig anzuwenden indem dazu d. bezügliche Temperatur für die nötige $\frac{dp}{dt}$ vorkommt. Es ist somit diese nicht praktisch. Es muß d. äußere spez. Verdampfungswärme $A\,p\,\Delta$ und somit auch die innere spez. Verdampfungswärme ρ als einfache algebraische Funktionen von t ausgedrückt werden.

Nach Zeuner ist dies sehr gut möglich durch folgende empirische Formel: →

Formen für die Ausdehnungskoeffizienten:

$$\varrho = a - bt - ct^2$$

worin $a\,b\,c$ für verschiedene flüssige Körper verschiedene Konstanten sein können. Für Wasserdampf kann man setzen, wenn ϱ wieder in kg/cbm und t in Celsiusgraden ausgedrückt wird:

$$\varrho = 575{,}4 - 0{,}791\,t$$

wobei dieses Gesetz nur für die Ausdehnungsmessung mit den Normalgasen für die ganze Temperaturskala zwischen $0°$ und $200°$ Geltung hat.

Nehmen wir nun einen Fall an, wo die Temperatur t durch Wärmezufuhr q kalorien gesteigert wird, wobei aber gleichzeitig Arbeit $A\,pv$ in äußere Energie verwandelt wird, so ist die Energievermehrung Δp in einfacher Energieform gemäß dem Ausdruck:

$$\Delta p = Q - q - \varrho$$

zu suchen, wobei Q, q und ϱ die oben angegebenen Bedeutungen haben. Mit Einsetzung der oben gefundenen Werte wird nun

$$\Delta p = Q - q - \varrho = 606{,}5 + 0{,}305\,t - t - 0{,}000021\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3 - 575{,}4 + 0{,}791\,t$$

womit sich mit genügender Genauigkeit mit t^2 und t^3 ergibt:

$$\Delta p = 31 + 1{,}096\,t - q.$$

Nach diesen beiden Formeln für ϱ und Δp sind für verschiedene Temperaturen und Wärmezufuhren q die Wärmeinhalte p der Endzustände, die Energievermehrungen und äußeren Arbeitsleistungen berechnet und tabellarisch zusammengestellt (Gerhard S. 279). Aus den Tabellenwerten von q, ϱ und Δp ergeben sich dann die entsprechenden Werte der Energiesumme $= q + \varrho$, der Arbeitsenergiesumme $= r = \varrho + A\,p\,\Delta$ und der Gesamtsumme $Q = q + \varrho + A\,p\,\Delta$ in der beistehenden Tabelle 1.

Diese den verschiedenen Größen beim Verdampfen zugeführten Wärmemengen der Größe gemäß stellen nun in anschaulicher Weise mit den schraffierten Flächen der spez. Volumen v die Energievermehrungen $A\,p\,\Delta$, wenn beispielsweise wieder p in kg/qm und v in cbm gemessen ist, Δ entsprechend in cbm. spez. kgr. somit Arbeitseinheiten der spezifischen Energie und v die spezifische Energie des Endzustandes, die durch Addition der spez. Volumenänderung Δ zum spez. Volumen v des anfangs gesättigten Zustandes zu bekommen, somit dem Abschnitt bis zur spez. Grade pv des spezifischen Energiezustandes als entsprechende Wärmeeinheit der spez. Volumen v gleich, also:

$$\gamma = \frac{1}{v} = \frac{1}{\Delta + w}$$

Worin w die Größe der Volumen des Wasserdampfes bedeutet, γ ist hierbei die spez. Energie des Dampfes p und Temperatur t. Indem aber alle spezifischen Energievermehrungen r gleich sind, so wird die Größe γ nur von Δ und w abhängig sein, also $\gamma = f(\Delta, w)$ sein.

