Universitätsbibliothek Karlsruhe

III E 337

Grashof, Franz

Wärmelehre

Karlsruhe
1872/73

IIIE
337

III E 337

WAERMETHEORIE

&

HYDRAULIK.

nach Vorträgen von Prof: Grashof.

Karlsruhe.

1872–73.

A. Pieper

Bibliothek der Techn. Hochschule Karlsruhe

III E 337

Angewandte Hydraulik
&
# mechanische Wärmetheorie.

nach Vorträgen von Prof. Dr. Grashof, Karlsruhe.
A. Pieper.

Da d. Hydraulik und mechanische Wärmetheorie sich eng bedingen, wie im späteren Verlaufe d. Untersuchungen zu ersehen sein wird, so seien zunächst d. Hauptsätze d. mechanischen Wärmetheorie entwickelt, indem manche Erscheinungen in d. Hydraulik von d. Wärme beeinflußt werden.

Das Wesen d. Wärmetheorie beruht nun ganz auf d. Annahme einer atomistischen Constitution d. Materie d.h. sie beruht darauf, daß angenommen wird, daß d. Materie zusammengesetzt ist aus vielen kl. discreten materiellen Elementen, welche in kl. Entfernungen von einander getrennt sind, also sich immer Räume zwischen einander befinden.

Anfänglich soll jedoch von dieser Annahme abstrahirt werden, indem noch nicht bei dem heutigen Stand d. Wissenschaften d. Zusammenhang dieser Theilchen vollkommen genug entwickelt ist, um mathematische Beziehungen mit Hülfe d. höheren Analysis in d. Untersuchungen hineinziehen zu können, da bekanntlich d. mathematischen Untersuchungen mit Hülfe d. höheren Analysis wesentlich darauf beruhen, daß eine Zerlegung d. Körpers in unendlich kleine, überall stetig zusammenhängende materielle Theile überhaupt denkbar ist. Dies letztere ist aber bei d. Annahme einer atomistischen Constitution d. Materie unmöglich, denn würde man dann eine Zerlegung in unendlich kl. Theile vornehmen, so würden diese Theile theils ganz Materie, theils halb Materie halb leerer Raum und theils nur leerer Raum sein. Aus diesem Grunde sei daher von d. obigen Annahme vorerst abstrahirt, zumal da ohne diese Abstraction nicht schon von vornherein eine strenge Definition d. Oberfläche und d. Volumens d. Körpers recht schwierig würde.

Unter Voraussetzung dieser Abstraction ist nun d. Zustand eines Körpers bestimmt durch d. augenblicklichen Zustand d. unendlich kl. Elemente, aus denen d. Körper bestehend gedacht werden kann. Im Hinblick d. Körperelemente wird man nun in d. Folge 2 verschiedene Arten Elemente einzuführen haben:
Wird d. Körperelement betrachtet als d. Inbegriff ganz bestimmter immer dieselbe bleibenden Materie, so soll d. Element ein Massenelement genannt werden.
Bei gewissen anderen Untersuchungen muß man sich aber auch d. Körper in verschiedenen Zuständen in Elemente zerlegt denken, so daß ein Element immer verschiedene Materie enthält. Solche Elemente sollen Volumenelemente heißen. Diese Volumenelemente können

natürlich unter Umständen ganz dieselbe Größe und Gestalt haben während d. Massenelemente durchaus als unveränderlich gedacht werden müssen sowohl in Bezug auf Größe als auch Gestalt.

Wenn nun in d. Lehre von Zustandsänderung eines Körpers die Rede ist, so ist diese allemal bestimmt durch d. Anfangs- und Endzustand d. Körpers, während d. Art und Weise d. Vorgangs d. Änderung unendlich verschiedener Art sein kann, indem diese sich unter verschiedenen Gesetzen ~~stattfindet~~ vollziehen kann. Diese Veränderungsgesetze sind aber bestimmt durch d. Zustände eines Körpers, welche in Zeitmomenten stattfinden, die sich in unendlich kl. Zeiträumen nacheinander folgen.

Zunächst kann man nun d. Zustandsänderungen betrachten als d. Wirkungen von Ursachen so vielfach verschiedener Art als man verschiedene Erscheinungszustände wahrnimmt. Diese Erscheinungszustände können aber auch wiederum d. Art sein, daß 2 derselben wieder in d. Beziehung von Ursachen und Wirkungen zu einander stehen, od. daß 2 solche selbst wieder als Wirkungen einer und derselben dritten Ursache erkannt werden. Auf d. Erkenntniß und Unterscheidung von Wirkungen und Ursachen ist nun besonders d. Naturwissenschaft gerichtet und es kommt im Gesammtgebiet d. Naturwissenschaften darauf an, jene welche Zustandserscheinungen als d. Wirkungen möglichst weniger Ursachen zurückzuführen.

In Hinsicht d. Zustandes eines Körpers unterscheidet man nun einen äußeren und einen inneren Zustand; unter äußerem Zustand eines Körpers soll derjenige verstanden werden, welcher d. Zustand seiner Ruhe od. Bewegung angibt, und zwar diejenige Bewegung, welche sich d. Wahrnehmung zunächst und betrachtet werden kann als eine merkbare continuirliche Ortsänderung d. Massenelemente. Von dieser Bewegung ist nämlich noch eine andere zu unterscheiden, welche nicht als merkbar betrachtet werden kann, nämlich d. hypothetische innere Molekularbewegung d. Körpers.

Bezüglich d. Änderung d. äußeren Zustandes eines Körpers gibt d. mechanische Wärmetheorie vollständigen Aufschluß, jedoch seien hier d. Grundsätze vorerst aufgeführt:

Der Bewegungszustand eines Körpers in einem Augenblick ist bestimmt durch d. Richtung und Größe d. Geschwindigkeiten ~~[illegible]~~ seiner Massenelemente od. seiner materiellen Punkte, unter materiellen Punkt die im Schwerpunkt vereinigt gedachte Masse d. Massenelements verstanden. Hiermit ist auch zugleich d. Größe d. lebendigen Kraft d. Körpers bestimmt, indem d. lebendige Kraft eines in Bewegung befindlichen Körpers = ist der halben Summe d. Producte aus den Massen d. materiellen Punkte in den Quadrate ihrer Geschwindigkeiten (früher wurde d. lebendige Kraft allgemein als d. ganze Summe d. Producte aus Masse und Geschwindigkeitsquadrate hingestellt, gegenwärtig kommt man jedoch immer mehr auf d. erstere zurück, indem sich dadurch manches einfacher gestaltet.) Wenn diese alle augenblicklichen Geschwindigkeiten d. Massenelemente = 0 sind, so ist auch d. lebendige Kraft d. Körpers = 0, und umgekehrt, wenn d. lebendige Kraft d. Körpers = 0 so sind auch alle Geschwindigkeiten d. Massenelemente einzeln = 0. Für den letzteren Fall, wenn d. augenblicklichen Geschwindigkeiten d. materiellen Punkte = 0 sind, so befindet sich d. Körper im Ruhezustand.

Bekanntlich kann d. Bewegung eines Körpers in mannigfach verschiedener Weise betrachtet werden, als bestehend aus d. relativen Bewegung gegen ein am Körper fixirtes Axensystem und aus d. Bewegung dieses Axensystems gegen ein anderes festes Gebilde. Die letztere Bewegung, nämlich d. Bewegung d. am Körper fixirten Axensystems = Bewegung eines starren Körpers, kann während eines Augenblicks als eine unendlich kl. Schraubenbewegung betrachtet werden, die in jeder Weise zerlegt werden kann in eine Rotation um eine Momentanaxe und eine unendlich kl. Translation nach irgend einer Richtung. Wie man aber auch d. Zerlegung vornehmen mag immer ist bekanntlich d. Rotation nach Axenrichtung, Winkelgeschwindigkeit u. Sinn

die nämliche, während dagegen d. Translation mit d. parallelen Verschiebung d. Rotationsaxe sich nach Größe und Richtung ändert. Hinsichtlich d. Fixierung eines Axensystems an einem Körper sei noch hinzugefügt, daß es genügend ist das Axensystem OX OY OZ so anzunehmen, daß d. Ursprung O beständig in demselben materiellen Punkt A verbleibt, daß eine d. Axen z. B. OX durch einen 2ten, immer denselben bleibenden ~~materiellen~~ Punkt B geht und daß endlich eine d. Coordinatenebenen z. B. XOY durch einen ~~dritten~~ materiellen Punkt geht. Offenbar ist durch d. bekannte relative Bewegung d. materiellen Punkte eines Körpers gegen ein solches Axensystem auch zugleich d. relative Bewegung d. Elemente gegen einander bestimmt. Aus diesem Grunde sei unter relativer Bewegung eines Körpers schlechtweg verstanden d. Bewegung d. Elemente gegen einander od. d. relative Bewegung d. Elemente gegen ein am Körper fixirtes Axensystem.

(Im Allgemeinen versteht d. Regel unter relativer Bewegung eines Körpers auch noch eine ~~an einem~~ Beziehung auf welches Gebilde sich d. Bewegung bezieht, und nur bei d. relativen Bewegung irgend eines irdischen Körpers gegen d. Erde so spricht man einfach von d. Bewegung d. Körpers.)

Bekanntlich nennt man d. Ursachen d. ~~Abänderungen~~ Änderungen d. äußeren Zustandes od. Bewegung eines Körpers die mechanischen Kräfte. Diese auf einen Körper wirkenden Kräfte werden unterschieden in Massenkräfte und Oberflächenkräfte, wovon d. Massenkräfte an d. Massenelemente gebunden sind und deshalb als an ihnen angreifend gedacht werden müssen, während d. Oberflächenkräfte an d. Elemente d. Oberfläche angreifend gedacht werden können.

Die Arbeit d. Massenkräfte ist bedingt durch d. Bewegung d. Massenelemente und die Arbeit d. Oberflächenkräfte ist bedingt durch d. Bewegung d. Oberflächenelemente.

Bekanntlich wird ferner jede mechanische ~~[illegible]~~ Kraft immer gemessen durch d. Masse und d. Beschleunigung, welche sie dem Körper ertheilt od. ertheilen kann. Ist nämlich P eine Kraft, welche einem Körper von d. Masse m eine Beschleunigung φ ertheilen kann, so ist:

$$P = m\varphi$$

Bezüglich d. Einheit, mit welcher Kraft und Masse gemessen werden, kann man entweder zunächst d. Masseneinheit definiren od. man kann zuvörderst d. Krafteinheit festsetzen als diejenige Kraft welche einer Masse eine bestimmte Beschleunigung ertheilt. Mit Hilfe d. obigen Gleichung kann man dann im ersten Falle d. Krafteinheit und im letzteren Fall d. Masseneinheit bestimmen. Von beiden Verfahren erscheint d. erstere wohl d. natürlichere; das übliche Verfahren ist jedoch dß, daß man d. Krafteinheit annimmt und zwar pflegt man als Krafteinheit d. Schwerkraft zu nehmen, welche auf einer bestimmten Masse an einem bestimmten Orte ausgeübt wird von d. Anziehungskraft d. Erde. Z. B. 1 Kgr = Schwerkraft auf d. Masse eines Cubdec. Wassers im Zustande d. größten Dichtigkeit an einem bestimmten Orte, wobei aber noch willkürlich ist, an welchem Orte man d. Schwerkraft auf 1 Cubdec. Wasser als Kgr betrachten will. Würde man an jedem beliebigen Orte d. betreffende Kgr. als Krafteinheit annehmen, so würde man mit den verschiedenen Höhen, Breiten und Längen bezogen d. Orte auch verschiedene Kgr. bekommen, indem d. Schwerkraft mit d. Breitenlagen auch verschieden ist. Für d. Technik ist jedoch d. Verschiedenheit d. Schwerkraft an d. verschiedenen Erdpunkten genügend klein, um vernachlässigt werden zu können. Man nimmt einfach als Mittelwerth für die durch die Schwerkraft hervorgerufenen Beschleunigung g = 9,81 m an; demnach wird d. Definition d. Kgr. abgesehen als Krafteinheit also d. Schwerkraft eines Cubdec. Wassers im dichtesten Zustand an einem Orte wo d. Beschleunigung d. Schwerkraft = 9,81 m beträgt.

Als innere Kräfte kommen diejenigen Kräfte in Betracht, welche man mit d. Namen Gravitation bezeichnet, nämlich d. Kraft, mit welcher sich 2 materielle Punkte in beliebiger Entfernung gegenseitig anziehen. Bekanntlich nimmt diese Gravitation mit d. ~~[illegible]~~ Quadrate d. Entfernungen d. materiellen Punkte ab. Bei irdischen Körpern unter sich als von kl. Dimensionen gegen d. Erde, ist diese Gravitation jedoch ganz untergeordnet so daß davon vollkommen abstrahirt werden kann.

Was d. äußeren Kräfte anbetrifft, so kommt bei d. Bewegung eines irdischen Körpers nur für allemal d. Schwerkraft in Betracht. Ferner sind jedoch auch noch die von d. Mechanik festgestellten sog. 2 Ergänzungskräfte zu berücksichtigen, wenn es sich nur um d. relative Bewegung eines Körpers gegen einen andern in Bewegung befindlichen Körper handelt, indem diese beiden Ergänzungskräfte hinzuzufügen sind, um d. absolute Bewegung in d. Rechnung hineinziehen zu können. Ist K ein Körper, welcher in relativer Bewegung gegen ein ebenfalls in Bewegung begriffenes Koordinatensystem S steht, so kann man bekanntlich nach d. Mechanik diese eigene Bewegung d. Systems S in jedem Zeitelement als eine unendlich kl. Schraubenbewegung betrachten. Die Bewegung d. Körpers K kann dann als absolute Bewegung angesehen werden, wenn seiner Bewegung 2 sog. Ergänzungskräfte hinzugefügt werden, die folgendermaßen bestimmt sind:

Es ~~sei~~ sei in irgend einem Augenblick A d. Momentanaxe und ω d. Winkelgeschwindigkeit, mit welcher das Koordinatensystem S um d. Axe A augenblicklich rotirt. Ferner sei dm irgend ein Massenelement d. Körpers K und φ d. Beschleunigung, welche im betreffenden Augenblick d. Element dm besitzen würde, wenn es sich nicht in relativer Bewegung gegen d. Koordinatensystem S befände, also mit demselben verbunden u. in relativer Ruhe gegen dasselbe wäre. Ferner sei v d. augenblickliche relative Geschwindigkeit d. Massenelements dm gegen d. System S und v' d. Projection von v auf eine Ebene, welche zur Momentanaxe A normal steht. Dies vorausgeschickt sind nun d. Ergänzungskräfte folgendermaßen bestimmt:

Die erste Ergänzungskraft ist dadurch bestimmt, daß sie dem Körperelemente dm eine Beschleunigung ertheilt, welche der entgegengesetzt gerichtet ist der früheren Beschleunigung φ des augenblicklich mit d. System S fest verbundenen Punktes.

Die 2te Ergänzungskraft ertheilt dem Element dm eine Beschleunigung 2 ωv', welche senkrecht gegen d. Momentanaxe A und senkrecht gegen v und v'. Hiermit ist aber d. Richtung dieser Beschleunigung noch 2deutig bestimmt. Um sie vollkommen zu bestimmen muß noch hinzugefügt werden, daß d. 2te Kraft diejenige Richtung hat, welche man um 90° im Sinne d. Winkelgeschwindigkeit ω um d. Momentanaxe A herumdrehen muß, damit sie in d. Richtung von v' gelangt. Man erhält also diese Richtung d. 2ten Kraft, indem man d. Richtung von v' um d. Axe A um einen Winkel von 90° im entgegengesetzten Sinne von ω herumdreht. Hiermit sind d. beiden Ergänzungskräfte vollkommen bestimmt.

Im Verlauf von nachfolgenden Untersuchungen wird sich zeigen, daß diese beiden Ergänzungskräfte eine wesentliche Rolle spielen.

Diese beiden Kräfte sind also immer senkrecht zu v', also senkrecht zur relativen Bahn d. Massenelements dm gerichtet, also ist in jedem Augenblick ihre relative Arbeit = 0, indem das Produkt aus v' in d. Projection = 0 ist. Diese beiden Ergänzungskräfte haben demnach auf d. Änderung d. relativen lebendigen Kraft keinen Einfluß, sie bestimmen aber nur d. absolute Bewegung mit Ausschluß d. relativen lebendigen Kraft.

Wenn es sich nun d. ~~Bewegung~~ Untersuchung d. (schlechtweg genannten) Bewegung eines irdischen Körpers gegen d. Erde, also um d. relative Bewegung d. Körpers gegen d. Erde handelt, so entsprechen d. beiden Ergänzungskräfte d. relativen Bewegung zur absoluten erstens d. eigenen Schwer- od. Anziehungskraft d. Erde und zweitens d. Centrifugalkraft d. Erdumdrehung. Indessen ist in d. Beschleunigung d. Schwerkraft immer d. 2te Ergänzungskraft, nämlich d. Centrifugalkraft mit einbegriffen, indem es unmöglich ist, d. Schwerkraft ohne Centrifugalkraft zu beobachten. In dem Werthe g = 9,81 m = Beschleunigung d. Schwerkraft also stehen beide Ergänzungskräfte mit einbegriffen. Man hat also bei d. relativen Bewegung eines irdischen Körpers auch nur d. 1ste Ergänzungskraft nämlich d.

Schwerkraft zu berücksichtigen.

Was andererseits d. Oberflächenkräfte betrifft, welche von irgend einem andern angrenzenden Körper herrühren und in d. Oberfläche angreifen, so können diese unterschieden werden in normale und tangentiale Oberflächenkräfte. Die normalen Oberflächenkräfte kommen in d. Folge immer nur als normale Druckkräfte in Betracht, so daß etwa vorkommende normale Zugkräfte als negative normale Oberflächenkräfte zu bezeichnen sind.

Die tangentialen Oberflächenkräfte kommen hier nur als Reibungen in Betracht, d.h. als Widerstandskräfte gegen d. relativ gleitende Bewegung gegen einen andern berührenden Körper.

Wenn in d. Folge d. Rede sein wird von dem äußeren Druck in einem gewissen Punkt d. Oberfläche so soll darunter verstanden werden d. Quotient, welchen man erhält, wenn man den auf ein unendlich kl. Flächenelement wirkenden äußeren Druck durch d. Flächeninhalt dieses Flächenelements d. Oberfläche dividirt. Ist dieser Druck in allen Elementen gleich, so soll er d. spec. äußere Druck d. Körpers genannt werden. Wenn ferner in Folge von d. äußeren auf einen Körper wirkenden Kräften d. Rede sein wird, dann sollen darunter insgesammt alle diejenigen Kräfte verstanden werden, welche als Ursachen d. äußeren Zustandes und dessen Änderungen zu betrachten sind. Es gehören also zu den äußeren Kräften nicht nur d. Oberflächenkräfte d. äußeren Massenelemente im engeren Sinne, sondern auch d. inneren Massenkräfte, also im Allgemeinen d. Gravitation, denn auch diese betheiligt sich ja an den Ursachen d. Änderungen d. äußeren Zustandes.

Nachdem diese, meistens aus d. Mechanik zu schöpfenden, Sätze über d. äußeren Zustand eines Körpers definirt sind, kann übergegangen werden zu speciellen Definition d. Begriffs d. inneren Zustandes eines Körpers.

Wenn in d. Folge vom inneren Zustande eines Körpers im Gegensatze zu äußerem od. Bewegungszustand d. Rede sein wird, so soll dieser nicht im weitesten Sinne d. Wortes verstanden werden, indem von vornherein von d. Erscheinungen abgesehen werden soll, welche ihre Ursachen in Licht, Electricität, Magnetismus haben. Der innere Zustand eines Körpers, wie er im folgenden immer verstanden werden soll, ist dann vollkommen bestimmt durch d. chemische Beschaffenheit, den Aggregatzustand, das spec. Volumen und durch d. Temperaturzustand d. verschiedenen Elemente d. Körpers.

Diese verschiedenen 4 Argumente, welche den inneren Zustand eines Körpers feststellen, sollen nun näher angesehen werden:

Die chemische Beschaffenheit soll im folgenden als d. Art d. Körpers bezeichnet werden. 2 Körper heißen also gleich- od. ungleichartig, wenn sie von gleicher od. ungleicher Beschaffenheit sind. Ein Körper ist von gleichartiger Masse, wenn alle seine Elemente von gleicher chemischer Beschaffenheit sind. Wenn nicht besonders d. Gegentheil besonders hervorgehoben wird, so soll stillschweigend immer ein Körper als gleichartig angesehen werden.

Was d. Aggregatzustand betrifft, welche gleichfalls den Körper charakterisiren, so kann d. Körper entweder fest, flüssig od. luftförmig sein.

Ein fester Körper ist charakterisirt durch d. beschränkte Veränderlichkeit seines Volumens und seiner Gestalt sowie d. Unmöglichkeit einer Mischung seiner Elemente unter einander, wobei unter Mischung verstanden ist, daß d. relative Gruppirungen d. Elemente so verändert werden, daß d. einzelnen Elemente ganz neue Nachbarelemente erhalten. Offenbar ist dies bei einem festen Körper schlechterdings unmöglich. Man kann also auch einen festen Körper dadurch charakterisiren, indem man sagt, daß d. Massenelemente an und für sich einer Veränderung fähig sind, während benachbarte Elemente immer Nachbarelemente bleiben müssen, da benachbarte Massenelemente eines festen Körpers keiner relativ gleitenden Bewegung gegen einander fähig sind.

Was im Gegensatze zu den festen Körper, die flüssigen und luftförmigen betrifft, so haben diese eine unbeschränkte Veränderlichkeit ihrer Gestalt und eine unbeschränkte Theilbarkeit gemein, indem d. benachbarten Elemente derselben einer unbeschränkten gleitenden relativen Verschiebbarkeit gegen einander fähig sind.

Die flüssigen und luftförmigen Körper sind dadurch von einander verschieden, daß d. flüssigen das mit d. festen Körpern gemein haben, daß ihr Volumen nur in einem sehr beschränkten Grade veränderlich ist, während d. luftförmigen Körper auch einer unbeschränkten Volumenänderung (wenigstens Volumenvergrößerung) fähig sind.

In dieser letzten Hinsicht ist jedoch bei den luftförmigen Körper eine Theilung in 2 Classen vorzunehmen, indem d. Gase einer unbeschränkten Volumenvergrößerung und Verkleinerung, während Dämpfe wohl einer unbeschränkten Volumenvergrößerung nicht aber einer unbeschränkten Volumenverkleinerung (sofern dieselben überhaupt noch luftförmig bleiben also ihren Aggregatzustand nicht ändern) fähig sind.

In d. Regel sind d. verschiedenen Aggregatformen eines Körpers ziemlich scharf von einander verschieden. Jedoch gibt es auch einige Körper, bei welchen vom festen zum flüssigen Zustand eine allmälige Uebergangsform stattfindet welche man bekanntlich mit d. Namen zähflüssig, gallertig etc. bezeichnet. Am häufigsten treten diese Uebergangsformen bei zusammengesetzten organischen Stoffen auf, insbesondere bei allen Fetten, ferner auch bei solchen Substanzen, welche man als sehr innige Mischungen von festen und flüssigen Theilchen betrachten muß.

In d. Folge wird ein Körper mit homogen bezeichnet, wenn er gleichförmiger Art ist und alle seine Elemente gleiche Aggregatzustände haben, also wenn dessen Elemente alle chemisch gleich beschaffen sind und gleiche Aggregatformen haben. Für eine streng genommen allerdings eine besondere Definition erforderlich hinsichtlich d. nicht streng geschiedenen Aggregatzustände. Es sei hiervon jedoch abgesehen. Im folgenden kann man jedoch nicht alle Körper als homogen ansehen, indem man bei technischen Aufgaben oft Veranlassung hat, solche Körper zu betrachten, welche eine Mischung von Elementen gleicher Art in verschiedenen Aggregatzuständen sind. Z.B. eine Mischung von Schnee und Eis, Mischung von Wasser und Dampf.

In dieser Hinsicht sind jedoch 2 Unterschiede zu machen, indem man in continuirliche und discontinuirliche Gemenge zu theilen hat. Ein solches Gemenge wird continuirlich genannt, wenn, wie beim feuchten Wasserdampf, wenn es in unendlich kl. Bestandtheile zerlegt werden kann, so zwar, daß von einem Bestandtheil zum andern d. Aggregatzustand sich nur allmälig ändert.

Anders ist es aber bei discontinuirlichen Gemengen, indem hier d. Bestandtheile von verschiedenen Aggregatformen größere aneinandergrenzende Gruppen bilden (Wasser und Dampf in einem Dampfkessel) und also d. Aggregatzustand sich unstetig, plötzlich ändert.

Unter dem spec. Volumen in einem gewissen Punkte eines homogenen Körpers od. einer continuirlichen Mischung soll d. Quotient verstanden, welchen man erhält, wenn d. Volumen eines A einschließenden unendlich kl. Körperelements durch dessen Gewicht dividirt wird; es stellt d. spec. Volumen im Punkte A = dem Volumen per Gewichtseinheit des, den Punkt A einschließenden Körperelements. Dieses spec. Volumen soll mit v bezeichnet werden. D. reciproke Werth $= \frac{1}{v}$ ist dann d. spec. Gewicht im Punkte A und sei bezeichnet mit γ. Man kann also d. spec. Gewicht im Punkte A auch definiren als d. Gewicht per Volumeneinheit eines den Punkt A enthaltenden Körperelements. Endlich wird in d. Folge noch von spec. Masse d. Rede sein, worunter d. Quotient verstanden werden soll, welchen man durch Division d. spec. Gewichts γ in dem betreffenden Punkte durch d. Beschleunigung g d. Schwerkraft erhält; also

spec. Masse $= \mu = \frac{\gamma}{g}$. und spec. Gewicht $\gamma = \frac{1}{v}$

Von einem spec. Volumen bzw. in einem bestimmten Punkte kann natürlich nur bei homogenen Körpern od. continuirlichen Mischungen d. Rede sein, während man bei discontinuirlichen Mischungen nur von einem mittleren spec. Volumen sprechen kann, worunter d. Quotient aus dem ganzen Volumen durch d. ganze Gewicht d. Gemisches verstanden wird. D. mittlere spec. Gewicht und d. mittlere spec. Masse sind dann nach den vorigen Beziehungen auch bestimmt.

Eine besonders nähere Besprechung erfordert d. letzte Criterium d. Zustandes eines Körpers, nämlich d. Spannungszustand:

Bei d. zunächst vorliegenden Voraussetzung einer continuirlichen Raumerfüllung d. Materie (bei Abstraction einer atomistischen Constitution) wird d. Wirkung d. äußeren Kräfte dadurch von Körperelement zu Körperelement übertragen, indem diese unendlich kl. Elemente, in die man sich den Körper auf beliebige Weise zerlegt denken kann, an ihren Berührungsflächen mit gewissen Kräften gegenseitig auf einander wirken. Diese Kräfte nennt man d. inneren Spannkräfte. Dieselben sind natürlich nur als secundäre Kräfte zu betrachten, welche mit jenen primären, (äußeren) Kräften d. Körpers und mit d. relativen Bewegung d. Körpers auftreten und verschwinden, außerdem aber von d. Art und Aggregatform derselben abhängen, indem sie gewissermaßen als d. mechanische Ausdruck des durch diese materielle Beschaffenheit bedingten Widerstandes zu betrachten sind, welchen Ueberwindung d. Aenderung d. Volumens und d. Gestalt d. Massenelements, sowie d. relativ gleitende Bewegung benachbarter Elemente gegeneinander im Allgemeinen erfordert. Durch d. bei verschiedenen Körpern verschiedenen Beziehungen, welche zwischen den inneren Spannkräften und denjenigen Größen stattfinden, wodurch d. Aenderungen d. Volumens und d. Gestalt d. Massenelements sowie d. relativ gleitenden Bewegungen benachbarter Elemente bestimmt sind, wird d. Körperbeschaffenheit, soweit sie hierbei in Betracht kommt gewissermaßen erst definirt, da sie übrigens bei so vollständiger Abstraction von irgend einer bestimmten Voraussetzung in Betreff d. Wesens und d. Constitution d. Materie an und für sich undefinirbar wäre.