$w = 0{,}001$ (entsprechend der Dichte eines 1 kgr.)

für $t = 200°$ ist jedoch $w = 0{,}00113$

Wie man sieht, ändert sich das spez. Volumen des Wasserdampfes innerhalb der in den gewonnenen Tabellen eingeschlossenen Grenzen $0 - 200°$ nur in der 4 Dezimalstelle, sodass für diesen Bereich hier nur mit dem spez. Volumen w des Wassers innerhalb dieser Grenzen als konstant gerechnet werden kann, wenngleich für Temperaturen von $t = 0°$ der Genauigkeit halber $w = 0{,}001$ gesetzt werden muss, wenngleich für Temperaturen von $t = 200°$ der Genauigkeit halber $w = 0{,}00113$ gesetzt werden muss, wenngleich für Temperaturen von $t = 200°$ der Genauigkeit halber $w = 0{,}00113$ gesetzt werden muss. Man kann demnach das spez. Volumen v des gesättigten Wasserdampfes setzen:

$$v = 0{,}001 + \Delta$$

wobei der Wert Δ innerhalb der ganzen Grenzen nur die Größe in der 4 Dezimalstelle nur eine Einheit halber genau zu kennen braucht.

Demnach ist das spez. Gewicht des gesättigten Wasserdampfes bei den genannten Grenzen:

$$\gamma = \frac{1}{\Delta + 0{,}001} = \text{Gewicht des cubischen gesättigten Wasserdampfes in kgr.}$$

Vergleicht man die aus dieser Formel gefundenen Werte von γ = d. spez. Gewicht d. Wasserdampfes mit den spez. Gewicht d. absol. Luft von gleicher Temperatur und Spannung (die d. Werte von $\gamma = \frac{1}{\Delta + 0{,}001}$ sind bei gleicher Spannung und Temperatur, d. h. gleicher Anzahl der Elastizität δ d. gesättigten Wasserdampfes in Luft einfachen Luft, die gleicher Spannung und Temperatur, ausgedrückt mit d. Spannung und gross $\delta = 0{,}622$ bis $0{,}676$ für $p = 0{,}1$ bis 10 Atm.

Es soll demnach also zu bemerken sein, wenn man nun eine gewisse Menge mit gesättigtem Wasserdampf in Berührung mit einem gleich großen Quantum trockener Luft bringt, dass dann der gesättigte Wasserdampf bei gleicher Temperatur und Spannung nur ein Gewicht besitzt, das $0{,}622$ bis $0{,}676$ mal so groß ist, als das Gewicht der gleichen Menge trockener Luft. Der Grund dieser Erscheinung ist darin zu suchen, dass die gesättigte Luft nur mit einer gewissen Menge Wasserdampf gemischt ist, also nicht mit der Gesamtmenge, die sie bei gleicher Temperatur und Spannung aufnehmen könnte. Es ist demnach das spez. Gewicht des gesättigten Wasserdampfes bei gleicher Temperatur und Spannung $\delta = 0{,}622$ bis $0{,}676$ mal so groß als das spez. Gewicht der trockenen Luft bei gleicher Temperatur und Spannung.

Es ist demnach also das spez. Gewicht des gesättigten Wasserdampfes annähernd als gleich dem spez. Gewicht der trockenen Luft bei gleicher Temperatur und Spannung anzusehen, wenn man für die gesättigte Luft das spez. Gewicht der trockenen Luft bei gleicher Temperatur und Spannung nimmt, vermehrt um $\frac{3}{8}$ des spez. Gewichtes des Wasserdampfes

Um auf Grund dieser Erfahrung über Gemische d. gesättigten Dampfes als Function d. Temperatur zu kommen, kann man diese Erfahrung mit d. Formel $\frac{1}{n}$ ausdrücken, man erhält dann:

$$p^{\frac{1}{n}} v = a^{\frac{1}{n}}$$

und nennt:

spec. Gewicht $= \gamma = \frac{1}{v} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} p^{\frac{1}{n}} = \alpha p^{\mu}$

wenn man bezeichnet $\alpha = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ und $\mu = \frac{1}{n}$

für gesättigten Wasserdampf kommt:

$\alpha = 0{,}6058$ und $\mu = 0{,}9393$ bestimmt und somit hat man zwischen zusammengehörigen γ und p für gesättigten Wasserdampf:

$$\gamma = 0{,}6058 \cdot p^{0{,}9393}$$

die auf diese Formel sich gründenden Berechnungen d. aufgespannt Temperaturen gesättigten Dampfes aus γ stimmen mit d. genauen mit Anwendung empirischer Formeln gefundenen Werthe aus d. Dampftafeln befriedigend überein, wenigstens bleibt sogar in d. Dampftafeln selbst zwischen zwei Unterschiede eines gleichartigen.