Hinsichtlich dieser inneren Spannkräfte sind 2 Arten zu unterscheiden: Es sind nämlich diejenigen, welche d. Widerstand gegen eine Volumen und Gestaltsänderung entsprechen, verschieden von denen, welche d. Widerstande gegen eine relativ gleitende Bewegung benachbarter Elemente entsprechen. Nur die ersteren, d. sog. Spannungen, charakterisiren d. inneren Zustand eines Körpers direct, während die letzteren, welche in d. Folge mit inneren Reibungen bezeichnet werden sollen, den inneren Zustand nur mittelbar bedingen, indem d. Spannungen von den inneren Reibungen abhängig sind.

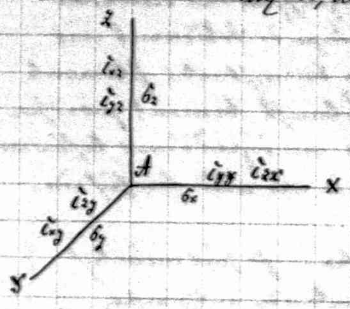
Was d. Spannungen betrifft, so sind diese bereits Gegenstand d. ausführlichen Untersuchungen d. Elasticitätslehre gewesen, wo gefunden wurde, daß zwischen d. Spannungen in irgend einem Punkte d. Körpers für verschiedene durch diesen Punkt gehende Ebenen gewisse Beziehungen stattfinden. Ganz analoge Beziehungen finden nun auch zwischen d. inneren Reibungen in irgend einem Körperpunkte für verschiedene d. diesen Punkt gehende Ebenen statt, indem die zwischen d. betreffenden Spannungen stattfindenden Beziehungen sich ganz allgemein auf innere Spannkräfte überhaupt ausdehnen lassen. Diese Verallgemeinerungen d. betreffenden Beziehungen sind im Wesentlichen folgende:

In d. Folge sei ein beliebiger Körper vorausgesetzt und nicht wie bei d. Elasticitätslehre speciell ein fester Körper.

Es sei A ein Punkt in einer beliebigen Körperfläche F, dF sei ein unendlich kl. Flächenelement dieser Fläche F, welches d. Punkt A umschließt. AB sei eine im bestimmten Sinne genommene Normale d. Ebene F, u. zwar die innere, mit S_x zu bezeichnenden

Rechte Spannkraft im Punkte A d. Ebene σ, soll nun d. Quotient verstanden werden, welcher erhalten wird durch Division mit dσ in diejenige innere Kraft, mit welcher die im Sinne AB an σ angrenzenden Körperelemente auf d. Flächenelement dσ wirken. (Damit in dieser Beziehung keine Verwechslung geschehen kann, wird stets von vornherein gesagt, daß d. Normale AB eine bestimmte Richtung habe.)
Offenbar stimmt diese Bezeichnung ganz mit derjenigen für d. Spannung in einem Punkte einer Ebene d. Elastizitätstheorie überein). Diese specifische d. h. auf d. Flächeneinheit bezogene Spannkraft ς, welche mit d. Richtung AB im Allgemeinen einen Winkel ω zwischen 0 und 180° od. zwischen 0 und π bilden kann, kann in 2 Componenten zerlegt werden, eine auf d. Normalen und d. andere auf d. Tangentialebene von σ gerichtet. Die Normalcomponente ist dann $= \varsigma \cos \omega$ und sei bezeichnet mit σ und d. Tangentialcomponente $= \varsigma . \sin \omega = \tau$. (entsprechend d. Normal- und Tangentialspannung in d. Elastizitätslehre) Die Normalcomponente σ ist positiv od. negativ, je nachdem d. Winkel ω zwischen 0–90° od 90–180° liegt, je nachdem sie also auf AB od auf BA gerichtet ist, entsprechend einem Zug od. Druck auf dσ.
Die Tangentialcomponente τ ist jedoch eine absolute Größe, da sin ω immer positiv ist, weil ω zwischen 0–180° liegt. Dieselbe kann aber in d. Tangentialebene wieder in Componenten nach zwei festen Richtungen zerlegt werden, die dann + od ÷ sind, je nachdem diese Richtungen mit d. Richtung von τ spitze od. stumpfe Winkel bilden.

Es seien nun AX, AY und AZ drei zu einander senkrechte Richtungen parallel den Coordinatenaxen, auf welche d. ganze Körper bezogen wird; x y u. z seien d. Coordinaten d. Punktes A bezüglich d. Coordinatensystems.



Nun kann man sich d. innere Spannkraft im Punkte A d. Ebene YAZ zunächst in 2 Componenten zerlegt denken, in eine Normalcomponente σ_x auf AX und eine Tangentialcomponente auf d. Ebene YAZ; letztere kann man aber wiederum in 2 Seitencomponenten τ_{xy} und τ_{xz} nach d. Richtungen d. Y und Z Axe zerlegt denken. Ebenso kann man die inneren Spannkräfte im Punkte A d. Ebenen ZAX und XAY in d. entsprechenden Componenten zerlegt denken. Es sind dann d. Componenten d. inneren Spannkräfte

nach d. Richtungen		AX	AY	AZ
1) Im Punkte A d. Ebene YAZ	=	σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}
2) Im Punkte A d. Ebene ZAX	=	τ_{yx}	σ_y	τ_{yz}
3) Im Punkte A d. Ebene XAY	=	τ_{zx}	τ_{zy}	σ_z

welche im Sinne derjenigen Kräfte verstanden werden müssen, welche d. auf den Seiten d. positiven Richtungen AX AY AZ gelegenen Körpertheile auf d. genannten Ebenen pr. Flächeneinheit im Punkte A ausüben.
Denkt man sich nun den Punkt A als den Eckpunkt eines unendlich kl. rechtwinkligen parallelepipedischen Körperelements, dessen von A ausgehenden Kanten mit d. 3 Axen X Y Z zusammenfallen, so daß also d. Coordinaten d. gegenüberliegenden Eckpunkts A_1 d. Körperelements $= x + dx$, $y + dy$ und $z + dz$ sind, wenn dx dy und dz d. Kantenlängen d. Parallelepipeds sind, so erhält man offenbar d. Spannkräfte, welche auf d. drei an d. Eckpunkt A zusammenliegenden Seitenebenen dieses Körperelements von d. außerhalb, also im negativen Sinne d. Axen AX AY u. AZ, angrenzenden Körpermasse ausgeübt werden, indem man d. obigen 3 Gruppen von specifischen Kräften unter 1) 2) u. 3) resp. mit $\div dy\,dz$, $\div dz\,dx$ und $\div dx\,dy$ multipliciert. Ebenso erhält man d. Spannkräfte, welche auf d. 3 an d. Eckpunkt A_1 zusammenliegenden Seitenebenen von d. außerhalb, jetzt aber im positiven Sinne d. Axenrichtungen,

angrenzenden Körpermasse ausgeübt werden, indem man dieselben Gruppen spec. Kräfte mit dy dz, dz dx und dx dy multipliciert, nachdem sie zuvor um ihre partiellen Differentiale resp. nach x, y und z genommen, vergrößert wurden. In dieser Weise erhält man im Ganzen 18 Kräfte, welche auf d. Oberfläche d. Körperelements wirken, und dasselbe entweder in Bewegung od. in Ruhe halten. Soll d. Körperelement in relativer Ruhe sein, so müssen d. erhaltenen 18 Oberflächenkräfte d. Elements im Gleichgewicht sein mit den auf seine Masse wirkenden äußeren Kräften und mit d. Reactionskräften dieser Masse gegen ihre Beschleunigung.
Was diese auf d. Masse d. Körperelements wirkenden äußeren Massenkräfte betrifft, so sei μ d. spec. Masse d. Körpers im Punkte A = Masse d. Volumeneinheit und X Y Z d. drei nach d. Axen AX AY – AZ gerichteten Componenten d. auf d. Masseneinheit bezogenen, im Punkte A wirkenden Massenkraft, so ist also:
$\mu X\,dx\,dy\,dz$, $\mu Y\,dx\,dy.dz$ und $\mu . Z . dx\,dy.dz$ d. 3 Componenten d. äußeren Massenkraft sind, welche auf d. Körperelement dx dy dz ausgeübt wird.
Hinsichtlich d. Reactionskräfte d. Masse gegen d. Beschleunigung d. Körperelements seien φ_x φ_y und φ_z d. Componenten d. Translationsbeschleunigung d. Körperelements im Sinne d. 3 Axen; dann sind offenbar d. Componenten d. ~~[illegible]~~ Reactionskraft gegen diese Translationsbeschleunigungen:

$$= \div \mu\,\varphi_x\,dx\,dy\,dz \qquad \div \mu\,\varphi_y\,dx\,dy\,dz \quad \text{und} \quad \div \mu\,\varphi_z\,dx\,dy\,dz.$$

Im Allgemeinen besteht d. Bewegung d. unendlich kl. Körperelements außer in einer Translationsbewegung ~~beschleunigung~~ auch in einer Rotationsbewegung. Diese kommt aber als eine unendlich kl. Größe höherer Ordnung nicht in Betracht; denn, da d. Trägheitswiderstand gegen d. Rotation um eine durch A gehende Momentenaxe = dem Product aus Winkelbeschleunigung und Trägheitsmoment d. Elements bezüglich d. Momentenaxe ist, so ist dieser unendlich kl. von d. 5ten Ordnung, woraus hervorgeht, daß man d. Rotationsbeschleunigungsreactionskräfte gar nicht zu berücksichtigen braucht.

Wenn nun alle diese auf d. Körperelement wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sein sollen, so müssen bekanntlich 6 Bedingungsgleichungen erfüllt werden.

Bedenkt man zunächst nur, daß d. algebraischen Summen aller Kraftcomponenten im Sinne d. 3 Axen, einzeln = 0 sein müssen, so bekommt man analog d. bekannten Beziehungen in d. Elastizitätslehre, folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \mu(X - \varphi_x) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \mu(Y - \varphi_y) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \mu(Z - \varphi_z) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{- - - - - -} \quad 1.$$

und aus d. ~~Ableitung~~ Aufstellung d. Momentengleichungen für d. 3 Axen d. Beziehungen:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den bekannten d. Elastizitätslehre nur dadurch, daß d. Reactionen d. Beschleunigungen noch hinzugekommen sind zu den Kräften, und daß dort unter X Y u. Z d. Componenten d. äußeren Massenkräfte pr. Volumeneinheit verstanden wurden, während sie hier d. Componenten derselben pr. Masseneinheit bedeuten.
In Folge d. letzten Beziehungen, nach welchen d. Tangentialcomponenten τ einander paarweise entsprechend gleich sind, kann man noch eine kürzere Bezeichnung einführen, indem man setzt: $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z$; $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_y$ und $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_x$. So lassen sich dann die ersten 3 Bedingungsgleichungen auch folgendermaßen schreiben:

$$2. \ldots \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \mu(X - \varphi_x) = 0 \\ &\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + \mu(Y - \varphi_y) = 0 \\ &\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \mu(Z - \varphi_z) = 0 \end{aligned} \right.$$

Ebenso wie in d. Elasticitätslehre durch d. betreffenden 6 Spannungscomponenten d. Spannungszustand in einem Punkte vollkommen bestimmt wird, indem diese Componenten d. Spannung in dem betreffenden Punkte nach einer beliebigen Richtung bestimmen, ebenso bestimmen auch d. vorliegenden 6 Componenten σ – τ d. inneren Reibungskräfte in einem Punkte vollkommen d. innere Reibungswirkung, indem sie nach Größe und Richtung d. innere Reibungskraft in demselben Punkte einer beliebigen durchgelegten Ebene bestimmen. Denkt man sich nämlich durch den Punkt A eine Richtung AB gezogen, welche mit den Coordinatenaxen d. Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ bildet, und in A eine Normalebene zu dieser Richtung AB, so ist d. innere Reibungskraft ϱ im Punkte A dieser Ebene, wenn a, b, c d. Winkel sind, welche d. allgemein nicht normal zur Ebene Richtung von ϱ mit d. Axen bildet, ganz analog den bekannten Formeln d. Elasticitätslehre:

$$3. \ldots \left\{ \begin{aligned} \varrho \cos a &= \sigma_x \cos\alpha + \tau_y \cos\gamma + \tau_z \cos\beta \\ \varrho \cos b &= \sigma_y \cos\beta + \tau_z \cos\alpha + \tau_x \cos\gamma \\ \varrho \cos c &= \sigma_z \cos\gamma + \tau_x \cos\beta + \tau_y \cos\alpha \end{aligned} \right.$$

welche Formeln erhalten werden, wenn man d. Gleichgewichtsbedingungen d. Kräfte an einem unendlich kl. tetraedrischen Körperelement aufstellt, welches von d. Körperelement [illegible], dessen Kanten Ax Ay und Az sind, von einer zu AB senkrechten unendlich wenig von A entfernten Ebene abgeschnitten wird. Mit Rücksicht auf d. oben gefundenen Gleichungen und d. bekannten Relation:
$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$$
ist dann ϱ nach d. Größe und Richtung völlig bestimmt.
Da diese innere Reibungskraft, wie schon erwähnt, im Allgemeinen nicht normal zur Ebene gerichtet ist, so kann man sie in 2 Componenten zerlegen, eine normal zur Ebene in d. Richtung von AB und eine in d. Ebene selbst fallende. Die Normalcomponente, bezeichnet mit σ, ist dann $= \varrho$ mal cos d. Winkels, welchen d. Richtung von AB ($\alpha\ \beta\ \gamma$) mit d. Richtung von ϱ ($\alpha\ \beta\ \gamma$) bildet; nach d. analytischen räumlichen Geometrie ist dieser cos aber bestimmt durch:
$$\sigma = \varrho(\cos a \cos\alpha + \cos b \cos\beta + \cos c \cos\gamma)$$
Setzt man hierin für $\varrho \cos a$, $\varrho \cos b$ und $\varrho \cos c$ d. sub. 3 gefundenen Werthe ein, so bekommt man:
$$4. \ldots \sigma = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \cos^2\beta + \sigma_z \cos^2\gamma + 2\tau_x \cos\beta \cos\gamma + 2\tau_y \cos\gamma \cos\alpha + 2\tau_z \cos\alpha \cos\beta$$
(eine ganz analoge Beziehung, welche zwischen d. Normalspannung und d. Spannungscomponenten nach 3 zu einander beliebig senkrechten Richtungen in d. Elasticitätslehre stattfindet).
In derselben Weise wie in d. Elasticitätslehre ergeben sich hiermit 2 wichtige Folgerungen zunächst:
1) die Summe dieser Normalkräfte σ für je drei in einem Punkte A sich rechtwinklig schneidenden Ebenen ist gleich groß.
2) durch jeden Punkt eines Körpers lassen sich immer 3 zu einander senkrechte Ebenen legen, für welche d. Tangentialcomponenten der inneren Reibungskräfte = 0 sind, letztere, nämlich d. inneren Reibungskräfte, selbst also normal sind.
Am wichtigsten für d. späteren Anwendungen sind jedoch immer die sub. 2 genannten d. Beziehungen zwischen d. 6 Componenten σ – τ. Durch diese 3 Gleichungen zusammen bedingen sich d. äußere Zustand und innere Zustand gegenseitig, indem in d. Formeln sowohl Werthe aus den äußeren als auch inneren Kräften vorkommen. Im Allgemeinen müssen beide bei d. Untersuchung zugezogen werden.

Dabei sind jedoch die beiden Fälle eines festen und flüssigen Körpers (letzteren im weiteren Sinne also flüssig und luftförmig) principiell zu unterscheiden, nicht nur weil im letzteren Falle d. Größen σ u. τ außer den Spannungscomponenten zugleich d. Componenten d. inneren Reibungen in sich schließen, sondern weil auch den Differentialgleichungen d. Bewegung bei einer Flüssigkeit überhaupt eine andere Auffassung zu Grunde liegt als bei einem festen Körper. Indem nämlich d. Massenelemente einer Flüssigkeit einer ganz beliebigen relativen Bewegung fähig sind, wobei sie zugleich kleine und eine unbegrenzte Größenänderung und Gestaltänderung erfahren können, kann man die Änderungen ihres äußeren und inneren Zustandes nur mittelbar dadurch verfolgen, daß diese Zustände für dasselbe Volumenelement zu verschiedenen Zeiten und für verschiedene Volumenelemente zu derselben Zeit bestimmt werden. Während also d. Körperelement, welches d. vorigen Betrachtungen zu Grunde liegt, bei d. Anwendung auf einen festen Körper als ein ~~Massen~~element im strengen Sinne d. Wortes zu betrachten ist, so kann es bei d. Anwendung auf einen flüssigen Körper nur während eines unendlich kl. Zeitelements als der Träger einer und derselben Masse zu betrachten sein und läßt sich diese Betrachtung noch deutlicher hervorstellen, wenn sie auf d. Untersuchungen bei Flüssigkeiten besonders angewendet werden.

Die erhaltenen Differentialgleichungen sub. 2 enthalten nun 10 unbekannte Functionen,
$$\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_x\ \tau_y\ \tau_z\ \varphi_x\ \varphi_y\ \varphi_z\ \mu$$
der unabhängigen Veränderlichen x y z d. h. d. Coordinaten d. betreffenden Punktes. Um diese zur Bestimmung d. Zustandsänderungen (äußeren und inneren) eines Körpers unter gegebenen Umständen geeigneter zu machen, müssen dieselben noch vermehrt und ergänzt werden, daß man ebenso viele Bestimmungsgleichungen zur Verfügung hat, als dann unbekannte Größen vorkommen, welche als Functionen von x y z und d. Zeit t zu bestimmen sind. Hierzu dienen vor allem d. allgemeinen Beziehungen, welche zwischen d. Spannungen und d. Deformationen d. Massenelemente bei festen Körpern stattfinden, sowie bei flüssigen Körpern nach d. Beziehungen zwischen d. inneren Reibungen und d. relativen Bewegungen benachbarter Elemente d. Körpers stattfinden.

Zunächst sollen nur *feste* Körper vorausgesetzt werden.
Die inneren Reibungskräfte sind dann lediglich Spannungen, und enthalten keine inneren Reibungen, weil d. Elemente d. festen Körpers keiner relativ gleitenden Bewegung gegeneinander fähig sind der Definition eines festen Körpers gemäß. Die Größen σ sind Normalspannungen und d. Größen τ Tangentialspannungen. Wird dann d. rechtwinklige Coordinatensystem in bestimmter Weise am Körper fixirt, seien x y z d. sogenannten ursprünglichen Coordinaten eines gewissen materiellen Punktes A d. Körpers d. h. diejenigen Coordinaten von A, welche d. Fall entsprechen, daß d. ~~[illegible]~~ im betreffenden gegebenen äußeren Kräfte = 0 sind und d. Körper sich in relativer Ruhe befindet und somit auch alle Spannungen = 0 sind. Für diesen definirten Fall ~~[illegible]~~ d. Zustandes eines festen Körpers sei d. Bezeichnung *ursprünglicher* Zustand eingeführt, und in diesem ursprünglichen Zustande seien x y z d. Coordinaten d. Punktes A, wodurch dieser Punkt individuell bestimmt ist. Ebenso seien x + dx y + dy z + dz d. ursprünglichen Coordinaten eines 2t. materiellen Punktes A_1, welcher unendlich nahe an A liegt. Diese beiden materiellen Punkte A und A_1 seien nun als d. gegenüberliegenden Eckpunkte eines unendlich kl. parallelepipedischen Körperelements betrachtet, dessen Kantenlängen dann im ursprünglichen Zustand = dx dy und dz sind. X Y Z sollen bei d. jetzigen Betrachtung eines festen Körpers d. 3 nach d. Axen zerlegten Componenten d. relativen beschleunigenden Kraft für den Punkt A. Von d. eigenen Bewegung d. am Körper fixirten Axensystems soll abgesehen werden, indem d. Zustand d. Körpers nur aufgefaßt werden soll als innerer Zustand und als relativer Bewegungszustand d. Körpers in Bezug auf d. Axensystem.
Sind nun x + ξ y + η und z + ζ d. Coordinaten d. Punktes A bei d. Zustandsänderung, so ist dieser offenbar in jedem Augenblick bestimmt, wenn diese Coordinatenänderungen ξ η und ζ als Functionen von x y z und t ermittelt werden. Im Folgenden sei nun d. Weg dargestellt, wie man zu verfahren hat:

Das kleine parallelepipedische Massenelement erleidet bei d. Formänderung auch eine kl. Gestaltänderung. Bei d. vorausgesetzten festen Körpern ist diese Deformation aber so gering, daß man sie bei Vernachlässigung unendlich kl. Größen höherer Ordnung betrachten kann als bestehend aus einer kl. Längenänderung d. Kanten und einer Änderung d. von ihnen gebildeten ursprünglich rechten Winkel. Sind d. ursprünglichen Kantenlängen $= dx\ dy\ dz$, so mögen d. veränderten Kantenlängen bezeichnet sein mit:

$$dx(1+\varepsilon_x) \quad dy(1+\varepsilon_y) \quad = dz(1+\varepsilon_z)$$

, worin offenbar ε_x ε_y und ε_z nichts anderes bedeuten als d. Ausdehnungen, welche im Punkte A nach d. Coordinatenrichtungen stattfinden. Ferner seien d. ursprünglich rechtwinkligen, veränderten Kantenwinkel

$$= \frac{\pi}{2} - \gamma_x\,, \quad \frac{\pi}{2} - \gamma_y \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{2} - \gamma_z\,,$$

worin positive Werthe von γ eine Verkleinerung d. rechten Winkels bedeuten.

Bekanntlich werden d. Größen γ auch verschiedentlich in d. Elasticitätslehre aufgefaßt, nämlich als d. sog. Verschiebungen d. h. als diejenige Werthe, um welche 2 parallele Ebenen im Abstand $AA_1 = 1$ (o. Längeneinheit) an den correspondierenden Punkten A u. A_1 gegeneinander verschoben werden.

Man kann daher γ_x als d. Verschiebung ~~eines Punktes~~ einer zur Y Axe senkrechten Ebene nach d. Richtung d. Z Axe
do. " " " " " " " Z Axe " " " " " d. Y Axe
γ_y " " " " " " Z " " " " " " X
do. " " " " " " X " " " " " " Z

etc.

Diese 3 Größen γ seien daher auch d. Verschiebungscomponenten im Punkte A nach den betreffenden Richtungen genannt.

Diese 6 Größen ε und γ sind nun durch d. schon erwähnten Coordinatenänderungen ξ η u. ζ d. betreffenden Punktes A bestimmt, es ist bekanntlich aus d. Elasticitätslehre für:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

und ferner:

$$\gamma_x = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

$$\gamma_y = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

$$\gamma_z = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Durch diese 6 Größen ε u. γ nämlich den Ausdehnungen ε_x ε_y ε_z im Punkte A nach den Richtungen d. Axen und den Verschiebungen γ_x γ_y γ_z d. beziehungsweise diesen Richtungen parallelen Seitenebenen d. parallelepipedischen Elements nach den anderen Axenrichtungen ist d. Ausdehnung ε im Punkte A nach einer beliebigen Richtung bestimmt, wie sich durch folgende Gleichung, worin α β γ d. Winkel sind, welche d. vorliegende Richtung mit den Axen bildet:

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \cos^2\beta + \varepsilon_z \cos^2\gamma + \gamma_x \cos\beta\cos\gamma + \gamma_y \cos\gamma\cos\alpha + \gamma_z \cos\alpha\cos\beta.$$

(ein Ausdruck ganz analog gebildet demjenigen für d. Spannung σ in einem Punkte nach einer beliebigen Richtung)

Dieser Ausdruck für ε gestattet auch ganz analoge Folgerungen, gezogen wie derjenige für σ: Es ~~gibt~~ existiert nämlich für irgend einen Punkt eines Körpers d. algebraische Summe dieser Ausdehnungen ε für je 3 zu einander senkrechte Axen constant. Diese Summe d. Ausdehnungen ε nach 3 zu einander senkrechten Richtungen bedeutet aber nichts anderes als d. sog. Volumenausdehnungscoefficienten e im betreffenden Punkte. Es ist also:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

= Vergrößerung pro Volumeneinheit eines diesen materiellen Punkt enthaltenden Massenelements beim Übergange vom ursprünglichen Zustand in d. veränderten Zustand.

~~Ferner~~ Es konnte ferner in d. Elasticitätslehre mit dem Ausdruck für ε gefolgert werden, daß sich durch jeden materiellen Punkt A drei zu einander senkrechte Ebenen legen lassen, in welchen d. Verschiebungen $\gamma = 0$ sind, so daß also ein unendlich kl. parallelepipedisches Massenelement, dessen von A aus gehenden Seitenebenen im ursprünglichen Zustand in diese 3 ausgezeichneten Ebenen

hineinfallen, auch nach d. veränderten Zustand in diese ausgezeichneten Ebenen hineinfallen, und also d. Element noch immer rechtwinklig parallelepipedisch bleibt und nur d. Kantenlängen sich ändern. Diese 3 ausgezeichneten Ebenen fallen mit denjenigen zusammen, in welchen d. Tangentialspannungen $\tau = 0$ sind. Denkt man sich 3 Richtungen normal zu den drei ausgezeichneten Ebenen gezogen, so sind bekanntlich d. Spannungen und Ausdehnungen im Sinne dieser 3 Richtungen Hauptspannungen resp. Hauptausdehnungen, diese seien bezeichnet mit σ_1 σ_2 σ_3 resp. ε_1 ε_2 und ε_3. Unter ihnen befinden sich auch (algebraisch verstanden) d. größte und d. kleinste Normalspannung σ resp. Ausdehnung ε, welche im Punkte A nach irgend welchen Richtungen stattfinden.

Was nun d. Beziehungen zwischen d. Größen σ, τ und ε, γ betrifft, so enthalten diese Beziehungen verschiedene von d. Beschaffenheit d. Körpers abhängige Constanten, welche sich jedoch für d. Fall eines durchaus isotropen Körpers d. h. eines Körpers, welcher nach allen Richtungen gleich beschaffen ist, ~~nur~~ auf bis 2 reducieren. Es ist dann nämlich wie aus d. Elasticitätslehre her bekannt bei einem ~~Ex~~ isotropen Körper:

$$\sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{e}{n-2}\right) = 2G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{n-2}\right)$$

$$\sigma_y = 2G\left(\varepsilon_y + \frac{e}{n-2}\right) = 2G\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{n-2}\right)$$

$$\sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{e}{n-2}\right) = 2G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{n-2}\right)$$

und ferner:

$$\tau_x = G\gamma_x = G\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)$$

$$\tau_y = G\gamma_y = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)$$

$$\tau_z = G\gamma_z = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

In diesen Beziehungen zwischen σ, τ und ε, γ kommen die beiden Constanten G u. n vor, während e als Volumenausdehnungscoefficient $= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ bekannt ist.

Die 3 ersten d. 6 Beziehungen lassen sich für gewisse Fälle bequemer auch dadurch aufstellen, daß man umgekehrt d. Ausdehnungen ε_x ε_y ε_z als Functionen d. Spannungen σ_x σ_y σ_z darstellt mit Hilfe d. Beziehung, welche zwischen G und n zu einer anderen Constanten E, d. h. Elasticitätsmodul stattfindet, nämlich:

$$E = 2\,\frac{n+1}{n}\,G\,;$$

man bekommt dann:

$$\left.\begin{aligned} E\varepsilon_x &= \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{n} \\ E\varepsilon_y &= \sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{n} \\ E\varepsilon_z &= \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{n} \end{aligned}\right\}$$

Die Bedeutung d. Constanten E und n ist am deutlichsten zu erkennen, wenn man 2 d. 3 Normalspannungen z. B. σ_y u. $\sigma_z = 0$ setzt. Man bekommt dann:

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} \quad \text{und} \quad n = \div\,\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = \div\,\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}$$

Es ist also d. Elasticitätsmodul E = dem Verhältniß einer Normalspannung zu entsprechender Ausdehnung, vorausgesetzt, daß in allen zu ersteren Richtungen senkrechten Richtungen d. Normalspannungen = 0 sind. n dagegen ist d. negative Verhältniß, unter derselben Voraussetzung, d. Ausdehnung nach d. Hauptrichtung zu den resp. Ausdehnungen d. Richtungen, wo senkrecht d. Normalspannungen = 0 sein sollen.

Bekanntlich sind die beiden Constanten E u. G für verschiedene Körper sehr bedeutend verschieden, während d. Constante n für alle Körper ungefähr denselben Werth zwischen 3 u. 4 hat. In d. Elasticitätslehre wurde schon erwähnt, daß theoretische Untersuchungen auf Grund d. atomistischen Ansicht in Betreff d. Constitution

d. Medien vernachlässigen lassen, dass es sich nur [illegible] d. Grenze 4 nähert, ein vollkommen [illegible] Eigenschaft d. Körpers ist.

Werden nun d. Ausdrücke von $\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_x\ \tau_y\ \tau_z$ in d. Gleichungen sub 2 substituirt, so ergibt sich folgendes: Es ist:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_y}{\partial z}+\frac{\partial\tau_z}{\partial y} = 2g\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{1}{n-2}\frac{\partial e}{\partial x}\right)+g\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)+g\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y}\right)$$

$$= g\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right]+\frac{2}{n-2}\frac{\partial e}{\partial x}+\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right\}$$

Hier ist nun aber bekanntlich: $\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z} = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = e$
= Volumenausdehnungscoefficienten

Man hat also:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_y}{\partial z}+\frac{\partial\tau_z}{\partial y} = g\left[\frac{n}{n-2}\frac{\partial e}{\partial x}+\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right]$$

Was nun ferner d. Beschleunigungscomponente φ_x betrifft, so sind, da im Anfange angenommen wurde, dass d. Körper nur in relativer Bewegung gegen [illegible], an einem fixirten Achsensystem sei, offenbar $\frac{\partial\xi}{\partial t}$, $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ und $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$ d. Componenten d. relativen Geschwindigkeit d. Punktes A in Bezug auf d. genannte Achsensystem.
und also $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$ – $\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$ d. Beschleunigungscomponenten $= \varphi_x$ resp. φ_y resp. φ_z

Nach d. Substitution erhält man also d. sub 2 genannten Gleichungen in folgender Form, wobei man offenbar d. beiden letzteren durch d. entsprechenden Buchstabenvertauschungen unmittelbar erhalten kann:

$$g\left(\frac{n}{n-2}\frac{\partial e}{\partial x}+\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)+\mu\left(X-\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right) = 0$$

$$g\left[\frac{n}{n-2}\frac{\partial e}{\partial y}+\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\right]+\mu\left[Y-\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right] = 0$$

$$g\left[\frac{n}{n-2}\frac{\partial e}{\partial z}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right]+\mu\left[Z-\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right] = 0$$

Sind nun μ = ursprüngliche spec. Masse im Punkte $A(x\,y\,z)$ sowie d. Componenten $X\ Y\ Z$ der beschleunigenden Massenkraft als Function von $x\ y\ z$ gegeben, wie dies zur Lösung d. Aufgabe vorausgesetzt werden muss, so stellen in den obigen 3 Gleichungen, 3 gleichzeitige partielle Differentialgleichungen 2ten Grades d. abhängig Veränderlichen $\xi\ \eta\ \zeta$ nach $x\ y\ z$ den Coordinaten d. betreffenden Punktes. Aus diesen kann man nun mittelst entsprechender Integration mit Rücksicht auf d. gegebenen Oberflächenbedingungen (Oberflächenkräfte, Unterstützung od. Befestigung d. Körpers an gewissen Stellen d. Oberfläche) und den gegebenen Anfangszustand (äusseren und inneren Zustand für $t = 0$) die Grössen $\xi\ \eta$ und ζ als endliche Functionen d. Coordinaten $x\ y\ z$ u. d. Zeit t bestimmen. Sind aber diese Functionen gefunden, so kennt man auch in jedem Augenblick den Zustand d. Körpers vollständig. Zunächst kennt man den äusseren Zustand od. Bewegungszustand indem durch d. 3 Geschwindigkeitscomponenten $\frac{\partial\xi}{\partial t}$ $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ und $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$ d. relative Bewegungszustand gegen das am Körper fixirte Achsensystem bestimmt ist als Function d. Coordinaten $x\ y\ z$ und d. Zeit t. Was den inneren Zustand betrifft, so ist dieser bekanntlich bestimmt durch den Spannungszustand im betreffenden Punkte und durch d. ursprüngliche spec. Masse μ. Der Spannungszustand ist aber so vollkommen bestimmt durch d. 6 Spannungscomponenten $\sigma - \tau$; indem diese aber nach den vorgefundenen Formeln Functionen d. partiellen Ableitungen von $\xi\ \eta\ \zeta$ nach $x\ y\ z$ sind, ist nun auch d. Spannungszustand als Function von $x\ y\ z$ bestimmt.

Was d. spec. Masse im Punkte $A(x\,y\,z)$ betrifft, so ändert sich diese natürlich, da $\mu = \frac{1}{vg}$, im umgekehrten Verhältnisse wie das spec. Volumen sich ändert. Da aber d. spec. Volumen sich in dem Verhältnisse $1 : 1+e$ vergrössert hat, so hat d. spec. Masse sich in dem Verhältnisse $1+e : 1$ verkleinert, so dass die spec. Masse im Punkte A bestimmt durch: $\frac{\mu}{1+e} = \mu(1-e)$ bei Vernachlässigung unendl. kl. Grössen
e = Volumenausdehnungscoefficienten, der aber eine Function d. partiellen Ableitungen von $\xi\ \eta\ \zeta$ nach $x\ y\ z$ nämlich $e = \frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}$ und welche jetzt auch eine Function von $x\ y\ z$, so dass auch die veränderte spec. Masse als eine Function von $x\ y\ z$ bestimmt ist.

Es lässt sich unschwer leicht übersehen, dass d. vollständige Integration auf grosse Schwierigkeiten stösst, und aus diesem Grunde bei d. späteren Anwendungen einige Vereinfachungen vorgenommen werden, und zwar wird in d. Regel allgemein vorausgesetzt, dass d. innere Zustand eines Körpers durch nur 2 Grössen bestimmt sei.

In einem festen Körper ist etwa dann d. Fall, wenn derselbe lediglich durch Kräfte angegriffen wird, dass gar keine Tangentialspannungen sondern nur Normalspannungen vorkommen. Soll dies d. Fall sein, so ist natürlich dazu nöthig, dass d. Oberflächenkräfte nur normale Druckkräfte sind, denn wenn auch tangential an die Oberfläche d. Körpers gerichtete Kräfte vorhanden (z.B. Reibungen) so würden auch Tangentialspannungen entstehen. Dass, unter den genannten Voraussetzungen von nur normal gegen d. Oberfläche gerichteten Druckkräften, wirklich d. Fall ist, dass d. innere Zustand lediglich durch nur 2 Grössen bestimmt ist, lässt sich folgendermassen leicht beweisen.

Ist A ein Punkt d. Körpers mit den Coordinaten $x\ y\ z$, und ρ d. resultirende Spannung, mit den Richtungswinkeln $a\ b\ c$ gegen d. Achse, in einer durch A gelegten Ebene, deren Normal AB mit den Achsen d. Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ bildet, dann ist nach Seite 10.3:

$$\rho\cos a = \sigma_x\cos\alpha+\tau_y\cos\gamma+\tau_z\cos\beta$$

etc. etc. etc. etc.

Wenn nun aber alle Tangentialspannungen τ für beliebige Ebenen d. Körpers $= 0$ sein sollen, also

$$\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$$

sowie auch $a = \alpha$ $b = \beta$ und $c = \gamma$ für jede Richtung $\alpha\ \beta\ \gamma$, da dann d. resultirende Spannung σ immer normal zu Spannungsebene gerichtet sein muss. Dementsprechend ist dann auch:

$$\rho = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z.$$

Wenn also im Körper durchaus keine Tangentialspannungen vorkommen, so ist d. Normalspannung in irgend einem Punkte für alle Ebenen gleich gross. In diesem Falle ist diese Normalspannung einzig mit Spannung im betreffenden Punkte bezeichnet. Durch diese für jeden Punkt nach allen Richtungen constante Spannung σ ist dann auch d. Spannungszustand in d. betreffenden Punkte vollkommen bestimmt. Mit Rücksicht auf d. spec. Masse μ und diese Spannung σ ist demnach bei gegebener Art und Aggregatform d. Körpers sein innerer Zustand vollkommen bestimmt in dem betreffenden Punkte, wozu also nur 2 Grössen σ und μ nöthig sind. Die Fundamentalgleichungen Seite 10.2 nehmen unter diesen Umständen dann folgende einfachere Form an:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\mu(X-\varphi_x) = 0\ ;\quad \frac{\partial\sigma}{\partial y}+\mu(Y-\varphi_y) = 0 \text{ und } \frac{\partial\sigma}{\partial z}+\mu(Z-\varphi_z) = 0.$$

Bemerkenswerth ist dabei insbesondere d. Fall, dass d. Körper sich in relativer Ruhe gegen d. Achsensystem befindet.
Es ist dann: $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$ und weil hier d. Grössen $\mu\ \xi\ \eta\ \zeta$ nur Functionen von $x\ y\ z$, und hat dann durch Addition:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\frac{\partial\sigma}{\partial z} = -\mu(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz) = d\sigma.$$

Da nun d. rechte Seite dieser Gleichung ($d\sigma$) das vollständige Differential einer Function von $x\ y\ z$ ist, so gilt dasselbe auch von d. linken Seite. Es muss also eine gewisse Function F von $x\ y\ z$ geben, welche so beschaffen sein muss, dass:

$$\mu X = \frac{d\,F(x\,y\,z)}{dx}\ ;\quad \mu Y = \frac{d\,F(x\,y\,z)}{dy} \text{ und } \mu Z = \frac{d\,F(x\,y\,z)}{dz} \text{ ist.}$$

Mit der oben gefundenen Gleichung für $d\sigma$ folgt demnach: →

$$d\sigma = \div\, d\vartheta(x\,y\,z)$$

$$\text{also } \sigma = \div\, \vartheta(x\,y\,z) + \text{Constante.}$$

Diese Constante wird dadurch bestimmt, daß man den Werth von σ für einen gewissen Punkt d. Körpers kennt. Sind z. B. $x_0\,y_0\,z_0$ d. Coordinaten eines Punktes an d. Oberfläche des Körpers und p_0 d. äußere Oberflächendruck in dem betreffenden Punkt, so ist an dieser Stelle $\sigma = \div p_0$

und also d. Constante $= \vartheta(x_0\,y_0\,z_0) \div p_0$

Der Körper kann in diesem Falle durch Flächen gleicher Spannung, die man sich schneiden nicht durch den Körper hindurchgelegt denkt, in unendlich dünne Schichten zerlegt gedacht werden, so daß d. Spannung in jeder dieser Flächen gleich groß, dieselbe sich jedoch von Schicht zu Schicht ändert.

Die Gleichung einer solchen Fläche gleicher Spannung ist dann offenbar:

$$\vartheta(x\,y\,z) = C$$ ~~unter~~ wenn C aber eine Constante bedeutet, welcher entsprechend d. verschiedenen Flächen verschiedene Werthe zugetheilt werden kann.

Bemerkenswerth ist daher noch d. Specialfall, daß nicht nur $\mu(X dx + Y dy + Z dz)$ ein vollständiges Differential d. Coordinaten $x\,y\,z$ ist, sondern daß schon $X dx + Y dy + Z dz$ allein das vollständige Differential einer Function von $x\,y\,z$ ist, daß also:

$$X dx + Y dy + Z dz = d f(x, y\,z) \text{ ist.}$$

In diesem Falle ist dann:

$$d\sigma = \div\, \mu\, d f(x, y, z)$$

und da nun d. linke Seite ein vollständiges Differential von $x\,y\,z$ ist, so muß auch d. rechte Seite nothwendig ein vollständiges Differential sein d. h. es muß μ eine Function d. Function f sein.

Denkt man also sich den Körper wieder in unendlich dünne Schichten zerlegt durch Flächen deren Gleichungen sind: $f(x\,y\,z) = C$ unter C verschiedene Constanten verstanden, so ist allen Punkten dieser Flächen nicht nur d. Spannung σ sondern auch d. spec. Masse μ constant.

Wenn nun noch d. specielle Fall eintritt, daß die Körper äußeren Massenkräfte und also auch deren Componenten $X\;Y\;Z = 0$ sind, so daß nur d. äußere Oberflächendruck vorhanden ist, so ist auch d. vollständige Differential d. Function $f = 0$; die Function f hat also dann einen constanten Werth für den ganzen Körper. Dementsprechend muß dann auch in allen Punkten d. Körpers gleiche Spannung σ und eine gleiche spec. Masse vorhanden sein; ferner müßte dann auch der äußere Druck p_0 für alle Punkte d. Oberfläche constant sein, es müßte also d. Körper von allen Seiten einem gleich starken Druck ausgesetzt sein. Wenn jedoch umgekehrt gegeben ist, daß p_0 in allen Punkten d. Oberfläche gleich groß ist, so ist damit durchaus nicht zu entnehmen, daß in allen Punkten d. Körpers gleiche Spannungen und gleiche spec. Massen vorhanden sind, sondern es würde nur daraus folgen, daß d. Oberfläche d. Körpers eine Fläche gleicher Spannung ist.

Anwendung d. Fundamentalgleichungen auf einen flüssigen Körper im weiteren Sinne d. Wortes.

Zunächst wird es nun darauf ankommen die Seite 10 gefundenen Fundamental-Differentialgleichungen zur Untersuchung d. Zustandsänderung einer Flüssigkeit (im weiteren Sinne) auf eine solche Form zu bringen, wie sie sich für Flüssigkeiten entsprechen. Es wurde damals gefunden:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \mu\,(X - \varphi_x) = 0$$

etc.

In den Größen σ und τ sind jedoch jetzt nicht nur Spannungscomponenten sondern auch Componenten d. inneren Reibungen enthalten.

In Betreff d. Coordinatenaxen, worauf d. Flüssigkeit bezogen werden soll, ist zu bemerken, daß man dieselbe nicht in derselben Weise auffassen kann wie vorhin, wenigstens würde dieses [illegible] keinen Nutzen bringen

da das am Körper fixirte Axensystem mit der Bewegung d. Körpers natürlich selbst eine sehr schwer zu fassende Bewegung annehmen könnte. Man nimmt deshalb jetzt ~~an~~, d. Flüssigkeit in relativer Bewegung ist, an, daß d. Coordinatenaxen außerhalb derselben fixirt gedacht wird an d. Gefäß, d. Röhre, den Canal, überhaupt an d. System fester Wände, worauf d. Bewegung d. Flüssigkeit bezogen wird. $x\,y\,z$ seien d. augenblicklichen Coordinaten irgend eines Punktes A; diese Coordinaten können in verschiedener Weise aufgefaßt werden, je nachdem man den Punkt A als einen räumlichen Punkt oder aber als den materiellen Punkt d. Flüssigkeit betrachtet, welcher sich augenblicklich im Punkte A d. Raumes befindet. Im ersteren Falle sind d. Coordinaten $x\,y\,z$ von einander unabhängige Variable, die sich ändern, wenn man von einem zum anderen Punkte fortschreitet. Betrachtet man aber d. Punkt als den materiellen Punkt d. Flüssigkeit, welcher sich zur Zeit t im Punkte A d. Raumes befindet, so sind d. Coordinaten $x\,y\,z$ Functionen d. Zeit t.

Es seien ferner für den Punkt A d. Raumes zur Zeit t, die specifische Masse $= \mu$, die Componenten d. beschleunigenden Massenkraft $= X, Y\,Z$, d. Componenten d. Beschleunigung $= \varphi_x\;\varphi_y\;\varphi_z$ und d. Componenten d. Geschwindigkeit $= u\;v\;w$, alle Componenten im Sinne d. Coordinatenaxen genommen. Alle diese Größen sind, wenn man sie auf den unveränderlichen Punkt d. Raumes bezieht, Functionen der bei dieser Auffassung unabhängigen Variabeln $x\,y\,z$ u. t. Betrachtet man jedoch d. Größen als sich beziehend auf den materiellen Punkt d. Flüssigkeit, welcher sich zur Zeit im Punkte $A(x\,y\,z)$ d. Raumes befindet, so sind $x\,y\,z$ Functionen von t und auch mittelbar auch d. anderen Größen Functionen von t. In dem letzteren Sinne sollen nun d. Größen aufgefaßt werden, in welchem also d. Coordinaten $x\,y\,z$ Functionen d. Zeit t und d. anderen fraglichen Größen mittelbare Functionen von t sind.

Die Geschwindigkeitscomponenten sind dann offenbar:

$$u = \frac{dx}{dt} \qquad v = \frac{dy}{dt} \quad \text{und} \quad w = \frac{dz}{dt}$$

Ferner ist bekanntlich d. Beschleunigungscomponente: $\varphi_x = \frac{du}{dt}$, da nun u eine Function von $x\,y\,z$ ist, diese Werthe selbst aber wieder Functionen von t sind, so daß also u nur eine mittelbare Function von t ist, so folgt nach d. bekannten Formel d. Differentialrechnung:

$$\varphi_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

oder für d. Quotienten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ d. Geschwindigkeitscomponenten eingesetzt:

$$\varphi_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

Analog unterliegt: $$\varphi_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\varphi_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Was nun in den fraglichen Fundamentalgleichungen die Componenten d. inneren Flächenkräfte σ und τ betrifft, so schließen diese Größen jetzt im Allgemeinen Componenten d. Spannungen und d. inneren Reibungen in sich. Hinsichtlich d. Spannungen, welche in den inneren Flächenkräften vorkommen, ist d. Begriff einer Flüssigkeit dahin ergänzt, daß ihre Massenelemente nicht nur einer unbeschränkten Gestaltsänderung fähig sind, sondern daß einer solchen an und für sich d. h. abgesehen von d. einer gleichzeitig stattfindenden Volumenänderung und relativ gleitenden Bewegung, sich auch kein Widerstand entgegensetzt.

Wenn man dann, wenigstens was tropfbare Flüssigkeiten betrifft, die mathematische Untersuchung auf solche **vollkommene Flüssigkeiten** beschränkt, welche (wie luftförmige Flüssigkeiten überhaupt) einer vermuthlich vollkommen widerstandsloser Gestaltsänderung d. Massenelemente entsprechen, so sind d. Tangentialspannungen = Null und also d. Größen τ lediglich innere Reibungen, während d. Größen σ außer den Spannungen auch an d. inneren Reibungen betheiligt sind, wobei d. Spannungen als natürlich lediglich Normalspannungen sind. Da diese aber bei Flüssigkeiten der bisher ausgeführten Erfahrung gemäß meistens negativ sind, wenigstens nur bei tropfbar flüssigen Körpern kleine positive Werthe haben können, so erscheint es am passendsten zweckmäßiger, um dieselbe mit positiven Werthen rechnen zu können, statt dieser Normalspannungen d. entgegengesetzten Pressungen einzuführen.

Es seien daher p_x p_y p_z d. Pressungen, welche auch d. Flüssigkeit stattfinden in einem Punkte A (x y z) für Ebenen, welche zu den Richtungen A x A y. A z senkrecht sind. Ist nun durch diesen Punkt A eine beliebige Ebene, deren Normale AN mit den Axen die Winkel α β γ bildet, so sei p d. Pressung im Punkte A auf diese beliebige Ebene.
Die früher eingeführten Bezeichnungen σ_x σ_y und σ_z für die Componenten d. inneren Gleichgewichtskräfte, sollen jetzt nur für d. Normalcomponenten d. inneren Reibungen im Punkte A für die zu
A x A y und A z senkrechten Ebenen bezeichnen, sodass dieselben Größen, welche früher mit σ_x σ_y σ_z bezeichnet wurden, jetzt sind:

$$\sigma_x = -p_x + \sigma_x \qquad \sigma_y = -p_y + \sigma_y \quad \text{und} \quad \sigma_z = -p_z + \sigma_z$$

Es haben also jetzt die neuen Bezeichnung σ_x σ_y σ_z eine beschränktere Bedeutung bekommen, indem sie sich nur auf d. inneren Reibungen und nicht mehr auf d. inneren Gleichgewichtskräfte überhaupt beziehen. Nach den Formeln 3 Seite 10 sind dann d. 3 Componenten d. inneren Gleichgewichtskraft, welche im Punkte A d. Ebene (α β γ) nach den rechtw. Coordinaten stattfinden:

im Sinne d. X Axe $= (-p_x + \sigma_x)\cos\alpha + \tau_y\cos\gamma + \tau_z\cos\beta$

im Sinne d. Y Axe $= (-p_y + \sigma_y)\cos\beta + \tau_z\cos\alpha + \tau_x\cos\gamma$

im Sinne d. Z Axe $= (-p_z + \sigma_z)\cos\gamma + \tau_x\cos\beta + \tau_y\cos\alpha$

Während wir früher diese innere Gleichgewichtskraft im Punkte A d. schiefen Ebene mit ϱ bezeichnet haben, und seine Richtungswinkel gegen d. Axen mit a b c, soll jetzt unter ϱ nur d. innere resultierende Reibung verstanden werden, welche im Punkte A d. Ebene α β γ stattfindet. Die resultierende innere Gleichgewichtskraft im Punkte A d. Ebene α β γ besteht demnach aus 2 Theilen, nämlich aus d. Pressung und inneren Reibungen. Die Spannung p aber ist Normalspannung und = negativen Pressung $-p$. Da diese Spannung $-p$ normal zur Ebene (α β γ) gerichtet ist entsprechend d. Annahme einer vollkommenen Flüssigkeit, so sind auch ihre Richtungswinkel mit d. Axen $= \alpha$ β γ, und demnach ihre Componenten im Sinne d. Axen $= -p\cos\alpha$ $-p\cos\beta$ $-p\cos\gamma$.
Fügt man nun noch d. Componenten d. inneren resultierenden Gleichgewichtskraft im Sinne d. Axen [illegible], d. Componenten der inneren Reibungen $\varrho\cos a$ $\varrho\cos b$ $\varrho\cos c$, und [illegible] d. Componenten d. inneren Gleichgewichtskraft im Sinne d. Axen mit Rücksicht auf d. obigen Gleichungen hinzu:

$$-p\cos\alpha + \varrho\cos a = (-p_x + \sigma_x)\cos\alpha + \tau_y\cos\gamma + \tau_z\cos\beta$$

$$-p\cos\beta + \varrho\cos b = (-p_y + \sigma_y)\cos\beta + \tau_z\cos\alpha + \tau_x\cos\gamma$$

$$-p\cos\gamma + \varrho\cos c = (-p_z + \sigma_z)\cos\gamma + \tau_x\cos\beta + \tau_y\cos\alpha$$

Wenn man nun d. Annahme macht, wie sie den theoretischen Untersuchungen über d. Flüssigkeitsbewegung bisher allgemein zu Grunde gelegt wurde, daß die Pressung und die innere Reibung [illegible] nicht gegenseitig bedingen, wobei natürlich innere Reibung nach von den äußeren Reibungen zu unterscheiden ist, indem letztere z. B. bei festen Körpern sich nach d. Spannungszustand bedingen können, daß also wie es auch durch Erfahrungen bestätigt wurde p und ϱ sich und welche auch deren Componenten sich nicht gegenseitig bedingen, so müssen die obigen 3 Gleichungen von den Pressungen unabhängig von den Werthen d. inneren Reibungen, und ebenso von letzteren unabhängig von den Werthen d. ersteren erfüllt werden. Sie müssen also auch von d. inneren Reibungen erfüllt werden, wenn man d. ~~[illegible]~~ inneren Reibungscomponenten $= 0$ setzt, wie es d. Fall ist, wenn d. Flüssigkeit sich in relativer Ruhe befindet. Die 3 Gleichungen geben dann mit $\varrho = 0$:

$$p = p_x = p_y = p_z$$

demnach sind d. Pressungen in d. betreffenden Punkte gleich groß für alle Ebenen, welche man durch den Punkt hindurch legen kann. Man bezeichnet daher auch p schlechtweg als d. Pressung d. Flüssigkeit in dem betreffenden Punkte. Sie bestimmt natürlich zusammen mit d. spec. Masse μ (o. dem spec. Volumen resp. d. spec. Gewicht) den inneren Zustand in diesem Punkte.
Mit Rücksicht darauf, daß d. 3 Gleichungen auch für d. Pressungen $p = 0$ von den inneren Reibungen erfüllt werden müssen, bleiben d. Beziehungen:

$$\varrho\cos a = \sigma_x\cos\alpha + \tau_y\cos\gamma + \tau_z\cos\beta$$

$$\varrho\cos b = \sigma_y\cos\beta + \tau_z\cos\alpha + \tau_x\cos\gamma$$

$$\varrho\cos c = \sigma_z\cos\gamma + \tau_x\cos\beta + \tau_y\cos\alpha$$

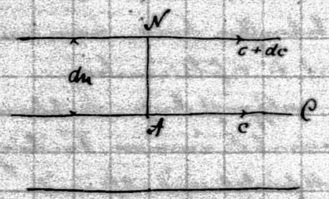
Wegen dieser vollkommenen Übereinstimmung d. Gleichungen für d. inneren Reibungen mit den Seite 10. 3 aufgestellten Gleichungen für die inneren Gleichgewichtskräfte überhaupt, wird man auch ganz analoge Folgerungen hinsichtlich d. inneren Reibungen ziehen können wie solche ebenmäßig früher hinsichtlich d. inneren Gleichgewichtskräfte im Allgemeinen gezogen wurden, und die Resultate direct auf d. vorliegenden inneren Reibungen übertragen. Wenn man also mit σ d. Normalcomponente d. inneren Reibung für eine beliebige Ebene α β γ bezeichnet, so ist:

$$\sigma = \sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\cos^2\beta + \sigma_z\cos^2\gamma + 2\tau_x\cos\beta\cos\gamma + 2\tau_y\cos\alpha\cos\gamma + 2\tau_z\cos\alpha\cos\beta$$

und hieraus kann wieder d. bekannten analogen Schluß wieder gezogen, daß in jedem Punkte A d. Summe d. Normalcomponenten d. inneren Reibungen für je drei sich rechtwinklig schneidende Ebenen constant ist.

Es handelt sich nun darum Ausdrücke zu finden für d. Componenten d. inneren Reibungen und zwar zunächst für d. tangentialen Reibungscomponenten τ_x τ_y τ_z.