Nachdem nun diese Formbeziehungen gesättigten Wasserdampfes gefunden sind, kommen wir nun zu diesen zu kommen.

Verhalten von Dampf mit gleichartiger Flüssigkeit.

Die bisherigen Entwicklungen sind nun zunächst d. allgemeinen Formeln für verschiedene Zustandsänderungen solcher Gemische.

Zu d. Aufstellung dieser allgemeinen Formeln für solche Zustandsänderungen fehlen nun nur für allemal gesättigt Flüssigkeit folgende Bezeichnungen bemerkt werden:

p = spec. Spannung und zwar wenn nicht d. Gegenheit dazu steht d. spec. Spannung in kgr pr. Qdm. Wenn nun eine Verdampfung stattfindet, so kann man sich vorstellen, dass diese Spannung p in allen Punkten d. Gemisches stets vorhanden.

γ bedeutet d. in 1 kgr d. Gemisches enthaltenen Dampfmenge ausgedrückt in kgr

$1 - \gamma$ = Gewichtsmenge d. in 1 kgr Gemisch enthaltenen Flüssigkeit

t = die Temperatur in Celsius'schen Graden ausgedrückt und gemessen mit d. gewöhnlichen Thermometer.

ϑ = absolute Temperatur $= 273 + t$

q = Wärmemenge, welche dazu erforderlich wird, um 1 kgr Flüssigkeit, welche bei constanter Spannung von $0°$ auf $t°$ zu erwärmen und alle spec. Flüssigkeitswärme besitzt, — dem Unterschied d. Wärmemenge von 1 kgr. Flüssigkeit bei $t°$ über derjenigen bei $0°$.

r = spec. Verdampfungswärme nämlich d. Wärmemenge, welche d. Unterschied der Flüssigkeitswärme $t°$ (spec. Wärme) pr. kgr und derjenigen bei $t°$ gesättigten Dampfes bei derselben Temperatur t ausmacht, wenn bei d. Grade dieser Temperatur = Spannung p ist, welche d. Temperatur t d. betreffenden gesättigten Dampfes entspricht.

ϱ = innere spec. Verdampfungswärme nämlich diejenige Wärmemenge, welche 1 kgr gesättigten Dampfes von d. Temperatur t aufnehmen muss, um 1 kgr gesättigten Dampf von derselben Temperatur t zu bilden.

w = spec. Volumen d. Flüssigkeit entspricht d. Volumen 1 kgr.

$w + \Delta$ = spec. Volumen d. Dampfes, welcher entsteht in dem Gemische falls gesättigt.

v = spec. Volumen d. Gemisches oder mittleres spec. Volumen unter d. Annahme einer Isothermen dieses Gemisches. $v = w + \gamma\Delta$.

fallig U = spec. inneren Arbeitsvermögen d. Gemisches. Dasselbe entsteht in seinem Bestreben nach Allgemeinem immer einen möglichen complexen Körper anzunehmen, wenn man sein Arbeitsvermögen in seinen Änderungen von einem bestimmten Zustand zu einem anderen gegebenen Zustand vergleicht. Im Zustande für immer angenommen, als z. B. Arbeitsvermögen von dem Zustande aus gerechnet wird, in welchem d. ganze Gemisch flüssig ist $\gamma = 0$ und in welchem d. Temperatur $t = 0°$.

Die allgemeinen Gleichungen, welche eine jede Änderung eines solchen Gemisches von bestimmter Flüssigkeit zu jeder solchen sind folgende:

1. die spec. Volumenänderung d. Gemisches nämlich $v = w + \gamma\Delta$ — 1.

wenn man w als constant in Betracht zieht, indem die Volumenänderungen meist Flüssigkeit als solche immer sehr klein sind im Vergleich mit Änderungen d. Volumens, welche durch d. Änderung d. Dampfgehaltes als solch d. Änderung d. Flüssigkeit auf dieses d. Verdampfungsarbeit d. Gemisches hervorgebracht werden. Unter diesem Umstand kommt man nämlich Mannen Unterschied zu machen zwischen spec. Volumen bei constanter Spannung und constantem Volumen, indem dieser Unterschied gemäß auf den Volumenänderungen nicht beruht.