In dieser Beziehung ist eine Annahme zu Grunde zu legen, welche schon von Newton gemacht wurde, und seitdem auch von d. meisten Autoren beibehalten und durch zahlreiche Erfahrungen bestätigt worden ist, von denen in d. Hydraulik später d. Rede sein wird:

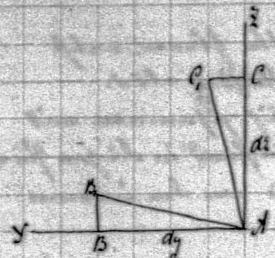


Denkt man sich 2 benachbarte unendlich kleine dünne Flüssigkeitsebenen, von d. Dicke dn, von denen d. untere eben in d. Richtung d. Schicht eine Geschwindigkeit $= c$ und die andere in derselben Richtung eine Geschwindigkeit $= c + dc$ hat, so daß also d. obere Schicht sich gegen d. untere mit einer relativen Geschwindigkeit $= dc$ bewegt, so wird durch diese relativ gleitende Bewegung Reibungen verursacht. Die besagte Annahme ist nun die, daß diese Reibungen zwischen 2 aneinander Flüssigkeitsschichten proportional dem Differentialquotienten

$\frac{dc}{dn}$ sei, also proportional d. Schnelligkeit mit welcher sich d. Geschwindigkeit von einer zu anderen Schicht ändert, d. h. wenn man auf d. Normalen AN von A aus um dn fortschreitet. Offenbar ist dieser Quotient $\frac{dc}{dn}$ auch d. Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich AN gegen AC hin dreht, oder d. Winkelgeschwindigkeit mit welcher sich d. rechte Winkel NAC verkleinert. Bezeichnet man nun analog den früheren Bezeichnungen für d. Tangentialspannungen, die innere Reibung im Punkte A zu der zu AN senkrechten Ebene im Sinne d. Richtung AC mit τ_{nc}, so ist diese nach der Newton'schen Setzung:

$$\tau_{nc} = R\,\frac{dc}{dn}$$

und zwar d. innere Reibung bedeutet als d. Kraft, welche die im Sinne AN an die betreffende Ebene grenzende Flüssigkeitsschicht auf d. Flächeneinheit d. Ebene ausübt. Hierin ist R eine durch Erfahrung und Versuche zu bestimmende Constante, welche jedoch für verschiedene Flüssigkeiten, auch natürlich für verschiedenen Zustände d. Flüssigkeit verschiedene Werthe annehmen kann.



Es sei nun A ein beliebiger materieller Punkt d. Flüssigkeit, dessen Coordinaten zur Zeit t = x y z sind. Denn A nach seiner zur Zeit t 2 Richtungen gezogen parallel der y und z Axe d. Coordinatensystems innerhalb d. Flüssigkeit gezogen würde. B sei ein materieller Punkt auf AY in d. Entfernung AB = dy von A, und C ein materieller Punkt auf AZ in d. Entfernung dz von A.

In dem betreffenden Augenblick t zu einer früher angenommenen werde d. Geschwindigkeit d. Punktes A im Sinne d. Y Axe = v. die Geschwindigkeit d. Punktes C also im Sinne d. Y Axe = $v + \frac{dv}{dz}dz$, und demnach d. relative Geschwindigkeit von C gegen A im Sinne d. Y Axe = $\frac{dv}{dz}dz$. Vermöge dieser relativen Geschwindigkeit wird C gegen A im Zeitelement dt um ein kl. Stück CC_1 verschoben und offenbar ist:

$$CC_1 = \frac{dv}{dz}\,dz\,dt =$$ partielle relative Verrückung von C gegen A im Sinne AY im Zeitelemente dt.

Ebenso ist in demselben Augenblick t d. Geschwindigkeit von A im Sinne d. Z Axe = w und also d. Geschwindigkeit von B im Sinne d. Z Axe = $w + \frac{dw}{dy}dy$, demgemäss d. relative Geschwindigkeit von B gegen A im Sinne d. Z Axe = $\frac{dw}{dy}dy$ und somit die im Zeitelemente dt d. partielle relative Verrückung BB_1 von B gegen A im Sinne d. Z Axe:

$$BB_1 = \frac{dw}{dy}\,dy\,dt$$

Demnach wird d. unendlich kl. Winkel $C\hat{A}C_1 = \frac{CC_1}{AC} = \frac{CC_1}{dz} = \frac{dv}{dz}dt$

und d. unendlich kl. Winkel $B\hat{A}B_1 = \frac{BB_1}{AB} = \frac{BB_1}{dy} = \frac{dw}{dy}dt$.

Es ist offenbar d. Verkleinerung d. rechten Winkels BAC = der Summe dieser beiden kl. Winkel also:

$$= B\hat{A}B_1 + C\hat{A}C_1 = \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)dt$$

und demgemäss d. Winkelgeschwindigkeit mit welcher diese Verkleinerung d. rechten Winkels BAC augenblicklich d.h. zur Zeit t stattfindet:

$$= \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$$

Diese Verkleinerung d. rechten Winkels BAC kann man nun einerseits betrachten als d. resultirende relative Bewegung d. Punktes C gegen A in d. Richtung AB_1, oder da BAB_1 und CAC_1 unendlich kl. Winkel sind, man also d. Verschiebung CC_1 als parallel zu AB betrachten kann, kann man d. Verkleinerung d. rechten Winkels BAC auch betrachten als das Resultat d. resultirenden relativen Bewegung von C gegen A im Sinne AB. Bei dieser Auffassung entspricht dieser Verkleinerung d. rechten Winkels dem Newton'schen Gesetz zu Folge eine Tangentialcomponente d. inneren Reibung, welche im Punkte A in d. zur Z Axe senkrechten Ebene im Sinne d. Y Axe stattfindet und also mit t_{zy} zu bezeichnen wäre.

Andererseits kann d. Verkleinerung d. rechten Winkels BAC auch betrachtet werden, als d. relative Verschiebung d. Punktes B gegen AC, welche Auffassung eine Tangentialcomponente t_{yz} d. inneren Reibung im Punkte A in d. zur Y Axe senkrechten Ebene im Sinne d. Z Axe stattfindend bedingen würde.

Natürlicherweise müssen demnach beide $t_{yz} = t_{zy}$ sein, es kommen also auch hier ebenso wie früher d. Tangentialcomponenten d. Spannungen, d. Tangentialcomponenten d. inneren Reibungen immer paarweise vor und zwar sind sie auch wieder paarweise einander gleich.

Man kann daher für $t_{zy} = t_{yz}$ auch d. bekannte Bezeichnung t_x einführen.

Nach dem Newton'schen Princip ist dann, da $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$ d. Winkelgeschwindigkeit ist, mit welcher d. Verkleinerung d. rechten Winkel BAC zur Zeit t vor sich geht,

$t_x = \mathfrak{R}\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)$ und ebenso d. analogen Ausdrücke für t_y und t_z durch Buchstabenvertauschung:

$t_y = \mathfrak{R}\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)$

$t_z = \mathfrak{R}\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)$

Damit wären also d. Tangentialcomponenten t d. inneren Reibungen durch d. Geschwindigkeitscomponenten ausgedrückt.

Es fragt sich nun, ob noch weiter auch d. Normalcomponenten d. inneren Reibungen in derselben Weise auszudrücken. Jedenfalls sind nach dem Newton'schen Princip die Normalcomponenten $\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z$ d. inneren Reibungen im Punkte A für d. betreffenden Coordinatenebenen YAZ, ZAX und XAY auch als lineare Functionen d. partiellen Differentialquotienten der Geschwindigkeitscomponenten u v w nach x y z anzunehmen. Damit ist aber verhältnissmässig wenig gewonnen, indem jede d. Normalcomponenten aus 9 Gliedern bestehen könnte (da u v w nach x y z partiell differentiirt neun verschiedene Differentialquotienten ergibt.) Eine Entscheidung in dieser Hinsicht ergibt sich jedoch zunächst mit folgender Betrachtung:

Man denke sich von A aus eine beliebige Richtung AS gezogen, bestimmt durch d. Richtungswinkel α β γ, dann von A aus ein unendlich kl. Stück $AA_1 = ds$ abgetragen; c sei d. Geschwindigkeit d. Punktes A nach d. Richtung AS zur Zeit t. Diese Geschwindigkeit c ist aber nach d. Mechanik bekanntlich dargestellt durch d. räumliche Diagonale d. von den Geschwindigkeitscomponenten u v w gebildeten Parallelepipeds, also:

$$c = u\cos\alpha + v.\cos\beta + w.\cos\gamma \qquad \text{— I}$$

Ähnlicher Formel bekommt man nun d. Geschwindigkeit d. Punktes A_1, $= c + dc$ im Sinne AS, wenn man für u v w die Geschwindigkeitscomponenten von A_1 substituirt.
Die Geschwindigkeitscomponente von A_1 im Sinne d. X Axe ist aber offenbar = u + d. partiellen Ableitung von u nach x y z, indem beim Fortgange von A nach A_1 sich gleichzeitig x y z ändern.

Man hat also in d. obigen Formel zu setzen

anstatt $u.\cos\alpha$ — $\left(u + \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz\right)\cos\alpha$

ebenso anstatt: $v.\cos\beta$ — $\left(v + \frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy + \frac{dv}{dz}dz\right)\cos\beta$

und $w.\cos\gamma$ — $\left(w + \frac{dw}{dx}dx + \frac{dw}{dy}dy + \frac{dw}{dz}dz\right)\cos\gamma$

demnach ist die Geschwindigkeit d. Punktes A_1 zur Zeit t im Sinne d. Richtung AS:

$$c + dc = \left\{\begin{aligned}&\left(u + \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz\right)\cos\alpha\\ &\left(v + \frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy + \frac{dv}{dz}dz\right)\cos\beta\\ &\left(w + \frac{dw}{dx}dx + \frac{dw}{dy}dy + \frac{dw}{dz}dz\right)\cos\gamma\end{aligned}\right\} \qquad \text{— II}$$

Zieht man nun Gleichung I von II ab, so bekommt man, wenn man noch berücksichtigt dass $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$ $\frac{dy}{ds} = \cos\beta$ und $\frac{dz}{ds} = \cos\gamma$ ist, und wenn man noch durch ds dividirt:

$$\frac{dc}{ds} = \frac{du}{dx}\cos^2\alpha + \frac{dv}{dy}\cos^2\beta + \frac{dw}{dz}\cos^2\gamma + \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)\cos\beta\cos\gamma$$
$$+ \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)\cos\gamma\cos\alpha + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\cos\alpha\cos\beta \qquad \text{— III}$$

Wie man sieht ist dieser Ausdruck für $\frac{dc}{ds}$, was zunächst nur d. Abhängigkeit von den Richtungswinkeln α β γ anbetrifft, ganz analog denen für Seite 10 – 12 gefundenen Ausdrücken für d. Normalspannung σ und Ausdehnung ε, welche im Punkte A nach d. Richtung AS (α β γ) stattfinden. Man kann deshalb auch in dieser Hinsicht ganz analoge Folgerungen ziehen d.h. es folgt mit dieser Analogie, dass für d. Geschwindigkeiten c_1 c_2 c_3 im Punkte A nach irgend 3 zu einander senkrechten Richtungen AS_1 AS_2 AS_3 die folgende constante Relation besteht, wie man auch unter d. Anwendung derselben [illegible]:

$$\frac{dc_1}{ds_1} + \frac{dc_2}{ds_2} + \frac{dc_3}{ds_3} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$$

Diese constante Summe für je 3 zu einander senkrechte Richtungen in demselben Punkte d. partiellen Ableitungen d. Geschwindigkeitscomponenten nach d. Coordinaten x y z, welche in d. Folge mit Δ bezeichnet werden soll, hat natürlich auch eine besondere Bedeutung:

$$\Delta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$$

Denkt man sich von A als Eckpunkt aus ein unendlich kleines rechtwinkliges Parallelepiped mit den Kanten dx dy dz construirt, so daß d. gegenüberliegende Eckpunkt von A = A₁ die Coordinaten x + dx y + dy und z + dz hat, so strömt in der zur x Axe senkrechten, durch A gehenden Seitenebene dy.dz augenblicklich d. Geschwindigkeit u im Sinne d. x Axe also senkrecht zur Ebene dy.dz. Es ist daher d. Volumen d. Flüssigkeit, welche in dem Zeitelement dt durch diese Ebene dy dz in d. Parallelepiped hineinfließt = dy.dz u.dt. Andererseits hat d. durch den Punkt A₁ gehende senkrecht zur x Axe gerichtete Ebene eine Geschwindigkeit im Sinne d. x Axe [illegible]: $u + \frac{du}{dx}dx$, und daher d. Volumen d. Flüssigkeit, welche im Zeitelement dt durch diese Ebene dy.dz aus dem Parallelepiped hinausfließt:

$$= dy.dz\left(u + \frac{du}{dx}dx\right)dt.$$

und also d. Differenz d. Volumina, welche im Zeitelement dt durch d. von A₁ begrenzte Ebene dy dz aus dem parallelepipedischen Raumelement mehr hinausfließt, als durch die von A begrenzte Ebene dy dz hineinfließt:

$$= dy\,dz\,\frac{du}{dx}\,dx.dt$$

Ebenso ist: $dz\,dx.\frac{dv}{dy}\,dy\,dt$ und $dx.dy\,\frac{dw}{dz}\,dz.dt$ } = diejenigen Flüssigkeitsvolumina, welche im Sinne d. y Axe resp. z Axe also durch die zur y Axe resp. z Axe senkrechten Seitenebenen während d. Zeitelements mehr aus dem Raumelement dx dy dz hinaus als hineinfließen.

Die Summe aller dieser Ausdrücke, erhalten:

$= dx\,dy\,dz\,\Delta\,dt$ ist das Flüssigkeitsvolumen, welches im Zeitelement dt mehr aus dem parallelepipedischen Raumelement hinaus- als hineinfließt.

Man kann demnach Δ als d. Ausdehnung bezeichnen, welche dieses Raumelement dx dy dz pro Volumeinheit in der Zeiteinheit ~~dt~~ erfahren würde, wenn es um d. Volumen d. ausfließenden Flüssigkeit vergrößert und um das d. hineinfließenden Flüssigkeit verkleinert würde, und wenn d. augenblickliche Bewegungszustand d. Flüssigkeit während d. Zeiteinheit unverändert bliebe. Da nun diese Größe Δ für jedes bei A liegende Raumelement gleich groß ist, ist offenbar Δ ein Maaß für d. Geschwindigkeit, mit welcher d. Volumenänderung d. Flüssigkeit im Punkte A stattfindet. Da nun weiter auch die Summe d. Normalcomponenten d. inneren Reibungen nach 3 zu einander senkrechten Richtungen $= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ für den betreffenden Punkt einen constanten Werth behalten muß, wie man auch d. Coordinaten drehen mag, so können mit Rücksicht auf d. gleichartige Bedeutung d. erscheinenden Größen d. h. auch weil der Axen [illegible] bevorzugt sein kann eine Axe vor der anderen, da man eine Flüssigkeit als vollkommen isotropen Körper ansehen kann, die Normalcomponenten der inneren Reibungen im Allgemeinen folgende Ausdrücke haben:

(σ_x nur für x, σ_y nur für y und σ_z nur für z [illegible] gebildet werden)

$$\sigma_x = S\frac{du}{dx} + T\Delta$$
$$\sigma_y = S\frac{dv}{dy} + T\Delta$$
$$\sigma_z = S\frac{dw}{dz} + T\Delta$$

} wenn S und T noch zu bestimmende Constante sind. Betrachtet man die Summe $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ so bekommt man auf d. anderen Seite d. Gleichung offenbar $= S\Delta + 3T\Delta = (S + 3T)\Delta =$ constante Summe.

also diese Normalcomponenten d. inneren Reibungen keine andere Ausdrücke annehmen können. Es scheint vollständig klar, wenn sie überhaupt solche Werthe haben sollen, daß ihre Summe $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ immer constant ist und daß man den einen Ausdruck mit dem anderen durch bloße Buchstabenvertauschung gewinnen kann.

Ferner kann man nun aber noch weiter schließen, daß d. letzten mit Δ verbundenen Glieder gar nicht vorkommen dürfen:

Denkt man sich nämlich, daß d. Bewegung d. Flüssigkeit im Punkte A nur im Sinne d. yz Ebene stattfindet, daß also d. Bewegung in d. Richtung d. x Axe = 0 also u = 0 und $\frac{du}{dx} = 0$ ist, so muß offenbar d. innere Reibung im Punkte der Ebene yz eine Richtung in d. Ebene yz hinein fallend, annehmen und demnach d. Normalcomponente d. inneren Reibung im Sinne d. x Axe also $\sigma_x = 0$ sein. Wenn aber $\sigma_x = 0$ werden soll mit u = 0 und $\frac{du}{dx} = 0$, so darf natürlich d. letzte Glied mit Δ gar nicht vorkommen, es muß also ~~[illegible]~~ T = 0 sein und wird so:

$$\sigma_x = S\frac{du}{dx}$$

ebenso ergeben sich d. bezüglichen Werthe mit den anderen Ausdrücken für d. Normalcomponenten und also: $\sigma_y = S\frac{dv}{dy}$ und $\sigma_z = S\frac{dw}{dz}$

Es frägt sich nun nur noch welche Beziehungen zwischen d. Constanten S und d. Constanten R besteht. Um dies zu erkennen, sei von A aus eine beliebige Richtung AS (α β γ) gezogen, c sei d. Geschwindigkeit d. Punktes A nach AS zur Zeit t; nach dem Obigen ist dann d. Normalcomponente σ d. inneren Reibung im Punkte A für die zu AS senkrechte Ebene:

$$\sigma = S\frac{dc}{ds}$$

wenn man unter dc d. Änderung d. Geschwindigkeit c bezeichnet, welche diese erleidet, wenn man nach d. Richtung AS um ds fortschreitet.

Mit Rücksicht auf den Seite 21 III gefundenen Werth von $\frac{dc}{ds}$ ist nun aber:

$$\sigma = S\left[\frac{du}{dx}\cos^2\alpha + \frac{dv}{dy}\cos^2\beta + \frac{dw}{dz}\cos^2\gamma\right] + \frac{S}{R}\left[\tau_x\cos\beta\cos\gamma + \tau_y\cos\gamma\cos\alpha + \tau_z\cos\alpha\cos\beta\right]$$

indem man für die dort stehenden Ausdrücke $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = \frac{\tau_x}{R}$ für $\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = \frac{\tau_y}{R}$ etc. setzte mit Rücksicht auf die Seite 20 gefundenen Werthe von τ_x τ_y und τ_z.

Seite 10, 4 wurde aber schon eine andere Gleichung für σ gefunden, welche bezüglich d. Richtungswinkel α β γ ganz ebenso wie diese gebildet ist, wo aber anstatt d. Coefficienten S im ersten Gliede 1 und statt des Coefficienten $\frac{S}{R}$ — 2 steht. Damit also d. oben gewonnene Gleichung, wie es sein muß, für alle Werthe von α β γ mit d. Seite 10, 4 gefundenen übereinstimmen, muß S = 2R sein und demnach d. Normalcomponenten:

$$\sigma_x = 2R\frac{du}{dx} \qquad \sigma_y = 2R\frac{dv}{dy} \quad \text{und} \quad \sigma_z = 2R\frac{dw}{dz} \quad \text{——— a}$$

wenn R eine noch auf experimentellem Wege zu bestimmende Constante ist.

* * *

Damit wären nun d. Vorarbeiten beendigt, die nöthig waren um d. früheren Fundamentalgleichungen auf diejenige Form zu bringen, in welcher dieselben für d. Untersuchung d. Zustandsänderungen flüssiger Körper am zweckmäßigsten ist.

Die erste Fundamentalgleichung war:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_y}{dz} + \frac{d\tau_z}{dy} + \mu(X - \varphi_x) = 0$$

In diese hat man nun nach Seite 18 für σ_x — $\div p + \sigma_x$; für σ_y — $\div p + \sigma_y$ und für σ_z — $\div p + \sigma_z$ zu setzen, wenn p d. spec. ~~Druck~~ d. Flüssigkeit und σ die Normalcomponenten d. inneren Reibungen bedeuten. Die Größen τ_x τ_y und τ_z bedeuten jetzt auch d. Tangentialcomponenten d. inneren Reibungen. Für $\frac{d\sigma_x}{dx}$ hat man also mit Rücksicht auf den unter a gefundenen Werth von σ_x zu setzen: $= -\frac{dp}{dx} + 2R\frac{d^2u}{dx^2}$ ebenso für $\frac{d\sigma_y}{dy} = -\frac{dp}{dy} + 2R\frac{d^2v}{dy^2}$ etc.

Ferner ist zufolge Seite 17 für φ_x zu setzen: $\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}$ etc. und endlich auch für τ_{xyz} d. Seite 20 gefundenen Werthe einzusetzen. Führt man dies aus, so bekommt man die erhält d. Fundamentalgleichungen in folgender Form:

$$-\frac{dp}{dx} + 2\mathfrak{K}\frac{d^2u}{dx^2} + \mathfrak{K}\left(\frac{d^2w}{dx.dz} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) + \mathfrak{K}\left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2v}{dx\,dy}\right) + \mu\left(X - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz}\right) = 0$$

oder durch μ dividirt und entsprechend umgeformt:

$$X - \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} + \frac{\mathfrak{K}}{\mu}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) + \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right] = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}$$

da der $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy\,dx} + \frac{d^2w}{dz\,dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)$ ist. Nach Seite 22 ist der dieser letzte Coefficient = Δ und daraus:

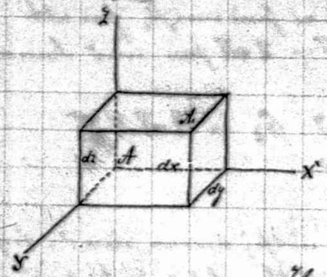
$$X - \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} - \frac{\mathfrak{K}}{\mu}\left[\frac{d\Delta}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right]$$

Die beiden anderen Fundamentalgleichungen werden natürlich analoge Umformungen erleiden, man erhält diese einfach durch Buchstabenvertauschung aus d. vorliegenden, also:

$$Y - \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dy} = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz} - \frac{\mathfrak{K}}{\mu}\left[\frac{d\Delta}{dy} + \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right]$$

$$Z - \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz} = \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz} - \frac{\mathfrak{K}}{\mu}\left[\frac{d\Delta}{dz} + \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right]$$

In diesen Ausdrücken kommen nun 5 Größen u v w μ p vor, welche als Functionen von x y z t bestimmt sein werden müssen, um den inneren und äußeren Zustand d. Flüssigkeit mit Rücksicht auf d. Oberflächenbedingungen und den gegebenen Anfangszustand [illegible] zu können. Der äußere Zustand ist nämlich, wie bekannt, bestimmt durch d. Geschwindigkeitscomponenten u v w und d. innere Zustand bestimmt durch d. spec. Masse μ und d. spec. Druck p. Um diese 5 Größen als Functionen von x y z t zu entwickeln, haben wir jedoch erst d. 3 obigen Gleichungen; es müssen also 2 andere Bestimmungsgleichungen aufgesucht werden. Eine derselben findet man durch folgende Betrachtung:



Denkt man sich im Punkte A (x y z) zur Zeit t 3 zu einander senkrechte Richtungen Ax Ay Az gezogen, parallel den Coordinatenaxen, worauf d. ganze Flüssigkeit bezogen ist, und nimmt A als Eckpunkt eines unendl. kl. rechtwinklig parallelepipedischen Raumelements, dessen Kanten dx dy dz mit den Richtungen x y z zusammenfallen resp. parallel sind, so sind d. Coordinaten d. gegenüberliegenden Eckpunktes A₁ dieses, als unveränderlich zu denkenden Raumelements = x + dx y + dy und z + dz.

Ist nun d. spec. Masse zur Zeit t im Punkte A = μ, so ändert sich diese im Laufe d. Zeitelements dt um $\frac{d\mu}{dt}dt$; die Masse d. ganzen Volumenelements dx dy dz erfährt also im Zeitelement dt eine Änderung = $dx\,dy\,dz.\frac{d\mu}{dt}dt$ = Masse, um welche d. Masse des Raumelements zur Zeit t + dt größer ist als zur Zeit t. Diese Massenänderung kann man aber auch anders ausdrücken. Betrachtet man nämlich d. Flüssigkeitsmassen, welche durch d. 6 Seitenflächen d. Raumelements theils hinein theils heraus fließen, so ist in Hinsicht d. zur x Axe senkrechten Flächen zu sagen, daß durch diese Fläche dy dz, deren Geschwindigkeit im Sinne d. x Axe also senkrecht zu ihr selbst = u ist, während d. Zeitelements dt ein Flüssigkeitsvolumen = dy dz u. dt in d. Raumelement hineinfließt, also eine Flüssigkeitsmasse = μ dy dz u dt. Aus der gegenüberliegenden Fläche fließt dagegen eine Flüssigkeitsmasse heraus, welche man erhält, wenn man d. eben erhaltene Masse um d. partielle Differential nach x vermehrt, indem man um von A nach A₁ zu kommen um dx fortschreiten muß. Das partielle Differential d. letzten Masse nach x ist also d. Unterschied derjenigen Flüssigkeitsmasse,

welche im Zeitelement dt aus dem Raumelement heraus fließt, gegen diejenige, welche in demselben Zeitraum dt in d. Volumenelement hineinfließt.

Also $dy\,dz\,\frac{d(\mu u)}{dx}dx.dt$ = Masse, welche im Zeitelement dt im Sinne d. x Axe mehr heraus als hineinfließt.

Ebenso ist: $dx\,dz.\frac{d(\mu v)}{dy}dy.dt$ und $dx.dy\,\frac{d(\mu w)}{dz}dz.dt$ der Unterschied derjenigen Flüssigkeitsmasse, welche im Sinne d. Y. resp. d. Z Axe im Zeitelement dt aus dem Volumenelement herausfließt, gegen diejenige, welche in demselben Zeitraum dt in d. Volumenelement hineinfließt. Die Summe dieser 3 Unterschiede giebt offenbar auch die Massenverminderung d. Volumenelements im Zeitraum dt an; man hat also d. Gleichung:

$$-dx\,dy\,dz\,\frac{d\mu}{dt}dt = dy\,dz.\frac{d(u\mu)}{dx}dx\,dt + dx\,dz\,\frac{d(v\mu)}{dy}dy\,dt + dx\,dy\,\frac{d(w\mu)}{dz}dz\,dt.$$

Dividirt man diese Gleichung durch dx dy dz, so erhält man ~~[illegible]~~ die gewünschte weitere Differentialgleichung zur Bestimmung d. 5 Größen u v w μ p als Functionen von x y z t. Man erhält:

$$\frac{d\mu}{dt} + \frac{d(\mu u)}{dx} + \frac{d(\mu v)}{dy} + \frac{d(\mu w)}{dz} = 0.$$

Da dieser Betrachtung d. Annahme einer continuirlichen Raumerfüllung durch d. Flüssigkeit zu Grunde gelegt ist, so nennt man diese Gleichung auch noch d. **Continuitätsgleichung** d. Flüssigkeit.

Eine weitere Gleichung kann aus mechanischen Betrachtungen nicht gezogen werden, es müssen daher zur Aufstellung d. noch fehlenden 5t Gleichung noch ganz andere Verhältnisse hinzugezogen werden, welche auf Wärme und Temperatur Rücksicht zu nehmen haben.

Ehe jedoch diese Verhältnisse näher untersucht werden, sollen erst folgende Betrachtungen gemacht werden:

Deformationsarbeit und Gleichung d. lebendigen Kraft eines Körpers im Allgemeinen.

Zunächst soll aus den 3 Fundamentalgleichungen eine Gleichung für d. lebendige Kraft eines Körpers entwickelt werden. Die 3 Fundamentalformeln waren:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_y}{dz} + \frac{d\tau_z}{dy} + \mu(X - \varphi_x) = 0$$

$$\frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_z}{dx} + \frac{d\tau_x}{dz} + \mu(Y - \varphi_y) = 0$$

$$\frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{d\tau_x}{dy} + \frac{d\tau_y}{dx} + \mu(Z - \varphi_z) = 0$$

Denkt man sich nun bei einem in continuirlicher Zustandsänderung begriffenen Körper ein Massenelement, welches zur Zeit t d. Gestalt eines unendlich kl. rechtwinkligen Parallelepipedons hat, dessen einer Eckpunkt A d. Coordinaten x y z hat und dessen Kantenlängen = dx dy dz sind, so ist das Volumen dieses Elements zur Zeit t = dx dy dz und sei bezeichnet mit δV. Es seien ferner u v w d. 3 Geschwindigkeitscomponenten d. [illegible] Eckpunkts A(x y z) im Sinne d. Coordinatenaxen zur Zeit t. Wenn man nun von einer Deformation dieses Massenelements d. Gestaltsänderung abstrahirt, so sind diese Größen u v w auch zugleich d. Geschwindigkeitscomponenten d. ganzen Volumenelements. Ferner seien X Y Z die Componenten d. beschleunigenden Massenkraft und μ d. spec. Masse zur Zeit t.

Es soll jetzt die erste Gleichung mit δV u dt, d. 2te mit δV. v dt und d. 3te mit δV. w dt multiplicirt werden, und darauf alle 3 zusammen addirt werden. Darauf sollen d. Glieder mit μ φx μ φy und μ φz auf d. andere Seite gebracht werden, wenn für φx φy und φz die bekannten Werthe $\frac{du}{dt}$ resp. $\frac{dv}{dt}$ $\frac{dw}{dt}$ zu setzen sind. Führt man dies aus, so bekommt man:

$$\mu\,\delta V(u\,du + v\,dv + w\,dw) = \mu\,\delta V(X.u + Y.v + Z\,w)\,dt + dO_1$$

worin dO_1 bedeutet:

$$dO_1 = \delta V\Big[\Big(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_y}{\partial z} + \frac{\partial\tau_z}{\partial y}\Big)u + \Big(\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_z}{\partial x} + \frac{\partial\tau_x}{\partial z}\Big)v + \Big(\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_x}{\partial y} + \frac{\partial\tau_y}{\partial x}\Big)w\Big]dt.$$

Das auf d. linken Seite d. ersten Gleichung stehende Glied kann man offenbar auch folgendermaßen schreiben:

$$= \mu\,\delta V.\ d\Big(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\Big).$$

$u^2 + v^2 + w^2$ ist aber d. augenblickliche Geschwindigkeitsquadrat und $\mu\,\delta V$ d. Masse d. Elements.

Auf Seite 2 ist demnach d. ganze Produkt die lebendige Kraft $= dL$ des Massenelements zur Zeit t. Die ganze linke Seite d. Gleichung ist also nichts anderes als d. Differential d. lebendigen Kraft d. h. d. Zunahme d. lebendigen Kraft des Massenelements während d. Zeitelements dt.

Da ferner d. Massenelement zur Zeit t sich im Sinne d. Axen mit d. Geschwindigkeiten $u\ v\ w$ fortbewegt, so ist das erste Glied d. rechten Seite d. Gleichung offenbar d. Summe d. Arbeiten dM, welche d. Massenkraftkomponenten $X\ Y\ Z$ auf d. Massenelement während d. Zeit dt verrichten.

Also: $\mu\,\delta V(Xu + Yv + Zw)\,dt = dM$.

Demnach kann man jetzt obige Gleichung auch schreiben:

$$dL = dM + dO_1$$

Was nun d. Größe dO_1 anbelangt, so ist diese offenbar nichts anderes als d. Arbeit d. Flächenkräfte während d. Zeitelements dt, mit welchen d. das Massenelement umgebende Körpermasse auf seine Oberfläche wirkt, wenigstens in soweit, als diese Arbeitsleistung unabhängig ist von einer gleichzeitig stattfindenden Deformation d. Massenelements, indem d. Geschwindigkeitskomponenten $u\ v\ w$ als für das ganze Massenelement constant angenommen wurden. Die oben gefundene Gleichung entspricht dann dem bekannten Satze, daß für ein starres Massensystem d. Zunahme d. lebendigen Kraft = d. Summe d. Arbeiten aller äußeren Kräfte ist. Die ganze Arbeit d. Oberflächenkräfte des Massenelements sei bezeichnet mit dO, so ist also dO_1 nur ein Theil von dO, während der andere Theil dO_2 ist. Man kann also setzen:

$$dO_1 = dO - dO_2,$$

worin dO_2 d. Arbeit d. Oberflächenkräfte d. Massenelements ist, welche von d. Deformation d. Massenelements bedingt ist.

Die ganze Arbeit dO d. Oberflächenkräfte läßt sich folgendermaßen berechnen:

Zunächst wird auf d. zur x Axe senkrechten und durch A hindurchgehenden Ebene $dy\,dz$ d. parallelepipedischen Massenelements, wirkt eine Flächenkraft, welche als specifische d. h. auf d. Flächeneinheit bezogen in 3 Komponenten $\sigma_x\ \ \tau_{xy}\ \ \tau_{xz}$ zerlegt werden kann. Diese bedeuten bekanntlich aber Komponenten d. inneren Flächenkräfte, welche im Sinne d. positiven Richtungen wirken. Will man also d. Kräfte haben, mit welchen d. in d. Ebene $dy\,dz$ angrenzende Körpermasse auf das Element wirkt, so muß man dieselben mit $\div\sigma_x\ \div\tau_{xy}\ \div\tau_{xz}$ bezeichnen, da dieselben in negativer Richtung d. Axen d. wirken. Die ganzen Flächenkräfte in d. Ebene $dy\,dz$ sind also: $dy\,dz.(\div\sigma_x)\quad dy\,dz.(\div\tau_{xy})\quad dy\,dz(\div\tau_{xz})$

Diese Seitenebene hat nun aber d. Geschwindigkeiten $u\ v\ w$ im Sinne d. Axen; sie bewegt sich also während d. Zeitelements dt im Sinne d. Axen um d. Strecken $u\,dt\ \ v\,dt$ und $w\,dt$ fort; die Arbeit dieser Flächenkraft ist also:

$$-\sigma_x\,u\,dy\,dz - \tau_{xy}.v\,dy\,dz - \tau_{xz}\,w.\,dy\,dz.$$

Eine ganz ähnliche Arbeit wird von denjenigen Kräften verrichtet, welche auf d. gegenüberliegenden Seitenfläche d. Elements angreifen. Man bekommt diese offenbar, wenn man nur d. oben gefundenen um ihr partielles Differential genommen nach x vergrößert, da beide Ebenen um dx von einander entfernt sind. Die Summe ~~derjenigen~~ d. Arbeiten derjenigen Kräfte, welche auf beiden zur x Axe senkrechten Seitenebenen wirken, ist demnach:

$$= dy\,dz\Big\{-\sigma_x u\,dt + \Big[\sigma_x u + \frac{\partial(\sigma_x u)}{\partial x}dx\Big]dt - \tau_{xy}\,v\,dt + \Big[\tau_{xy}v + \frac{\partial(\tau_{xy}v)}{\partial x}dx\Big]dt \div \tau_{xz}w\,dt + \Big[\tau_{xz}w + \frac{\partial(\tau_{xz}w)}{\partial x}dx\Big]dt\Big\}$$

oder wenn man d. kürzere Bezeichnung $\tau_{xy} = \tau_z$ und $\tau_{xz} = \tau_y$ wieder einführt und d. entsprechenden Vereinfachungen vornimmt und für $dx\,dy\,dz$ das Volumen δV einführt:

$$= \delta V\Big(\frac{\partial(\sigma_x u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_y w)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_z v)}{\partial x}\Big]dt.$$

Ebenso sind d. Summen d. Arbeiten derjenigen Kräfte, welche auf beide zur y resp. z Axe senkrechten Seitenebenen d. Elements wirken:

$$= \delta V\Big(\frac{\partial(\sigma_y v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_z u)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_x w)}{\partial y}\Big)dt \quad \text{resp.:} \quad = \delta V\Big(\frac{\partial(\sigma_z w)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_x v)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_y u)}{\partial z}\Big)dt.$$

Demnach ist d. Gesammtarbeit d. Oberflächenkräfte:

$$dO = \delta V\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial(\sigma_x u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_y w)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_z v)}{\partial x}\\ &+ \frac{\partial(\sigma_y v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_z u)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_x w)}{\partial y}\\ &+ \frac{\partial(\sigma_z w)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_x v)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_y u)}{\partial z}\end{aligned}\right\}dt.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem vorhin für dO_1 gefundenen und bedenkt, daß $dO_2 = dO - dO_1$ ist, so folgt:

$$dO_2 = \delta V\left\{\begin{aligned}&\sigma_x\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_x\Big(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\Big)\\ &+ \sigma_y\frac{\partial v}{\partial y} + \tau_y\Big(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\Big)\\ &+ \sigma_z\frac{\partial w}{\partial z} + \tau_z\Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)\end{aligned}\right\}dt$$

Demnach hat man jetzt d. Formel für d. lebendige Kraftzunahme:

$$dL = dM + dO \div dO_2$$

Diese Arbeit dO_2 ist der Theil von dO, welcher zur Deformation des Massenelements verbraucht wird; es ist entgegengesetzt gleich d. Arbeit $dE = -dO_2$, welche d. Massenelement selbst durch seine Deformation verrichtet, und welche d. Deformationsarbeit desselben bei d. fraglichen unendlich kleinen Zustandsänderung genannt werden soll. Indem diese Deformationsarbeit nur von den Spannungen, nicht von den übrigen Reibungen an d. Oberfläche d. Massenelements verrichtet wird, sind unter den Größen σ u. τ, welche in Gleichung für dO_1 zugleich Spannungen und innere Reibungen sein können, in Gleichung f. dO_2 nur Spannungen zu verstehen; in d. That beziehen sich die in diesen letzteren Gleichungen vorkommenden Differentialquotienten von $u\ v\ w$ nach $x\ y\ z$ nur auf solche Geschwindigkeitsänderungen, welche innerhalb d. betreffenden Massenelements stattfinden, während d. inneren Reibungen durch d. relativen Geschwindigkeiten benachbarter Massenelemente bedingt sind.

Wenn nun mit $\xi\ \eta\ \zeta$ die Wege bezeichnet werden, welche d. materielle Punkt, der sich zur Zeit t im Raumpunkte A befindet, während dieser Zeit t auf den Coordinatenaxen durchlaufen hat, so sind natürlich $\xi\ \eta\ \zeta$ Functionen von $x\ y\ z\ t$, und zwar ist offenbar:

$$u = \frac{d\xi}{dt} \qquad v = \frac{d\eta}{dt} \quad \text{und} \quad w = \frac{d\zeta}{dt}$$

Sind nun ferner $\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z\ \ \gamma_x\ \gamma_y\ \gamma_z$ die Ausdehnungen und Verschiebungen, welche den Deformationszustand des Körpers im Punkte A zur Zeit t bestimmen und welche mit $\xi\ \eta\ \zeta$ in der bekannten Beziehung stehen, so ist:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d^2\xi}{dt\,dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\xi}{dx}\right) = \frac{d\varepsilon_x}{dt}$$

ebenso $\frac{dv}{dy} = \frac{d\varepsilon_y}{dt}$ und $\frac{dw}{dz} = \frac{d\varepsilon_z}{dt}$

ferner: $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = \frac{d^2\eta}{dt\,dz} + \frac{d^2\zeta}{dt\,dy} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right) = \frac{d\gamma_x}{dt}$

ebenso: $\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = \frac{d\gamma_y}{dt}$ und $\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = \frac{d\gamma_z}{dt}$

Nach der Gleichung für dO_e ist somit:

$$dE = -\delta V\left[\sigma_x \frac{d\varepsilon_x}{dt} + \sigma_y \frac{d\varepsilon_y}{dt} + \sigma_z \frac{d\varepsilon_z}{dt} + \tau_x \frac{d\gamma_x}{dt} + \tau_y \frac{d\gamma_y}{dt} + \tau_z \frac{d\gamma_z}{dt}\right] dt.$$

Hiernach kann man also die Differentialgleichung der lebendigen Kraft des Massenelements auch schreiben:

$$dL = dM + dO + dE.$$

Durch Addition der entsprechenden Gleichungen für alle Massenelemente des Körpers erhält man dieselbe eben gefundene Gleichung, wenn aber nun:

dL = die Zunahme der lebendigen Kraft des ganzen Körpers

dM die Arbeitssumme aller Massenkräfte

und dO die Arbeitssumme aller Oberflächenkräfte und inneren Flächenkräfte

dE die Deformationsarbeit des ganzen Körpers für die unendlich kleine Zustandsänderung im Zeitelemente dt bedeutet. Dabei kann dO in verschiedene Theile zerlegt werden. Zunächst besteht die Arbeit der Oberflächenkräfte aus der Arbeit dP des äußeren Normaldrucks, welche positiv oder negativ sein kann, als dP, und aus der Arbeit der Reibung an der Oberfläche oder der äußeren Reibung, welche stets negativ ist und absolut genommen mit dR bezeichnet sei. Was die inneren Flächenkräfte betrifft, so sind sie zu je zwei entgegengesetzt gleich, und es ist deshalb ihre Arbeitssumme = 0, falls die Geschwindigkeitsänderungen im Körper überall continuirlich stattfinden. In Folge der entgegengesetzten inneren Flächenkräfte, womit 2 benachbarte Körperelemente auf einander wirken, wird dann das eine beschleunigt, das andere verzögert, indem die lebendige Kraft des einen um ebenso viel zunimmt wie die des andern abnimmt. Wenn aber discontinuirliche, plötzliche Geschwindigkeitsänderungen vorkommen, — so dass 2 benachbarte Massenelemente im Sinne der Normalen zu ihrer Berührungsfläche eine relative Geschwindigkeit von endlicher Größe besitzen und somit einen Stoß auf einander ausüben (wie solches bei festen und flüssigen Körpern vorkommen kann), sowie dass (bei Flüssigkeiten) ihre relative Geschwindigkeit längs der Berührungsfläche von endlicher Größe ist — so ist damit ein Verlust an lebendiger Kraft, eine negative Arbeitssumme der inneren Flächenkräfte verbunden. Wird letztere absolut genommen für die unendlich kleine Zustandsänderung des Körpers mit dS bezeichnet, so ist also nun:

$$dO = dP - dR - dS$$

und also die Gleichung der lebendigen Kraft des Körpers:

I. .... $$dL = dM + dP - dR - dS + dE$$

wenn die Deformationsarbeit dE allgemein bedeutet:

$$dE = -\int \delta V\left[\sigma_x \frac{d\varepsilon_x}{dt} + \sigma_y \frac{d\varepsilon_y}{dt} + \sigma_z \frac{d\varepsilon_z}{dt} + \tau_x \frac{d\gamma_x}{dt} + \tau_y \frac{d\gamma_y}{dt} + \tau_z \frac{d\gamma_z}{dt}\right] dt$$

Sind alle Tangentialspannungen = 0 und sind alle Normalspannungen im betreffenden Punkte gleich groß = σ, so wird natürlich:

$$dE = -\int \delta V\, \sigma \frac{d(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{dt}\, dt = -\int \delta V\, \sigma \frac{de}{dt}\, dt$$

oder wenn mit $d\delta V = \delta V \frac{de}{dt}\, dt$ die unendlich kleine Volumenänderung des Körperelements und mit $p = -\sigma$ der Druck bezeichnet wird:

$$dE = \int p\, d.\delta V$$

In diesem Falle soll die Deformationsarbeit mit Expansionsarbeit benannt werden, indem sie nur von den Volumenänderungen der Körperelemente abhängt; der absolute Werth einer negativen Expansionsarbeit soll eine Compressionsarbeit genannt werden.

Ist der Druck in allen Punkten des Körpers gleich groß, also = dem spec. äußeren Druck p, so wird, unter V das ganze Körpervolumen verstanden:

$$dE = p\, d\int \delta V = p.dV$$

Die Geschwindigkeitscomponenten nach den Richtungen der Coordinatenaxen, welche bisher mit u v w bezeichnet wurden, sollen in der Folge mit $u_x\ u_y\ u_z$ bezeichnet werden, die resultirende Geschwindigkeit mit u, so ist mit Rücksicht darauf die lebendige Kraft eines Körpers der Ausdruck fest:

$$L = \int \mu\, \delta V \frac{u^2}{2} = \int \gamma\, \delta V \frac{u^2}{2g}$$

während der Buchstabe v stets zur Bezeichnung des spec. Volumens gebraucht werden soll, welches in der Regel statt des spec. Gewichtes $\gamma = \frac{1}{v}$ u. der spec. Masse $\mu = \frac{\gamma}{g} = \frac{1}{gv}$ zur Charakterisirung des inneren Zustandes benutzt wird.

Wärme & Temperatur.

Dem Vorhergehenden zufolge findet im Allgemeinen eine gegenseitige Abhängigkeit statt zwischen den Änderungen des inneren und des äußeren Zustandes eines Körpers, indem die letztere im Allgemeinen mit einer Deformation des Körpers verbunden ist, wodurch Änderungen des spec. Volumens und der Spannungszustände in den verschiedenen Punkten desselben bedingt werden, ungleichförmig [illegible] sich ändert, sofern die Möglichkeit des Bestehens eines gewissen Gleichgewichts bei gegebenen Spannungszuständen an einen gewissen Zusammenhang der spec. Volumen, bei gegebenen spec. Volumen an gewisse Zusammenhänge der Spannungen gebunden sein kann. Es können indessen Änderungen des inneren Zustandes mit oder ohne gleichzeitige Deformationsarbeit des Körpers auch ohne Änderung des äußeren Zustandes (ohne Arbeit äußerer Kräfte) stattfinden, so dass sie als Wirkungen einer anderen Ursache erscheinen, als der Änderungen des äußeren oder Bewegungszustandes. So kann z. B. der Druck eines luftförmigen Körpers bei ungeändertem Volumen in hohem Grade veränderlich sein; eine Mischung von Eis und Wasser kann ganz in Wasser übergehen, so dass das Volumen während des Schmelzens des Eises abnehmend und später zunehmend, schließlich dem Anfangsvolumen wieder gleich ist. Bei Voraussetzung eines in allen Punkten gleichen Druckes ist in beiden Fällen die Deformationsarbeit = 0, desgl. kann jede der übrigen auf der rechten Seite der Gleichung für die lebendige Kraft Seite 28 vorkommenden Arbeiten = 0 sein; gleichwohl hat sich der innere Zustand geändert. In der Regel ist mit solcher Änderung eine Deformationsarbeit verbunden; wenn aber letztere, wie es häufig der Fall sein kann, geschieht, die Arbeit der äußeren Kräfte ohne Änderung der lebendigen Kraft verbraucht ist (z. B.: bei der Ausdehnung eines ruhenden Körpers, auf dessen Oberfläche der Atmosphärendruck wirkt), so kann man nur so mehr nach der Ursache fragen, welche hier zugleich d. Änderung d. inneren Zustandes und d. [illegible] zur Folge hat.

Diese Ursache heißt Wärme. Ist also Wärme d. Ursache solcher Änderungen d. inneren Zustandes eines Körpers, welche in Änderungen d. Aggregatform, d. spec. Volumens od. d. Spannungszustandes bestehen, sofern d. innere Zustand durch diese 3 Merkmale (Aggregatform, spec. Volumen und Spannungszustand) in den verschiedenen Punkten eines Körpers charakterisirt, also durch d. Wärme bedingt ist, soll er Wärmezustand heißen. Ein Körper von gleichförmigem Wärmezustande ist ein homogener Körper, dessen spec. Volumen und Spannungszustand in allen Punkten gleich sind.

Um d. Wärme als Größe d. Messung und Rechnung zugänglich zu machen, wird folgende Definition aufgestellt: Zwei Wärmen od. Wärmegrößen verhalten sich wie 1 : n, wenn d. Massen gleichartiger Körper von gleichförmigen und gleichen Wärmezuständen sich wie 1 : n verhalten, in denen sie gleiche Änderungen d. Wärmezustände hervorbringen. In Folge d. üblichen Auffassung vom Wesen d. Wärme als einer mit gewissen Eigenschaften ausgestatteten Materie ist statt Wärmegröße d. Bezeichnung Wärmemenge gebräuchlich geworden und geblieben. Die Wahl d. Wärmeeinheit knüpft an den Begriff d. Temperatur.

Man sagt: 2 Körper von gleichförmigen Wärmezuständen haben gleiche Temperatur, wenn bei Berührung in Folge ihrer gegenseitigen Berührung ihre Wärmezustände sich nicht ändern. Fände hierbei, d. Fehlen äußerer Wärmemittheilung vorausgesetzt, eine Änderung d. Wärmezustandes des einen Körpers mit einer entsprechenden d. anderen verbunden sein, so ist aus d. Veränderlichkeit des Wärmezustandes des einen Körpers auch auf d. des andern, somit auf d. Gleichheit d. Temperaturen kein Schluß gezogen werden kann. Beispielsweise: ein Körper hat d. Temperatur d. schmelzenden Eises od. des gefrierenden Wassers, wenn in Berührung mit einem Gemische von Eis und Wasser sein Wärmezustand sich nicht ändert.

Wenn 2 Körper sich nicht unmittelbar berühren, sondern durch feine Scheidewand getrennt sind, so kann d. Gleichheit ihrer Temperaturen mit Hülfe d. Grundsatzes beurtheilt werden, daß 2 Größen, welche einer dritten gleich sind, auch einander gleich sein müssen. Wenn z. B. d. Wärmezustand d. Quecksilbers eines in eine Flüssigkeit eingetauchten Quecksilberthermometers unter Ausschluß fremder Wärmemittheilung sich nicht ändert, d. h. wenn d. Volumen d. Quecksilbers bei ungeänderter Spannung constant bleibt, so gilt dasselbe von dem Glase und somit auch von d. Flüssigkeit, welche durch das Glas vom Quecksilber getrennt ist; es haben also Quecksilber und Glas, Glas und Flüssigkeit, folglich auch Quecksilber und Flüssigkeit gleiche Temperaturen.

Ist nun bei gleichförmigem Wärmezustande und bei normalem Atmosphärendruck, gemessen durch eine 0,76 m hohe Quecksilbersäule von d. Temperatur d. schmelzenden Eises:

V_0 d. Volumen einer gewissen Menge einer d. von ihren untergeordneten und zufälligen Bestandtheilen befreiten atmosphärischen Luft, bei d. Temperatur des unter normalem atmosphärischen Druck schmelzenden Eises,

V_n ihr Volumen bei d. Temperatur d. unter normalem Atmosphärendruck siedenden Wassers,

V ihr Volumen in irgend einem andern Wärmezustande, so wird als Maßzahl d. Temperatur oder kürzer als Temperatur d. Luft in diesem letzteren Zustande diejenige Zahl t definirt, welche d. Gleichung entspricht:

$$V = V_0 + \frac{V_n - V_0}{n}(t - t_0) = V_0\left[1 + \frac{V_n - V_0}{n V_0}(t - t_0)\right]$$

wonach $V = V_0$ für $t - t_0 = 0$ und $V = V_n$ für $t - t_0 = n$ ist. Dabei sind t_0 und n willkürlich zu wählende Zahlen, welche auch je nach d. angenommenen Temperaturskala verschieden gewählt werden, nach Celsius: $t_0 = 0$ und $n = 100$

nach Réaumur $t_0 = 0$ und $n = 80$

nach Fahrenheit $t_0 = 32$ und $n = 180$

Im Folgenden wird stets d. Celsius'sche, 100theilige Skala zu Grunde gelegt; so daß d. Temperatur d. unter

atmosphärischem Druck schmelzenden Eises = 0, die des unter normalem Atmosphärendruck siedenden Wassers = 100, d. h. = 0 Grad (0°) resp. = 100 Grad (100°) ist, indem ein Temperaturunterschied $\Delta t = 1$ ein Temperaturgrad genannt und mit 1° bezeichnet wird.

Aus dem somit festgestellten Begriffe d. Lufttemperatur für einen gewissen gleichförmigen Wärmezustand d. Luft und dem Gleichheitsbegriffe d. Temperaturen zweier Körper von gleichförmigen Wärmezuständen ergiebt sich sofort auch d. Definition d. Temperatur eines beliebigen Körpers von gleichförmigem, dann auch d. Temperatur in einem gewissen Punkte eines Körpers von im Allgemeinen ungleichförmigem Wärmezustande. D. praktische Messung d. Temperatur vermittelst eines sogenannten Thermometers beruht ferner auf dem Grundsatze von d. Gleichheit zweier Temperaturen, welche beide einer dritten gleich sind; d. Zuverlässigkeit irgend eines Thermometers als Luftthermometer beruht auf dessen Vergleichung mit d. Vorrichtung, welche zwischen seinen Angaben und denen eines idealen d. h. genau mit atmosphärischer Luft [illegible] bei normalem Atmosphärendruck unterhaltenen Luftthermometers stattfindet. Mit dem Begriffe d. Temperatur geht man über d. Wärmeschätzung [illegible] zu verbinden und demgemäß von hoher und niedriger, überhaupt von größerer und kleinerer Temperatur zu sprechen.

Als Wärmeeinheit od. Calorie wird jetzt diejenige Wärmemenge angenommen, wodurch d. Temperatur von 1 Kgr. reinen Wassers unter einem constanten, d. normalen Atmosphärendruck gleichen äußeren Druck von 0° auf 1° erhöht wird. Die Voraussetzung eines bestimmten äußeren Druckes ist freilich zwar unwesentlich, wenn auch nicht überflüssig) wegen d. sehr geringen Zusammendrückbarkeit d. Wassers; dagegen ist wesentlich, nicht nur ein bestimmtes Temperaturintervall, sondern auch eine bestimmte Anfangstemperatur bei dieser Definition d. Wärmeeinheit vorauszusetzen, weil d. zur Erhöhung d. Temperatur eines Kgr. Wassers von t° bis (t+1)° erforderliche Wärmemenge wesentlich von t abhängt.

Nachdem nun somit d. Temperatur als ein neuer Begriff in d. Betrachtungen eingeführt ist, der fernerhin besonders wichtig erscheinen wird, ist es nun zunächst nothwendig die Beziehungen zu bestimmen, in welchen d. Temperatur eines Körpers von gleicher Art und Aggregatform zu dem spec. Volumen und Spannungszustand steht. Dabei soll aber in d. Folge ein für alle Mal die einfache Voraussetzung zu Grunde gelegt werden, daß Tangentialspannungen ~~zu~~ nicht vorkommen, also nur Normalspannungen vorhanden sind, die dann bekanntlich für irgend einen Punkt für alle durch denselben gehenden Ebenen gleich groß sind, so daß durch diese Normalspannungen d. Spannungszustand d. Körpers in dem betreffenden Punkte vollkommen bestimmt ist. Durch diese Voraussetzung wird d. Allgemeingültigkeit d. zu entwickelnden Sätze in Bezug auf flüssige Körper im weiteren Sinne d. Wortes nicht beschränkt, und nur in Betreff fester Körper eine Beschränkung erleiden. Die Untersuchung wird aber wesentlich vereinfacht, indem dann d. Spannungszustand [illegible] durch eine einzige Größe statt im Allgemeinen 6 Größen, nämlich durch d. Normalspannung σ. Für diese Spannung σ soll jedoch im Folgenden ihr Entgegengesetztes, die Pressung $= -\sigma$ in d. Rechnung eingeführt werden, weil diese Pressung, wie schon früher bemerkt, in d. Regel positiv ist. Der Wärmezustand ~~eines~~ in irgend einem Punkte eines Körpers ist demnach bei gegebener Art und Aggregatform vollkommen bestimmt durch nur 2 Größen, nämlich durch d. spec. Volumen v und d. Pressung p, während ohne d. gemachte Voraussetzung hierzu 7 Größen, nämlich die den Spannungszustand charakterisirenden 6 Größen und d. spec. Volumen nöthig wären.