Setzen wir auf d. Verschwinden Δ eine Function von p d. h. wird dieses d. obige Gleichung auf spec. Volumen d. Gemisches übertragen eine Function d. Spannung p und d. so gefundene Beziehung Spannung p genau bestimmen d. inneren Arbeitsvermögen U und Volumen und diese Volumenänderung ΔU unter Ad. Volumenänderung d. Arbeitsvermögen entsprechen, obgleich spec. inneren Arbeitsvermögen U selbst nicht absolut bestimmt werden kann, so kann man doch für seinen Gang q als Unterschied d. Vergleichsmenge von 1 kgr gesättigten Dampfes bei $t°$ über derjenigen von 1 kgr d. gleichen Flüssigkeit bei $0°$ d. h. = d. spec. Wärmemenge.

Nehmen wieder unter in 1 kgr Gemisch, γ kgr Dampf, $1 - \gamma$ kgr Flüssigkeit bei $t°$ enthalten sein, so ist 2 Spec. Vergrößerung d. Gemisches $= \gamma(\varrho + \varrho)$ wenn d. spec. Vergrößerung d. Flüssigkeit $= (1 - \gamma)q$ so ergiebt sich eine Änderung d. Gemisches falls d. spec. Vergrößerung:

$$\Delta U = (1 - \gamma) q + \gamma(\varrho + \varrho)$$

$$\text{oder } \Delta U = q + \gamma\varrho \quad \text{— 2}$$

für vorliegenden Falle bedeutet also diese spec. Vergrößerung nichts anderes als d. Unterschied d. Vergrößerung, welche d. Gemisch bei $t°$ pr. 1 kgr hat, über derjenigen, welche d. ganze Masse Flüssigkeit aufgespannt $\gamma = 0$ und diese d. Temperatur $0°$ hätte.

Setzen diesen Gleichungen hat man nun d. Gleichungen, welche gültig sind für spec. Spannung p und Temperatur t eine Vergleichung d. Volumgrößen mit einem in d. anderen Vergleichsform. So kann man folgende Gesetze beliebig setzen offenbar leicht Spalt, Flüssigkeit und Dampf in einem festen Gefäßraum d. Volumgrößen von Flüssigkeit und Dampf bei einer Temperatur t und Spannung p und Volumen v und t = Null sind.

Bei Wärmezufuhr $U = AH$ d. h. spec. Vergrößerung d. Gemisches bleibt aber offenbar mit d. spec. Vergrößerung d. Flüssigkeit und d. Vergrößerung d. Dampfgemisches Theil d. Gemisch. Nehmen wir γw als constant angenommen wird, so kann man nun für einen Grad γ als Unterschied. Vergrößerung von Flüssigkeit bei $t°$ über Null bei $0°$ bestimmen, d. h. d. spec. Flüssigkeitswärme bezeichnet werden, ebenso kann man $\gamma + \varrho$ d. Unterschied. Vergrößerung von 1 kgr gesättigten Dampfes bei $t°$ über Null von 1 kgr d. gleichen Flüssigkeit bei $0°$ d. h. = d. spec. Dampfwärme

diese Gleichungen beziehen sich nur auf gasförmige Körper, bei welchen die Wärmekapazität c unabhängig von der Temperatur ist. Bezeichnet nun c die spezifische Wärmekapazität, ganz allgemein, also bei beliebigen Körpern, so ist die Wärmemenge, welche einem Körper zugeführt werden muß, um seine Temperatur um dT zu erhöhen, gegeben durch:

$$dQ = c\,dT$$

Ist nun diese Gleichung bekannt für irgend einen besonderen Vorgang, bei welchem die Wärmemenge dQ zugeführt wird, damit das Gewicht von 1 kg eines gewissen Körpers seine Temperatur um dT erhöht, und ist ferner bekannt, daß die Wärmekapazität unabhängig ist von der Art der Änderung des Körperzustandes, so ist damit auch die Wärmekapazität für jeden beliebigen anderen Vorgang bestimmt.

Diese Folgerung kann man leicht benutzen mit Hilfe des Clausiusschen Wärmesatzes, wonach

$$dQ = dU + A\,p\,dv$$

wenn W das Äquivalent der Wärmeeinheit in Arbeitseinheiten ist: $W = \frac{1}{A} = 424$ kgm.