Im Folgenden soll mit t die Temperatur eines Körpers von gleichförmigem Wärmezustande resp. in einem Punkte eines Körpers von ungleichförmigem Wärmezustande bezeichnet werden; dient jedoch gleichzeitig t zur Bezeichnung d. Zeit, so soll d. betreffende Temperatur mit τ bezeichnet werden.

Ferner sollen, wenn nicht ausdrücklich andere Festsetzung getroffen werden, zum Maßstab d. in Betracht kommenden Größen als: Längen, Flächen, Volumina, Zeiten, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte, Arbeiten, Temperaturen und Wärmemengen, als Maßeinheiten zu Grunde gelegt werden: das meter, Kgr., Sekunde, Kgrm., 1° Celsius und 1 Wärmeeinheit = 1 Calorie.

Was nun d. zu entwickelnden Beziehungen betrifft, so kommt dabei folgender Erfahrungssatz sehr zu Statten:

Wenn irgend 2 Körper von gleicher Art sich in gleichförmigen und gleichen Wärmezuständen befinden, wenn sie also nach d. vorigen Definition, gleiche Aggregatform, gleiches spec. Volumen und gleiche Pressung haben, so haben sie erfahrungsmäßig auch dieselbe Temperatur d. h.: ihre Wärmezustände ändern sich nicht, wenn sie in Berührung gebracht werden, wobei freilich äußere Wärmeeinwirkungen ausgeschlossen sein müssen. Dieses Gesetz bestätigt sich mit nur sehr wenigen Ausnahmen, welche (wie besonders z. B.: bei Wasser) in dem Falle beobachtet werden können, daß d. Wärmezustand sich nahe d. Grenze befindet, welche d. Zustandsgebiete d. festen und flüssigen Aggregatform trennt. Z. B. kann man beobachten, daß 2 Wassermengen, welche gleiches spec. Volumen besitzen und sich unter gleichen Pressungen befinden, doch verschiedene Temperaturen haben können (die eine etwas größer als 4° und die andere etwas weniger als 4°).

Abgesehen von diesen wenigen Ausnahmen, läßt sich das obige Gesetz jedoch immer wieder beobachten.

Die Temperatur t eines Körpers von bestimmter Art ist also durch seinen Wärmezustand d. h. durch d. Aggregatform, dessen Volumen v und d. Pressung p im Allgemeinen bestimmt, es ist also t eine Function von v u. p, ~~wobei~~ deren Form und Coefficienten von d. Körperart und von d. Aggregatform d. Körpers abhängig sind; die natürlich d. Definition eines homogenen Körpers gemäß, für alle Elemente eines homogenen Körpers dieselbe ist, selbst wenn dieselben sich in verschiedenen Wärmezuständen befinden. Wenn nun zunächst ein homogener Körper vorausgesetzt wird, so soll diese factische Beziehungsgleichung, welche zwischen d. Elementen v p u. t stattfindet, d. Zustandsgleichung d. homogenen Körpers für d. betreffende Aggregatform genannt werden.

Den gegenwärtig zu Gebote stehenden Kenntnissen zufolge, hat man Grund anzunehmen, daß die Form dieser Zustandsgleichung (abgesehen von den Ausnahmen, welche gewisse Körper in d. Nähe d. Grenze zwischen 2 Aggregatformen zeigen) nur von d. Art d. Aggregatform und nicht von d. Körperart abhängig ist, daß vielmehr d. Körperart nur d. Coefficienten d. Zustandsgleichung bedingt. Es haben also dementsprechend verschiedenartige homogene Körper bei gleicher Aggregatform solche Zustandsgleichungen von d. nämlichen Form, worin d. Coefficienten nur entsprechend d. verschiedenen Körperarten verschieden sind. Wenn man also für d. Coefficienten allgemeine Buchstabengrößen einführt, so kann man auch kurzweg von d. Zustandsgleichung einer Aggregatform sprechen. So z. B. wird sich später zeigen daß: $pv = R(a+t)$ d. Zustandsgleichung von Gasen ist, worin freilich d. Coefficienten R u. a nach d. Art d. Gases bestimmt werden müssen.

Diese Zustandsgleichung einer Aggregatform kann, abgesehen von speculativen Untersuchungen in Betreff d. Molekularconstitution d. Materie, nur durch Induction aus einer großen Zahl zuverlässiger experimenteller Bestimmungen d. Größen v p t abgeleitet werden, wobei es ferner d. Fall sein kann, daß man sich vorläufig mit solchen Gleichungen behelfen muß, welche nur für einen gewissen Theil d. Veränderungsgebietes einer Aggregatform mit genügender Annäherung gelten, z. B.: für luftförmige Körper in d. Nähe desjenigen Grenzzustandes, welcher dem Übergange zur tropfbar flüssigen od. festen Aggregatform entspricht (Dämpfe) od. in d. Nähe d. entgegengesetzten Grenzzustandes (vollkommene Gase).

Durch d. factische Zustandsgleichung wird d. Temperatur t im Allgemeinen nur eindeutig bestimmt, in den erwähnten Ausnahmefällen jedoch 2deutig. Wenn z. B.: bei gewissen Werthen von v u. p d. Temperatur d. Wassers kleiner als 4° ist, so kann sie bei denselben Werthen von v u. p dennoch einen andern Werth größer als 4° haben, indem für t = 4° angenähert d. spec. Volumen bei gegebener Pressung ein Min. ist.

Im Allgemeinen ist d. Zustandsgleichung von solcher Art, daß:

wenn v constant ist p und t sich in gleichem Sinne gleichzeitig ändern
" p " " v " t " " " " "
" t " " v " p sich in entgegengesetztem Sinne gleichzeitig ändern.

Mit Hülfe dieser Zustandsgleichung kann natürlich jede d. 3 Größen v p t als Function d. beiden andern ausgedrückt werden. Der Wärmezustand eines homogenen Körpers von gegebener Art und gegebener Aggregatform kann deshalb auch nicht nur durch v und p sondern auch durch v u. t od. durch p und t, überhaupt durch irgend 2 Größen d. 3 Elemente v p t bestimmt werden.

In d. Heiztechnik und Technik ist d. gewöhnliche Messung am zweckmäßigsten und daher auch am meisten üblich geworden, d. Wärmezustand bei Flüssigkeiten in erster Linie durch p u. t zu charakterisiren, indem Pressung und Temperatur mit Hülfe d. bekannten Instrumente Manometer und Thermometer am leichtesten meßbar sind.

Bei diesen Betrachtungen wurde immer d. Begriff eines homogenen Körpers vorausgesetzt; bei den späteren Untersuchungen kommen jedoch auch nicht homogene Körper in Betracht, wenigstens Gemische von Körpern gleicher Art und verschiedener Aggregatform. Z. B. Gemische von Flüssigkeiten mit luftförmigen Körpern derselben Art (Wasser und Wasserdampf). Diese Gemische können nun bekanntlich entweder continuirlich od. discontinuirlich sein. Auch für solche Gemische kann von einer Zustandsgleichung d. Rede sein.

Was zunächst d. continuirliche Gemisch betrifft, so sei v d. spec. Volumen dieses Gemisches in einem bestimmten Punkte, also d. Volumen für 1 Kg. an dieser Stelle od. = dem Quotient aus dem Volumen d. den Punkt einschließenden Elementes durch d. Gewicht desselben. Da d. Definition eines continuirlichen Gemisches zufolge, dasselbe 2 Bestandtheile von gleicher Art aber verschiedener Aggregatform enthält, so sei w d. spec. Volumen des einen und w + Δ d. spec. Volumen d. andern Bestandtheils. Das Mischungsverhältniß sei ausgedrückt durch y d. h.: in einem Kg. d. Gemisches seien y Kg. d. 2ten Bestandtheils enthalten; es ist also 1 − y d. Gewichtsmenge d. ersten Bestandtheils pr. 1 Kg.

Unter diesen Umständen kann d. spec. Volumen v in einem Kg. d. Gemisches wie folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$v = (1-y)\,w + y\,(w+\Delta) = w + y\,\Delta.$$

In dieser Gleichung sind w und Δ jede für sich im Allgemeinen Functionen von p u. t, und somit auch d. spec. Volumen v eine Function von p u. t entsprechend den besondern Zustandsgleichungen welche den Aggregatformen d. beiden Bestandtheile entsprechen. Hier sind jedoch p u. t nicht unabhängig voneinander, sondern sind durch eine gewisse Beziehung ~~f~~ $f(pt) = 0$ mit einander verbunden, indem d. Wärmezustände d. beiden Bestandtheile nicht beliebige Zustände für d. betreffenden Aggregatformen, sondern Grenzzustände bezüglich auf den Übergang aus der einen in d. andere Aggregatform sind. Z. B. besteht bei gesättigtem Wasserdampf bekanntlich eine so genau untersuchte Beziehung zwischen Pressung und Temperatur, daß man aus d. gegebenen Pressung auch d. Temperatur genau mittelst Rechnung schließen kann. In der obigen Gleichung können demnach entweder w und Δ als Functionen von p od. als Functionen von t betrachtet werden, und würde die Gleichung selbst als d. Beziehung zwischen v p y od. als Beziehung zwischen v t y anzusehen sein. Diese Gleichung soll in dem vorliegenden Falle die Zustandsgleichung eines solchen continuirlichen ~~Gem~~ Gemisches genannt werden. Sind irgend zwei d. 4 Größen v p t y gegeben ausgenommen p u. t, welche schon durch d. Beziehung $f(pt) = 0$ von einander abhängen, so sind durch d. Zustandsgleichung und d. Beziehung $f(p.t) = 0$ auch natürlich d. beiden andern bestimmt.

Was endlich d. discontinuirliche Gemisch betrifft d. h. eine einfache Zusammenlegung d. beiden gleichen Körperarten von verschiedenen Aggregatformen, so kommen diese nur in Betracht unter d. Voraussetzung daß p u. t in allen Punkten dieselben Werthe haben, widrigenfalls d. Zustandsänderungen d. beiden Bestandtheile verschiedener Aggregatform einzeln für sich untersucht werden müßten. Es bedeutet jetzt v d. mittlere spec. Volumen d. discontinuirlichen Gemisches und y d. Mischungsverhältniß d. ganzen Volumens d. h. y ist d. Gewichtsmenge d. 2ten Bestandtheils pr. 1 Kg. d. ganzen Körpers. w und Δ haben dieselben Bedeutungen. Es ist dann auch wieder: $v = w + y\Delta$ etc.

Sollen also in beiden Fällen eines homogenen Körpers und eines Gemisches d. Wärmezustand durch d. nämlichen beiden Größen als unabhängig Veränderliche charakterisirt werden, so können diese entweder v u. p od. v u. t sein. Im Folgenden wird allgemein v u. p als unabhängige Variable den Entwicklungen zu Grunde gelegt, indem dadurch bekanntlich d. Ergebnisse sich am übersichtlichsten ausdrücken läßt. Bei d. Anwendung auf einzelne bestimmte Fälle kann man natürlich auch d. andern beiden Größen v u. t als unabhängig Variable zur Charakterisirung d. Wärmezustandes wählen.

die nunmehr in d. Betrachtung hineinzuziehenden neuen Begriffe von Wärme und Temperatur, haben wir zunächst Betrachtung d. Vorgänge bei d. Uebertragung d. Wärme von einem Körper zum andern näher zu untersuchen. Dieselben liefern nämlich die uns immer noch ungestellte 5. Differentialgleichung, welche man zur vollständigen Lösung eines inneren Zustandes eines Körpers nöthig hatte, indem die 4 Differentialgleichungen aus den mechanischen Bewegungen abgeleitet werden konnten, diese 4 Gleichungen aber 5 Unbekannte enthalten. Diese 5. Differentialgleichung od. diese Beziehung hängt nur ab von den neu eingeführten Begriffen von Wärme und Temperatur und ebenso auch von den Uebertragungen d. Wärme von einem zum andern Körper od. von verschiedenen Theilen eines und desselben Körpers.

Wärmemittheilung durch Berührung.

Werden 2 Körper von verschiedenen Temperaturen mit einander in Berührung gebracht, so nimmt erfahrungsmäßig d. Temperatur des einen immer zu und die des andern Körpers immer ab bis schließlich d. Temperaturdifferenz = 0 geworden ist. Man sagt dann, es geht Wärme von dem Körper höherer Temperatur zu dem Körper niederer Temperatur über, od. auch es gehe diese Wärme selbst von höherer zu niederer Temperatur über. Diesen Vorgang nennt man Wärmeleitung; also ist dabei hierunter ein gewisser Bewegungszustand d. Wärme zu verstehen, welche von einem Körper zum andern, oder auch in dem Körper selbst vorgestellt findet. Es sei nun K d. Körper von ursprünglich höherer Temperatur und K_1 d. Körper von ursprünglich niederer Temperatur, welche beide sich in einer Fläche F berühren. Sobald d. beiden Körper in Berührung gebracht werden, so tritt offenbar in K eine Wärmeleitung nach F hin und dem Körper hinein und in K_1 eine Wärmeleitung von F weg in den Körper hinein ein. Bei diesem Versuch werden d. Temperaturen in den verschiedenen Theilen d. Körper auch verschieden sein, nämlich offenbar entsprechend einer Temperaturabnahme im Körper K gegen F hin und in K_1 eine Temperaturabnahme von F weg. Denkt man sich nun einen solchen Körper in irgend einem Augenblick durch ein System von Flächen geschnitten, so daß die einzelnen Flächen durch Punkte gleicher Temperatur gehen, daß also d. augenblickliche Temperatur in allen Punkten einer solchen Fläche gleich groß ist und ist ferner in je 2 benachbarten Flächen um einen bestimmten gleich großen Betrag verschieden ist, so liegen diese Flächen unter sonst gleichen Umständen um so weiter auseinander je größer d. Leitungsfähigkeit d. Körpers für d. Wärme ist, einen um so größern Betrag also d. Wärmeleitung im Zeitelement dt zurücklegt. Diese Wärmeleitungsfähigkeit kann im Allgemeinen sowohl in verschiedenen Punkten d. Körpers als auch in demselben Punkt nach verschiedenen Richtungen verschieden sein; ~~diese~~ sie wird gemessen durch den sogenannten Wärmeleitungscoefficienten, welcher durch d. folgende Definition bestimmt ist:

Angenommen A sei ein Punkt eines Körpers, in welchem zur Zeit t d. Temperatur τ herrscht; von A aus sei eine beliebige Richtung AX gezogen und durch A senkrecht zu AX eine Ebene gelegt. dσ sei ein unendl. kl. Flächenelement dieser Ebene, welches d. Punkt A einschließt. Auf AX sei ein anderer Punkt A_1 angenommen, welcher um d. unendl. kl. Strecke dx von A entfernt. Nehmen wir an, daß sich nun d. Temperatur in d. Richtung AX stetig ändert, wird zur selben Zeit t in A_1 d. Temperatur $\tau + \frac{d\tau}{dx}dx$ sein. Infolge d. Wärmeleitung, welche im Körper stattfindet, geht während d. Zeitelements dt in d. Richtung AX eine unendl. kl. Wärmemenge dQ durch d. Flächenelement dσ (senkrecht zu AX) hindurch, oder einen negativen Werth, wenn sie entgegengesetzt Richtung XA entgegen wird. Bestimmt man d. folgende Gleichung an:

$$dQ = \div k\,d\sigma\,\frac{d\tau}{dx}\,dt$$

so versteht man unter k den Wärme~~mittheilungs~~leitungscoefficienten im Punkte A d. Körpers nach d. Richtung AX.

Die durchgeleitete Wärmemenge dQ wird offenbar um so größer, je schneller d. Temperatur von A aus nach AX hin abnimmt, je größer also d. Absolutwerth von $\frac{d\tau}{dx}$ ist.

Dividirt man d. obige Gleichung durch dσ dt, so bekommt man:

$$\frac{dQ}{d\sigma\,dt} = \div k\,\frac{d\tau}{dx}$$

D. Ausdruck auf d. linken Seite ist offenbar d. per Flächeneinheit und Zeiteinheit durchgeleitete Wärmemenge d. h. d. Wärmemenge, welche per Flächeneinheit in d. Zeiteinheit hindurchgehen würde, wenn d. Umstände gleich bleiben würden. Den Ausdruck auf d. rechten Seite kann man also gewissermaßen betrachten als d. Geschwindigkeit d. Wärmeleitung im Punkte A nach d. Richtung AX.

Wie schon erwähnt kann d. Wärmeleitungscoefficient k in verschiedenen Punkten und in denselben Punkte nach verschiedenen Richtungen im Allgemeinen verschieden sein. Ist d. Körper homogen so kann k in d. Regel in allen Punkten gleich angenommen werden, ist er zugleich isotrop, so ist auch k nach allen Richtungen hin constant. In d. Folge wird k immer als unabhängig von d. Richtung angenommen werden, was bei d. Wärmeleitung in Flüssigkeiten auch angenommen ist, während es bei festen Körpern (namentlich krystallisirten) nach verschiedenen Richtungen sehr verschieden sein kann. Immerhin ist k jedoch auch bei Flüssigkeiten als abhängig vom Wärmezustande zu betrachten, indem d. Wärmeleitung durch d. Elemente bedingt, welcher d. Wärmezustand charakterisirt wird, nämlich durch v u. p. Da diese aber von Punkt zu Punkt verschieden sein können auch bei homogenen Körpern, so ist d. Leitungscoefficient k streng genommen auch bei homogenen Körpern im Allgemeinen in jedem Punkte verschieden.

Es seien nun x y z d. Coordinaten d. Punktes A, auf welchen sich d. Wärmeleitungscoefficient k bezieht, und x + dx y + dy z + dz seien d. Coordinaten eines unendlich nahe benachbarten Punktes A_1. Diese beiden unendl. nahe zusammenliegenden Punkte A und A_1 seien als d. gegenüberliegenden Eckpunkte eines unendl. kl. rechtwinkligen Parallelepipedums gedacht, dessen Kantenlängen also dx dy dz sind. τ sei die Temperatur im Punkte A zur Zeit t und also bei Vernachlässigung unendl. kl. Größen höherer Ordnung auch τ d. Temperatur d. ganzen parallelepipedischen Elements zur Zeit t. Um nun d. resultirende Wärmemenge dQ zu bekommen, welche d. Raumelement während d. unendl. kl. Zeitraum dt durch Leitung mitgetheilt wird, dient man folgende Betrachtung:

Durch jede d. 6 Seitenebenen d. parallelepipedischen Elementes ~~wird~~ findet eine Wärmeleitung von dem umgebenden Medium statt. Betrachtet man zunächst diejenige Ebene, welche durch A gehend senkrecht zur x Axe steht, deren Inhalt also dy dz ist, so ist nach dem Vorhergehenden d. Wärmemenge, welche im Zeitelemente dt durch diese Ebene dy dz in d. Richtung d. x Axe dem Elemente dx dy dz = dV mitgetheilt wird. =

$$\div k\,dy\,dz\,\frac{d\tau}{dx}\,dt$$

und zwar bewirkt diese Wärmemenge offenbar eine Zunahme d. Temperatur d. Elements, weil sie im positiven Sinne d. x Axe einströmt. Die Wärmemenge nun, welche durch die gegenüberliegende Ebene durch A_1 gehend, im Zeitelement dt im Sinne d. negativen x Axe dem Elemente mitgetheilt wird, findet man offenbar, wenn man in d. oben gefundenen nur ihr Differential nach x vergrößert, weil man um dx im Sinne d. x Axe fortschreiten muß um von einer Ebene zur andern zu kommen. Es ist also diese Wärmemenge:

$$= k\,dy\,dz\left(\frac{d\tau}{dx} + \frac{d^2\tau}{dx^2}dx\right)dt.$$

und also d. Zuwachs an Wärmemenge, welche dem parallelepipedischen Elemente im Zeitelemente dt im Sinne d. x Axe mitgetheilt wird durch die beiden zur x Axe senkrechten Seitenebenen:

$$= k\,dy\,dz\left[\div\frac{d\tau}{dx} + \left(\frac{d\tau}{dx} + \frac{d^2\tau}{dx^2}dx\right)\right]dt.$$

Analog ist d. Zuwachs an Wärmemenge, welche dem Elemente dV im Zeitelemente dt im Sinne d. y und z Axe mitgetheilt wird:

$$= k\,dx\,dz\left[\div\frac{d\tau}{dy} + \left(\frac{d\tau}{dy} + \frac{d^2\tau}{dy^2}dy\right)\right]dt$$

und $$= k\,dx\,dy\left[\div\frac{d\tau}{dz} + \left(\frac{d\tau}{dz} + \frac{d^2\tau}{dz^2}dz\right)\right]dt.$$

die Summe dieser 3 Ausdrücke gibt demgemäß diejenige resultierende Wärmemenge dθ, welche dem parallelepipedischen Körperelement im Zeitelement dt durch Leitung mitgetheilt wird. Dabei ist nun k vorausgesetzt, entsprechend d. Voraussetzung, daß d. Wärmeleitungscoefficient von d. Richtung unabhängig sei und derselbe sich nicht von Punkt zu Punkt ändere.
Berücksichtigt man dann noch daß dx.dy.dz = dV, so bekommt man als d. Gleichung:

$$d\theta = k\,dV\left[\frac{d^2\tau}{dx^2}+\frac{d^2\tau}{dy^2}+\frac{d^2\tau}{dz^2}\right]dt.$$

Diese Gleichung kann man auffassen zur Herleitung d. nachfolgenden [illegible] Differentialgleichung dienen. Bevor aber diese Anwendung geschaffen werden soll, sind noch hinsichtlich d. Wärmeleitung einige ergänzende Mittheilungen zu machen.

Zunächst muß noch hervorgehoben werden, daß im Innern eines homogenen Körpers oder auch eines continuirlichen Gemisches die Temperatur eine continuirliche Function d. Coordinaten ebenso wie d. spec. Volumen und d. Pressung im Falle d. homogenen Körpers resp. d. spec. Volumen und d. Mischungsverhältniß im Falle d. continuirlichen Gemisches, mit welchen sie durch d. Zustandsgleichung verbunden ist. Dasselbe gilt auch für den Fall eines discontinuirlichen Gemisches, sofern die einzelnen Bestandtheile homogen sind und an ihren Berührungsflächen sich im Grenzzustande zwischen 2 Aggregatformen befinden. In je 2 Punkten eines gleichartigen Körpers, welche einander unendlich nahe liegen, sind also d. Werthe von t stets nur unendlich verschieden von einander.
Anders verhält es sich aber bei 2 verschiedenartigen, sich berührenden Körpern; wenn nämlich von den beiden Körpern K und K₁, die verschiedener Art sein sollen und sich in d. Fläche F berühren, K eine höhere Temperatur als K₁ hat, so daß eine Wärmeübertragung von K auf K₁ stattfindet, so ändert sich zwar d. Temperatur innerhalb d. Körpers K continuirlich abnehmend gegen F und ebenso continuirlich zunehmend gegen F im Körper K₁. In d. an d. Berührungsfläche F angrenzenden unendlich dünnen Oberflächenschichten d. beiden Körper K und K₁ können aber infolge d. Wärmeübertragung von K auf K₁ die Temperaturen um eine endliche Größe verschieden sein. Ist dF ein Element d. Berührungsfläche F der Körper K und K₁ und Δt d. endliche Temperaturunterschied, um den d. in d. Oberflächenschicht von K herrschende Temperatur größer ist als diejenige in d. an F angrenzenden Oberflächenschicht von K₁, und ferner dθ d. Wärmemenge, welche im Zeitelement dt von K zu K₁ übergeht, so kann man jetzt d. Gleichung für d. Geschwindigkeit d. Wärmeübertragung schreiben:

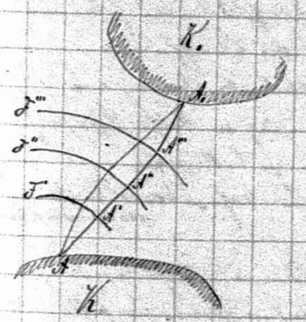
$$\frac{d\theta}{dF\cdot dt} = k_1\cdot\Delta t$$; hierin bedeutet nun k_1 d. Wärmeübergangscoefficient an d. Stelle d. Elements dF d. Berührungsfläche,

welche in diesem Falle wesentlich von d. chemischen Beschaffenheit d. beiden sich berührenden Körper abhängig ist. Ebenso wie an d. Berührungsfläche zweier verschiedener Körper kann auch im Innern eines nicht homogenen Körpers, nämlich an d. Grenze zwischen Bestandtheilen von verschiedener Art d. Temperatur sich discontinuirlich von einem Punkte zum andern ändern. Wie verhält sich in dieser Hinsicht gegenüber d. Pressung, welche bekanntlich sich immer nur continuirlich ändert sowohl im Innern eines homogenen Körpers als auch an den Berührungsflächen zweier sich berührender Körper. Ein endlicher Pressungsunterschied könnte nur dann in d. Berührungsfläche d. beiden sich berührenden Körper stattfinden, wenn d. ab [illegible] vollkommen starre Körper wäre. Daß d. Temperaturänderung so verschieden ist von dem Verhalten d. Pressung von einem Punkte zum andern, ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, daß d. Pressung nur abhängig von d. Dichte d. Körper ist und nicht von d. chemischen Beschaffenheit ihrer Oberflächen, dagegen d. Temperatur wesentlich bedingt ist von d. chemischen Beschaffenheit d. Berührungsflächen und d. Intensität d. Berührung. Übrigens muß bemerkt werden, daß d. Wärmeleitung im Innern einer Flüssigkeit oder in einem Gemische von festen und flüssigen Bestandtheilen die Wärmeleitung wesentlich beeinflußt werden kann durch starke Mischungsbewegungen, welche letztere einigermaßen veranlaßt werden können. Ehe dann die ganze Mischung dieselbe Temperatur in allen Punkten angenommen hat, kann eine längere Zeit vergehen, so daß

d. Wärmeleitungscoefficient k sehr groß erscheint. Wenn insbesondere einer homogenen Flüssigkeit in welcher Weise Wärme von unten her mitgetheilt oder von oben her entzogen wird, so kann durch d. Änderung d. spec. Gewichts eine so lebhafte Mischungsbewegung in d. Flüssigkeit veranlaßt werden, daß d. Temperatur in demselben Augenblicke in je 2 Punkten nur ungemein wenig verschieden, d. Wärmeleitungscoefficient k also ungemein groß ist. Ebenso kann k bei einem discontinuirlichen Gemische von 2 heterogenen Bestandtheilen verschiedener Aggregatform, wo die Grenze dieser Bestandtheile unendlich groß, im Innern d. flüssigen Theile in Folge d. Mischungsbewegungen wenigstens ungemein groß sein. Nur bei homogenen festen Körpern hat k unter allen Umständen einen endlichen Werth.
Bei d. Anwendung auf eine Flüssigkeit muß noch besonders hervorgehoben werden, daß dV in d. Gleichung für dθ nur das Volumen eines festen Körperelements bedeutet, von welchem vorausgesetzt wird, daß es keinerlei Mischung mit Flüssigkeit von anderer Temperatur während d. Zeitelements dt erfährt. Es läßt sich in manchen concreten Wärmeübertragungen nicht ergründen, bemißt man aber den Verhältnissen entsprechende Annahmen zu Grunde legen. Die Gleichung für dθ hat daher auch dann nur einen theoretischen Werth und kann nur als Ausgangspunkt dienen, als man vielfach dem Wärmeleitungscoefficienten k einen solchen Werth beilegen, welcher nicht nur d. Wärmeleitungsvorgängen, sondern auch dem besonderen Charakter d. Flüssigkeit entsprechen und sich anschließen würde.

Wärmemittheilung durch Strahlung.