Der Wärmesatz kann nun also aufgefaßt werden als Definition der Größe U, wenn A eine bekannte Größe ist:

$$dU = d(AU) + A\,p\,dv$$

Setzen wir hier einerseits $c\,dT$ für dQ, andererseits $dq + d(y\varphi) + A\,p\,dv$, so folgt:

3) . . . . . $c\,dT = dq + d(y\varphi) + A\,p\,dv$

Diese Gleichung kann nun noch in zweifacher Weise umgeformt und benutzt werden.

Setzen wir nämlich $v = w + y\Delta$, wenn w = constant angenommen wird, so ist

$$dv = d(y\Delta) \quad \text{und also} \quad A\,p\,dv = A\,p\,d(y\Delta)$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung kann nun noch weiter umgeformt werden:

$$A\,p\,dv = A\,p\,d(y\Delta) = A\,d(y\,p\Delta) - A\,y\Delta\,dp$$

(weil $d(xyz) = xy\,dz + z\,d(xy)$)

Der Ausdruck für dQ wird demnach nun:

$$dQ = \text{weil } A\,d(yp\Delta) = a(y\,Ap\Delta) \text{ ist, wie aus der Definition von } \Delta \text{ in dem letzten}$$

Gliede dem Ausdruck für dQ gegebenen Wert:

$$\Delta = \frac{dt}{dp}\cdot\frac{r}{\vartheta}$$

und daraus folgt: $A\,p\,dv = d(y\cdot Ap\Delta) - y\,dp\,\frac{dt}{dp}\,\frac{r}{\vartheta} = d(y\cdot Ap\Delta) - y\,\frac{r\,dt}{\vartheta}$

Dies nun in Gl. 3 eingeführt gibt:

$$\begin{aligned} dQ &= dq + d(y\varphi) + d(y\cdot Ap\Delta) - y\,\frac{r\,dt}{\vartheta} \\ &= dq + d\left[y(\varphi + Ap\Delta)\right] - y\,\frac{r\,dt}{\vartheta} \qquad \text{da } \varphi + Ap\Delta = r \\ &= dq + d(yr) - \frac{y\,r}{\vartheta}\,dt \end{aligned}$$ 4) . . . . . .

Setzen wir nun noch beliebig $dt = d\vartheta$, oder wenn $\vartheta = t + 273$, so kann man einfacher schreiben:

$$dQ = dq + d(yr) - \frac{y\,r}{\vartheta}\,d\vartheta = dq + \vartheta\,\frac{\vartheta\,d(yr) - yr\,d\vartheta}{\vartheta^2}$$

5) d. umgeschriebene Differentialgleichung: $dQ = dq + \vartheta\,d\left(\frac{y\,r}{\vartheta}\right)$

diese umgeformte Differentialgleichung für die Wärmemenge dQ, welche dem vollkommenen Gase für 1 kg seine unendlich kleine Temperaturänderung ermöglichen soll, besitzt eine bemerkenswert einfache Bedeutung. Man kann sich nämlich die Aufgabe stellen, diejenige Wärmemenge dQ zu bestimmen, welche dem Gewicht von 1 kg eines vollkommenen Gases zugeführt werden muß, damit dessen Temperatur um dT erhöht wird, während gleichzeitig sein Volumen sich um dv ändert, und sein Druck sich um dp ändert.

Bezeichnet c_v die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Volumen, so ist die Wärmemenge, welche dem Gewicht von 1 kg zugeführt werden muß, damit seine Temperatur um dT steigt, ohne daß sich sein Volumen ändert, gegeben durch die Gleichung:

$$c = \frac{dq}{dt} \quad \text{also} \quad dq = c\,dt$$

Nehmen wir in Gl. 4 wie früher $dq = y\,dr - y\,dr + r\,dy$, so folgt nun:

$$\begin{aligned} dQ &= c\,dt + r\,dy + y\,dr + y\,\frac{r}{\vartheta}\,dt \\ &= (1-y)\,c\,dt + r\,dy + y\left(c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{\vartheta}\right)dt \end{aligned}$$

wenn nun die Größe bezeichnet:

$$c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{\vartheta} = h \qquad \text{. . . . . 6)}$$

so kann man schreiben: $dQ = (1-y)\,c\,dt + r\,dy + y\,h\,dt$

Die Bedeutung dieser Wärmemenge dQ ist diese zu nennen: Teilt man sich ein gewisses Gewicht einer gasförmigen Flüssigkeit von einer Stelle seines Körpers einer Wärmemenge nicht, so verändert sich sein Zustand:

1) sein spezifisches Volumen d. Flüssigkeit, wenn man mit y (1 – y) kg in 1 kg Gemisch verwandelt denkt.