Außer durch Wärmeleitung kann d. Wärmeübertragung von einem zum anderen Körper auch noch auf anderem Wege vor sich gehen:
Erfahrungsmäßig können bekanntlich 2 nicht in Berührung befindliche Körper, wenn sie nur in dem betreffenden Medium sind, gegenseitig Wärme mittheilen ohne daß das Medium selbst in seiner Temperatur eine Änderung erfährt. Solche Wärmeübertragung nennt man bekanntlich Wärmestrahlung. Dieselbe ist auch ganz analogen Gesetzen unterworfen wie d. Lichtstrahlen und man erhält sich daher, analog d. Wellen von Lichtstrahlen, die folgende Vorstellung von d. Wärmestrahlung.



Es seien K und K₁ die Wärme austauschenden Körper und A irgend ein Punkt d. Oberfläche vom Körper K; die von diesem Punkte ausgestrahlte Wärme verbreitet sich im Zeitelement dt bis zu verschiedenen Punkten einer gewissen Fläche F′. Nun kann man diese verschiedenen Punkte d. Fläche F′ wieder als Centren ansehen, von wo aus sich d. Wärmestrahlen weiter verbreiten. Diese Wärmestrahlen erstrecken sich im 2ten Zeitelement dt bis zu gewissen Flächen f″, welche alle eine gemeinschaftliche Umhüllungsfläche F″ haben. Alle Punkte d. Umhüllungsfläche F″ dieser Flächen f″ können ebenfalls als neue Centren betrachtet werden, von denen aus sich im folgenden dritten Zeitelement dt die Wärmeausstrahlung bis zu gewissen Flächen f‴ mit d. gemeinschaftlichen Umhüllungsfläche F‴ erstreckt u. s. f. Diese verschiedenen successiven Umhüllungsflächen F′ F″ F‴ etc. heißen d. vom Punkte A ausgehenden Wärmewellenflächen und jede von A ausgehende Linie, welche alle diese Wärmewellenflächen normal durchschneidet, heißt ein von A ausgehender Wärmestrahl z. B. AA₁. Die Wärmestrahlen können im Allgemeinen krumme Linien oder stellenweise gebrochene Linien sein, da dieselben durch eine discontinuirliche Beschaffenheit d. Mediums abgelenkt und reflectirt werden können. Z. B. Ist das Medium durchweg Luft, so wird d. Wärmestrahl gebrochen, wenn er auf seinem Wege eine Glaslinse vorfindet. Hierbei sind zunächst Wärmestrahlen einerlei Art vorausgesetzt; man unterscheidet jedoch bekanntlich, entsprechend wie d. Lichtstrahlen in Strahlen von verschiedenen Farben unterschieden werden, die Wärmestrahlen hinsichtlich ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit in demselben Medium. Dieser von A ausgehende den Körper K₁ in A₁ treffende Strahl kann offenbar auch definirt werden als derjenige Weg, auf welchem d. gestrahlte Wärme von A ausgehend den Punkt A₁ in d. kürzesten denkbaren Zeit erreicht. Es kann natürlich auch noch auf anderem Wege Wärme ~~[illegible]~~ dem Körper K₁ von A mitgetheilt werden, entsprechend d. Definition eines Wärmestrahls, stehen aber alle Elemente d. Wärmestrahls AA₁ senkrecht zu den Wärmewellenflächen. Er bildet von A₁ beliebig und so so kann es offenbar nicht gleichzeitig unsern andern Linie geben, welche senkrecht zu den Wärmeleitungsflächen steht und auch den Punkt A, erreicht wie A ist. Es ist also d. oben ausgesprochene Gesetz auch allgemein giltig.

Diese Auffassung leitet nun auch eine elementare Untersuchung zu.

Bei jeder Wärmestrahlung zwischen 2 sich nicht berührenden Körpern strahlen gegenseitig, indem der eine dem andern und dieser wieder dem ersten Wärmestrahlen zusendet. Die Wärmemenge welche man zunächst als Ersatz d. Unterschied, welche dem einen Körper mehr mitgetheilt wird als er ausgiebt. Die Wärmemengen, welche 2 solche Körper in einem bestimmten Zeitraum zustrahlen, ist begreiflicherweise abhängig von d. Beschaffenheit d. Oberflächenschichten, von den Temperaturen d. Oberflächenschichten und von der Beschaffenheit und Durchlässigkeit d. Mediums. Es frägt sich nun ob dieselben Beziehungen, welche früher für d. Wärmeleitung hinsichtlich d. Temperaturgleichgewichts für 2 sich berührende Körper galten, auch anzuwenden sind auf d. den Temperaturgleichgewichtszustand 2 sich nicht berührender Körper, die sich gegenseitig durch Strahlung Wärme mittheilen. 2 Körper die sich berühren, befinden sich bekanntlich im Gleichgewichtszustand d. Temperatur, wenn d. Temperaturen ihrer Oberflächenschichten an d. Berührungsfläche gleich groß sind, entsprechend d. Definition d. Gleichheit 2 Temperaturen, dabei war d. Beschaffenheit d. Oberflächenschichten und d. Mediums ganz nebensächlich. Es frägt sich nun ob auch 2 Körper K und K, im Temperaturgleichgewicht sich befinden hinsichtlich d. Wärmestrahlung, wenn ihre Oberflächenschichten gleiche Temperaturen haben unabhängig von d. Beschaffenheit d. Oberflächenschichten und d. Mediums, d. h. ob d. eine Körper unter diesen Voraussetzungen von dem andern Körper in derselben Zeit ebensoviel Wärme empfängt als er an diesen ausstrahlt. Dies läßt sich jedoch nicht ohne Weiteres behaupten, indem d. Definition d. Gleichheit zweier Temperaturen gerade bezüglich Wärmeleitung durch Berührung vorausgesetzt. Um also dieses zu behaupten müßte man diese Definition entsprechend erweitern, was jedoch nicht ohne Willkür geschehen kann. Auch auf experimentellem Wege kann man nicht leicht eine Feststellung d. Bedingungen, unter denen d. Temperaturgleichgewicht durch Strahlung stattfindet, erlangen, indem d. Mannigfaltigkeit d. Fehlerquellen und Ursachen zu falschen Resultaten eine zu große ist. Als erfahrungsmäßig constatirt ist es jedoch zu betrachten, daß in d. That Temperaturgleichgewicht stattfindet, wenn d. Oberflächenschichten d. beiden Körper gleiche Temperaturen und gleiche Beschaffenheiten haben und d. Medium constant dasselbe bleibt. Um aber für alle möglichen anderen Fälle die betreffenden Beziehungen zu erkennen müßte man unzählige Versuche anstellen, deren Resultate aber dennoch sehr wenig zweifelhaft sind. Es erscheint deshalb eine mathematische Untersuchung in dieser Beziehung ~~von~~ von einem um so größeren Interesse, als d. einzige Mittel diese Beziehungen zu bekommen. Diese mathematische Untersuchung wurde von Clausius ausgeführt. (Siehe: Grashof. Theoretische Maschinenlehre) Dieselbe fand folgendes:

Wenn es allgemein wahr sein soll, daß d. Temperaturgleichgewicht zweier sich Wärme mittheilender Körper durch die Gleichheit ihrer Oberflächentemperaturen charakterisirt ist, nämlich nicht nur im Falle d. Wärmemittheilung durch Berührung, wofür diese Gleichheit durch Definition stattfindet, sondern auch im Falle d. Wärmestrahlung, so daß also auch niemals von selbst ein überschüssiger Wärmeübergang von einem kälteren in einen wärmeren Körper stattfinden kann, so muß man annehmen, daß d. specifischen Wärmeemissionen vollkommen schwarzer Körper von gleichen Oberflächentemperaturen dem Quadrate d. Fortpflanzungsgeschwindigkeiten d. Strahlen in den angrenzenden Mitteln umgekehrt proportional sind, wobei es keinen Unterschied macht, ob d. Strahlen durch Brechungen od. Reflexionen in beliebiger Weise concentrirt werden od. nicht. Hinsichtlich eines schwarzen Körpers ist folgendes zu bemerken: Wenn irgend einem Körper von Außen Wärme mitgetheilt wird, so wird im Allgemeinen ein Theil derselben von d. Oberfläche d. Körpers reflectirt, ein Theil durch die Oberflächenschicht hindurchgelassen und ein dritter Theil endlich wird von d. Oberflächenschicht zurückgehalten od. absorbirt. Unter einem schwarzen Körper versteht man nun einen solchen, bei welchem die ersten beiden Factoren nicht vorkommen, bei welchem also d. Oberflächenschicht d. ganze Wärmemenge absorbirt. Unter Absorptionscoefficienten eines Körpers versteht man d. Verhältniss d. von einem Körper absorbirten Wärmetheils zu dem überhaupt zugestrahlten Wärmequantum; man kann daher auch

Körper einen schwarzen Körper als ein solchen definiren, dessen Absorptionscoefficient = 1 ist. Bei weitem d. ganze Wärmeemission verläuft, so ist dieselbe für ein Punkt A d. Oberfläche eines Körpers diejenige Wärmemenge, welche per Flächeneinheit und per Zeiteinheit an diesem Punkte ausgestrahlt wird. Diese hängt im Allgemeinen von d. Beschaffenheit d. Oberflächenschichten beider Körper, von den Temperaturen derselben und von d. Beschaffenheit d. Mediums ab. Bezüglich d. ersten Umstandes setzt man einen Coefficienten ein und erhält unter diesen Wärmeemissionscoefficienten d. Verhältniss d. ganzen Wärmeemission eines beliebigen Körpers zu d. ganzen Wärmeemission eines vollkommen schwarzen Körpers bei gleichen Umständen, d. Emissionscoefficient für einen schwarzen Körper ist also auch = 1. Aus den obigen Umständen geht dann auch ferner hervor, daß d. Emissions- und Absorptionscoefficienten verschiedener Körper auch ein ganz constantes Verhältniss zu einander haben

Aequivalenz von Wärme & Arbeit. Wärmegleichung & Gleichung d. Arbeitsvermögens.

Nach zuverlässigen Erfahrungen wird durch Aufwendung von Arbeit Wärme gewonnen aber auch umgekehrt durch Aufwendung von Wärme Arbeit od. lebendige Kraft gewonnen. Als Beispiele d. ersten Art kann man anführen d. Erzeugung von Wärme durch Reibung, durch Compression von Gasen etc. wozu natürlich Arbeit erforderlich ist; als Beispiel d. II Art sind überhaupt d. calorischen Maschinen anzuführen, vermittelst welcher Arbeit unter Aufwand von Wärme gewonnen wird. Nach den bisherigen wurden d. Kräfte als d. Ursachen d. Änderungen d. äußeren Zustandes eines Körpers definirt. wenn man nun aber, wie oben bemerkt, sieht, daß d. Wärme ganz dieselbe Wirkung haben kann, so müssen Wärme und Arbeit offenbar gleichartige Größen sein. Ferner wurde d. Wärme als eine d. Ursachen d. Änderungen d. inneren Zustandes definirt, nach obigen Erfahrungen können aber Kräfte und Arbeiten ganz dieselben Wirkungen zeigen, woraus wieder ersichtlich, daß beide Größen gegenseitig vertreten können. Thatsächlich ist also gewonnene Wärme in Arbeit verwandelt indem man findet, daß d. lebendige Kraft eines Körpers durch Wärme vergrößert wird. Wärme und Arbeit sind also vergleichbare Größen. Diese Begriffsbestimmung setzt ein Maßverhältniss voraus, dessen Zahlenwerth nur von den Einheiten abhängt, durch welche d. Größen gemessen werden. In d. That lehrt d. Erfahrung, daß wenn man durch Aufwendung von Arbeit den Wärmezustand verändert, und d. aufgewendete od. verbrauchte Arbeit mit d. Wärmemenge vergleichen wird, welche d. Körper zur Bewirkung derselben Änderung d. Wärmezustandes hätte mitgetheilt werden müssen, od. wenn ~~oder~~ umgekehrt durch Änderung d. Wärmezustandes Arbeit verrichtet wird und d. verrichtete od. gewonnene Arbeit mit d. Wärmemenge vergleichen wird, welche dem Körper zur Bewirkung derselben Änderung hätte entzogen werden müssen, daß dann jene Arbeit dieser Wärme stets in demselben Verhältniss 1 : A proportional ist. Die Wärmemenge A, welche d. Arbeitseinheit entspricht nennt man den Wärmewerth d. Arbeitseinheit od. das calorische Arbeitsäquivalent. Die Arbeit $\frac{1}{A} = W$, welche d. Wärmemenge = 1 entspricht, heißt d. Arbeitswerth d. Wärmeeinheit od. das mechanische Wärmeäquivalent. Die Zahlenwerthe von A und W sind am zuverlässigsten durch Reibungsversuche zu ermitteln. Nimmt man bei d. Messung von Arbeiten 1 kgmeter und bei d. Messung von Wärme 1 Calorie zu Grunde, so hat man gefunden:

$$\frac{1}{A} = W = 424 \text{ kgm.}$$

$$\text{also } A = \frac{1}{W} = \frac{1}{424} \text{ Calor.} —$$

Diesen vorstehenden Bemerkungen zufolge hat irgend ein Körper in Folge seines augenblicklichen Zustandes aus einem doppelten Grunde d. Vermögen, Arbeit zu verrichten: einmal in Folge seines äußeren od. Bewegungszustandes und andererseits in Folge seines Wärmezustandes. Das Arbeitsvermögen, welches dem ersten Grunde entspricht, ist bekannt als L d. lebendigen Kraft L und sie bezeichnet mit d. äußeren Arbeitsvermögen; das dem ~~Wärme~~ Wärmezustand entsprechende Arbeitsvermögen heiße d. innere Arbeitsvermögen und sei mit U bezeichnet, so ist das Gesammtarbeitsvermögen d. augenblicklichen Zustandes also L + U. Der Wärmewerth d. inneren Arbeitsvermögens ... = AU sei d. Körperwärme genannt. Was nun den Ausdruck d. ersten Arbeitsvermögens betrifft, also L, so läßt dieses sich absolut durch Vergleichung d. Bewegungszustandes und d. Masse ausdrücken. Diese Unmöglichkeit ist aber ... bei U; es läßt sich kein Wärmezustand angeben, welcher einer weiteren Änderung durch Wärmeentziehung nicht mehr fähig wäre und für welchen also d. Körperwärme resp. d. inneres Arbeitsvermögen = 0 wäre. Man kann also 2 verschiedene Wärmezustände mit einander vergleichen und sagen in einem Zustand ist d. Wärmemenge um so und so viel größer wie in dem andern; aber wenn man d. Arbeitsvermögen angeben will, so werden unvermeidlich, nicht zu bestimmende Constanten in d. Rechnung einzuführen sein.

Nach diesen Auseinandersetzungen kann man nun d. sogenannte Princip d. lebendigen Kraft dahin erweitern, daß man sagt: Es ist für irgend eine unendlich kleine Zustandsänderung eines Körpers d. Zuwachs an Arbeitsvermögen desselben = d. Arbeitssumme d. auf ihn wirkenden äußeren Kräfte + dem Arbeitswerth d. ihm von Außen mitgetheilten Wärme. Die Kräfte, welche dabei auf den Körper wirken sind theils Massenkräfte, zum Theil der auf d. Oberfläche wirkende Druck und endlich auch noch d. oben erwähnten Reibungen an d. Oberfläche. Wenn man den letzteren absieht, so ist d. Gleichung, welche d. fraglichen Satz ausdrückt:

$$d(L+U) = dM + dP + W dQ$$

wo dM, dP und dQ d. von früher her bekannte Bedeutung haben.

Was d. an d. Oberfläche stattfindende Reibung betrifft, so verrichtet diese offenbar eine negative Arbeit, indem durch sie theils dem Körper selbst theils dem umgebenden Körper Wärme erzeugt wird; es wäre also noch ein Glied ÷ dR hinzuzufügen. ~~Man~~ kann man aber d. ... Wärme als negativen Bestandtheil in d. Wärmemenge dQ einrechnen, welche dem Körper bei seiner unendlich kleinen Zustandsänderung von Außen mitgetheilt, resp. entzogen wird, indem man sich vorstellen kann, daß zunächst d. ganze äußere Reibungsarbeit an den betreffenden Körper übergeht und erst nachträglich ein Theil derselben ihm wieder entzogen wird. Unter dieser Annahme bekommt man dann d. obige sogenannte Gleichung d. Arbeitsvermögens.

Verbindet man diese Gleichung mit d. schon früher gefundenen (Seite 28, I) Gleichung für d. Zuwachs d. lebendigen Kraft:

$$dL = dM + dP - dR - dS + dE$$

so bekommt man daraus:

$$dU = W dQ + dR + dS - dE.$$

Hierin bedeutet nun $W dQ$ den Arbeitswerth der d. Körper von Außen mitgetheilten der Umgebung entzogenen Wärme und dR und dS d. Arbeitswerth d. theils durch d. Oberflächenreibung und theils durch d. innere Widerstände erzeugten Wärme. Es ist also:

$W dQ + dR + dS$ der Arbeitswerth der Gesammtwärme, welche dem Körper im Zeitelement dt mitgetheilt wird. Die eben gefundene Gleichung, welche d. Wärmegleichung heißen soll, drückt also aus, daß die Wärme $dU + dE$ theils zur Vermehrung d. inneren Arbeitsvermögens d. Körpers (resp. d. Körperwärme AU) theils zur Verrichtung von Expansionsarbeit, od. allgemeiner, Deformationsarbeit desselben verwendet wird,

insbesondere zur Verrichtung von Expansionsarbeit, wenn in d. Körper durchaus keine Tangentialspannungen vorkommen, wie dieses in d. Folge vorausgesetzt wird, und bei dem hauptsächlich betrachteten flüssigen Körper auch vorausgesetzt werden darf. In diesem Falle wird nach Seite 29 ~~dE~~ die Deformationsarbeit dE die Expansionsarbeit genannt, welche dann durch d. einfache Formel:

$$dE = \int p \cdot d(\delta V)$$

Nach den oben gemachten Bemerkungen findet also überhaupt die Verwandlung von Wärme in Arbeit immer nur durch Vermittlung einer Deformationsarbeit statt, indem die Wärme sich zunächst in Deformationsarbeit verwandelt und diese Deformationsarbeit dann nach d. Gleichung für d. lebendige Kraft theils zur Vermehrung d. lebendigen Kraft theils zur Ueberwindung von Widerständen gebraucht wird. Die sich in Deformationsarbeit verwandelnde Wärme kann dabei theils solche Wärme sein, welche dem Körper erst mitgetheilt wird, sei es von äußeren Körpern durch Berührung od. Strahlung, sei es an der Oberfläche durch d. Verwandlung von Reibungsarbeit (dR) od. im Innern durch d. Verwandlung innerer Widerstandsarbeit (dS) in Wärme, theils kann sie dem Körper selbst entnommen sein, entsprechend d. Falle daß in d. Wärmegleichung dU negativ und dE positiv ist, wie es einer Verwandlung von Wärme in Deformationsarbeit zukommen würde. Umgekehrt kann aber auch sich Deformationsarbeit in Wärme umsetzen entsprechend dem Falle daß in d. Wärmegleichung dE einen negativen Werth annimmt.

Es ist also d. gegenseitige Verwandlung von Wärme und Deformationsarbeit in einander eine umkehrbare Verwandlung, indem sie in dem einen od. andern Sinne stattfinden kann. Es besteht jedoch auch noch daß d. Verwandlung von Arbeit od. lebendiger Kraft überhaupt in Wärme auch ohne Vermittlung von Deformationsarbeit stattfinden kann, nämlich durch Vermittlung d. secundären Bewegungswiderstände d. äußeren Oberflächenreibung und d. inneren Widerstände. Die Verwandlung d. Arbeit secundärer Bewegungswiderstände in Wärme ist also eine nichtumkehrbare Verwandlung, indem es im Wesen d. secundären Bewegungswiderstände liegt, daß sie immer eine negative Arbeit verrichten d. h. Arbeit od. entsprechende lebendige Kraft verbrauchen, welche indem sie als solche verschwindet, als Wärme erhalten wird.

Der Definition d. Körperwärme und d. inneren Arbeitsvermögens entsprechend sind diese Größen U u. AU offenbar bestimmt durch d. Wärmezustand, es werden also auch U u. AU durch dieselben bekannten Größen wie d. Wärmezustand charakterisirt. Kommen z. B. insbesondere Tangentialspannungen nicht vor so sind diese charakterisirenden Größen v und p d. h. das spec. Volumen und d. Pressung. In d. Regel bedeutet U nicht sowohl d. innere Arbeitsvermögen d. ganzen Körpers sondern vielmehr d. spec. innere Arbeitsvermögen d. Körpers. Handelt es sich um einen homogenen Körper von gleichförmigem Wärmezustand, so kann man schlechtweg von d. spec. inneren Arbeitsvermögen d. Körpers sprechen, ebenso auch bei einem continuirlichen Gemisch von durchaus denselben Mischungsverhältnisse und gleichförmigen Wärmezustande. Handelt es sich aber um einen homogenen Körper von ungleichförmigem Wärmezustande od. um ein continuirliches Gemisch von veränderlichem Mischungsverhältniß so kann man nur von d. spec. inneren Arbeitsvermögen in einem bestimmten Körperpunkte sprechen od. endlich auch nur von dem mittleren spec. inneren Arbeitsvermögen eines discontinuirlichen Gemisches. Wie schon oben bemerkt wird das innere Arbeitsvermögen durch dieselben Größen bestimmt wie d. Wärmezustand. Allgemein muß man eigentlich sagen, daß d. innere Arbeitsvermögen U mit jenen den Wärmezustand charakterisirenden Größen in eine Gleichung zusammen, die, eine Ergänzung d. Zustandsgleichung, ebenso wie diese in d. Form von d. Aggregatform und in den Festcoefficienten von dem Körper abhängt. Diese Gleichung soll d. Gleichung d. inneren Arbeitsvermögens genannt werden.

Dieses so definirte Princip d. Aequivalenz und gegenseitigen Umwandelbarkeit von Wärme und Arbeit od. lebendige Kraft ist offenbar unmöglich mit d. Ansicht vereinbar, welche man früher von d. Wärme als einer Materie hatte, indem man sich diese Materie als ein unzerstörbares Gegenstand zu denken hat. Andererseits hat dieses Princip zu d. Ansicht geführt resp. dieselbe weiter begründet, daß das

Wesen d. Wärme in dem Vertheilungszustande d. atomistisch constituirten Materie zu suchen sei. Um dann aber alle vorkommenden Wärmeerscheinungen genügend erklären zu können müßte man verschiedene Annahmen machen bezüglich d. Art d. Gruppirung, der gegenseitigen inneren Kräfte und einer d. [illegible] [illegible] Bezug d. die Körper in bekannter Weise mit kleinen Zwischenräumen constituirenden kleinsten Massentheilchen. Indessen lassen sich bei dem heutigen Zustand d. Wärmetheorie auf solche Weise d. mannigfaltigen Wärmeerscheinungen nur in unvollkommener Weise erklären und aus diesem Grunde dürfte auf d. atomistische Constitution nicht zu Grunde gelegt werden sollen. Das Princip d. Aequivalenz von Wärme und Arbeit sowie d. folgenden Ausführungen und Folgerungen sind vielmehr lediglich als auf Erfahrung ~~[illegible]~~ gefundenen Thatsachen [illegible] zu betrachten.

Nach diesen ausführlichen Auseinandersetzungen, kann nun auf d. Herleitung d. allgemeinen Differentialgleichungen eingegangen werden, welche dazu dienen sollen d. Zustandsänderung einer Flüssigkeit zu bestimmen. Es wurde zu dem Zwecke schon 4 allgemeine Gleichungen aufgestellt, (Siehe Seite 24 25) nämlich 3 Gleichungen, welche in d. Folge d. Fundamentalgleichungen genannt werden sollen und welche d. Ausdruck waren des Gleichgewichts, welches in jedem Massenelement zwischen den äußeren Druck und den Geschwindigkeiten stattfinden muß. Außer diesen dreien wurde noch d. sog. Continuitätsgleichung aufgestellt. In diesen 4 Gleichungen waren aber 5 Größen, welche als Functionen d. Coordinaten d. betreffenden Punktes und als Function d. Zeit bestimmt werden mußten, nämlich d. Größen $u\ v\ w\ \mu\ p$ als Functionen von $x\ y\ z\ t$. Es muß also noch eine weitere Bestimmungsgleichung aufgestellt werden um diese [illegible] Aufgabe allgemein auflösbar zu machen. Diese Gleichung ~~kann~~ muß angenommen werden.