2) sein augenblicklich vorhandener Druck in Beziehung zu dem Druck p der Nachbarschaft, mit welcher es in Berührung steht.

Die Größe dQ gibt nun an, welche Wärmemenge zugeführt werden muß, damit diese Änderungen des Zustandes eintreten können.

Die Wärmemenge dQ setzt sich zusammen:

1) aus $(1-y)\,c\,dt$: Wärmemenge zur Temperaturerhöhung d. Flüssigkeitsmenge $= (1-y)$ kg um dT.

2) aus $r\,dy$: Wärmemenge, welche zur Verwandlung von dy kg Flüssigkeit in Dampf verbraucht wird, d. h. welche die Wärmemenge repräsentiert = $r\,dy$, die einem Gewicht dy eines vollkommenen Gases zugeführt werden muß, damit sein Volumen sich um dv ändert, ohne daß seine Temperatur sich ändert.

3) aus $y\,h\,dt$: Wärmemenge, welche zur Temperaturerhöhung und entsprechenden Volumenänderung d. Dampfmenge = y kg verbraucht wird.

Es bedeutet demnach h eine Art spez. Wärme d. Dampfes, nämlich diejenige, welche einer gewissen Volumenänderung bei d. Wärmemittheilung entspricht, so daß d. Dampf genau gesättigt bleibt. Auch genannt spez. Wärme d. gesättigten Dampfes. Ist h positiv, wird auch bei gesättigtem Volumen eine neue Wärmemenge zugeführt werden müssen. —

Da sich diese Wärmemenge dQ nach d. Gewicht von 1 kg berechnet, wenn man sich nicht weiter fragen, welche d. Eigenschaften sind von 1 kg d. Gemisches von Dampf und gesättigter Flüssigkeit bei einem gewissen augenblicklichen Zustand dieses Wärmegemisches abhängig.

Folgendes kann allgemeines Ausdruck finden für die Größe der Arbeit bei einer unendlich kleinen Volumenänderung ist:

$$dE = p\,dv$$

und da $v = w + y\Delta$ und da w = constant $\quad dE = p\,d(y\Delta)$

Nach d. allgemeiner Wärmetheorie ist aber d. Arbeitsmaß $W dv$ d. Quotient d. Wärmemenge dQ, die dem Körper bei einer Zustandsänderung mitgetheilt wird, durch d. Temperatur t, bei welcher diese Wärmemenge mitgetheilt wird, also nämlich:

$$W dv = \frac{dQ}{t} = \frac{dU + p dv}{t} = \frac{dU + A l}{t}$$

oder $W = \frac{1}{t} \cdot \frac{dU + A l}{dv}$

Nach d. allgemeinen Wärmetheorie ist aber d. Arbeitsmaß $W dv$ d. Quotient d. Wärmemenge dQ, die dem Körper bei einer Zustandsänderung mitgetheilt wird, durch d. Temperatur t, bei welcher diese Wärmemenge mitgetheilt wird, also nämlich:

$$W dv = \frac{dU + p dv}{t} = \frac{dU + A l}{t}$$

oder $W = \frac{1}{t} \cdot \frac{dU + A l}{dv}$

Nach d. allgemeinen Wärmetheorie ist aber d. Arbeitsmaß $W dv$ d. Quotient d. Wärmemenge dQ, die dem Körper bei einer Zustandsänderung mitgetheilt wird, durch d. Temperatur t, bei welcher diese Wärmemenge mitgetheilt wird, also nämlich:

$$W dv = \frac{dQ}{t} = \frac{dU + p dv}{t} = \frac{dU + A l}{t}$$

oder $W = \frac{1}{t} \cdot \frac{dU + A l}{dv}$

Nach d. allgemeiner