In d. Folge soll aber statt $u\ v\ w$ für d. Geschwindigkeitscomponenten die Bezeichnungen $u_x\ u_y\ u_z$ und für die resultirende Geschwindigkeit u eingeführt werden.
Ferner wurde bisher in d. Gleichungen d. neuen Zustand charakterisirt durch d. Pressung p und die spec. Masse μ, statt dessen soll jetzt das spec. Volumen v eingeführt werden. Man hat also zu setzen:

$$\mu = \frac{1}{gv} \quad \text{wenn } v \text{ d. spec. Volumen und } g \text{ d. Beschleunigung d. Schwere ist.}$$

Durch diese Bezeichnungen eingeführt, geht die erste d. 3 Fundamentalgleichungen:

$$X - gv\frac{dp}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} - Rgv\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial u_x}{\partial z^2}\right)$$

die anderen beiden Fundamentalgleichungen ergeben sich in ganz analoger Weise aus dieser durch entsprechende Buchstabenvertauschungen.
In diesen Gleichungen bedeutet:

$$\Delta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

die 4 Gleichung, d. Continuitätsgleichung war: $\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu u)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu v)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu w)}{\partial z} = 0$

in d. jetzigen Bezeichnungsweise also:

$$\frac{\partial\frac{1}{v}}{\partial t} + \frac{\partial\frac{u_x}{v}}{\partial x} + \frac{\partial\frac{u_y}{v}}{\partial y} + \frac{\partial\frac{u_z}{v}}{\partial z} = 0$$

Eine fünfte Bestimmungsgleichung zur Bestimmung von $u_x\ u_y\ u_z\ v$ u. p als Functionen von $x\ y\ z\ t$ erhält man nun mit Rücksicht auf die, durch die Temperaturänderungen hervorgerufenen Zustandsänderungen d. Flüssigkeit.
Bezeichnet nämlich τ die Temperatur im fraglichen Punkte $x\ y\ z$ zur Zeit t, so ist

auf Seite 36 die Wärmemenge dQ, welche dem fraglichen Flüssigkeitselemente δV im Zeitelement dt durch Leitung von den umgebenden Flüssigkeitstheilchen mitgetheilt wird:

$$dQ = k\,\delta V\left(\frac{d^2\tau}{dx^2} + \frac{d^2\tau}{dy^2} + \frac{d^2\tau}{dz^2}\right)dt$$

unter k den Wärmeleitungscoefficienten verstanden, welcher allgemein als nach allen Richtungen hin gleich groß angenommen werden muß. Hierbei mußte jedoch vorausgesetzt werden, daß im Innern d. Flüssigkeit d. Wärme nur durch Leitung und ohne Mittheilungsbewegung übertragen wird, so daß man d. bekannte Wärmegleichung auch auf das ganze Massenelement δV beziehen kann. Indem nun weiter eigentliche Wärmeausstrahlungen nicht in Betracht kommen, also $dR = 0$ sofern d. betrachtete Massenelement im Innern d. Flüssigkeit liegt und man auch von den Energieverschiedenheiten, welche von discontinuirlichen Geschwindigkeitsänderungen herrühren würden, abstrahiren muß, indem diese sich nicht in Elementen zeigen können sondern ~~im Ganzen~~ ihre Wirkungen nur im Ganzen bemerkbar werden können. Es gilt also dann auch $dS = 0$ (Man könnte sich auch aber denken, daß alle diese Vernachlässigungen in dem Wärmeleitungscoefficienten k entsprechend berücksichtigt wären)
Unter diesen Voraussetzungen ist dann nach d. bekannten Wärmegleichung d. oben gefundene Wärmemenge dQ auch: Siehe Seite 40)

$$dQ = \frac{dU + dE}{W} \quad \text{od. mit } W = \frac{1}{A}:$$

$$dQ = A(dU + dE)$$

worin dU d. Zuwachs an innerer Arbeitsenergie und dE d. Expansionsarbeit d. Elementes bedeutet. Nach Seite 29 ist aber in diesem Falle:

$$dE = p.\ d(\delta V).$$

Wenn nun weiter unter U nicht sowohl d. innere Gesammtarbeitsenergie sondern d. innere Arbeitsenergie pro Gewichtseinheit, pro 1 kg verstanden wird, so ist offenbar zu setzen anstatt dU:

$$\frac{\delta V}{v}\,dU$$

Ferner kann man offenbar setzen:

$$d(\delta V) = \frac{\delta V}{v}\,dv$$

da sich d. Änderung d. Volumens d. Elementes während d. Zeitelementes dt ~~[illegible]~~ ganz natürlich in demselben Verhältniß vollzieht wie die Änderung d. spec. Volumens v.
Setzt man alle die gefundenen Werthe in d. Gleichungen für dQ und setzt dann diese beiden Ausdrücke einander gleich, multiplicirt mit $\frac{dv}{d(\delta V)}$ und dividirt durch dt, so bekommt man:

$$A\left(\frac{dU}{dt} + p\frac{dv}{dt}\right) = k\,v\left(\frac{d^2\tau}{dx^2} + \frac{d^2\tau}{dy^2} + \frac{d^2\tau}{dz^2}\right) \quad \ldots \quad \mathfrak{a}$$

Hierin sind $\frac{dU}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$ vollständige Differentialquotienten, indem U und v natürlich sich auf einen Arbeitsinhalt und d. spec. Volumen auf ein Massenelement bezogen wurden, welches zur Zeit t d. festen Raumpunkt $(x\ y\ z)$ ausfüllt. Ganz nach der Herleitung d. Beschleunigungscomponenten $\varphi_x\ \varphi_y\ \varphi_z$ Seite 17, kann man also auch setzen:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + u_x\frac{\partial U}{\partial x} + u_y\frac{\partial U}{\partial y} + u_z\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\text{und } \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u_x\frac{\partial v}{\partial x} + u_y\frac{\partial v}{\partial y} + u_z\frac{\partial v}{\partial z}$$

In d. Gleichung $\mathfrak{a}$ hätten wir nun d. gewünschte 5te Bestimmungsgleichung gefunden; mit derselben sind aber 2 neue Unbekannte in d. Rechnung eingeführt worden, nämlich τ und U, welche ebenfalls als Functionen von $x\ y\ z\ t$ zu bestimmen sind. Nun bestehen aber bekanntlich zwischen d. Temperatur τ und d. innern Arbeitsenergie sowie den d. Zustand charakterisirenden Größen v u. p 2 Beziehungen, nämlich die sogenannte Zustandsgleichung $f(p, v, t) = 0$ (Seite 32) und d. Gleichung d. inneren Arbeit/Energie $F(v\, p\, t\, U) = 0$ (Seite 41). Diese beiden Gleichungen im Zusammenhange mit den 5 früheren Gleichungen nämlich d. 3 Fundamentalgleichungen, d. Continuitätsgleichung und d. oben gefundenen Gleichung A geben nun 7 Gleichungen zur Bestimmung d. 7 Größen $u_x\, u_y\, u_z\, v\, p\, t\, U$ als Functionen von $x\, y\, z\, t$ vorausgesetzt, daß d. übrigen in d. Gleichungen vorkommenden Größen entweder als Constante oder als Functionen von $x\, y\, z\, t$ gegeben sind. Da aber weiter d. Gleichungen lauter partielle Differentialgleichungen sind, so müssen zur vollständigen Bestimmung d. Aufgabe behufs d. Werthe für d. bei d. Integrationen einzuführenden Integrationsconstanten, noch auch d. Anfangszustand und d. Oberflächenbedingungen gegeben sein, nämlich d. Zustand (äußerer und Wärmezustand) zu einer bestimmten Zeit, die Oberflächenkräfte und d. Gesetz von welchem d. Wärmezustand zwischen d. Flüssigkeit und ihrer Umgebung abhängt. Die vollständige Durchführung möchte dann diese nicht allgemein weiter geschehen sondern nur für specielle Fälle behandelt werden.

Ehe jedoch diese betrachtet werden, sollen noch einige andere wichtige Begriffe erörtert werden.

Umkehrbare und nicht umkehrbare Verwandlungen und Zustandsänderungen.

Nach den Bemerkungen Seite 41 geschieht d. Verwandlung von Wärme in Arbeit od. entsprechend lebendige Kraft immer durch Vermittlung von Deformationsarbeit, indem die aus Wärme gewonnene Arbeit od. lebendige Kraft stets als Deformationsarbeit erhalten wird, wobei noch keine [illegible]. Ist diese Deformationsarbeit so gewissermaßen frei, wenn eine Flüssigkeit einen äußeren Druck od. ein fester Körper verliert, in welchem keine Temperaturspannungen vorkommen. Umgekehrt geht d. Verwandlung von Arbeit od. lebendige Kraft in Wärme auch durch Vermittlung von Deformationsarbeit vor sich. Jedoch kann auch Wärme unmittelbar aus den Arbeiten sogenannter Bewegungswiderstände entstehen, nämlich äußerer Reibung und solcher inneren Widerstände, welche durch Deformationsgeschwindigkeitsänderungen bedingt sind. In umgekehrter Weise kann dieser letzte Vorgang aber nicht stattfinden. Aus diesem Grunde wurde d. gegenseitige Umsetzung von Deformationsarbeit und Wärme in einander eine **umkehrbare Verwandlung**, dagegen d. Umsetzung d. Arbeit sogenannter Bewegungswiderstände in Wärme eine **nicht umkehrbare Verwandlung** genannt.

In ähnlicher Weise kann man auch d. Übertragung von Wärme von einem Körper od. Körpertheil von d. Temperatur t zu einem andern von d. Temperatur t_0 als eine Verwandlung auffassen, nämlich so daß d. Wärme selbst von d. Temperatur t_1 in d. Temperatur t_0 übergeht od. sich in solche verwandelt. Eine solche Übertragung od. eine solche Verwandlung von Wärme kann nun entweder unmittelbar durch Leitung, durch Strahlung od. durch Vermittlung eines andern Körpers stattfinden, welcher letztere dann eine Zustandsänderung erleidet und dadurch d. Übertragung d. Wärme vermittelt. Eine unmittelbare Wärmemittheilung durch Leitung (Wärmeleitung) kann d. frühern Definition gemäß, nur von einem Körper höherer Temperatur zu einem Körper niedrigerer Temperatur stattfinden. Ganz dasselbe gilt auch für den Fall einer Wärmemittheilung durch Strahlung wenn nur d. unter Seite 38–39 aufgestellten Bedingungen erfüllt sind. Das letztere kann man nicht von vornherein als erfüllt ansehen, jedoch haben Versuche durch die daraus gezogenen Folgerungen hinsichtlich d. Übereinstimmung mit d. Erfahrungssätzen [illegible] wahrscheinlich gemacht. Demnach kann also ganz allgemein eine unmittelbare Übertragung d. Wärme immer nur von höherer zu niederer Temperatur stattfinden, so daß also diese Wärmeübertragung als eine nicht umkehrbare Verwandlung zu bezeichnen ist.

Damit nun d. Zustandsänderung eines Körpers mit nur umkehrbaren Verwandlungen verbunden sei, ist hiernach also zunächst erforderlich, daß 1) nur verschwindend kleine sogenannte Bewegungswiderstände vorkommen, wodurch also nur unendlich kleine Mengen lebendiger Kraft od. Arbeit in Wärme umgewandelt werden und daß 2) eine nur unendlich kleine Wärmeübertragung von höheren zu niederen Temperaturen stattfindet.

Eine unmittelbare Wärmeübertragung ist freilich streng genommen [illegible] Wärmemittheilungen nicht ausgeschlossen werden sollen. Dem Begriffe d. unendlich kleinen als einem Grenzbegriff gemäß genügt jedoch zur Charakterisierung einer Zustandsänderung mit nur umkehrbaren Verwandlungen, daß bei einer Zustandsänderung von endlicher Größe eine endliche Wärmemenge eine nur unendlich kleine Temperaturänderung erleide. Damit diese Bedingung erfüllt sei, ist nun zunächst mit Rücksicht auf den Wärmeaustausch an d. Körperoberfläche erforderlich, daß d. Differenz zwischen d. Oberflächentemperatur t_1 und d. äußeren Temperatur t_0 überall unendlich klein sei; unter äußerer Temperatur t_0 d. Körpers die Temperatur d. unmittelbar angrenzenden Körpers verstanden, mit welchen eine Wärmemittheilung durch Leitung, sowie d. Oberflächenelemente umgebende Körper, mit denen ein Wärmeaustausch durch Strahlung stattfindet. Aber könnten diese entsprechenden Temperaturen t_1 und t_0 zu jeder Zeit an verschiedenen Stellen auch endlich verschieden sein. Wenn man dann aber durch Schichten verschiedener Temperatur d. Körper in unendlich dünne Schichten zerlegt denkt, so würde zwar d. bei d. endlichen Zustandsänderung d. Körpers von einer solchen Schicht zur benachbarten geleitete endliche Wärmemenge nur eine unendlich kleine Temperaturänderung erfahren, ebenso wie d. durch d. Oberfläche zugeführte Wärme, haben aber d. Körper mit unendlich vielen solchen Schichten behaftet, wird im Ganzen eine unendlich große Wärmemenge eine unendlich kleine Temperaturänderung od. eine endliche Wärmemenge eine endliche Temperaturänderung erfahren können. Damit also auch mit Rücksicht auf Wärmeleitung im Innern d. Körpers seine Zustandsänderung nur mit umkehrbaren Verwandlungen verbunden sei, müssen auch im Innern d. Körpers, so daß die Temperaturdifferenzen zwischen je 2 unendlich nahen Körperpunkten als unendlich klein höherer Ordnung vorausgesetzt werden, so daß dann auch d. äußeren Temperaturen t_0 an verschiedenen Stellen nur unendlich wenig von einander verschieden sein dürfen. Ist der d. Körper ein [illegible] Gemisch [illegible] Bestandtheile [illegible] Art und verschiedenen Aggregatformen, welche sich in Grenzzuständen bezüglich auf den Übergang aus d. einen in d. andere Aggregatform befinden, so ist bei Temperaturgleichheit hinsichtlich d. Wärmemittheilung im Innern d. Körpers außerdem [illegible] erforderlich, daß dieselbe überall zur betreffenden Änderung in einem bestimmten [illegible] zur Verschiebung nur umkehrbarer Verwandlungen muß also in diesem Falle d. Körpertemperatur in jedem Punkte d. [illegible] entsprechend sein, wobei d. Oberflächentemperatur t_0 an verschiedenen Stellen nur endlich verschieden sein können, entsprechend d. unendlich kleinen Differenzen zwischen den sich entsprechenden Temperaturen t_1 und t_0.

Die Zustandsänderung eines Körpers heißt nun im Ganzen umkehrbar, wenn d. Umkehrung d. Änderungsgesetzes ihrer Ursachen (äußere Kräfte und mitgetheilte resp. entzogene Wärmemengen) genügt, um sie in umgekehrtem Sinne ebenso stattfinden zu lassen, daß dabei d. Körper mit allen seinen Elementen durch dieselben äußeren und Wärmezustände nur jetzt in umgekehrter Aufeinanderfolge hindurchgeht, bis zum d. Anfangszustand betreffend zugleich mit d. entgegengesetzten Geschwindigkeiten. Dazu ist offenbar erforderlich, daß mit d. Zustandsänderung nur umkehrbare Verwandlungen verbunden sind und daß zu jedem Zeitpunkt, also in d. Augenblick, in welchem d. Umkehrung stattfinden soll, d. Differenz $t_0 - t_1$ zwischen d. äußeren und d. Oberflächentemperatur d. Körpers an jeder Stelle seiner Oberfläche, wo ein Wärmeaustausch mit d. Umgebung stattfinden kann $= 0$, sowie daß d. Körper selbst in Ruhe, somit auch d. Differenz $p_0 - p_1$ zwischen d. äußeren Druck und d. Körperpressung p_1 an jeder in normaler Richtung betreffender Stelle d. Oberfläche $= 0$ ist. Während d. Zustandsänderung kann dann d. Körper nicht streng genommen beständig in Ruhe und also jene Differenzen $t_0 - t_1$ und $p_0 - p_1$ nicht streng genommen beständig $= 0$ sein; sie sind vielmehr unendlich klein und es entsprechen [illegible] zwischen d. Änderung durch d. betreffenden Zustand in den einen od. im umgekehrten Sinne stattfindet. Gleichwohl kann d. Begriff einer nicht nur im Ganzen, sondern im Einzelnen d. h. in jedem Augenblicke umkehrbaren, einer sogenannten *umkehrbaren Zustandsänderung* als der eines Grenzfalles aufgestellt werden, dessen Betrachtung von besonderem theoretischen Interesse ist.

So ist bereits eine Zustandsänderung zu verstehen, welche mit nur umkehrbaren Verwandlungen verbunden ist und mit verschwindend kleiner Geschwindigkeit stattfindet, wobei dann freilich noch d. Umkehrung einer vorgängigen unendlich kleinen Änderung d. äußeren Temperatur t_0, d. äußeren [illegible]

[illegible] Geschwindigkeiten [illegible]

[illegible]

[illegible] also in d. Folge von einem Körper d. Art, welche eine umkehrbare Zustandsänderung [illegible], so ist bei Abstraction d. Molecularkräfte (Schwere) in allen Punkten d. Körpers d. augenblickliche Temperatur und Pressung gleich groß.

Wenn allgemein d. augenblickliche Körperpressung in allen Punkten gleich ist, [illegible] in allen Punkten d. Oberfläche gleich groß sein. [illegible] umkehrbaren Zustandsänderung [illegible] d. augenblickliche Pressung in allen Elementen d. Körpers und auch d. Oberflächendruck in allen Punkten d. Oberfläche gleich groß.

Betrachtet man nun d. allgemeine Differentialgleichung d. lebendigen Kraft (Seite 28)

$$dL = dM + dP - dR - dS + dE$$

welche sich auf eine unendlich kl. Zustandsänderung eines unendlich kl. Körperelements bezieht, so ist [illegible] unter d. Voraussetzung, daß d. Zustandsänderung mit nur umkehrbaren Verwandlungen verbunden ist, $dR = 0$ und $dS = 0$, [illegible] Wärme Arbeit [illegible] entsprechend d. Definition d. umkehrbaren Verwandlungen.

Es ist also nun:

$$dL = dM + dP + dE.$$

Ist d. Zustandsänderung [illegible] umkehrbaren Zustandsänderung [illegible] mit umkehrbaren Verwandlungen [illegible] unendlich kleinen Geschwindigkeiten stattfindet, so ist dann auch [illegible] Änderung d. lebendigen Kraft $= 0$ ist also $dL = 0$ [illegible] d. betreffende Gleichung geht dann über in:

$$dE = \div(dM + dP)$$

Diese Expansionsarbeit dE ([illegible]) ist [illegible] Seite 29:

$$dE = \int p\, d\delta V$$

wenn δV d. Volumen eines unendlich kleinen Körperelements, $d\delta V$ also d. Änderung dieses Volumens in d. Zeitelement dt bedeutet und wenn p d. augenblickliche Pressung bezeichnet.

Abstrahirt man nun [illegible] von Molecularkräften, so ist auch $dM = 0$ und [illegible] Pressung in allen Punkten d. Körpers in demselben Augenblick gleich groß. Demnach kann man [illegible] setzen:

$$dE = p\int d\delta V = p\, dV.$$

Also schließlich:

$$dE = \div dP = p\, dV.$$

In diesem [illegible] Falle ist also d. Expansionsarbeit gleich [illegible] d. äußeren Drucks [illegible] Körper [illegible] Pressung [illegible]

[illegible] umkehrbaren Zustandsänderungen [illegible] Körpers [illegible] Wärmezustand [illegible]

[illegible] unendlich kleinen Geschwindigkeiten [illegible] Wärmemenge, welche einem Körper mitgetheilt [illegible] Wärmezustand [illegible] Seite 40 [illegible]:

$$dU = W\,dQ + dR + dS - dE.$$

[illegible] umkehrbare Zustandsänderung $dR = 0$ und $dS = 0$ ist, so kann man d. Wärmegleichung auch schreiben:

$$W\,dQ = dU + dE = dU + \int p\, d\delta V$$

wenn d. Integral sich auf δV bezieht und über d. ganzen Körper [illegible]. Diese Gleichung [illegible] d. Arbeitswerth d. Wärme [illegible] welche d. Körper mitgetheilt werden muß, um eine unendlich kleine Änderung seines Wärmezustandes zu bewirken.

[illegible] Körper [illegible] auf 1 kgr eines [illegible] Körperelements, welche unter Umständen unendlich klein dritter Ordnung [illegible] Pressung und Temperatur in allen Punkten [illegible] v d. spec. Volumen d. Elements, mit p seine Pressung und mit U = eine Function von v u. p sein spec. inneres Arbeitsvermögen bezeichnet:

$$W\,dQ = dU + p\, dv.$$

= die Wärmemenge bezogen auf 1 kgr eines unendlich kleinen Elements unter d. Voraussetzung einer umkehrbaren Zustandsänderung

= dem Arbeitswerth d. Wärme, welche ~~[illegible]~~ dem Körperelement pr. 1 kgr behufs einer unendlich kleinen Zustandsänderung mitzutheilen ist, bei welcher sich dessen Volumen v um dv und d. innere spec. Arbeitsvermögen U sich um dU ändert [illegible] Wärmemenge [illegible].

Wenn wegen d. Abwesenheit von Widerstandskräften die augenblickliche Pressung in allen Punkten gleich ist, können wir auch d. oben gefundene Gleichung nicht nur auf 1 Kgr. d. unendl. kleinen Körperelements beziehen sondern auch auf 1 Kgr. d. ganzen Körpers, wobei jedoch, wenn derselbe nicht homogen sondern ein Gemisch ist unter v und U d. mittlere spec. Volumen resp. d. mittlere spec. innere Arbeitsvermögen zu verstehen ist.

Handelt es sich nun darum d. Wärmemenge dQ zu ermitteln, welche d. Körper mitgetheilt od. entzogen werden muss ~~[illegible]~~ resp. dem Körperelemente pro 1 Kgr mitgetheilt werden muss, um eine Zustandsänderung von endlicher Größe zu erlangen, so hat man durch Integration d. vorhin gefundenen Wärmegleichung: pro 1 Kgr.

$$WQ = U_2 - U_1 + \int_{v_1 p_1}^{v_2 p_2} p\,dv$$

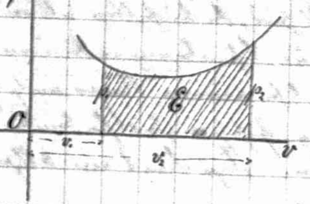
wenn unter $v_1\ p_1\ U_1$ d. spec. Volumen, d. Pressung und d. spec. innere Arbeitsvermögen d. Anfangszustands
und unter $v_2\ p_2\ U_2$ " " " " " " " " " " d. Endzustands
verstanden wird.

Um d. Integral bestimmen zu können muss man d. Gesetz kennen, nach welchem sich v und p gleichzeitig ändern, nämlich d. schon früher erwähnte Beziehung, welche dabei beständig zwischen v und p stattfindet. Man kann also d. vorhin ~~aus~~ gestellte Aufgabe allgemein nicht weiter durchführen, wenn nicht d. Gesetz gegeben ist nach welchem d. gleichzeitige Änderung von v und p erfolgt.

Dieses Gesetz kann im Allgemeinen gegeben sein durch eine Gleichung zwischen v u. p von d. Form:

$$f(v, p) = 0$$

Diese Gleichung kann man nun offenbar als d. Gleichung einer ebenen Curve betrachten, welche auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem (v als Abscissen u. p als Ordinaten) bezogen ist.



D. Integral $\int_{v_1 p_1}^{v_2 p_2} (p\,dv)$, welches nichts anderes als d. Expansionsarbeit bei d. fraglichen Zustandsänderung ist, wird in d. Figur offenbar durch den Inhalt d. Fläche dargestellt, welche von d. Abscissenaxe v, d. Curve und den Ordinaten p_1 und p_2 begrenzt wird ~~und~~ welche letztere d. Anfangs- und Endzustand entsprechen.

Da diese geometrische Darstellung d. Beziehung zwischen d. spec. Volumen v und d. Pressung p im weiteren Verlaufe von wesentlichem Nutzen sein wird, soll dieselbe mit einem besonderen Namen „Zustandscurve" bezeichnet werden.

Die oben entwickelten 3 Gleichungen, bezogen auf 1 Kgr. eines unendlich kl. Körperelements resp. auf 1 Kgr. d. ganzen Körpers, wurden mit d. allgemeinen Form d. Wärmegleichung entwickelt, indem dQ und dS = 0 gesetzt wurden, entsprechend einer Zustandsänderung mit umkehrbaren Verwandlungen. Eine umkehrbare Zustandsänderung an sich ist noch nicht bestimmt, indem eine solche, wiewohl sie mit nur umkehrbaren Verwandlungen ~~stattfindet~~ verbunden ist, auch noch mit unendlich kleinen Geschwindigkeiten stattfinden muss. Diese letzte Bedingung wird aber ganz und bereits stillschweigend gelassen, und welchem Grund jene Gleichungen überhaupt für umkehrbare Änderungen d. Wärmezustands gelten d. h. für d. Änderungen d. Wärmezustands bei solchen Zustandsänderungen, welche mit umkehrbaren Verwandlungen verbunden sind, sonst aber mit beliebig großen Geschwindigkeiten stattfinden können. Wir können nun in solchen Fällen, wo d. Zustandsänderungen mit umkehrbaren Verwandlungen verbunden sind aber mit ~~[illegible]~~ Geschwindigkeiten von endlicher Größe vor sich gehen, durch Abwesenheit von Widerstandskräften auf eine gleichförmige Pressung und Temperatur t schließen. Allein daraus folgt, dass selbst bei d. Abwesenheit von Widerstandskräften, zur Untersuchung d. Änderung d. Wärmezustands eines Körpers im Allgemeinen eine Zerlegung desselben in unendlich kleine Elemente nöthig ist, und also d. beiden letzten Gleichungen nur auf 1 Kgr. ~~[illegible]~~ eines solchen Elements bezogen werden können.

Mit dieser Einschränkung gelten alle Gesetze, welche im Folgenden d. Einfachheit wegen für umkehrbare Zustandsänderungen aufgestellt werden, allgemein für d. Änderungen d. Wärmezustands bei Zustandsänderungen mit nur umkehrbaren Verwandlungen d. h. für umkehrbare Änderungen d. Wärmezustands. Bei d. Herleitung dieser Gesetze kann man übrigens immer einen Körper von gleichförmiger Temperatur und Pressung voraussetzen von 1 Kgr Gewicht, dessen Volumen also = d. spec. Volumen v ist, weil ihre Anwendung an Einschränkungen gebunden, nämlich im Allgemeinen auf unendlich kl. Körperelemente beschränkt, wenn nicht d. Geschwindigkeiten und Widerstandskräfte verschwindend klein sind, wobei außerdem noch im Falle nicht homogener Körper von endlicher Größe v und U als d. mittlere spec. Volumen und mittlere spec. innere Arbeitsvermögen zu verstehen sind.

Es gibt nun besondere Arten umkehrbarer Zustandsänderungen, welche von hauptsächlichem Interesse sind nämlich:

1) Umkehrbare Zustandsänderungen, welche bei constantem Volumen stattfinden, also charakterisirt sind durch dv = 0. Die Zustandscurve ist in diesem Falle offenbar eine zur p Axe parallele Gerade.

2) Umkehrbare Zustandsänderungen, welche bei constanter Pressung stattfinden, welche also charakterisirt werden durch dp = 0, in welchem Falle d. Zustandscurve natürlich eine zur v Axe parallele Gerade ist.

3) Umkehrbare Zustandsänderungen bei constanter Temperatur entsprechend dt = 0 unter t d. Temperatur verstanden. Die Zustandscurve ist in diesem Falle allgemein eine krumme Linie und wird bezeichnet mit d. Namen: isothermische Curve.

4) Umkehrbare Zustandsänderung bei constantem innerem Arbeitsvermögen als constanter Körperwärme entsprechend dU = 0. Die im Allgemeinen als krumme Linie erscheinende Zustandscurve heißt nun isodynamische Curve.

5) Umkehrbare Zustandsänderungen ohne Mittheilung od. Entziehung ~~durch~~ von Wärme, welcher Fall, charakterisirt durch dQ = 0, von besonderer Wichtigkeit ist. Die Zustandscurve heißt in diesem Falle: adiabatische Curve.

Die unter 3 aufgeführte, nach einer isothermischen Curve vor sich gehende Zustandsänderung kann man sich dadurch vermittelt denken, dass d. betreffende Körper mit einem andern Körper in andauernder Berührung steht, welcher d. fragliche constante Temperatur besitzt (d. letztere Körper kann etwa von so großen Dimensionen gegenüber dem betrachteten sein, dass eine Temperaturänderung d. ersteren an dem letzteren ohne Einfluss auf d. Temperatur d. ganzen Körpers ist.) Die unter 5 angeführte und nach einer adiabatischen Curve vor sich gehende Änderung kann man sich dadurch vermittelt denken, dass d. Veränderliche in eine Hülle eingeschlossen ist, welche für Wärme undurchdringlich ist ohne d. Volumenänderung d. Körpers zu hindern.

Was nun im Gegensatz zu den umkehrbaren, die unumkehrbaren Zustandsänderungen betrifft, welche nicht nur mit unstetigen Änderungen d. äußeren Zustands d. Begrenzungszustands, sondern auch mit nicht umkehrbaren Verwandlungen verbunden sind, so lässt sich dies häufig selbst durch Zerlegung d. Körpers in unendl. kleine Elemente nicht in ihren einzelnen Theilen bezüglich auf Raum und Zeit verfolgen. Man muss oft ganz und gar absehen solche Zustandsänderungen wissenschaftlich zu untersuchen, besonders wenn diese mit Wirbelbewegungen, Stößen, Wirbelbewegungen etc. überhaupt d. unbekannten Geschwindigkeitsänderungen im Innern verbunden sind, deren Gesetzmäßigkeit nicht wissenschaftlich und durchaus vollständig unbekannt ist. Indessen wird in solchen Fällen, die sich freilich allgemein nicht in ihrem ganzen Verlauf verfolgen lassen, kann man spezielle Fragen darüber mit Hilfe d. bekannten allgemeinen Gleichungen (unter Berücksichtigung von Wärme und Arbeit und Wärmegleichung und Gleichung d. Arbeitsvermögens) leicht beantworten. Von besonderem Interesse ist in dieser Hinsicht d. Aufgabe betreffend d. Bestimmung d. Änderung d. innern Arbeitsvermögens für den Fall, dass wenigstens für d. Anfangs- und Endzustand d. Körper sich in äußerer Ruhe befindet, wenn ferner bekannt gegeben ist die mitgetheilte Wärme = Q, die Volumenänderung d. Körpers und d. äußere Druck p. in den normal zur Oberfläche benachbarten Punkten d. letzteren während d. Dauer dieser Bewegung. Ein spezieller solcher Fall ist z. B. folgender: