

Universitätsbibliothek Karlsruhe

III E 104-1.2

Redtenbacher, Ferdinand

**Maschinenbau
Handschriftlich**

Band 1

**Karlsruhe
1860/61**

Redtenbacher,
Maschinenbau
1868/69

III E
104

Maschinenbau, 1^{te} Curz

vorgetragen von

Josefath Professor Dr. F. Medtenbacher

angearbeitet von

Carl Heinrich Lenz.

Studien - Jahr 1860/61.

Machlunhe.

III E 104

Handwritten title: *Lehrbuch der Festigkeit und Elasticität der Materialien*

III E 104



Lehre von der Festigkeit und Elasticität der Materialien.

Es stellt sich ab sich um die Gesetze des Verhaltens der Körper unter der Einwirkung der inneren Kräfte.

Alle Körper, wie sie in der Natur vorkommen sind absolut Starr, und wenn innere Kräfte auf sie einwirken erleiden sie Veränderungen, sie werden ausgedehnt, zusammengebrückt, gelogen, vermindert. Sie erleiden also Volumen-, Gestalt-, Formveränderungen, ab hier mit demnach an, dass wir diese Gesetze studieren, nach welchen die Veränderungen geschehen.

In der Lehre von der Festigkeit und Elasticität der Materialien kann man einen rationalen Ausgangspunkt, indem man von uns fundamentale Grundsatzsätzen ausgeht und auf diese Schlussfolgerungsweise die Gesetze der Natur anwendet. Dieser Weg führt zur tiefsten Einsicht, allein erfordert einen bedeutenden Aufwand von analytischen Materialien und Apparaten und am Ende bleibt auf nichts übrig als empirisch zu verfahren.

Ein anderer Weg besteht darin, dass man zuerst experimentell, dann durch zu gewissen Regeln gelangt, die, wenn auch nicht absolut, so doch annähernd genau sind, und darauf weiter baut. Dieser Weg gewährt allerdings nicht die tiefe Einsicht, aber man kommt auf verlässliche Weise auf Mittel zu, die Resultate, die man erhält sind leicht anwendbar, und leisten für die Praxis gute Dienste.

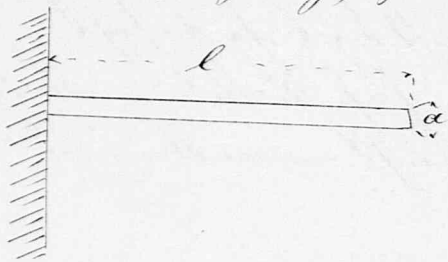
Diese beiden Wege verfolgen wir ein indem wir Versuche anstellen.

1. Stabdehnungs Gesetz.

Die einfachste Art auf einen Körper Kräfte einwirken zu lassen ist die, daß man auf einen stäbchenartigen Körper eine Kraft einwirken läßt, die denselben seiner Länge nach ausdehnen soll. Wir machen die Voraussetzung, daß die Ausdehnung und die einwirkende Kraft in einem gewissen Zusammenhang stehen. Um diesen Zusammenhang verständlich zu machen, können wir gewisse Experimente anstellen, zu welchen wir eine Menge Stäbe desselben Materials, aber von verschiedenen Dimensionen nehmen, verschiedene Kräfte einwirken lassen und die Ausdehnung messen. Dieser Weg ist aber sehr mühsam.

Es liegen wir einen andern Weg ein, um uns den Vorgang, wodurch es sich für sich selbst vorzustellen, und in den Körper hinein denken, und den Vorgang zu erschöpfen suchen, wenn eine solche einwirkende Kraft einwirkt, und indem wir versuchen zu verstehen, nach welchem Gesetz diese einwirkend stattfindet. Geben wir auf diese Weise das Gesetz aufgestellt, so gehen wir von den Experimenten, stellen Versuche an, durch welche wir prüfen, ob dieses Gesetz richtig ist oder nicht. Dieser Forschungsweg führt in den meisten Fällen zum Ziel.

Geht nun der Stab der Ausdehnung
Länge = l und der Querschnitt = a , besteht ferner
aus einem gewissen Material



Man lassen wir auf den Stab gewisse Kräfte einwirken, zunächst eine kleine Kraft, dann immer größere Kräfte.

Diese einwirkende Kraft sei = P .

Die Größe der Ausdehnung = e .

Nun stellen wir uns die Frage, wie groß das e , d. h. die Ausdehnung unter den verschiedenen Kräften sei.

Mathematisch ausgedrückt sollen wir

$$e = f(l, a, P, \epsilon)$$

wobei ϵ der Elastizitätsmodul ist, welcher wir später behandeln. Man ist klar, daß diese Ausdehnung von der Größe der einwirkenden Kraft abhängt und wird mit der einwirkenden Kraft wachsen. Wenn wir fragen in welcher Weise das e von P abhängt, so ist das einfachste, daß das e dem P direkt proportional sei, dann aber ist in der Formel P als Faktor anzusetzen. Ferner können wir annehmen, daß man einen längeren Stab stärker ausdehnen kann als einen kürzeren, und es ist die Ausdehnung mit der Länge des Stabes, und es ist das natürlichste, daß das e dem l direkt proportional sei, dann aber steht auf l als Faktor. Weil nun die Ausdehnung abnimmt, wenn der Querschnitt des Stabes zunimmt, so ist das einfachste anzunehmen, daß das e dem a umgekehrt proportional sei. folglich steht a im Nenner.

Die Ausdehnung hängt ferner ab von der Natur des Materials und wir schreiben auf den Faktor ϵ hinzu und fassen ihn Elastizitätsmodul. Wir haben somit die Formel

$$e = f(l, a, P, \epsilon) = \frac{Pl}{a\epsilon} \quad (1.)$$

Man könnte nun fragen, ob die Formel des Querschnitts

Einmal fassen wir die Ausdehnung, aber man wird sich noch
 einiger Überlegung fügen müssen, daß dieselbe sich wohl bei
 gleichem Querschnitt einem wirklichem festeren Körper
 bei allen übrigen Umständen setzen wir natürlich voraus,
 gesetzt und angenommen, daß die Form der Querschnitt der
 der ganzen Körper identisch sei.

Wir bemerken uns nun, als ob wir die Masse fest zu stellen
 sollten, dann ist es leicht zu sagen, was dann eigentlich die Größe
 E bedeutet. Angenommen nämlich, daß dieser Körper nicht eine
 Ausdehnung, sondern eine absolute Masse sei, so müßte sich
 dieser Widerstand ergeben, daß wenn wir einen in diesem
 Material für E einen der gleichen Stoff finden würde, ob man
 den Stoff durch eine gewisse oder starke Kraft ausdehnt, ob
 der Stoff fest oder weich wäre, gesetzt man voraus, daß eine
 Masse sei, so könnten wir annehmen und den Stoff so aus
 gedehnt denken, daß $e = l$ würde, wobei wir annehmen der
 Stoff habe den Querschnitt $a = 1$. für diesen Fall würde
 $E = P$ und E wäre die Kraft, die nötig ist, um einen
 Stoff von Querschnitt $= 1$ um seine ganze ursprüngliche Länge
 auszudehnen. für starke Materialien wäre dieselbe natürl.
 umgekehrt groß, für andere, wie Laute-choir ganz klein.

Die Gleichung (1) läßt sich auf andere schreiben

$$\left(\frac{P}{a}\right) = E \left(\frac{e}{l}\right) \quad (2)$$

wobei die in Klammern gesetzten Ausdrücke besondere
 Bedeutung haben:

$\frac{P}{a}$ bedeutet die Kraft mit der die Einheit der Quer-
 schnitte auszudehnt wird und diese Kraft nennen
 wir Spannungseinheit

e bedeutet folgendes: Wenn e die gesammte Ausdehnung
 und l die ursprüngliche Länge bedeutet, so drückt die
 für e und l um soviel jede Längeneinheit aus-
 gedehnt worden ist.

E bedeutet also:

$$\frac{P}{a} = P = \text{Tension der Spannung}$$

$$\frac{e}{l} = \lambda = \text{Linare Ausdehnung, ausdehnungsmaß}$$

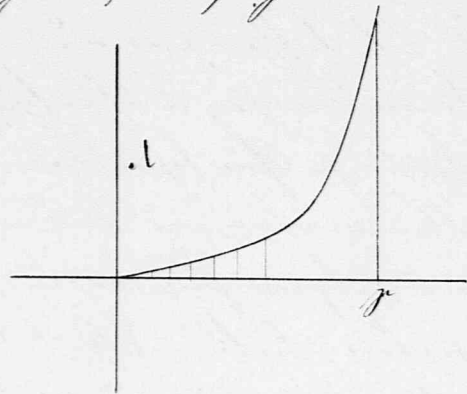
Nun ist die Frage ob die obige Definition richtig ist. Wir
 denken uns folgende Versuche gemacht: Wir lassen uns aus
 demselben Material Stücke von verschiedenen Längen u. Querschnitt
 herfertigen, daß sie vollkommen identische Querschnitte
 haben und vollkommen feingewogen sind. Man merke sich, daß
 dem ersten eine Reihe von Versuchen u. setzen ist man
 strecken, Pressen aus, abspalten, ziehen, drücken etc.
 u. erhalten eine Reihe von Resultaten für P u. e u. wenn
 man obige Ausdruck eine Masse ist, so weiß jeder irgend-
 ein dieser Versuche denselben Stoff für E geben.
 Eine Gleichung 1 folgt:

$$E = \frac{Pl}{ae} = \frac{\left(\frac{P}{a}\right)}{\left(\frac{e}{l}\right)} = \frac{P}{\lambda}$$

Bemerken wir für jeden einzelnen Versuch den Wert von $\frac{Pl}{ae}$
 und nennen wir eine Reihe von Versuchen, und wenn man
 immer die gleichen Stoffe findet können, so folgt daraus,
 daß unser hypothetischer Gesetz richtig wäre u. daß für
 diesen individuellen Stoff, E den Wert hat, den wir ge-
 funden haben. Bleibt nun nur noch die Frage, so ganzlich,
 daß E nicht ganz constant ist.

manuskript gewisser Grenzen verändert, ϵ & δ nicht, nicht,
wenn δ zu groß sind.

Obwohl diese Begrenzungsfunktionen über einer gewissen
Grenze hinausgehen, wenn man ϵ & δ dem Zustande
nähert, da der Modus, so wird die Elastizitätsmodul
auffallend variabel. Die Art & Weise wie die Elastizität,
kann man graphisch darstellen, wenn man auf der Abszisse
die Begrenzungsfunktionen und auf der Ordinate die mo-
duli ϵ & δ aufträgt über einer gewissen Grenze.



Ob die fig. ist dem entspricht, dass
für gewisse Begrenzungsfunktionen
 ϵ & δ konstant ist und man die
Grenze einer gewissen Grenze über-
steigen, so wird ϵ variabel. Das
ausgesprochene Gesetz ist also kein
Hooke'sches; denn von einem

Hooke'sches Gesetz gibt es keine Ausnahme, sondern es ist eine aus-
gesprochene Regel, welche mit der Wirklichkeit übereinstimmt,
so lange es sich um kleine Auslenkungen handelt.

Ob es kein Hooke'sches Gesetz ist, erfüllt eine der Axiome, dass
wobei ϵ dargestellt ist, dass eine Kurve kann man eine
Hilfskurve der einen gewissen Linie ist, wenn die Kurve nach
einem Gesetz gebildet ist.

Es wird also das erste Axiom nicht verletzt eine gewisse Linie
sein.

Die Kurve für ϵ Seite 36 der Kapitel.

Man hat aber z. B. nicht alles Materialien den gleichen
Elastizitätsmodul, sondern derselbe unterliegt bei den

verschiedenen Sorten der Materialien bedingenden Phäno-
menen. Man muss daher bei größeren Werken, Längen,
in individuellen Eigenschaften und Elastizitätsmodul für
das zu verwendende Material zuverlässig genau untersuchen,
u. darf sich nicht mit den mittleren Werten begnügen,
welche allerdings für die Konstruktion der Maschinen ausre-
ichend, u. wie sie in der Praxis für die verschiedenen
Materialien zusammengestellt sind.

Für die Festigkeitsbestimmung wird der Centimeter als
Längeneinheit, der Quadratcentimeter als flächeninhalt
u. der Cubiccentimeter als Cubiceinheit an.

Elastizitätsgrenze.

Man versteht darunter diejenige Grenze, von welcher von der
Elastizitätsmodul konstant zu sein; welche Grenze sich
allerdings nicht genau bestimmen lässt. Die Grenze der elas-
tizität für die verschiedenen Materialien siehe Kapitel
Seite 38.

Bleibende Veränderungen.

Man nimmt an, dass ein Material, das einem gewissen Grad, u.
dann die aus der Kraft resultierende, dem Material selbst über-
lässt, so zieht es sich wieder vollständig zusammen u. kehrt
ganz in seine ursprüngliche Lage zurück; es können also
in diesem Falle keine bleibenden Veränderungen vor. Es
ist das Verhalten eines Materials innerhalb der Elastizitätsgren-
ze. Wenn man aber den Material über die Elastizitätsgrenze
ausdehnt u. dann die Kraft wegnimmt, so zieht sich das Material
bedeutend zusammen, aber nicht mehr vollständig u. kehrt nicht

unserer ursprüngl. Lage zurück, es erleidet mithin
 eine bleibende Verformung. Demnach die Elastizitätsgrenze
 ist die Krischenschwelle, mit dem was man Stabilität
 nennt; über die Elastizitätsgrenze hinaus ist die Stabili-
 tät auf. für Material, das innerhalb der Elastizitätsgrenze
 nicht überschritten wird, leidet nicht an seiner Qualität.
 Man muß daher für praktische Anwendungen immer
 sorgen, daß diese Grenze nicht überschritten werde.

Zusammenziehung des Querschnitts.

Wir haben bis jetzt nur die Verformung an betrachtet, die
 von der Länge eines Stabes verursacht, in unelastisch gelassen,
 wird im Querschnitt vergrößert, der durch das Querschnitt und durch
 sowie auch die Verformung beständig, daß bei der Verformung
 des Stabes eine Abnahme des Querschnitts eintritt.
 Es ist sich der Stab aus, so zieht sich der Querschnitt zusammen
 in dieser Abnahme proportional vollständig, sowie die Verformung
 der Kraft vergrößert wird, aber proportional der Kraft als
 die Verformung innerhalb der Elastizitätsgrenze bleibt.

Absolute Festigkeit eines Materials.

Wir verstehen darunter die Kraft, die der Stab der
 Kraft, die notwendig ist, um einen Stab von 1 □ C. M.
 Querschnitt abzureißen. Man ist leicht einzusehen, daß die
 Kraft P , die notwendig ist, um einen Stab von Querschnitt
 a abzureißen, a mal so groß ist als die, welche einen Stab
 von 1 □ C. M. Querschnitt abzureißen kann. Gießen wir
 die letztere Kraft oder die absolute Festigkeit Q , so haben wir:

$$P = a Q.$$

Der Stab nun der abzureißen ist unabhängig von
 der Länge des Stabes, sondern nur unabhängig von der Form
 des Querschnitts; er ist nur abhängig von der Größe des
 Querschnitts und dem Material des Stabes.

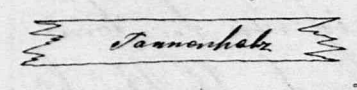
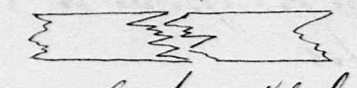
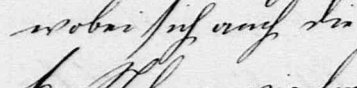
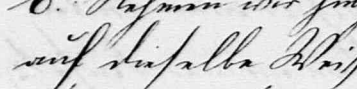
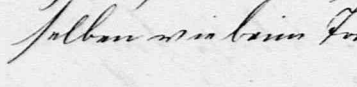
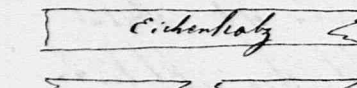
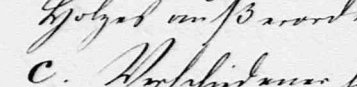
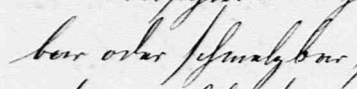
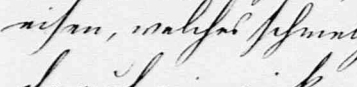
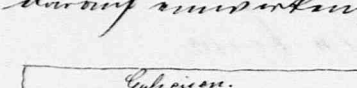
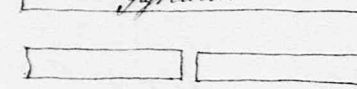
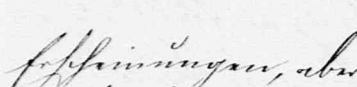
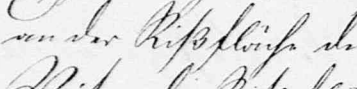
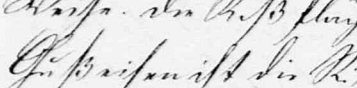
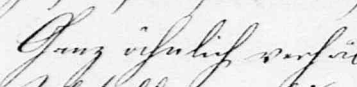
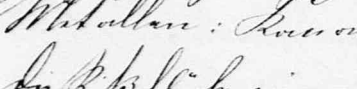
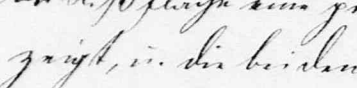
$$Q = \frac{P}{a}.$$

Um dies zu beweisen, muß man bei verschiedenen Stäben
 von verschiedenen Längen und Querschnitten immer denselben
 Bruch finden. In für Q gefundenen Brüche sind zu
 finden in der Tabelle in den Kapiteln Seite 36. Dabei
 sind die Kräfte in Kilogrammen ausgedrückt. Die absolute
 Festigkeit ist von der Elastizitätsmodul nicht bei allen
 Materialien ein und dasselbe. Stoffe gleich, sondern sie
 besonders z. B. bei Eisen. In Eisen ist die Kraft bei den
 Eisen abzureißen von Abstandsverhältnissen ist wird wirklich
 größer absolute Festigkeit haben.

Verhalten der Materialien beim Abreißen.

Wir danken uns, daß wir ein Material haben, mittels derer
 wir die Kräfte zum Abreißen und Zerschneiden bringen können, in
 diesen und dabei eintretenden Erscheinungen die Klarheit zu verschaffen.
 a) Wir nehmen einen Stab von einem Fuß, spannen denselben
 ein, dessen ist aus, indem wir die spannen Kräfte maß-
 maß vergrößern lassen. Haben wir die Elastizitätsgrenze
 überschritten, so ist der Stab in ganzen genommen gleich-
 mäßig aus, die Querschnitte nehmen ab und ab. wenn die
 Verformung bereits sehr stark geworden ist, so ist man zuversich-

ein Klingen, wie wenn ein Stein Instrumente reißt, ab reißt ein z. B. Eisen, das Klingen verursacht ist, ab reißt ein z. B. Eisen in. z. B. Eisen in.

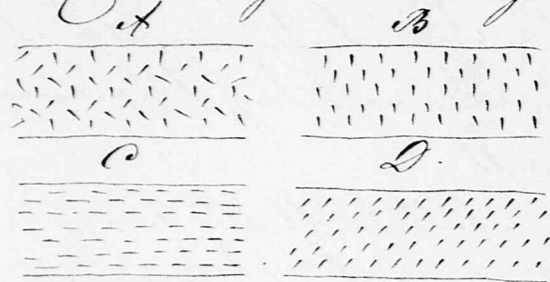
                    

Man kann dies auf ganz verschiedene Arten, indem man die
Zeichen als Abbildungen und als Ordinalien hin vorstellt man Lini-
en auftragen. Das Gesetz aber, welches die Länge

angezeigt ist nicht bekannt, es ist
ungefähr der gestalt der Linien
bei stehenden Körpern. Bedenkt
sind die Veränderungen der Länge.

stellt, die möglicherweise durch verschiedene Ursachen ein-
treten können.

Es ist weiter fraglich, ob die Festigkeit eines Materials durch
andere dynamische Einwirkungen, und durch verschiedene
nicht leicht. Dies ist eine Frage, welche man erst in der Physik
betrachten kann, die in der Physik erst
beantwortet werden muß. Von der physikalischen Seite auszugehen
muß man sich fragen, daß durch solche Veränderungen entstehen.
In verschiedenen Veränderungen im Inneren des Körpers, in der



Molekulargewegung, entstehen
Körper, welche sich in Flüssigkeit
und flüssigkeit verhalten
sich verhalten und die Körper
kann man durch (A) ein Atom

des Körpers verstehen, so können die Flüssigkeiten in
dem Körper, in welchem sie sich befinden. Die Atome sind durch ihre
untergeordnet waren, und können sich verhalten, sich verhalten
zu bewegen. Man jedes Atom ist eigentlich fest und ist in
unmittelbarer Kontakt mit den anderen. Man aber die Lage-
rung sich ändert, so tritt allerdings eine Änderung der flüssigkeit
und flüssigkeit verhalten ein; tritt z. B. ein Lagerung, wie bei

Ein, so wird bei dieser bestimmten Lagerung die flüssig-
keit bestimmt sein, bei der Lagerung. Es ist eine ge-
wisse in der flüssigkeit. Die flüssigkeit der flüssigkeit der flüssigkeit
Ansehen.

2. Zusammenrückung des Stäbe.

Ein Versuch zeigen, daß für die Zusammenrückung
der Stäbe ganz dieselben Regeln, wie für die Ausdehnung
gilt, so lange die Zusammenrückung nicht eine gewisse
Grenze überschreitet. Es gilt auch für die Regel, daß
die Zusammenrückung proportional ist der Länge der Stäbe;
es gilt der zusammenrückenden Kraft in. Verhältnisse zeigen,
kann man die flüssigkeit der Stäbe.

Der flüssigkeit mobil für die Zusammenrückung
ganz dieselben Regeln, wie für die Ausdehnung, in. Ein Versuch
zeigen, daß man die Zusammenrückung eine gewisse Gren-
ze überschreitet, dann wird das Gesetz nicht mehr richtig ist,
daß man der flüssigkeit mobil nicht mehr constant bleibt,
sondern bei fortgesetzter Zusammenrückung mehr in mehr
wächst; es zeigt sich auch, wenn bei der Zusammenrückung, daß
Veränderungen im flüssigkeit entstehen, zeigt sich der flüssigkeit
best, wobei man die flüssigkeit bei den eigentl. star-
ken Körpern nicht so gering ist. Man gilt auch für wieder,
daß eine flüssigkeit ganzes flüssigkeit, d. h., man wie in.
man Körper man in. Die zusammenrückende Kraft man
man, so steht der Körper vollständig in seiner ursprüngl.
Lage zu. Dies gilt aber nur so lange der Körper
nicht eine gewisse Grenze zusammenrückend wird, überschreitet
man flüssigkeit, so treten bedeutende Veränderungen ein, und man

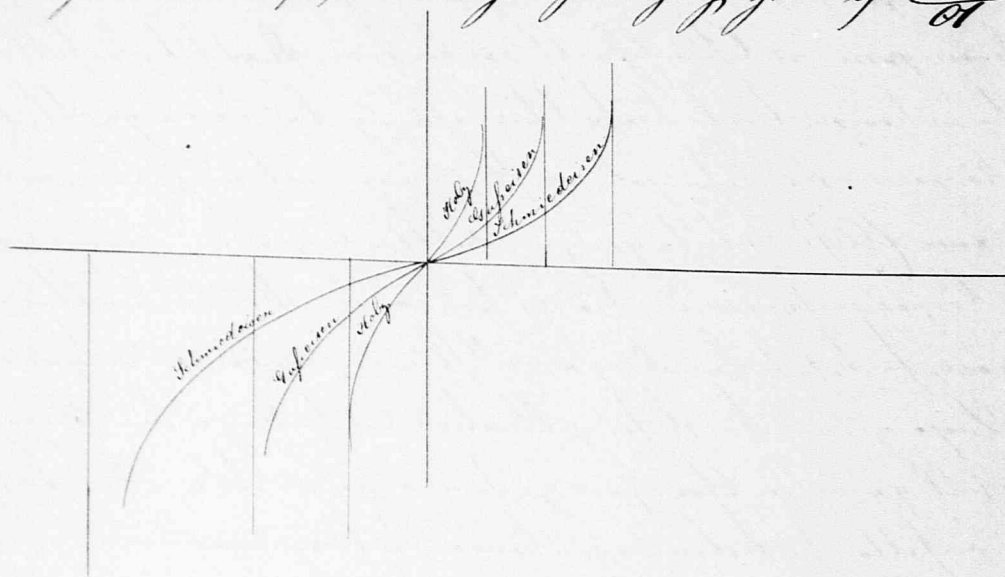
die Kraft wieder weg, so daß sich zwar der Körper wieder
 aus, allein nicht vollständig in seine frühere Lage
 zurück. Man kann annehmen, daß sich die Natur u.
 Qualität eines Materials nicht ganz verliert, so kann
 die Elastizitätsgrenze nicht überschritten ist, daß aber
 eine Änderung in der Molekularorganisation eingetreten
 ist, wenn die Folge einer bestimmten äußeren Einwirkung
 notwendig ist. Bei der Herstellung der Materialien zu
 bestimmten Zwecken muß also ein mehr diese Grenze über-
 schritten werden.

Absolute rückwirkende Festigkeit.

Als Maass für die absolute rückwirkende Kraft, die nötig ist,
 um 1 Kub. Zoll 1 Centn. Gewicht zu verschieben. Die
 Tabelle über die absolute Festigkeit Seite 37.

Man will nun das was in dieser Tabelle gegeben ist, graphisch
 darstellen. Als Abszissen tragen wir die Gewichtseinheiten
 auf, als Ordinaten die linearen Ausdehnungen.

Am besten ist es, wenn man sich für die Abszissen in. Ordinaten
 einen geeigneten Maassstab macht. für Holz z. B. ist $\frac{B}{\Delta} = 12$.



Man kann sich auf die Aufgabe stellen zu untersuchen, die
 Gleichung, die Linie selbst festzustellen, die in diesen Gesetzen
 liegt, so daß man auf folgende Weise vorgehen kann.

Es sei durch die Natur.

Bestand für ein solches Linien
 unverschieden gegeben und wird
 ist ist möglich, daß für

$$x = +a, y = \infty \text{ und} \\ \text{für } x = -a, y = -\infty$$

wird. Jetzt man nun von n.

um beliebigen Punkt n

Ungenantheit, so ist, wenn die zu diesen Punkten gehörigen Coordinaten
 den x in dy setzen.

$$\frac{dy}{dx} = \tan \phi.$$

Man weiß nun aus der Natur der Sache in sich selbst aus den
 Eigenschaften festzustellen, daß für $x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{c} \text{ wird,}$$

erfolgt auch

$$\text{für } x = +a, \frac{dy}{dx} = +\infty$$

$$\text{und für } x = -a, \frac{dy}{dx} = -\infty \text{ wird.}$$

Nach der Lagrange'schen Integraldifferentialformel erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{c} \frac{aa}{(a-x)(a+x)}$$

Es ist aber auf uns gesagt, daß die Curve, die dieser Gleichung
 entspricht wirklich existiert die Curve sei, die wir suchen.
 sondern die Differentialgleichung erfüllt nur die Anforderun-
 gen, die geschrieben sind; ohne daß damit gesagt ist, daß
 diese Curve auch wirklich der Natur Gesetz ist.

Um nun zu integrieren setzt man:

$$\frac{1}{(a-x)(a+x)} = \frac{1}{a+a_1} \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a_1+x} \right) \text{ und wir haben}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{aa_1}{\epsilon(a+a_1)} \left[\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a_1+x} \right]$$

$$y = \frac{aa_1}{\epsilon(a+a_1)} \left[\int \frac{dx}{a-x} + \int \frac{dx}{a_1+x} \right]$$

$$y = \frac{aa_1}{\epsilon(a+a_1)} \left[-\log \text{nat}(a-x) + \log \text{nat}(a_1+x) \right] + C.$$

$$y = \frac{aa_1}{\epsilon(a+a_1)} \left(\log \text{nat} \frac{a_1+x}{a-x} + C \right)$$

Um nun die Constante zu bestimmen, setzen wir $x=0$,
dann wird auch $y=0$ und

$$0 = \frac{aa_1}{\epsilon(a+a_1)} \left(\log \text{nat} \frac{a_1}{a} + C \right)$$

Da auch linker ist 0 , folglich muß

$$0 = \log \text{nat} \frac{a_1}{a} + C.$$

oder $C = -\log \text{nat} \frac{a_1}{a}$ und schließlich

$$\text{wird } y = \frac{aa_1}{\epsilon(a+a_1)} \log \text{nat} \left(\frac{a_1+x}{a-x} \times \frac{a}{a_1} \right)$$

und ausgerechnet sind wir nun

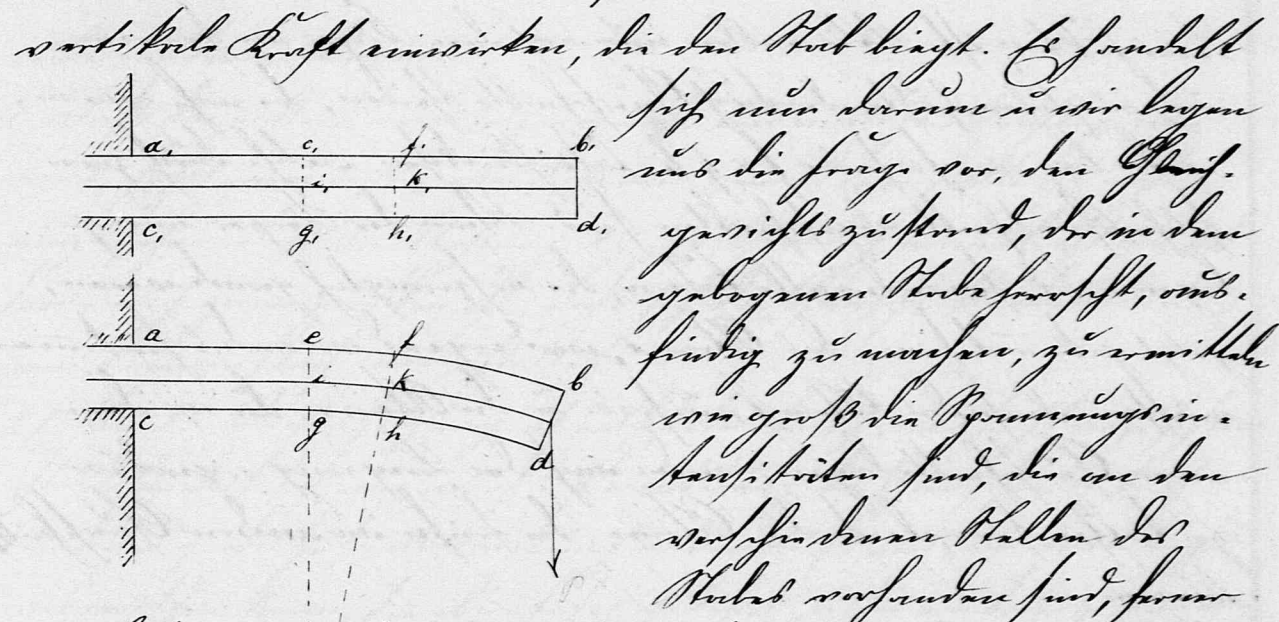
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\epsilon} \frac{aa_1}{(a-x)(a_1+x)}$$

Was wir bis jetzt gesehen haben war bloß Induction, aber wir
haben kein Naturgesetz, weil es nicht aus festgestellten
Erzugnissen folgt. Aber aus folgenden Gesetzen
bestimmen zu wollen ist etwas konträres.

Es gilt unendlich viel Annahmen, aber nur eine
einzige Wahrscheinlichkeit.

Biegung der Stäbe.

Wir denken uns einen Stab von bestimmten Dimensionen
in Querschnitt, dessen Enden an zwei Punkten sind
befestigt und auf dem Mittelpunkte der freien Enden eine ungewisse



vertikale Kraft einwirken, die den Stab biegt. Es handelt
sich nun darum zu wissen, wie groß die Biegung ist, die in dem
ganzen Stab vor sich geht, und wie groß die Krümmung ist, um
sich zu messen, zu ermitteln
von großem Interesse ist,
auszuweisen, daß die an den
Enden wirkenden Kräfte der
Stabverformung sind, sowie
zu bestimmen die ganze Gestalt des Stabes in so weit als möglich
die Krümmungen, welche jedes einzelne Element des
Stabes in Folge der Biegung erleidet. Ist dies Alles be-
stimmt, so haben wir den ganzen Zustand des Stabes erkannt.
Dies Alles fest zu bestimmen, ist zwar nicht möglich und
wir müssen uns damit begnügen, eine Annäherung zu gewinnen,
wie dies in der Physik von allen Messungen gilt, die sich auf
die Wirklichkeit beziehen, da in der Natur eine so große
Unmöglichkeit von Einwirkungen von Kräften vorhanden
ist, daß eine vollständige Lösung nicht möglich ist.

Obwohl das Grundproblem, das sich auf die Wirk-
lichkeit bezieht, nicht anders als eine unvollständige Lösung
erwartet, weil wir die Natur nicht kennen.

Wir nennen nun eine Reihe von Stäben, welche in der
Längsrichtung in einer in derselben geraden Linie liegen, eine
Längsreihe, eine Reihe, in. können wir den Körper
bestimmen, den eine Reihe von Stäben bilden, wobei aber das Wort Stab
nicht mehr in demselben Sinne zu verstehen ist, wie oben.

ein fiktiv ist. Wir wollen uns auf den Körper in seinem ursprünglichen Zustande durch Querschnitts stellen, die wir aus in. ander liegen, so sind e, f, g, h feststehend, welche durch zwei solche Querschnitte abgegriffen sind. Wenn der Körper nun zerbröckelt wird, so werden alle Teile, die ursprünglich gerade waren, jetzt gekrümmt sein, das A, B, C, wird irgend wo anders sein können, wir wissen, dass das A, B, C, in f, w. in die A, B, C, die in dem einen Querschnitt liegen, werden nach der Längung irgendwo zu liegen sein, ebenso die A, B, C, die früher in dem Querschnitt waren.

Folgt müssen wir Hypothesen aufstellen: Wir nehmen an:

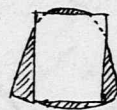
1. dass alle A, B, C, welche ursprünglich in einem Querschnitt lagen, auch nach erfolgter Längung auch in einem A, B, C, liegen in. zwei in einer Ebene stehen zur Krümmungslinie ab, d. h. das e, g, normal sei im Punkte e auf ab.
2. dass die A, B, C, eines u. desselben Querschnitts ihre relative Lage gegeneinander nicht ändern.
3. dass alle ursprünglich geraden parallelen Teile im zerbrochenen Zustande parallel oder wenigstens nahe Linien zur Seite ab bilden.
4. Wir nehmen nun so gewisse Längung u. Formänderung an, dass für dieselbe der elastische Widerstand als konstant angesehen werden kann.

fragen wir uns, ob diese Voraussetzungen richtig sind, oder ob sie es nur annähernd sind und unter welchen Umständen diese Voraussetzungen mit der Realität am meisten übereinstimmen können u. unter welchen Umständen nicht. Dies ist absolut notwendig zu wissen, weil es von dieser Kenntnis davon abhängt, unter welchen Umständen die in Resultate, die aus der Bestimmung herfort, mit der Messung

überinstimmen können.

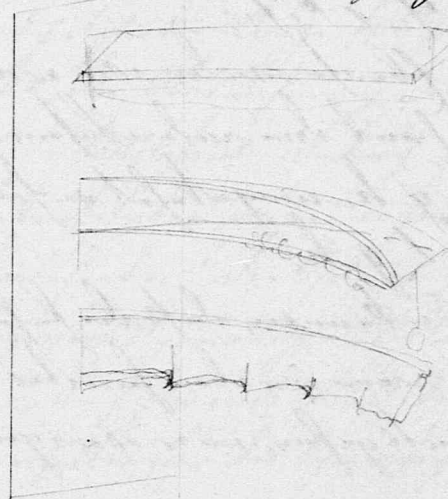
1. dass die erste Voraussetzung wohl nur annähernd richtig sein wird, sicher nur wohl, aber dass dies genau sein sollte ist nicht einzusehen, dass die Krümmung e, g, vollständig normal ist auf ab, sowie auch zu vermuten ist, dass sich der Querschnitt aber in ein Krummfläch umgestaltet.

2) die 2te Voraussetzung ist ebenfalls falsch, was leicht einzusehen ist. Man darf sich nur an die Veränderung des Querschnitts durch Ausdehnung oder Zusammenziehung erinnern. Es wird, wie man leicht bemerken kann, die oberste gerade Linie in die in der gestrichelten gedrückt sein, so ist daher selbst unmöglich, dass sich der Querschnitt conserviert. Ist z. B. der Querschnitt ein Rechteck, so wird er nach der Ausdehnung, wie die in der gestrichelten Figur dargestellt dargestellt.



ferner ist einzusehen, dass man sich von den A, B, C, die ursprünglich in Querschnitt lagen, in Folge der Längung ganz aus diesem Querschnitt herausdrängen u. ferner manche A, B, C, ganz in den Querschnitt hineindrängen. Das Gesagte muss man sagen, dass unsere Voraussetzungen die zerbrochenen Körper nicht nur in der Längung, sondern sehr schwer ist, ganz ohne eine Annahme ist.

3. Die 3te Voraussetzung ist wohl zu weilen richtig, unter anderen Umständen aber falsch. Wenn wir z. B. ein Kristall so anspannen, dass die Querschnitte senkrecht ist, so wird unsere Behauptung richtig sein. Nunmehr wir die Fäden hängen so ein, dass die Querschnitte senkrecht ist, so tritt die Voraussetzung nicht ein. So können ja auch wir bei fig 2.



Abwiesungen eintragen, so wie auch bis jetzt 3 Stellen auf der
untern Seite. Obgleich unsere Theorie auch solche Fälle, wo Abw.
erfolgen oder sollen eintragen nicht ausschließt.

Die Abwiesungen haben nicht bloß den Sinn in der Deutung, daß
sie nur die Befragung möglich machen, sondern sie zeigen auch an,
was wieder aus, was von großer Wichtigkeit ist, als müssen wir
bis jetzt 4 Bedingungen erfüllt werden, damit irgend ein consens
hieser Linie seinen Zweck ausprägen kann. Aber wir sind nicht
in der Lage, das für gegeben mit mathematischer Gewissigkeit zu
formulieren; sondern wir können nur vermuten ob diese 4 Beding-
ungen erfüllt sind. Es kommt aber für unsere Zwecke einparat.
auf viel an, daß wir uns in die Lage für einfügen, weil allemal
die Befragungen nur Abwiesungen sind, in der Voraussetzung
unter denen sie aufsteht, sind, wissen, weil wir sie nicht rasch
kennen, vorausgesetzt werden.

4 dies ist eine Bedingung, die zum Zweck der Befragung gemacht
wird; aber sie muß erfüllt sein, damit ein consens
Zweck ausprägen.

Der gegenwärtige eigentliche Befragung über.

Es werden gleich erkannt, daß das fupersensitiven e, f, die
Längung größer geworden ist, daß also $ef > e, f$.

Es findet jedoch eben Abwiesung statt. Obgleich wir auch
daß es sich mit dem anderen fupersensitiven
sensitiven g, h, ungenügend erfüllt
und $gh < g, h$.

Es ist zu erkennen, daß die fupersensitiven
sensitiven, wenn wir oben vermuten
in einwärts gehen, immer weniger

ausgedehnt werden, hingegen immer länger werden, wenn wir
von unten fupersensitiv, also die Linie sensitiv abwärts. Es muß
also notwendig sein, daß irgendwo eine fupersensitiven vorhanden,
das wieder ausgedehnt, noch zu fupersensitiv wird, daß also seine
ursprüngliche Länge beibehalten soll. Ganz die gleiche Deutung.
Nun kann man ausstellen für je 2 Normalen abwärts und
es wird für je 2 Normalen sich am fupersensitiven finden, das
wieder ausgedehnt noch zu fupersensitiv gedrückt ist. Alle diese fupersensitiven
sensitiven zu fupersensitiv, bilden eine gewisse Linie, deren
Gesamt nur bis jetzt noch nicht bekannt ist und wir neutral
sagen müssen wollen.

Nun ist e, i, k, m die neutrale fupersitiv, befindet in derselben
alle fupersensitiven solange es vor der Längung.

Es ist also $i, k = i, k, = e, f, = g, h$,
und es drückt es zugleich aus, in welche ursprüngliche fupersitiv
sensitiven waren, die zwischen e, g, u, f, h, liegen. Wir setzen
nun durch k eine Linie $no \neq eg$.

Beide fupersensitiven 2 drückt es auf k, k, h, o, aus welchen wir
erkennen können, um wieviel jedes einzelne nach der fupersensitiv
sensitiv ausgedehnt worden ist. Beispiels z. B. das fupersensitiv
das jetzt in Länge ist, ist ursprünglich die Länge p, q, folglich
da die Abwiesung, abwärts ist es die Abwiesung des oberen
fupersensitiven. Dadurch sind wir jetzt in der Lage die Symmetrie
in Betrachtung zu bringen, die von den fupersensitiven Stellen
stehen. Die Symmetrie ist bekannt ist aber die Linie 1 2 durch
beide Symmetrie. Stellen wir uns bei e, f einen kleinen fupersensitiv
vor, der jemanden Kraft des fupersensitiven fupersensitiv
sollten wir die Symmetrie e - f. dagegen für die Symmetrie

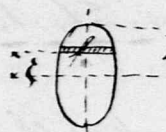
bei $p_{01} = s$. die Spannung in Kaufsituation anfallende
 Substanz, wie bei der statischen Dehnung, gezeigt wurde, wie die
 Dehnungswegungen.

$$\text{Also } P: s = n\bar{s} : q\bar{r} - k\bar{n} : k\bar{q}$$

$$P: s = L : \xi$$

$$s = \frac{P}{L} \xi \quad (1)$$

die Gleichung (1) gilt also nur, wenn s nur ein $\square$ aus s besteht
 wird. Man denkt sich nun bei s einen sehr kleinen Pfeil.



prüfen und den ganzen Querschnitt, dessen Flächenein-
 halt f sei; so ist die gesamte Kraft mit der alle
 Teile dieses Querschnitts gespannt werden $s f$, und
 folglich die Summe aller Spannungen im ganzen Querschnitt.

$$\sum s f = \sum \frac{P}{L} f \xi = \frac{P}{L} \sum f \xi \quad (2)$$

Da die Gleichung (2) auf den ganzen Querschnitt bezogen ist, so
 gibt sie also die Differenz zwischen der Summe aller Spannungen
 und aller Pressungen, die im ganzen Querschnitt stattfinden, an.

Wir setzen wir nun das stat. Moment der Kraft mit welcher
 das flächenelement f gespannt wird, in Bezug auf einen Ort,
 der durch k geht und senkrecht auf der Ebene der Kräfte ist
 $s f$ ist die Kraft, mit der das flächenelement in Abstände
 ξ von der neutralen Faser gespannt wird.

Also ist $s f \xi$ das statische Moment der Kraft $s f$ und
 $\sum s f \xi$ die Summe der stat. Momente aller Spannung
 und Pressungen.

$$\text{oder } \sum \frac{P}{L} f \xi = \frac{P}{L} \sum f \xi^2$$

man muss wissen, dass alle Kräfte nach einem Punkt zu

daher das Lasttraben haben.

Daher wir uns nun den Rest bei k durchspalten. in
 sechs der q & Pressungen in der einzig der faserungsgewichte
 Kräfte zerlegt, welche dieselben ersetzen in. Denken
 wir uns dann ferner das Material vollständig fest; so
 sehen wir alsdann einen Körper auf den mit einer
 Kräfte einwirken in. müssen die 6 Kräfte zur Ladung
 und der Gleitgewichte aufstellen. Wir setzen durch
 in dasselbe eine Linie $p p$ k und dazu eine Perpendikular
 davon gehen wir 2 Kräfte $P \sin \varphi$ und $P \cos \varphi$ stellt



der einen P ; ferner nehmen
 wir in k ein 3tes Kräfte $P \sin \varphi$
 system an, eine $P \cos \varphi$ die
 # in der Ebene der Kräfte
 liegt und $\perp k p$.
 die 2te L steht bei $k p$ &
 die Ebene der Kräfte &
 die 3te ist $k p$.

so wirken dann in Richtung p der 2. & 3. die Kräfte:
 $P \sin \varphi$ in die Richtung zwischen der Summe aller Span-
 nungen in Pressungen.

Die also Gleitgewichte pressen soll, so muss sein:

$$1. \frac{P}{L} \sum f \xi = P \sin \varphi$$

In der Richtung der 2. & 3. wirken keine Kräfte, also
 ist man 2. $0 = 0$.

Wir setzen nun, dass wir bei k noch eine Kraft F in
 der Richtung von $k p$ anbringen müssen, welche wirklich
 bevor der Rest durchspalten, vorhanden war, und welche

man Abfederungskraft weilt, dann ist diese in der jetzigen
Gleichgewicht möglich, für die Kräfte der dritten Lage y
wirken also P & $P \cos \varphi$ und abwärts die 3^{te} Gleitung.

$$F = P \cos \varphi$$

Um die Lage y wirken nun drückt die Kraft P und

$$P \leq f \xi$$

$$\text{Man set also } P \leq f \xi^2 = P f \quad (1)$$

Um die Lage x & z wirken gar keine Kräfte, in man set

$$0 = 0 \quad (2)$$

$$0 = 0 \quad (3)$$

Um diese Gleichungen analytisch zu behandeln, ist folgende
Annahmefolgerung zu machen: Man nehme an, daß die Lage-
ung so beschaffen sei, daß wir ξ annimmt = 0 setzen können,
was in der That auch wirklich der Fall ist.

Für $\xi = 0$ ergaben sich dann die Gleichungen.

$$F = P \quad (1)$$

$$\sum f \xi = 0 \quad (2)$$

$$P \leq f \xi^2 = P f \quad (3)$$

N. in Worten ausgedrückt: Bei (1) ist die in der jetzigen
Lage, wie wir sie annehmen, die Abfederungskraft
gleich der Lastkraft.

Die Gleichung 2 drückt aus, daß der Punkt k der Abfederungskraft
der Schwerpunkt ist, in der That für jeden Querschnitt gilt, so ist
also die Abfederungskraft gleich der Lastkraft im Kleinen.

Nehmen wir in Gleichung (3) $\sum f \xi^2 = E$, so ist E eine
Größe, die von uns von der Größe in Form des Punktes
abhängt, in Punkt k für verschiedenen Querschnitt der Last T in
den Result. ausgehend; man set dann auf die Gleichung

$$P f = D \varphi$$

$$\text{oder } P = \frac{D \varphi}{f}$$

selbst Gieß die Bewegung in Hinsicht mit drückt, die an der obersten
Stufe in der Entfernung ξ von der Lastkraft steht.
Nicht man nun diesen Punkt von P in die Gieß.

$$s = \frac{P}{f} \xi \sin \varphi$$

$$\text{so erhält man } s = \frac{D \varphi}{f} \xi = \frac{D}{f \xi} (\varphi \xi)$$

$$\text{oder } s = \left(\frac{D}{f \xi} \right) \varphi \xi$$

Man kann also die Bewegung mit, die in jedem Punkt steht,
findet mittels dieser Gleichung berechnen, und da die Größe
in der Abfederung für jeden Punkt denselben Wert hat, so braucht
man also diese Größe nur mit der jeweiligen Entfernung
des Punktes von der Lastkraft ξ mit der vertikalen derselben
von der Abfederungskraft zu multiplizieren.

Mittels dieser Regel kann man sich leicht eine genaue Vor-
stellung derjenigen Punkte machen, in denen gleiche Bewegung
intensitäten herrschen.

Diese setzen wir immer eine sehr kleine Lage voraus, wir
sollen uns nun aber erklären die erhaltenen Resultate auf
starke Bewegungen zu übertragen in. und es muß so stark, daß
der Lauf erfolgt. Das letztere formal folgt, daß der Lauf bei d.

bestimmen muß; und zwar findet er dann statt, wenn die
Drehung bei d , also die Lastung gleich der elastizität ist.
Diese Lastung P muß also berechnet werden.

$$\text{Es ist } PE = P\psi.$$

Legen wir uns nun mit L diejenige Formung in Kauf, die
beim Biegen der Stab tritt, und nennen diese den Biegecoefficienten
des Materials.

$$\text{Nicht auf } L. E = Pl.$$

$$\text{oder } P = \frac{L \cdot E}{l}. (1)$$

Dieser Biegecoefficient findet sich für verschiedene Materialien in
den Resultaten gegeben, und man versteht also darunter diejenige
Formungsbemessung bei der ein Stab von 1^{er} Querschnitt
biegt.

Beispiel. für einen Stab von Eisenblech, dessen Länge $l = 200$,
Breite $b = 10$ und die Höhe $h = 20$ ist, diejenige Last P zu
suchen, bei der der Stab biegt.

Man findet in d. Ref. $L = 100$, $E = \frac{1}{6} bh^3 = \frac{1}{6} 10 \cdot 400 = 666$.

$$\text{Also ist } P = \frac{100 \cdot 666}{200} = 333 \text{ Kilo.}$$

Die Gleich (1) drückt also das Tragvermögen eines Balkens aus,
w. zwar wird das nicht sonst gleichen Umständen um so größer
sein, je größer E ist, und also werden wir also in der Folge mit
diesem E zu beschäftigen haben, d. h. E hängt, wie wir gesehen
haben, von der Form des Querschnitts ab.

Wir müssen deshalb diejenige Querschnittsform ausfinden,
die so beschaffen ist, daß E den größtmöglichen Querschnitt
hat bei gleicher Querschnittsgröße.

Die die Gleichung von E sehen wir schon, daß E um so größer

sein wird, je größer ξ ist; d. h. es wird bei denselben Formen
um so größer sein, bei denen sich das Material in größerer
Formung von derartiger Form besser befindet.

Als Hilfe dieser Regel kann man immer leicht aufsuchen, welche
von jenen verschiedenen gegebenen Querschnittsformen der
größte Längswert zu besitzen.

Formen von E für einige Querschnittsformen (Satz v. Ref.)
Aus der Formel $E = \frac{L}{l} \xi$, ^{ist es leicht} daß man nun das Tragvermögen
von dem Querschnitt zu berechnen sehen, und dieses durch
 L dividieren müssen.

1. Der Querschnitt sei ein Rechteck. so ist dann $L = \frac{1}{2} h$.

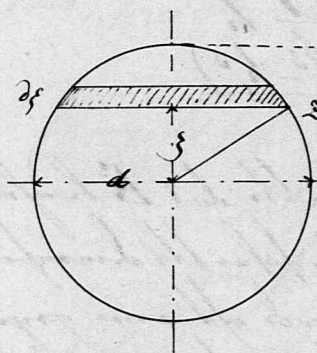


$$\xi = b dz$$

$$\text{und also } \xi^2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b^2 dz = \frac{b^2 h^3}{12}$$

$$\text{folglich } E = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{6} b h^3$$

2. Der Stab sei cylindrisch



Dann ist $L = \frac{1}{2} d$ und die Breite ist die

$$\xi = 2 \left(\frac{d}{2} \right)^2 - z^2$$

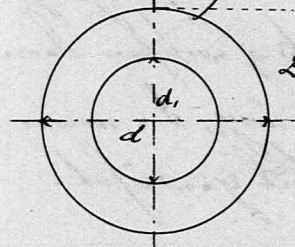
$$\text{folglich } \xi = 2 \left(\frac{d}{2} \right)^2 - z^2$$

$$\text{und } \xi^2 = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} 2 \left(\frac{d}{2} \right)^2 - z^2 dz$$

$$\text{Also } E = \frac{1}{12} \pi d^4 = \frac{\pi}{32} d^4$$

$$E = \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{\pi}{32} d^4$$

3. Der Stab sei ein fester Cylindr.



so ist $L = \frac{1}{2} d$.

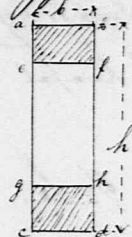
$$\text{Dann ist } \xi^2 = \frac{\pi}{64} d^4 - \frac{\pi}{64} d^4$$

28.

$$\text{Also } E = \frac{\frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4)}{\frac{1}{2} d} = \frac{\pi}{32} \frac{d^4 - d_1^4}{d}$$

$$= \frac{\pi}{32} \frac{d^2 - d_1^2}{d} \frac{d^2 + d_1^2}{1} = \frac{\pi}{32} (d^2 - d_1^2) (d + \frac{d_1^2}{d})$$

4. der Stab sei ein Querschnitt, wie beistehend sich zeigt.
Man wird also zuerst das Kräftemoment des Kräfte abet
brauchen, in dem der der Kräfte efg abtragen, in dem wird
das Kräftemoment des verbleibenden Querschnitts erhalten.

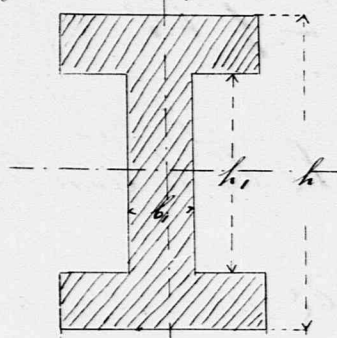


$$\text{Man set } z = \frac{1}{2} h$$

$$\text{und } z f s^2 = \frac{b h^3}{12} - \frac{b h_1^3}{12}$$

$$E = \frac{\frac{1}{12} b h^3 - \frac{1}{12} b h_1^3}{\frac{1}{2} h} = \frac{1}{6} \frac{b}{h} (h^3 - h_1^3)$$

5. der Querschnitt habe die I form. Hierbei denken wir uns
ein großes Rechteck in zusehen von diesem die beiden Klammern ab.



$$\text{Es ist } z = \frac{1}{2} h$$

$$\text{Also } z f s^2 = \frac{1}{12} b h^3 - 2 \left(\frac{1}{12} \frac{b-b_1}{2} h_1^3 \right)$$

$$\text{folgt } E = \frac{\frac{1}{12} b h^3 - \frac{1}{12} (b-b_1) h_1^3}{\frac{1}{2} h}$$

$$= \frac{b_1 h_1^3 + b (h^3 - h_1^3)}{6 h}$$

Man wird also für vorgegebenen Querschnitt das E berechnet
haben, legen wir uns die Frage vor, welche Querschnittsdimensionen
ein Balken annehmen muß, damit er ein Gewicht G am gege.
benen Last mit Pfeilspitze zu tragen. Wir setzen voraus, daß
die Materialgewinnung, die im Stab geschehen darf, bei einem
kleinen sein muß als diejenige, bei welcher der Balken ansetzt;
und man verfaßt nun nach dem Verhältniß zu wissen den
Längscoefficienten in derjenigen Materialgewinnung, die man
einsetzen lassen will, der Pfeilspitze, die im Stab geschehen.

29.

Es bezieht z. L. im Stab geschehen die 10fache Pfeilspitze, also
nach demselben 10 mal so stark belastet darf, bis es bricht.

Wir wollen nun ein einzigen Längscoefficienten die Längscoefficienten der
Querschnittsdimensionen erhalten.

Nimm z. für einen Stab aus Eisen, dessen Querschnitt runde.
Kugelform Länge 200 cm beträgt, der Querschnittsdimensionen
berechnen, wenn derselbe mit 2000 Kilg. belastet wird, und ein
10fache Pfeilspitze geschehen soll.

$$\text{Es ist also } P = \frac{200}{10} = 20$$

$$\text{und } E = \frac{1}{6} b h^2$$

$$\text{oder mit } P = \frac{P}{E}$$

$$\text{so ist auch } P = \frac{P}{E} b h^2$$

$$\text{oder } 2000 \cdot 200 = \frac{20}{6} b h^2$$

$$\text{und } b h^2 = \frac{6 \cdot 2000 \cdot 200}{20} = 120000$$

Da nun b und h willkürlich angenommen werden kann, n. sich
dies je nach den Umständen, wenn der Balken ansetzen soll,
richtig, so wollen wir für diesen Zweck ein Verhältniß von

$$\frac{b}{h} = \frac{1}{5} \text{ annehmen.}$$

$$\text{Es ergibt sich } \left(\frac{1}{5}\right) h^3 = 120000 \text{ oder } h^3 = 120000 \cdot 5 = 600000$$

$$\text{also } h = \sqrt[3]{600000} = 84.3 \text{ cm}$$

$$\text{und folgt } b = \frac{1}{5} h = 16.8 \text{ cm.}$$

2. Es soll ein runder Stab aus Eisen angenommen werden, der
bei 100 cm Länge mit 4000 Kilg. belastet wird, um zusehen
Pfeilspitze geschehen.

$$\text{Es ist also } P = \frac{4000}{10} = 400$$

$$\text{und } E = \frac{\pi}{32} d^3$$

$$\text{so ist } 400 \frac{\pi}{32} d^3 = 4000 \cdot 100$$

$$\text{oder } d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2000 \cdot 100}{400 \cdot 3 \cdot 142}} = \sqrt[3]{10000} = 21.5 \text{ cm.}$$

Dies soll auf die Querschnittsform für einen complicirten Querschnitt bestimmt werden, z. B. für die I-Form.

$$\text{Es ist } Pl = IE$$

$$E = \frac{1}{6h} (b, h,^3 + b(h^3 - h,^3))$$

$$Pl = \frac{1}{6h} [b, h,^3 + b(h^3 - h,^3)]$$

Dies werden wir die Querschnittsdimensionen zu nehmen sein, daß die Biegemomentenlast bei d einen gewissen Nachschub.

$$\text{Gesetzt man } P = 50 \cdot 45 = 3750 \text{ Kilg.}$$

$$l = 250 \text{ cm.}$$

$$I = \frac{3000}{10} = 300.$$

$$\frac{3750 \cdot 250 \cdot 6}{300} = \frac{1}{6} h (b, h,^3 + b(h^3 - h,^3)).$$

$$18750 = \frac{1}{6} [b, h,^3 + b(h^3 - h,^3)]$$

In dieser Gleichung sind diesmal 3 Größen, die man willkürlich annehmen kann, wobei jedoch Bestimmungen sehr ungünstig ist, da dies zu einer bestimmten Form od. anderen Abmessungen wesentlich beitragen in Betracht kommen kann, ohne die Festigkeit zu verlieren.

Nehmen wir also folgendes an.

$$h = 20b, h, = 18b, b = 3b,$$

und setzen diese Werte in obige Gleichung ein, so erhalten wir.

$$18750 = \frac{b,^3}{20} [18^3 + 3(20^3 - 18^3)]$$

$$18750 = \frac{b,^3}{20} [5832 + 3(8000 - 5832)] = 617 b,^3$$

$$\text{Also } b, = \sqrt[3]{\frac{18750}{617}} = \sqrt[3]{30.3} = 3.1.$$

$$b, = 3.1.$$

$$h = 20 \cdot 3.1 = 62.$$

$$h, = 18 \cdot 3.1 = 55.8.$$

$$b = 3b, = 9.3.$$

Die folgenden Eigenschaften kann man die schon betrachteten Konstruktionen zu Hilfe nehmen, oder diese willkürlichen Werte nach Bedarf bestimmen.

Dies sollen wir die Gestalt der neutralen Faser bestimmen. Sie liegt in der Symmetrie der Normalschnitte der Linien sind, so ist der Mittelpunkt der Logarithmischen ef, ik mit gk , also auf $ko = oi$, der Krümmungshalbmesser für die neutralen Faserstücke.

Setzt man nun $ko = oi = g$; $kn = L$.

und bemerkt ferner, daß $\Delta oik \sim \Delta nfk$,

so ist auf $oi : ik = kn : nf$.

$$g : ik = L : nf$$

$$g : L = ik : nf.$$

$$\text{Daraus auf } \frac{L}{g} = \frac{nf}{ik}$$

$$\text{und } \frac{L}{g} = \frac{E}{E} (2)$$

Es ist dieses auf der Querschnittsform der Verteilung der Faserstücke ef, ik beruht auf ik ; es ist dies aber auch gleich der Biegemomentenlast.

beruht auf den Abständen der Faserstücke.

Setzt man für diesen Nachschub die Gleichung (1),

$$\text{so erhält man } \frac{L}{g} = \frac{P \cdot l}{E \cdot I} (3)$$

Legt man nun mit $QW = \varphi$ in $ko = 0$, die Biegemomente der Faserstücke.

für ρ einen vernünftigen Werth gesetzt, so fällt man eine Differentialgleichung:

$$\rho = + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2 - \partial y^2} \quad (4)$$

Wenn man σ als constant annimmt, so ist auch $\rho = 0$

$$\text{und folglich } \rho = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \quad (5)$$

Die Integration dieser Gleichung ist nicht gut möglich, deshalb muß man sich mit einer Annäherung begnügen.

Für sehr kleine Krümmungen kann man $\sigma = \frac{1}{2} \rho x^2$ setzen

$$\text{und es ist dann } \rho = + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

$$\text{oder } \frac{1}{\rho} = + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \quad (6)$$

Diese Gleichung muß richtig gemacht werden, da die Curve concav gegen die Abzisseneraxe liegt; dieser letztere Punkt wird in Gleich. (3) eingesetzt.

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = \frac{P}{EEL} \psi \quad (7)$$

Durch Integration erfüllt man $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = - \frac{P}{EEL} \frac{1}{2} \psi^2 + C \quad (8)$

Setzt man $\psi = 0$ so ist $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$.

$$\text{und folglich } 0 = - \frac{P}{EEL} \frac{1}{2} l^2 + C \quad (9)$$

Einsetzt man für C in (8) dies, so erhält:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{P}{EEL} (l^2 - \psi^2)$$

Integriert man, so ist: $\sigma = \frac{1}{2} \frac{P}{EEL} (l^2 \psi - \frac{1}{3} \psi^3 + C)$

Setzt man nun $\psi = 0$, so ist $\sigma = 0$ und folglich $C = 0$.

$$\text{Man erhält endl. } \sigma = \frac{1}{2} \frac{P}{EEL} (l^2 \psi - \frac{1}{3} \psi^3) \quad (10)$$

Aus dieser Formel sieht man, daß die Krümmung sehr ungleich

am Ende, wo die Last angewandt ist am kleinsten ist; gegen das Ende, wo sie am größten ist; woraus man sieht, daß an dem befestigten Ende die Krümmung stark u. am belasteten Ende für denselben Krümmungswert ist.

Biegung des Stäbe mit Berücksichtigung ihrer eigenen Gewichte.

Bei den vorhergehenden Untersuchungen wurde das Gewicht des Balkens nicht berücksichtigt, wir wollen nun sehen, welchen Einfluß dieses auf die Krümmung hat. Der Balken wird nicht nur allein durch die Last P gebogen, sondern das Gewicht

des Balkens selbst wird denselben niedriger ziehen. In einem solchen Falle liegt der Schwerpunkt in der Mitte; denkt man sich in diesem die ganze Masse des Balkens vereinigt, so erfüllt man das stat. Moment, welches den Balken um den Punkt a abzuheben strebt. $\frac{1}{2} P l$. Um dies zu zeigen, setzt man P , so erfüllt man die Bedingung aller Kräfte in der Krümmung, welche in dem Punkte a herrschen.

$$M + \frac{1}{2} P l = P E.$$

Aus dieser Formel erhält man auf die Länge des Balkens. Betrachtet man den Balken, daß ein Balken an beiden Enden unterstützt wird u. in der Mitte belastet; so kann die

ganze Belastung $\frac{1}{2} P$, die Länge l , das Gewicht des Balkens $\frac{1}{2} P$, so ist leicht einzusehen, daß derselbe

in der Mitte befestigt wird. der Druck, den in diesem Falle die Spitze auszuüben soll, ist

$$Pl + \frac{p^2}{2}$$

der Gleitgewichtszustand wird nicht geändert, wenn wir die Spitze verschieben, dafür aber eine Kraft $P + \frac{p^2}{2}$ anbringen. so wird immer der Gleitgewichtszustand nicht geändert, wenn wir den Wert in obigen Formeln bei c einmischen. die Kraft mit welcher der Balken bei c abzubiegen steht ist daher:

$$(P + \frac{p}{2})l - \frac{p}{2} \frac{l}{2} = Pl + \frac{p^2}{2} - \frac{p}{2} \frac{l}{2}$$

$$\text{oder } Pl + \frac{p^2}{4} = PE.$$

wohin die Spannung geht. bezieht, die in der untersten Stelle herrscht. Es sei nun ein Balken ebenfalls auf 2 festen Unterstützungen, in. ab wirkt ein dergleichen ein Gewicht $2P$ am einen beliebigen Punkt C ein, ferner sei der Balken die Länge $2l$.

Wir nehmen nun bei B die Spitze weg in. bringen statt dergleichen eine gleich große entgegengesetzte Kraft x an, wodurch der Gleitgewichtszustand nicht geändert wird. das Moment von x

muss ungleich sein der Summe der Momente, die den Balken in. halten, d. h. $x \cdot l = 2Pl + \frac{p^2}{2}$.

$$\text{und folglich } x = \frac{2Pl + \frac{p^2}{2}}{l} = 2P + \frac{p^2}{2l}$$

Nun wenn man den Balken bei C einmischen, und bei B die gleiche Kraft x einwirken lässt, so wird

der Gleitgewichtszustand ebenfalls nicht verändert.

Es ist nun die Summe der stat. Momente die den Balken bei C abzubiegen streben:

$$(\frac{2P}{2} + \frac{p}{2})c' - \frac{p}{2} \frac{c'}{2} = \frac{2Pc'}{2} + \frac{pc'}{2} - \frac{p}{4} \frac{c'^2}{2} = \frac{2Pc'}{2} + \frac{pc'}{2} (1 - \frac{c'}{2l})$$

$$= \frac{2Pc'}{2} + \frac{pc'}{2} (\frac{2l - c'}{2l}) = \frac{2Pc'}{2} + \frac{pc'}{4l} (2l - c')$$

$$\text{oder } PE = \frac{cc'}{l} (P + \frac{p}{4}).$$

Ein Balken liegt auf 2 Stützen in. in nachstehendem Fall. sein Gewicht G ist gegeben.

Lösung der Aufgabe, wie die vorige.

In dem Augenblick I muss der Balken Gewicht des Balkens ausgeübt werden. Es ist daher die abwärts gerichtete Kraft:

$$(P + \frac{p}{2})l - Pl - c - \frac{1}{2} \frac{p^2}{2} =$$

$$Pl + \frac{p^2}{2} - Pl - Pc - \frac{p^2}{4}$$

$$= Pc + \frac{p^2}{4}$$

das ist aber wieder die Summe der stat. Momente, welche den Balken bei C abzubiegen streben.

$$\text{so ist also } PE = Pc + \frac{p^2}{4}$$

Nun ist es darüber fraglich, für einen solchen Balken das Tragvermögen zu bestimmen, so müssen wir zu erst aus zu. mittel zu finden, an welcher Stelle der Balken am meisten zu. Mod. wird, wasfalls der Lauf erfolgen würde.

Aufgaben dieser Art können immer aufgelöst werden, wenn man
von einer dieser drei Aufgaben zu finden ist.

$$M = P\psi + \frac{p}{2}\psi^2 \text{ oder } M = P\psi + \frac{p}{2}\psi^2$$

$$\text{und } M + \frac{p}{2}\psi^2 = \frac{p}{2}\psi^2 + PE.$$

Das Max Moment wird bei α erfolgen wo, ψ ein Maximum
erreicht

$$M + \frac{p}{2}\psi^2 = PE.$$

Die Aufgabe ist jedoch nicht in allen Fällen so einfach.
Für alle diese Fälle kann man immer eine kleine Linie ziehen.
Man muß nur diese zu finden, welche das Moment überwinden
wobei ein beliebiges Gewicht zu bringen steht.

$$P\psi + \frac{p}{2}\psi^2 = P\psi + \frac{p}{2}\psi^2 = PE.$$

Die Bedeutung der Gewichtszahl, welche in der ersten
Zeile steht, ist:

$$\psi : l_k = L : n_f.$$

$$\psi : L = l_k : n_f.$$

$$\frac{L}{\psi} = \frac{n_f}{l_k} = \frac{P}{E}$$

$$\frac{1}{\psi} = \frac{P}{E \cdot L}$$

$$\text{Es ist aber } \frac{1}{\psi} = -\frac{\partial v}{\partial \psi} = \frac{P\psi + \frac{p}{2}\psi^2}{E \cdot L}$$

$$\text{Also } \frac{\partial v}{\partial \psi^2} = -\frac{P}{E \cdot L} \left[\psi + \frac{p}{2L} P\psi^2 \right]$$

$$\text{Nun ist } \frac{\partial v}{\partial \psi} = -\frac{P}{E \cdot L} \left[\frac{1}{2}\psi^2 + \frac{p}{2L} \frac{\psi^3}{3} + C \right]$$

Es ist aber für $\psi = L$, $\frac{\partial v}{\partial \psi} = 0$
dieses angeseht, erhält man

$$0 = -\frac{P}{E \cdot L} \left[\frac{1}{2}L^2 + \frac{p}{2L} \frac{L^3}{3} + C \right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial \psi} = \frac{P}{E \cdot L} \left[\frac{1}{2}L^2 - \psi^2 + \frac{p}{2L} \frac{1}{3}(L^3 - \psi^3) \right]$$

$$v = \frac{P}{E \cdot L} \left[\frac{1}{2}L^2\psi - \frac{1}{3}\psi^3 + \frac{p}{6L}(L^3\psi - \frac{1}{4}\psi^4) \right]$$

Diese Formel ist, wie wir sie bestimmt haben, unvollständig und zu
einen Leistungen unvollständig, wenn die ungenutzten
Korrekturen sind nicht ganz genau; allerdings ist es,
liegt es keinem Zweifel, daß dieselben um so genauer sind,
je geringer die Leistung ist u. für vorstehend kleine
Leistungen kann man sie als Korrekturen gelten lassen, als
dann für jene Leistungen gilt das nicht mehr.

Bei diesen Aufgaben ist nur nichts notwendig, was
den, allein bei der weiteren Verarbeitung, haben wir wieder
Anmerkungen gemacht, welche aber als ungenügend
unvollständig. Für gewisse Leistungen können wir dann auf
unserem ersten Thema festhalten, für stärkere Leistungen

Man dankt sich Geschehen in der Halle, wo die größte
Umfassung stattfindet, mit Material, so wie die der Lauf von
der stärksten Bewegung anbreiten, da die rickwirkende
Festigkeit mit größer ist als die absolute. für diesen Fall wird
da diese unsere Bewegung richtig sein.

Anders jedoch ist es wenn wir einen Punkt von Bewegung haben,
als ist für diesen unser Goh, die rickwirkende Festigkeit bereits ab-
was kleiner als bei Geschehen, bereits etwas kleiner als die abs.
Denn wir haben einen Punkt von **I** form ansetzen, so erfolgt
der Lauf nicht von der gegebenen, sondern von der gegebenen
Seite, so würde diese für diesen Fall unsere Bewegung unrichtig
sein.

Da wir einen anderen Gesichtspunkt haben als jedesmal ungenutzt
sein, wenn man nimmt. das Material der Bewegung, wo die
Festigkeit stattfindet, so wird der Lauf von der gegebenen
Seite anfangen.

Man kann auch der Fall vorkommen, dass der Gesichtspunkt
so gewählt ist, dass er gegen das Breiten sowohl als auch gegen
das Strecken gleich fast ist, ist der Fall, so wird der
Lauf von 2 Stellen anfangen und es ist unrichtig, dass die
so gewählte Form die Ursache ist.

Obwohl diese Fälle nicht Richtigkeit gewahren werden, wenn
man die Form nicht bei Ruhe lassen will.

Festigkeit gegen das Abschieben.

Die absolute Festigkeit, bei der Überwindung in. Zeitpunkte
größerung der Höhe sind nur zwei Punkte auf entgegen gesetzte
der Richtung wirkende Kräfte. Man kann aber auch auf

einen Punkt Kräfte einwirken lassen, die der Richtung
auf entgegen gesetzte sind, aber deren Angriffspunkt klein ist
den übrigen nicht mehr einflussreich, in welchem Fall
Abweichungen einbreiten.

Lassen wir auf einen Punkt z. B. solche Kräfte in der oben
angewiesenen Weise einwirken, so wird eine Abweichung
des wirklichen Punktes erfolgen.

Es werden also die Abweichungen, welche von 2 bewirkbaren Ge-
sichtspunkten von einander abgelesen werden.

Diese absolute Kraft kommt besonders bei kurzen Massen
und Abweichungen vor, sowie bei Fortbewegung, wobei man die
Umschweifung erkennt, dass im Centrum keine, dagegen
auf der Seite die absolute Kraft größer ist. größer
wird.

Man antwortet die Frage, wie groß die Abweichungsfestigkeit
gegen eine gewisse Kraft ist.

Es ist ungenügend, dass für diese die selben Gesetze gelten,
als für die absolute Festigkeit. die Abweichung richtet sich nach
der Natur des Materials und ist dem Gesichtspunkt der Bewegung
gegenüber.

Man kann nun auch sehr diesen Punkt, so wie die die Ab-
weichungen von der einbreiten, wo die Kräfte einwirken.
Es würde sich ganz anders verhalten, wenn man die Abweichung
nicht Kraft stellt auf die Abweichung einwirken zu lassen, die selbe
wenn es mögl. wäre auf die Abweichung einwirken. dasselbe Gesichtspunkt
einwirken zu lassen.

Dies, dass man die Kräfte, die aufgestellt worden sind, ist
unzureichend, dass die Aufhängungskraft so groß ist als die ab-
solute Festigkeit.

Die rückwirkende Festigkeit.

Lassen wir einen verhältnismäßig kurzen Stab, so vor-
kürzt sich derselbe in der Tat nach dem Gesetze, welche wir vor-
her besprochen haben. Anders verhält es sich mit einem längeren
Stab, wenn man ihn unterstützt in der Mitte, und er ebenfalls
zusammengedrückt, wird aber die Dehnung größer, so
wird er gebogen in. Zu dem kann man dann die wirkliche
Länge des Stabes während der Dehnung nicht mehr feststellen.
Für Pendel, Ritzgen etc ist es aber von großer Wichtigkeit
die Größe der Dehnung zu erfahren, welche sie zu tragen
vermögen ohne sich zu biegen. Ferner ist es von Interesse zu
erfahren, die Verminderung in Festigkeit infolge der Biegung, die in dem
Stab geschehen u. mittels der Formel für einen solchen Stab zu be-
rechnen.

Bei genauer Betrachtung der Sache, würde dies zu Schwierigkeiten
führen, und es ist daher nur auf das Resultat hinzuwirken und
mit einer Annäherung begnügen. Hier ist nämlich die
Voraussetzung, dass Biegung u. Compression in dem ganzen Stab
geschehe, und es ist dies zu folgern, dass die mittlere Faser von
der Oberen Klemme verläuft, so es kann gesagt werden, dass
die mittlere Faser nach außen fällt in. Dies die Dehnung
nicht bestimmt, nur die Annäherung für die 2 Voraussetzungen,
die wie bei der Biegung aufgestellt haben wir, u. setzen wir eine
Voraussetzung hinzu, nämlich dass die Querschnitte gleich groß

aber nicht zusammengepresst werden können.
Es sei $ACD = ABD$.

$$Ap = x$$

$$M_p = y$$

P_y ist das Biegemoment.

$$\text{ferner ist } \rho : L = LK = MH.$$

$$\text{oder } L : \rho = \frac{MH}{LK} = \frac{P}{E}$$

$$\text{Daher ist man } PE = Py \quad (1)$$

$$\text{und } \frac{MH}{LK} = \frac{P}{E} \quad (2)$$

und unter der Voraussetzung einer sehr kleinen Biegung ist
man

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3)$$

Aus diesen 3 Gleichungen folgt nun:

$$- \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} L = \frac{1}{E} \frac{Py}{L}$$

$$\text{woraus: } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - \frac{P}{EL^2} y \quad (4)$$

$$\text{Dies integriert, wird } y = El \sin \sqrt{\frac{P}{EL^2}} x + El \cos \sqrt{\frac{P}{EL^2}} x$$

für $x = 0, y = 0, L = 0$, ist:

$$y = El \sin \sqrt{\frac{P}{EL^2}} x \quad (5)$$

Setzt man nun $ACD = l, ABD = c$, so muss für $x = \frac{c}{2}$
 y ein Maximum werden, folglich muss sein:

$\sin \sqrt{\frac{P}{cEL}} \frac{c}{2} = 1$ oder $\sqrt{\frac{P}{cEL}} \frac{c}{2} = \frac{\pi}{2}$, woraus folgt

$$c = \pi \sqrt{\frac{cEL}{P}} \quad (7)$$

Die Länge muß nun richtigiert werden, um den richtigen Wert von El zu bestimmen. Das dies aber bei gewisser Vergrößerung auf Abstrichkeiten führt, so begnügen wir uns mit einer Annäherung. Wir vermuthen den Logarithmus der Dehnung und es ist dann:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + El^2$$

$$\text{oder } l^2 = c^2 + 4El^2$$

$$\text{folglich } El^2 = \frac{1}{4}(l^2 - c^2) \text{ oder } El^2 = \frac{1}{4}l^2(1 - \left(\frac{c}{l}\right)^2)$$

$$\text{oder } El = \frac{1}{2}l\sqrt{1 - \left(\frac{c}{l}\right)^2} \quad (8)$$

Setzt man für c seinen Werth ein (7)

$$\text{so bekommt man } El = \frac{1}{2}l\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{4} \frac{cEL}{P}} \quad (9)$$

Die Gleichung stellt sich daher wie natürl. nach dem Werth von P . Setzt man sich die Kraft sehr groß, so wird der Haken stark gebogen, nimmt man von der Dehnung etwas mehr weg, so wird die Länge kleiner werden, und uml. wird es ein Längel geben, der der Haken anfangs zu tragen vermöge. Man findet dies. Längel, wenn man den Querschnitt der Abstrich. verfahren klein macht.

Dann also $1 - \frac{\pi^2}{4} \frac{cEL}{P} = 0$ heißt der Haken zerbricht.

folglich bei der Dehnung

$$P = c \pi^2 \frac{EL}{4}$$

Setzt man $L = \frac{1}{2}$, so erhält man auch

$$P = \frac{c}{2} \pi^2 \frac{EL}{4} \quad (10)$$

Will man dies für einen runden Querschnitt ausrechnen, so muß man $E = \frac{\pi}{32} d^3$ setzen, und ist für $k = \frac{d}{2}$.

$$\text{folglich } P = \frac{c}{16} \pi^2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 \frac{\pi^3}{4}$$

$$\text{und } P = \frac{c}{64} \pi^3 \frac{d^3}{l^2}$$

Es bedeutet also die Poliz. Kraft, welche ein runder Haken gewöhnlich tragen kann ohne sich zu biegen. Man sieht aus dieser Formel, daß die Tragkraft von dem Modulus der Elastizität, der Länge in dem Haken, der Haken abhängt und daß bestenfalls die besten Haken im großen Tragkraft besitzen.

Einem Gesleylinder set man

$$E = \frac{\pi}{32} \frac{d^4 - d_1^4}{d^2} \text{ in } k = \frac{d}{2} \text{ zu setzen.}$$

$$\text{folglich } P = \frac{c}{16} \pi \frac{d^4 + d_1^4}{2(d^2 - d_1^2)} = \frac{c}{64} \pi^3 \frac{d^4 - d_1^4}{l^2}$$

Einem rechteckigen Querschnitt.

$$\text{ist } E = \frac{1}{6} bh^2 \text{ in } k = h.$$

$$\text{folgl. } P = \frac{c}{12} \pi^2 \frac{bh^3}{l^2}$$

Will man solche Haken z. B. bei einem Längel ausrechnen, so muß man dieselben bis auf 5, 10 bis 20 auf die Größe hinweisen, ist werden. Setzt man z. B. einen runden Haken aus Eisen, dessen: $l = 600 \text{ cm}$ ist so zu construieren, daß derselbe eine Last von 2000 Kilg. mit 20fache Vorsicht tragen.

$$\text{Es ist also } P = 20 \times 2000 = 40000; c \text{ ist für } = 1000000$$

$$\text{und die } P = \frac{c \pi^2}{64} \frac{d^4}{l^2}$$

$$\text{so ist } d = \sqrt[4]{\frac{64 P l^2}{c \pi^2}} = \sqrt[4]{\frac{64 \times 40000 \times 36000}{1000000 \times 10}}$$

$$\text{folglich } d = \sqrt[4]{9216} = 17 \text{ cm.}$$

Also wird der Durchmesser der Haken 17 Centimeter sein.

Festigkeit der Kaper gegen das Verwinden,
oder das Torsionsvermögen.

Wir nehmen eine Platte und befestigen an derselben einen
cylindrischen Linsal von Eisen, die außen gegen die Platte
stehen alle in einer 2. dinsten Platte, die erste Platte
selbst ist an einem Ort befestigt.
Nehmen wir nun die Platte B
gegen A, so kommt das Ganze
in einen anderen Zustand und
die Dinsten nehmen die Form von
Parabeln an, so werden die
Kräfte auch nicht mehr in einer
Ebene liegen, sondern eine Krümmung
bilden, nur die Querschnitt
bleibt gerade in dem veränderten
Zustand.

Wenn wir nun einen 3. dinsten Zustand herbei, wir befestigen einen
Linsal der dinsten, in der Platte B der dinsten, so daß
sich wieder in einer Ebene zu liegen kommen, dies ist nur
möglich, indem einer der Querschnitte finen und die anderen
finen drückt.

Es ist dann a, γ , a
oder a, $\angle$ A.

Man sieht daher leicht, daß Kräfte vorhanden sein müssen,
welche die Platte finen und anderen, die die Platte finen zu
drängen bestraft sind; und zwar finen die Kräfte um die Querschnitt
finen, welche verdrängt sind, die Platte finen, dinsten
müssen die finen, die finen verdrängt sind, die Platte finen.

zu drängen bestraft sind. Wenn nun von der Querschnitt
radial auswärts geht, so findet man die Dinsten immer hin-
ger in. Wenn nun von der Querschnitt radial auswärts geht,
dinsten immer länger werden, man weiß auch, auf einen
Pfeil kommen, bis die dinsten unter der Kräfte verdrängt.
Länger sind und nennt diese mächtige Pfeile.
Bei einem Kabe von unersinnem Material finden ganz isul.
Veränderung statt.

Wir werden nun in der Folge, die dinsten, die in einem Kabe
von beliebigem Querschnitt zu drängen, unterziehen, wenn auf
dinsten dinsten drängen Kräfte einwirken.

Wir nehmen zuerst beliebig einen egl. Kabe, wobei, wobei
über dem auf einen beliebigem Querschnitt übergehen.

Wird der dinsten werden die Querschnitt in. dinsten der
Querschnitt bis ist gegenwärtig verdrängt sein. die Querschnitt
nun, die finen auswärts gegenwärtig,
liegen, wobei dinsten dinsten
ist gegenwärtig dinsten
wieder in ist dinsten. Lange zu
dinsten finen finen in. dinsten

mit einer Kraft, die wir als proportional der Verdrängung an-
nehmen wollen. Wenn nun dinsten dinsten dinsten
dinsten dinsten soll, so muß die Querschnitt der dinsten dinsten
dinsten Kräfte gleich sein der dinsten dinsten. welches die dinsten
dinsten bewirkt. Wir nehmen nun einen beliebigem
Querschnitt an in. stellen und die Querschnitt der Lange der
Querschnitt zu dinsten dinsten dinsten der dinsten dinsten
dinsten dinsten Querschnitt dinsten dinsten a, die dinsten

die Intensität der Anziehungskraft von der Stelle M, T.
 Wie groß wird nun die Summe der Anziehungskraft irgend
 eines flüssigkeitsförmigen Massen, das von der Oberfläche aus
 ist? Wir setzen, so ist nun die gewöhnliche Annahme.

$$T: \rho = x: a.$$

$$x = \frac{T}{\rho} a \quad (1)$$

Es sei ferner die Größe der
 flüssigkeitsförmigen Masse, so setzen wir

$$M = \rho \cdot f.$$

Setzen wir nun diese Anziehungskraft H des flüssigen
 Körpers in eine vert. u. horiz. Kraft, so erhalten wir.

$$H = H \cos \varphi \quad (2)$$

$$P = H \sin \varphi$$

während die Koordinaten des flüssigkeitsförmigen sind:

$$\varphi = x \sin \varphi \quad (3.1)$$

$$v = x \cos \varphi$$

Die Punkte 2 u. 3 in Gleichung 1 eingesetzt

$$\text{gilt: } H = \frac{T}{a} \cdot \frac{f}{x} = \frac{T}{a} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$\text{u. } P = \frac{T}{a} \cdot \frac{f}{x} = \frac{T}{a} \cdot \frac{1}{\sin \varphi}.$$

Dasselbe gilt für jedes andere flüssigkeitsförmige also und es ist
 daher die Summe der Kräfte der alle flüssigkeitsförmigen vert. u. horiz.
 Richtung zu finden:

$$\sum H = \frac{T}{a} \sum \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$\sum P = \frac{T}{a} \sum \frac{1}{\sin \varphi}.$$

Da aber nach der Voraussetzung im Falle der Vereinigungen
 über keine Anziehung in horiz. u. vert. Richtung stattfinden sollen

so muß $\sum H = 0$ und $\sum P = 0$ sein.

Das ist aber nur mögl. wenn

$$f \cos \varphi = 0 \text{ sind.}$$

d.h. der Punkt T ist der Schwerpunkt des flüssigkeitsförmigen.
 der Schwerpunkt fällt also mit der Schwerpunkt des Körpers zusammen.
 Wir setzen nun die Gleichung:

$$f \cos \varphi = \frac{T}{a} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$\text{und } \sum f \cos \varphi = \frac{T}{a} \sum \frac{1}{\cos \varphi}$$

Das ist die Summe der stat. M. der Anziehungskraften, mit
 denen die einzelnen flüssigkeitsförmigen in ihrer inneren gl. Lage zu-
 rückgehalten werden, und es muß diese Summe gleich sein
 dem stat. Moment M der Kräfte, das die Drückung bewirkt.

Man setze dies in die Gleichung:

$$M = \frac{T}{a} \sum \frac{1}{\cos \varphi} \quad (4.)$$

diese Gleichung gibt uns also die Größe welche die Kräfte haben
 müssen, damit eine Umformung zum Kräfte T stattfinden.

Mit Hilfe dieser Formel können wir M für versch. flüssigkeitsförmigen
 Formen berechnen, indem wir nur berücksichtigen, daß $\sum f \cos \varphi$
 das Trägheitsmoment des flüssigkeitsförmigen ist in Bezug auf ein
 Centrum durch den Schwerpunkt geht und senkrecht auf der Ebene
 des flüssigkeitsförmigen steht.

Für einen massigen Cylinders ist

$$\sum f \cos \varphi = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi x dx x^2 = 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} x^3 dx.$$

$$= 2\pi \frac{1}{4} \left(\frac{d}{2}\right)^4 = \frac{d^4 \pi}{32}$$

$$\text{folglich } M = \frac{T}{a} \frac{d^4 \pi}{32} = T \frac{\pi}{16} d^3$$

für einen festen Zylinder ist:

$$\alpha = \frac{d}{2}$$

$$\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{1}{2}d} 2\pi x \partial x = 2\pi \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{1}{2}d} x^2 \partial x = 2\pi \frac{1}{3} x^3$$

$$= \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{16} (d^3 - d_1^3) = \frac{\pi}{24} (d^3 - d_1^3)$$

$$\text{und } M = \frac{T}{2} \cdot \frac{\pi}{24} (d^3 - d_1^3) = T \frac{\pi}{48} (d^3 - d_1^3)$$

für einen röhrenförmigen Zylinder ist:

$$\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{1}{2}d} 2\pi x^2 = \frac{\pi}{12} (h^2 + b^2)$$

$$\text{und } \alpha = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + b^2}$$

$$\text{also } M = \frac{T \pi (h^2 + b^2)}{24} = \frac{T \pi}{6} \sqrt{h^2 + b^2}$$

Torsionsfestigkeit.

Man versteht darunter das Mom. d. j. Kraft, welche im Rande ist um das Material zu verdrehen, daß der Riß erfolgt.

Dabei nehmen wir an, daß diese Festigkeit zu bestimmen, daß bei unserer Bestimmung der Grundgesetz der Festigkeit auf sich für die allmähliche Verformungen gelte.

Das Rißsen des Materials wird nur dann eintreten, wenn die Tot. der Verformungskraft einen gewissen Werth erreicht hat, der von der Natur des Materials abhängig ist und nur durch Versuche bestimmt werden kann. Diese Werthe von T finden sich Seite 36 in den Result. aufgezählt.

$$\text{für einen Zylinder ist } M = T \frac{\pi}{48} d^3 \quad (1)$$

$$\text{also } T = \frac{48M}{\pi d^3} \quad (2)$$

Läßt man einen röhrenförmigen Zylinder aus einem Material abheben für Torsion ausfallen, so geht daraus hervor, daß die Torsion zulässig ist und daß man dem Material entsprechende Festigkeitscoefficienten geben darf. Die Versuche ergeben mir für Torsion ausfallen.

$$\text{Für } M = T \frac{\pi}{48} d^3$$

ist möglich. Daß die Länge einer Welle keinen Einfluß auf die Torsionsfestigkeit hat. Daß der Versuch in der 3. Bestimmung vorüber ist sehr vorteilhaft, da man sonst zu colossalen Werten kommen würde.

Damit die Welle die Torsion mit Rücksicht auf die Welle konstruirt man sie mit 20-30 facher Vorsicht, d. h. man setzt in obiger Gleichung statt T einen aliquoten Theil $\frac{1}{20} - \frac{1}{30}$. Man soll nun z. B. eine röhrenförmige Welle, auf die ein Torsionsmoment von 100 000 Kilg. einwirkt mit 30 facher Vorsicht konstruiren.

$$\text{Für ist: } T = \frac{4500}{30} = 150$$

$$\text{und } d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 100000}{150 \cdot 0,142}} = 15$$

Bestimmung des Torsionswinkels.

Der Torsionswinkel ist der Winkel um den das Ende einer Feder gedreht wurde. Wir fassen nun diejenige Feder in die Länge, die um α von der Einsparung aufwärts ist und nennen den zu bestimmenden Torsionswinkel θ (der α in Graden der Radius ausgedrückt).

$$\text{Es ist also } \alpha \theta = c b.$$

$$c b = l \lg \alpha$$

Da wir annehmen, daß die Windung der Faser einer Spirale ähnlich
sei, ist auch folgt $\alpha \Theta = l \lg \alpha$.

od. da wir kleine Verwindungen annehmen.

$$\text{so ist auch } c b = l \alpha$$

$$\text{und also } \alpha \Theta = l \alpha \quad (1)$$

Wir setzen nun eine 2te Hypothese; es sei nämlic. die Festigkeit
der Wundungskraft proportional dem α , also

$$T = G \alpha.$$

G bezeichne nun von der Natur des Materials abhängige
Größe und man nennt es den Modulus der Faser. für Torsion.
Dann ist also $\alpha \Theta = l \frac{T}{G}$

$$\text{oder } \Theta = \frac{l}{\alpha} \cdot \frac{T}{G}$$

setzen wir für T seinen Werth aus Gl (6) ein,

$$\text{so w. wir } \Theta = \frac{l}{\alpha} \cdot \frac{2 \pi M}{\pi r^2} = \frac{2 \pi l M}{\alpha r^2}$$

Wir müssen nun mit $\frac{2 \pi}{360}$ dividieren um den Werth von Θ
in Grade zu erhalten; d. h. mit der Logarith. Divisions. Mittel
von 10 multipliziert.

$$\text{Dann ist } \Theta^\circ = \frac{2 \pi l M}{\alpha r^2} : \frac{2 \pi}{360} = \frac{360 l M}{2 \pi \alpha r^2}$$

Nun wenn wir bei unscr. Formeln für α r^2 in
die Formeln einsetzen, so erhält man:

$$\text{für einen cyl. Stab: } \beta = \frac{16 M l}{G} \cdot \frac{360}{\pi r^2}$$

$$\text{für einen quadr. Stab: } \beta = \frac{6 M l}{G} \cdot \frac{180}{\pi a^2}$$

$$\text{für einen gewallteij. Stab: } \beta = \frac{3 M l}{G} \cdot \frac{b^2 + a^2}{b^3 a^3} \cdot \frac{180}{\pi}$$

Nach dieser Lösung, muß sein, so müssen wir für Kräfte und
denselben Material von verschiedener Länge, Form u. Größe
des Querschnitts für Torsion denselben constructiven Werth
finden, nämlich:

$$G = \frac{360 l M}{2 \pi \Theta r^2}$$

setzt man den Werth ein, so findet man daß G
für kleine Verwindungen constant ist, allein wenn das
Torsionsmoment eine gew. Gränze überschreitet, ist es variabel.
u. man nennt die Gränze bis zu welcher es constant bleibt
Mod. der St. für Torsion. die Werthe von G finden sich in der
Tab. Seite 36 und betragen ungefähr $\frac{1}{10}$ der all. Festigkeit.

Festigkeit der Gefäße.

Wir nehmen ein Gefäß, dessen innerer Durchmesser d ist und
dessen Wandstärke δ . Wir nehmen ferner an, daß dasselbe
eine Flüssigkeit enthält, die auf jeden $\square \text{ cm}$ der Wandstärke
einen Druck p_0 ausübt, von außen wirkt auf das Gefäß eine
Flüssigkeit mit einem Druck p , auf den $\square \text{ cm}$.

$$\text{Es sei } p_0 > p.$$

Wir denken uns, daß ein Theil der Kraft p_0 des Gefäßes durch
seine ganze Stärke ausgeübt würde.

formt sie P die bei ab u. cd senkrechte Spannung u. l die
Länge des Gefäßes ab, so ist $l \delta$ die Größe des Querschnitts
bei ab u. bei cd. u. $2 l \delta$ die Fläche des Querschnitts bei ab
und bei cd.

folglich $2 l \delta P (1) =$ der Druck der Kräfte welche
den Querschnitt bei ab u. cd spannen. der obere Theil der
Wand spannen soll, so müssen diese andere Kräfte entgegenwirken.
bei.

Es sind also die inneren in. äußeren Kräfte p_0 und p_1 .

Am die inneren Kräfte zu bestimmen nehmen wir ein kleines Flüssigkeitselement $mn = ds$, der Druck der auf dasselbe wirkt. nicht wird ist $l p_0 ds = N$.

Demgegenüber wirkt die radial auswärts wirkende Druck in einem Flüssigkeitselement in vert. Druck. der Radialdruck ist

$$V = N \sin \varphi = l p_0 ds \sin \varphi$$

$$\text{und da } m q = ds \sin \varphi$$

$$\text{so ist auch } V = l p_0 m q.$$

Man ist die Summe aller radialen Drücke auf die Längenelemente bc : $\sum V = \sum l p_0 m q = l p_0 \sum m q = l p_0 D(2)$

Demnach der innere Druck drückt man ganz abwärts, daß die obere Hälfte der Kugel abwärts gedrückt wird mit einer Kraft

$$l p_0 (D + 2d) \quad (3)$$

Auf die obere Kugelhälfte wirken also die Kräfte:

$$l p_0 D - l p_1 (D + 2d) \text{ in } 2dD$$

da Gleichgewicht herrscht, ist folglich

$$l p_0 D - l p_1 (D + 2d) = 2dD$$

$$\text{und } p_0 D - p_1 D + 2 p_1 d = 2dD$$

$$p_0 D - p_1 D = 2d(D - p_1)$$

$$\text{und endlich } d = \frac{1}{2} D \frac{p_0 - p_1}{p_1} \quad (1)$$

Diese Formel gibt uns also die Abweichung der in p_1 Kugelhälfte an, wenn man die Kräfte p_0 und äußere eine Kräfte p_1 stellt, bis welcher es nicht kommen soll.

Wir sehen bei der obigen Lösung, si. Abweichung angenommen, daß die Druckkräfte in allen Punkten zwischen a und c gleich sind; wenn dies der Fall wäre, so wäre unsere Lösung richtig. Diese Voraussetzung ist aber nur annäherungsweise richtig.

wenn die Abweichung klein ist, für starke Abweichung ist sie falsch, denn bei starker Abweichung ist die Spannung nicht. innen bei weitem stärker als außen.

Wir müssen nun eine weitere Bedingung zu erfüllen, daß die Spannung gleichmäßig vertheilt, nach innen die Spannung ist. von a bis b abwärts; dann müssen wir die Summe aller Spannungen von a bis b in c bis d nehmen und dies in Gl. (1) einsetzen. Dies durchzuführen wäre sehr schwierig. Es soll deshalb für unsern Zweck umgekehrt werden, wie es sich im Laufe findet.

$$\text{Es ist } d = \frac{1}{2} D \left[\frac{p_0 + p_1}{p_1 + p_0 - p_0} - 1 \right] \quad (2)$$

$$\text{und } d = \frac{1}{2} D \left[\frac{p_0 - p_1}{p_1 + p_0 - p_0} \right] \quad (3)$$

bedeutet für die Spannung ist. am inneren Anfang. In Gl. (2) auf. unter der Voraussetzung, daß die innere Ausdehnung in der inneren und überall gleich groß ist, d. h. die Volumenveränderung bei jedem D ist gleich groß. Diese Voraussetzung ist nicht immer der Fall, wie es wurde zuerst von Lamé gegeben, auf befindet sich ein Beweis für die in den Lectures von Redtenbacher Nr. 238.

Die Gleichung (3) kann man aus 2. ableiten, da sie unvollständig, unter der Voraussetzung, daß die Ausdehnung in der Kugel erfolgt, daß das ganze Volumen constant bleibt. Der Cylinder wird nun besser, wenn der Max der Spannung gleich. konstant gleich der abf. Festigkeit des Materials. Wir sehen also die Abweichung bei der der Kugel erfolgt, wenn wir in Gl. 1 für p_1 den Coeff. d. abf. Fest. des Materials einsetzen in. aus Gl. 2 in. 3

erhalten wir für, indem wir für diesen Coefficienten setzen.
 setzen wir dies aus, so erhalten wir den drückenden Druck von
 der Drückbarkeit der Formel (1). Und setzen wir:

$$Et + 2p_1 - p_0 = 0$$

$$\text{d.h. } p_0 = Et + 2p_1$$

$$\text{so wird } d = \infty$$

d.h. wenn die Pressung auf den inneren Rand gleich der äuß. festigen
 Kraft des Materials + der entgegenstehenden Pressung auf den äußeren
 Rand, so wird der cyl. bestehen, wenn wir auf $d = \infty$ ausfahren.
 Und (2) erhalten wir dagegen einen bestimmten Druck, bei
 welcher Stärke der Cylinder gerade besteht, so daß wenn wir die
 Stärke um etwas stärker machen, der Cylinder die Spannung aushält,
 um kinde. Nitz. L. der Cylinder von Gr. bleiben.

$$Et = 1000, \text{ ferner sei } p_1 = 1,$$

$$\text{so ist } p_0 = 1000 + 2 = 1002$$

d.h. wenn der Druck auf den $D^m 1002$ Ritz. beträgt, besteht
 sich ein bestimmter Cylinder, wenn wir auf $d = \infty$ ausfahren.

$$\text{Und (1) erhalten wir } d = \frac{1}{2} D \frac{1002 - 1}{1000 + 1} = \frac{1}{2} D$$

Man sieht also deutlich den großen Unterschied zwischen einem
 Formel und der Erfahrung, fast oft genug die Unrichtigkeit der
 Formel 1 zu zeigen.

für hydrost. Pressung in f. d. verhält man gewöhnlich $d = \frac{D}{2}$
 Wie wollen wir für diesen Fall die Spannungseigenschaft, die
 im Innern wirkt bestimmen.

$$\text{Und 2 setzen wir } \sqrt{\frac{Et + p_0}{Et + 2p_1 - p_0}} = 2$$

$$\text{oder } \frac{Et + p_0}{Et + 2p_1 - p_0} = 4 \text{ und } Et + p_0 = 4 Et + 8p_1 - 4p_0$$

$$0 = 3 Et + 8p_1 - 5p_0$$

$$\text{folglich } p_0 = \frac{3}{5} Et + \frac{8}{5} p_1$$

Setzt der cyl. zur Pressung p_0 mit Disposit. antragen, so läßt
 man die Spannung nicht mehr als $\frac{1}{5}$ von der äuß. festigen Kraft des
 Materials antragen.

$$\text{Es ist also } Et = \frac{1000}{3} = 333$$

$$\text{und folgl. } p_0 = \frac{3}{5} 333 + \frac{8}{5} = 201.6$$

Ist die innere Pressung größer als die innere, so gelten die
 selben Resultate, nur ist Et negativ zu nehmen.

Man sieht. erfüllt man für Kugelform die Formel:

$$d = \frac{D}{2} \left[\sqrt{\frac{2(Et + p_0)}{2Et + 3p_1 - p_0}} - 1 \right]$$

für Gefäße, welche weder Kugelform, noch kreisförmig
 sind ist die Untersuchung von d sehr schwierig, da sie nicht ein
 gewisses fest. bleiben, sondern Veränderungen erleiden.

Man sieht z. L. ein abgekürztes Cylinder in einer kreisförmigen
 überzogen, während bei einer Gefäß von fast ungleichem
 Durchmesser Ausbuchtungen entstehen.

Körperformen von gleicher Festigkeit.

Körper von gleicher äuß. Festigkeit.

Wenn ein Werk eingewunden ist und wird in seinen Enden
 einen ausgedehnt, so daß also sein Querschnitt vergrößert wird,
 so ist die Kraftschwindigkeit des Ritzes überall gleich groß,
 wenn: das Material fest genug ist, und wenn der Querschnitt
 überall gleich groß ist, wenn auch der Fall von einem runden
 in einen eckigen, eckigen in einen runden Form sein
 mag, übergeht. Ist hingegen der Werk vertikal eingewunden und
 nicht belastet, so verhält es sich ganz anders, indem sich nur

das Gewicht des Hales zu berücksichtigen ist, und das Gewicht sagt uns schon, daß der Lalku nach oben hin immer dicker werden muß.

Nunmehr ist das Gewicht nur ein aus dem Material, so ist y der das Gew. vom Körperstück a bei d . Wir setzen Et die und einen $\square$ der Lalku eine Spannung, die in jedem Querschnitt herrschen soll, so ist: $Et = P$ die Spannung für den untersten Querschnitt.

Der Querschnitt bei D ist um dy größer als bei C .

$$\text{und folgt } dy \cdot Et = s y dx$$

$$\text{oder } dy = \frac{s dx}{Et}$$

Integriert man, so folgt $\log \text{nat } y = \frac{s}{Et} x + C$ (2)

für $x=0$, muß $y = 0 = \frac{P}{Et}$ sein.

$$\text{und also } \log \text{nat } \frac{P}{Et} = 0 + C$$

$$\log \text{nat } y - \log \text{nat } \frac{P}{Et} = \frac{s}{Et} x.$$

$$\log \text{nat } \left(\frac{y}{\frac{P}{Et}} \right) = \frac{s}{Et} x$$

$$\text{oder } \frac{y}{\frac{P}{Et}} = e^{\frac{s}{Et} x}$$

$$y = \frac{P}{Et} e^{\frac{s}{Et} x}$$

Gründet ist die Größe des Querschnitts an jeder einzelnen Stelle bestimmt.

Allein die so aufgestellte Form des Hales ist sehr schwierig auszuführen. Man stellt sich daher in der Praxis durch eine Annäherung. So werden z. B. die Pfeilspitzen aus einem Chausse ein- zelner Hungen zusammengefaßt.

und deshalb so bestimmt, daß die Kraftseinwirkung des Hales an jeder Hunge gleich groß ist. Es muß also die Spannung bei A gleich sein der bei B, C, D u. s. f.

Die Kraft mit der die Spitze des Pfeilspitzen bei B gezogen wird ist: $Et = \frac{Q + s a_1 l_1}{a_1}$

$$\text{bei } C \quad Et = \frac{Q + s a_1 l_1 + s a_2 l_2}{a_2}$$

$$\text{bei } D \quad Et = \frac{Q + s a_1 l_1 + s a_2 l_2 + s a_3 l_3}{a_3}$$

oder was 1, 2 u. s. f. ist

$$Et a_1 = \frac{Q}{Et - l_1 s}$$

$$a_1 = \frac{Q + a_1 l_1 s}{Et - l_1 s}$$

$$a_2 = \frac{Q + a_1 l_1 s + a_2 l_2 s}{Et - l_2 s} \text{ u. s. w.}$$

Setzt man nun den Nenner von a_1 in a_2 ein u. s. f., so erhält man

$$a_1 = \frac{Q}{Et - l_1 s}; \quad a_2 = \frac{Q Et}{Et - l_1 s (Et - l_2 s)}$$

$$a_3 = \frac{Q Et^2}{(Et - l_1 s)(Et - l_2 s)(Et - l_3 s)} \text{ u. s. w.}$$

Körper von gleicher relativer Festigkeit

Für Hales von kreisförmiger Form I ist nicht überall gleichmäßig relative Festigkeit, sondern bei A ist die Kraftseinwirkung des Lagers am größten und nimmt gegen B hin ab, ist bei B selbst 0. Wir stellen uns die Aufgabe einen Hales zu konstruieren, der überall gleiche relative Festigkeit hat, und wenn dies der Fall sein soll, so muß die Spannung gleich an der Punkte ab überall gleich groß sein. Es sei z ein solcher Hales.

$$\text{Es ist } Pl = PE$$

$$Pl = \frac{P}{6} l^2 \quad (1) \text{ diese Gl. läßt die Dimension bei der Hänge des H.}$$

$$P_x = PE = \frac{P}{6} b y^2 (2)$$

Zur Bestimmung von h setze man $Pl = \frac{P}{6} \left(\frac{b}{h}\right) h^3$

$$\text{also } h = \sqrt[3]{\frac{6Pl}{P}} \frac{b}{h} (3)$$

dividiert man 1 durch 2, so erhält man $\frac{x}{l} = \frac{y^2}{h^2}$

$$\text{oder } y = \sqrt{\frac{x}{l}} h (4)$$

Das ist die Gl. der Krümmung, in der Krümmung selbst einen Parameter, den Krümmungsradius R heißt.

Man setze also nur, wenn P, l u. b gegeben sind, die daraus folgenden h bei der Wurzel zu bestimmen u. die entsprechende Wurzel zu verzeichnen, indem man unter der Wurzel Gl. (4) u. h u. h^2 einträgt. h bestimmt also indem man die entsprechende Konstruktion einträgt. und nach dieser Wurzel die Werte und unter quadratischer Wurzel der Fallt. Es sei nun

z. B. $P = 1000$, $l = 100$, $\frac{b}{h} = 2$ Mat. G. p. 10 f. 10 f.

also $P = \frac{3000}{10} = 300$

folgt $h = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1000 \cdot 100 \cdot 2}{300}} = \sqrt[3]{4000} = 15.8 \text{ cm}$

und $b = \frac{15.8}{2} = 7.9 \text{ cm}$

Man erhält also folgenden Längenausw. M.

Allein das sehr schwierig ist, solche Krümmung fließen zu lassen. Man wird es sich bei der nächsten Materialien nicht so leicht leisten, so kann man sich folgende für die Praxis annehmen:

Man setze $\frac{x}{l} = \frac{1}{4}$

dann ist $\frac{y}{h} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

für $x = \frac{1}{4} l$

wird $y = \frac{1}{2} h$

Legen wir also $\frac{1}{4} l$ auf ge

auf g auf, so ist der Abstand u u. der Abstand v u. der Abstand w u. der Abstand x u. der Abstand y u. der Abstand z u. der Abstand a u. b ($ab = h$) so erhalten wir die Punkte $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ so, wie sie auf der Karte zu sehen sind. Die Punkte $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ sind die Punkte, die wir erhalten, wenn wir die Punkte $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ auf der Karte zu sehen sind.

Es wird man manchen Fall finden, da sie nicht immer ausreicht sind, die Halbkreisform u. die für diese, u. die für die, die Halbkreisform. Es ist manchen u. die Halbkreisform immer gleich, da sie, so leicht sie, wie sie ist, konstruieren müssen, damit es in der Welt gleich festhält, und dass alle Eigenschaften geometrisch u. physikalisch sind.

Die Konstruktion ist nicht in jedem Punkt die gleiche, da die Konstruktion der Punkte, die die Punkte $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ auf der Karte zu sehen sind.

ist: $Pl = \frac{P}{6} b h^2$

das bei n ist:

$P_x = \frac{P}{6} x y^2 (2)$

Man folgt aus (1)

$h = \sqrt[3]{\frac{6Pl}{P}} \frac{b}{h}$

$\frac{x}{l} = \frac{y^2}{h^2} = \frac{\frac{1}{4} l}{h^2} = \frac{1}{4} \frac{l}{h^2} (3)$

Da alle Querschnitte geometrisch ähnlich sein sollen, so muss
sein:

$$\frac{L}{y} = \frac{h}{z} \quad (4)$$

$$\text{folglich } z = \frac{y^3}{h^3}$$

$$\text{oder } y = \sqrt[3]{\frac{z}{h}} \quad (5)$$

$$\text{und } h = \sqrt[3]{\frac{z}{y}} \quad (6)$$

(5) ist die Gl. einer unbekannten
Parabel. wenn ist.

$$\frac{y}{z} = \frac{h}{y}$$

$$\text{also } y = z \cdot \frac{h}{y} \text{ in } y = \frac{z}{h}$$

$$\text{folglich } z = \sqrt[3]{\frac{y}{h}} \quad (7)$$

Das ist wieder die Gleichung einer unbekannten Parabel
Mit Hilfe der Gl. 5, 6 u. 7 können wir nun einenstab
konstruieren, der überall gleich festig bleibt, und dessen
Querschnitte geometrisch ähnlich sind. z. L.

$$\text{Es sei } \frac{y}{h} = \frac{1}{4} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{4}$$

$$\text{dann ist } y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 0.63, \sqrt[3]{\frac{2}{4}} = 0.79, \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = 0.908, \sqrt[3]{\frac{4}{4}} = 1.00$$

Setzen wir nun h aus Gl. (6) ein, so erhalten wir folgl.

$$y = 18.9; \quad 23.82; \quad 27.24; \quad 30.$$

$$\text{da } h = \frac{1}{2} h,$$

$$\text{so ist } z = 9.4; \quad 11.9; \quad 13.6; \quad 15.$$

Legen wir nun diese Werte auf, so erhalten wir folgende
2 Figuren: die aber dieser Körper nach seiner Länge abge-
kürzt, so immer noch eine gewisse Form von

$$\text{Platz } \frac{y}{h} = \frac{1}{8}, \text{ so wird } y = \frac{1}{2} \text{ in } z = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Für die Formel ist: } cn = x; \quad mn = y; \quad p, q = z.$$

$$\text{Wir müssen also sein } cn = \frac{1}{8} h; \quad n, m = \frac{1}{2}; \quad p, q = \frac{1}{2}$$

So sind $b, m; p, q; z, s$ Punkte der Formeln. Und weil

$$\text{man nun } b \text{ in } m; q \text{ in } z;$$

$$p \text{ in } s, \text{ so hat man eine un-$$

$$\text{veränderte Form, welche fast gar$$

$$\text{nicht von der wirklichen ab-$$

$$\text{weicht und leicht anzuordnen}$$

$$\text{ist, liefert dieselbe festig-$$

$$\text{keit bei gleichem Material.}$$

$$\text{Aufgrund dieser Formel}$$

$$\text{so ist, dass der Querschnitt}$$

des Stabes nicht sein soll und deshalb überall gleich festig
bleiben soll.

Der Körper des Körpers wird eine Umformungsform sein, wie
bisherige Figuren zeigen.

Die Spannungen bei D, E, C müssen gleich sein, dann ist

$$D = \frac{P}{A} d^3$$

$$P = \frac{32}{32} y^3$$

$$\text{folgl. } d = \sqrt[3]{\frac{32 P}{32}}$$

$$\text{und } y = \frac{y^3}{d^3}$$

$$\text{oder } y = \sqrt[3]{\frac{y^3}{d^3}}$$

$$\text{das ist die Gleichung einer un-$$

$$\text{bekannten Formel und der Körper}$$

$$\text{wird also eine Umformungs-}$$

form sein. Man nimmt aber für dieselbe eine andere
Form. z. L. für $\frac{y}{h} = \frac{1}{8}$

$$\text{so ist } y = \frac{1}{2}$$

$$\text{Also ist man } D = d = \sqrt[3]{\frac{32 P}{32}}$$

$$C_{\text{H}} = \frac{1}{8} AC$$

$$np = \frac{1}{2} DD$$

Die Punkte n u. p sind Parabelgipfel. Verbinden wir nun D mit n u. D mit p , so erhalten wir einen abgestumpften Kegel als Umhüllungsform, welcher sehr wenig von dem Paraboloid abweicht, und sehr auf der Drahtbank leicht herzustellen läßt.

Körper von gleicher vinkulärer Festigkeit.

Man sieht leicht, daß die Form die beste sein wird, bei der der Körper ringsum die gleiche Festigkeit hat. Diese sind alle Drahtzungenformen sind, welche durch 2 auseinander gestreckte Stangen in 4 congruente Teile geteilt werden, alle übrigen sind weniger gut, auch geht aus der gleichförmigen Drückung die beste Form ist einstrichig der Hohlzylinder.

Aus der Längungszeit bezieht, so gebrauchst man zu dessen Bestimmung sehr willkürliche Annahmen. Es soll geben wir für ein gewisses Resultat an. Der Körper wird bei kreisförmiger Querschnitt im Rotationskörper von der Gestalt fig. A sein. Die sehr

symmetrisch aufzustellende Glasse. Der Körper findet sich in den Kapillaten.

Man ist aber diese Form nicht leicht herzustellen, daher man sich mit einer unmaßgeblichen bequemt. fig. B.

Will man z. B. ein Stück von gleicher Festigkeit konstruieren, so be-
rücksichtigt man nach Note 2. die Querschnittsdrückung für d für vinkul. fest. u. konstruiert 2 abgestumpfte

h. Kegel, indem man $\frac{d}{d} = \frac{1}{10}$ nimmt.

Körper von gleicher Torsionsfestigkeit.

Die sind massige in Hohlzylinder das Beste. Die letzteren sprechen man noch Material; man ist sie aber nur dann fest, wenn das festere Material die Arbeit leistet.

Ungleichheit der Querschnitte.

Es können 2 Querschnitte hinsichtlich der Form von einander abweichen aber unmöglich ist es, daß sie in Längung und Festigkeit gleiche Vorteile haben.

Geht man die Querschnitte gleiche Größe, so sind sie in Längung und ab-
solute Festigkeit einzuordnen.

Die der rot. fest. muß P in beiden Querschnitten gleich sein, wenn sie gleiche Festigkeit haben sollen. Es ist z. B. für einen

geradlinigen Querschnitt: $Pl = \frac{1}{6} b h^2$
eigentlichen Querschnitt ist: $Pl = \frac{\pi}{32} d^3$

$$\text{folglich } \frac{\pi}{32} d^3 = \frac{1}{6} b h^2$$

$$\text{oder } \frac{\pi}{32} d^3 = \frac{1}{6} \left(\frac{b}{h}\right) h^3$$

$$\text{und } \frac{h^3}{d^3} = \frac{\pi}{32} \cdot 6 \cdot \frac{b}{h}$$

$$\text{oder } \frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{32} \cdot 6 \cdot \frac{b}{h}}$$

dieser Bruch ist also nur von $\frac{b}{h}$ abhängig. Nimmt man nun für $\frac{b}{h}$ verschiedene Werte an, so erhält man folgende Tabelle:

für $\frac{b}{h} = \frac{1}{3}$	3
ist $\frac{h}{d} = 0.581$	1.215 (Anf. 30.)
und $\frac{h}{d} = 1.443$	0.405

Es kann man leicht für einen runden Querschnitt einen vinkulären von gleicher Festigkeit konstruieren und umgekehrt.

Man setze z. B. einen Hohlzylinder von 20 mm Durchmesser, man soll dafür einen geradlinigen Querschnitt herstellen.

Es sei $\frac{h}{d} = 2$.

Dann wäre h & b zu bestimmen.

Nach Richt 30: $\frac{h}{d} = 1.056$

u. $\frac{b}{d} = 0.528$.

folglich $h = 1.056 d = 21.12 \text{ cm}$

und $b = 0.528 d = 10.56 \text{ cm}$.

2. Es ist ein parallelep. Korb gegeben, dessen Höhe $h = 30 \text{ cm}$ und dessen Breite $b = 10 \text{ cm}$; man soll denselben in einen runden umformen, der das gleiche leistet.

Es ist also $\frac{h}{d} = 3$

nach Richt 30: $\frac{h}{d} = 1.215$

und folgt $d = \frac{30}{1.215} = 24.7 \text{ cm}$

Dann sind ein runder u. allgyl. Korb ineinandersetzen in Bezug auf vorteil. bei Festigkeit.

Es ist $PL = PE$ für den runden.

und $PL = PE$ für den allgyl.

Sollen sie gleich fest sein, so muß sein:

$$E = E_1$$

$$\text{d.h. } \frac{\pi}{32} d^3 = \frac{\pi}{32} b h^2$$

$$\text{folglich } d^3 = b h^2 \text{ oder } d^3 = \left(\frac{b}{h}\right) h^3$$

$$\text{also falls } \frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{b}{h}}$$

bestimmt sich Richt 31. Das eine Tabelle, die für verschiedene Werte von $\frac{h}{d}$, die entsprechenden Werte von $\frac{b}{d}$ gibt.

Für einen runden Korb von 12 cm Durchmesser, sei g ein allgyl. zu konstruieren, der das gleiche Festigkeit besitzt. Es sei $\frac{h}{d} = 2$.

Nach Richt 31: $\frac{h}{d} = 1.26$

und folglich $h = 1.26 \cdot 12 = 15.12 \text{ cm}$

$$b = 7.56 \text{ cm}$$

3. Man setze ein runder Korb und ein parallelepipedes gleich in der Festigkeit! Wie verhalten wir uns folgendes: Wir haben früher gefunden, daß die größte Last, die ein runder Korb auszuhalten vermag, ist:

$$P = \frac{E \pi^3}{64} \frac{d^4}{h^2}$$

$$\text{für einen parallelep. Korb ist } P = \frac{E \pi^2}{12} \frac{b h^3}{d^2}$$

Sollen nun diese Körbe bei gleicher Länge dieselbe Last tragen, so muß sein: $P = P$

$$\text{oder } \frac{E \pi^3}{64} \frac{d^4}{h^2} = \frac{E \pi^2}{12} \frac{b h^3}{d^2}$$

$$\frac{\pi}{32} d^4 = \frac{1}{6} b h^3$$

$$\text{oder } \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{1}{6} \left(\frac{b}{h}\right) h^4$$

$$\left(\frac{h}{d}\right)^4 = \frac{\pi}{32} \cdot 6 \cdot \frac{b}{h}$$

$$\text{oder } \frac{h}{d} = \sqrt[4]{\frac{\pi}{32} \cdot 6 \cdot \frac{b}{h}} \quad (\text{Richt 36. die entgeg. Tab.})$$

4. Für einen runden Korb von 14 cm Durchmesser soll denselbe ein parallelep. von gleich. fest. hergestellt werden. Es sei $\frac{h}{d} = \frac{3}{4}$.

Nach Richt 31: $\frac{h}{d} = 0.816$ u. $\frac{b}{d} = 1.088$

folglich $h = 0.816 \times 14 = 11.4 \text{ cm}$

und $b = 1.088 \times 14 = 15.2 \text{ cm}$

Berechnung verschiedener Wirkungsgrößen.

Die zur Abkühlung, Zusammenbrückung, u. s. w. von Korb nütz. sind. Welche Wirkungsgrößen entspringt der Abkühlung eines Korb? Stellen wir uns, der Korb sei ein 2. ausgedehnt, der zusammenfällt. Bei B sei alt. und der Querschnitt des Korb sei Q , so ist:

$$BC = AQ \quad (1) \text{ die ausgedehnte Kraft am Ende}$$

der Abkühlung.

Trägt man auf der Wirkungsrichtung AB das Quadrat der Ausdehnung als Abszissen auf, und als Ordinaten die entsprechenden Kräfte, so gilt die Wirkungsrichtung der Ordinaten eine gerade Linie, die $\propto$ proportional mit AB verläuft.
 Die Wirkungsgröße die bei der Ausdehnung wirkt ist also, geteilt durch den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

$$\text{folgt } W = \frac{1}{2} AB \times BC$$

$$\text{oder } W = \frac{1}{2} \Delta \times EO (3)$$

$$\text{Dies folgt: } E = \frac{W}{\Delta}$$

$$\text{folgt } W = \frac{1}{2} \Delta \cdot E \Delta \quad (4)$$

$$\text{oder } W = \frac{OE}{2} \cdot \frac{\Delta^2}{\Delta}$$

Setzt man den Kraft von Δ aus 2 in 3 ein, so erhält man

$$W = \frac{1}{2} \frac{OE}{\Delta} \cdot \Delta \cdot \Delta = \frac{1}{2} OE \Delta$$

$$\text{folgt } W = \frac{1}{2} \frac{E}{\Delta} \Delta^2 (5) \quad (\text{N. 4 des Volumen bezugsfakt.})$$

Man sieht also die Wirkungsgröße auf zwei Arten resultieren. In Gl. (4) drückt die Wirkung aus, die eine Ausdehnung Δ bewirkt, während (5) die Wirkung ausdrückt, die notwendig ist, damit eine Spannung eintritt E pro Pfund.

Dies gilt aber nur für gewisse Längungen. Folgenden wir uns ab nun aber auf die Punkte zu beziehen, so weißt der Hieb, wenn die Spannungsdicht. = der allf. Festigkeit und wie schon aus (5), daß die Wirkung nur von dem Volumen abhängt, als ist dieser immer bei der Hieb einen und lang oder kurz und dick ist.

Der Coeff. $\frac{E}{\Delta}$ in Gl. (5) findet sich für versch. Materialien P. 36. Ref. in. man sieht aus demselben, daß die Wirkung, welche zum Abreißen notwendig ist, nicht nur von der Größe, sondern auch von der Gestalt der Metalle von sehr viel zu.

Wirkungsgröße bei der Längung der Metalle.

Auf AB trage man als Abszissen die Wirkung der Kraft in der Richtung AB auf, in. als Ordinaten die entsprechenden Kräfte, verbindet man verschiedene die Endpunkte der Ordinaten, so muß die Wirkungsrichtung eine gerade Linie sein, was aus folgendem folgt.

$$\text{folgt } y = \frac{P}{2EL} (L^2 - \frac{1}{3} x^3)$$

$$\text{für } x = L \text{ ist } y = AB = f.$$

$$AB = f = \frac{P}{2EL} (L^2 - \frac{1}{3} L^3)$$

$$AB = \frac{1}{3} \frac{PL^2}{EL}$$

Daraus sieht man, daß die Wirkung des Hiebes proportional ist, und folgt AC eine gerade Linie.

$$\text{und folglich auch } W = \frac{1}{2} AB \times BC$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{PL^2}{EL} \cdot P$$

$$= \frac{1}{6} \frac{P^2 L^2}{EL} (1)$$

$$PL = \frac{P^2}{L} (2)$$

$$P = \frac{P^2}{L}$$

$$\text{und } W = \frac{1}{6} \frac{L^2}{EL} \cdot \frac{P^2}{L} = \frac{1}{6} \frac{P^2}{E} \frac{L}{L}$$

Der Coeff. $\frac{EL}{L}$ ist für gewisse Formen der Größe der Querschnitts proportional, z. B. für einen runden Cyl. ist: $L = \frac{d}{2}$ und

$$\frac{EL}{L} = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$\frac{EL}{L} = \frac{\pi d^3}{32 \cdot d} = \frac{1}{4} \frac{\pi d^2}{4} = \frac{1}{4} \pi$$

$$\text{folgt } W = \frac{1}{24} \frac{P^2}{E} \pi$$

$$\text{für ein Parallelogramm ist } L = \frac{h}{2}$$

$$\text{und } \frac{EL}{L} = \frac{1}{6} bh^2$$

$$\text{folgt } \frac{EL}{L} = \frac{1}{6} \frac{bh^2}{h} = \frac{1}{6} bh = \frac{1}{3} \pi$$

$$\text{und folgt } W = \frac{1}{18} \frac{P^2}{E} \pi$$

die Wirkungsgr. W für noch versch. Querschnitte Nitz. 33. Aufg. 1. u. 2.
Nehmen wir die Glg. für stärkere Längen gelten lassen,
so erhalten wir, wenn wir statt V den Längengr. l setzen,
die Wirkungsgröße, die notwendig ist, um den Stab abzubrechen.
Diese Wirkungsgröße ist auf, notwendig, den Stab durch zu-
brechen, wenn er auf 2 Hälften leicht und irgendwo belastet wird.

Ersetzung der Wirkungsgrößen zum Abbrechen
des Stabes.

Dann der Stab durch die abgegebene Kraft P um einen Winkel θ
gedreht worden ist:

$$\theta = 16 \frac{M}{G} \frac{l}{d^4} = 32 \frac{M}{G} \cdot \frac{l}{d^4}$$

wobei M das Biegemoment um die Mitte der Verschiebung bedeutet,
und die Länge des θ gegenübersteht, so ist

$$W = \frac{1}{2} \theta M = \frac{1}{2} \cdot 32 \frac{M^2}{G} \cdot \frac{l}{d^4}$$

Nun ist nach Nitz. 22. Kap.

$$M = \frac{1}{16} \frac{P}{d^3}$$

$$\text{folglich } W = \frac{1}{2} \cdot 32 \frac{P^2}{G} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{l}{d^4}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{P^2}{G} \cdot \frac{l}{d^4}$$

$$\text{und } W = \frac{1}{4} \frac{P^2}{G} \cdot \frac{d^4}{l}$$

Da aber $\frac{d^4}{l} = \frac{1}{V}$ Volumen des Cylinders,
so ist $W = \frac{1}{4} \frac{P^2}{G} V$

Die Kraft von $\frac{P}{2}$ finden sich Nitz. 36. Kap. für versch. Materialien
und Nitz. 34. ist diese Wirkungsgröße W nach für andere Querschnitte
angegeben.

Lehrsatz.

Man setze einen nachfolgenden Stab, der unten mit einem
Gewichte versehen ist, in denselben Länge ein drehbares Glieder.
Läßt man denselben von oben fallen, so wird, wenn man den

Stab angelangt ist, auf so lange fortzuweisen, bis sein durch das
fallende Gewicht bewirkte Kraft die Ausdehnung des Stabes
verursacht. Wie groß ist nun die Ausdehnung λ ?
Der Schwerpunkt des Stabes vom Gewicht Q ist um $H + \lambda$ weiter
gegangen, und hat durch die Wirkung:

$$W = Q(H + \lambda)$$

bestimmt. Hier ist aber nach Nitz. 32. die Wirkung, die der Ausdehnung
 λ entspricht:

$$W = \frac{Q}{2} \frac{\lambda^2}{l}$$

$$Q(H + \lambda) = \frac{Q}{2} \frac{\lambda^2}{l}$$

$$\text{und } QH + Q\lambda = \frac{Q}{2l} \lambda^2$$

$$\frac{QH}{2} - Q\lambda = \frac{Q}{2l} \lambda^2$$

$$\lambda^2 - \frac{2}{\theta c} Q\lambda = \frac{QH}{\theta c}$$

$$\lambda^2 - \frac{2}{\theta c} Q\lambda + \left(\frac{1}{\theta c}\right)^2 = \frac{QH}{\theta c} + \left(\frac{1}{\theta c}\right)^2$$

$$\left(\lambda - \frac{1}{\theta c}\right)^2 = \frac{QH}{\theta c} + \left(\frac{1}{\theta c}\right)^2$$

$$\lambda = \frac{1}{\theta c} + \sqrt{\frac{QH}{\theta c} + \left(\frac{1}{\theta c}\right)^2}$$

Nun ist aber $H = \frac{c}{d}$

$$\text{also } \lambda = \frac{c}{d} \left[\frac{1}{\theta c} + \sqrt{\frac{QH}{\theta c} + \left(\frac{1}{\theta c}\right)^2} \right]$$

$$\lambda = \frac{Q}{\theta} + \sqrt{\frac{QH}{\theta c} \frac{c^2}{l} + \frac{1}{\theta c^2} \frac{c^2}{l}}$$

$$\lambda = \frac{Q}{\theta} + \sqrt{\frac{2QHc}{\theta l} + \left(\frac{Q}{\theta}\right)^2}$$

welche die runde Form mittelst der Polysommern.

Nun ist die geometrische Vermählung zu bestimmen, d. h. wie sehr die Fläche des Lohens zu vermindern, die Polysommern y der ungetrübten Lohens in die f. d. Lohens von der Form der etc. Es kann nicht sein, dass die Polysommern, welche fast immer auf Abfassen in Ordnung zu sein sind, wissen, aber dass das Lohens zu wissen den ungetrübten Lohens ausreicht, aber auch, dass der Lohens ausreicht.

Nun müssen wir eine Vermählung, ausdientig machen, bei der die Polysommern die Fläche des Lohens zu vermindern, die Polysommern y der ungetrübten Lohens in die f. d. Lohens von der Form der etc. Es kann nicht sein, dass die Polysommern, welche fast immer auf Abfassen in Ordnung zu sein sind, wissen, aber dass das Lohens zu wissen den ungetrübten Lohens ausreicht, aber auch, dass der Lohens ausreicht.

Es muss also die Fläche des Lohens zu vermindern, die Polysommern y der ungetrübten Lohens in die f. d. Lohens von der Form der etc. Es kann nicht sein, dass die Polysommern, welche fast immer auf Abfassen in Ordnung zu sein sind, wissen, aber dass das Lohens zu wissen den ungetrübten Lohens ausreicht, aber auch, dass der Lohens ausreicht.

Nun wir die Fläche des Lohens = d.

für die Polysommern y zu wissen die Fläche des Lohens = e.

der Lohens y von der Form der etc. = e.

und auch für die Fläche des Lohens = d.

Es kann man die 3 Größen d, e u. d, heraus, wenn d bekannt ist. Lohens y von der Form der etc. = e.

$$\text{Et } \frac{d^2}{4} = \text{Et}(e-d)d = 2 \text{ Et } e'd.$$

$$\text{oder } \frac{d^2}{4} = (e-d)d = 2ed \quad (1)$$

$$\text{und } \frac{d^2}{4} = (e-d)d = 2ed \quad (2)$$

$$\left(\frac{d}{4}\right)^2 = e - d \quad (3).$$

$$\frac{e}{d} = \frac{d}{4} + \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{d}\right)^2 \quad (4)$$

$$\text{Nun (1) : } (e-d)d = 2ed.$$

$$\frac{e}{d} - \frac{d}{4} = \frac{2e'}{d}$$

$$\frac{2e'd}{d} = \frac{e}{d} - \frac{d}{4} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{d}\right)^2$$

$$\text{folglich } \frac{e'}{d} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{d}\right)^2 \quad (5)$$

$$\text{Es ist } \frac{d}{4} = 2.$$

$$\text{so ist } \frac{e}{d} = 2 \times 3.14 \times 4 = 5.14.$$

$$\text{und } \frac{e'}{d} = \frac{3.14}{8} \times 4 = 1.57.$$

Also ist also die Fläche des Lohens (4) d. h. e ist e bestimmt, da d bekannt ist, und das Verhältnis d. angewandt ist.

Es ist also die Fläche des Lohens zu vermindern, die Polysommern y der ungetrübten Lohens in die f. d. Lohens von der Form der etc. Es kann nicht sein, dass die Polysommern, welche fast immer auf Abfassen in Ordnung zu sein sind, wissen, aber dass das Lohens zu wissen den ungetrübten Lohens ausreicht, aber auch, dass der Lohens ausreicht.

Nun wir die Fläche des Lohens = d.

$$\text{so ist } f = \frac{e}{e-d} = \frac{e}{d} - \frac{d}{d}$$

Es ist also die Fläche des Lohens zu vermindern, die Polysommern y der ungetrübten Lohens in die f. d. Lohens von der Form der etc. Es kann nicht sein, dass die Polysommern, welche fast immer auf Abfassen in Ordnung zu sein sind, wissen, aber dass das Lohens zu wissen den ungetrübten Lohens ausreicht, aber auch, dass der Lohens ausreicht.

$$f = \frac{\frac{d}{4} + \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{d}\right)^2}{\frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{d}\right)^2} = 1 + \frac{4}{\pi} \left(\frac{d}{d}\right)^2$$

Es ist also die Fläche des Lohens zu vermindern, die Polysommern y der ungetrübten Lohens in die f. d. Lohens von der Form der etc. Es kann nicht sein, dass die Polysommern, welche fast immer auf Abfassen in Ordnung zu sein sind, wissen, aber dass das Lohens zu wissen den ungetrübten Lohens ausreicht, aber auch, dass der Lohens ausreicht.

für $\frac{d}{4} =$	1	1.5	2	2.5	3
so ist $f =$	2.27	1.85	1.64	1.51	1.42
$\frac{e}{d} =$	1.78	3.26	5.14	7.41	10.06
$\frac{e'}{d} =$	0.39	0.38	1.56	2.44	3.51

Es ist also die Fläche des Lohens zu vermindern, die Polysommern y der ungetrübten Lohens in die f. d. Lohens von der Form der etc. Es kann nicht sein, dass die Polysommern, welche fast immer auf Abfassen in Ordnung zu sein sind, wissen, aber dass das Lohens zu wissen den ungetrübten Lohens ausreicht, aber auch, dass der Lohens ausreicht.

Wenn man weiß, daß sich bei Vermischungen, wobei es bloß mit festig-
keit ankommt, die gleiche Vermischung (Lösungen u. s. w.)
bei Vermischungen, wobei es nur mit Brüchigkeit ankommt mit einem
neuen diesem nach gestellten Kriterium (Gesamtwert).
Bei Vermischungen, welche beiden Zwecken zugleich ausgesetzt sein sollen
wird man auch nicht anders. (Brennstoffe, Schiffschiffe unter Wasser.)

$$\text{Luft nicht fest } \frac{d}{\delta} = 1.$$

$$\text{fest nicht Luft } \frac{d}{\delta} = 3.$$

$$\text{Luft und fest } \frac{d}{\delta} = 2.$$

begegnete Vermischung.

Ein solches Beispiel ist bei Stehende gegen dargestellt, wobei also der Luft
durch 2 Röhren Hohlraum zusammengefaßt worden.

Wir wollen nun für diese Luft wieder c und d bestimmen, so wie
in der ersten als diese aber die richtige Vermischung besser ist.

$$\text{Gesamtwert sein: } 2 \frac{d^2 \pi}{4} \delta l = (c-d) \delta l \quad (1)$$

$$\frac{2 d^2 \pi}{4} = (c-d) \delta.$$

$$\frac{\pi}{2} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 = \frac{c}{\delta} - \frac{d}{\delta}.$$

$$\frac{c}{\delta} = \frac{d}{\delta} + \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 (2).$$

Man sieht es sich wieder, wie wir d annehmen müssen, daß sich wieder
finden wir, wie sich die Festigkeit des aneinander stehenden Luftes zu der des
vermischten verhält.

$$\text{Es ist } f = \frac{c \delta l}{(c-d) \delta l} = \frac{c}{c-d} = \frac{\frac{c}{\delta}}{\frac{c}{\delta} - \frac{d}{\delta}}$$

$$\text{Setzt man ein } 2 \frac{c}{\delta} \text{ ein:}$$

$$\text{so wird man } f = \frac{\frac{2c}{\delta} + \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2}{\frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2} = 1 + \frac{2}{\frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2}$$

$$\text{folglich } f = 1 + \frac{2}{\frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2} \quad (3)$$

Vergleichen nun die beiden formeln von f , die sich in begegnete Ver-
mischung, so findet man, daß die begegnete Vermischung besser ist.
Das Gleiche f folgt, daß bei der begeg. Vermischung die Luft
nicht einander zu stark kommen, als bei der einfachen.
Nun wir nun für d versch. Werte, so wird man auch für
wieder folgende Tabelle. Seite 43.

für $\frac{d}{\delta} = 1$	2	3
ist $\frac{c}{\delta} = 2.6$	8.3	14.
und $f = 1.64$	1.32	1.21.
oder $\frac{1}{f} = 0.6$	0.8	0.9.

Man sieht, daß bei der begeg. Vermischung die Festigkeit sehr klein
sein wird. Klein ist. Bei einer 3, 4, 5 u. s. w. in festen Vermischung
wird die Festigkeit immer größer oder je nach je mehr die molekulare
Festigkeit zu erreichen, daß sich wird man bei fest. wässrigen flüssigen
im einfachen Vermischung auszuweisen, trotz der größeren Kosten u. Arbeit.

Allgemein ist nur für eine n -fache Vermischung:

$$n \frac{d^2 \pi}{4} \delta l = (c-d) \delta l \quad (1).$$

$$\text{folgt } \frac{c}{\delta} = \frac{d}{\delta} + n \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \quad (2).$$

$$\text{und } f = \frac{c \delta l}{(c-d) \delta l} = \frac{\frac{c}{\delta}}{\frac{c}{\delta} - \frac{d}{\delta}}$$

$$f = \frac{\frac{d}{\delta} + n \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2}{n \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2} = 1 + \frac{4}{n \pi} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 (3).$$

Ein mehrer Teil von Vermischung ist nach der
Ratensvermischung.

Einzelne wird durch f d vorbestimmt. Soll für die Luft abgelesen
werden, so kann dies auch gegeben werden, indem
es bei ab u. c. d festgelegt wird.

folgt sich aus $2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = (e-d) \delta \theta$.
 dieselbe Drehungsgl. wie bei der doppelten Verdrehung, folgl. folche
 Rotationsbeweg. dieselbe festigkeit, sowie dieselbe Zugkraft, Falschierung
 und Störkraft der Drehen wie bei der doppelten Verdrehung.
 Man kann es auch verstehen, daß 2 Lagen a u. b fig. 2 aneinander
 gedrückt werden, daher wenn die Lagen
 antieol. hiesiger muß in in größerem fest.
 Formierung überwiegt, die letztere nur dazu
 dienen, die Lagen gegen das Ausweichen
 fallen zu lassen.

Winkelreihen.

Man hat es sich ebenfalls zu denken und Konstruktion bei Lagen
 unmittelbar bei Drehungsspiel, und setzen in allgemeinen der Gestalt
 wie fig. 5 zeigt. Diese Winkelreihen können nicht
 genau abgelesen sein, sondern bei bestimmten Winkel
 reihen müssen die Winkelreihen verhältnißmäßig
 länger sein, als bei anderen. Man vergleicht auch
 das mehr oder weniger, um die Größe des Winkelreihen
 zu erhalten, eine Zugkraft nachfolgende gibt angedeuteter sein dieser Art.
 Man stellt sich die mittlere Seite der Winkelreihen:

$$A = \delta = \text{Lagehöhe}$$

$$\text{und } h = 2'4 + 4'5\delta, \text{ wenn } h \text{ die Länge einer Winkelreihen.}$$

Abmessungen der Verdrehungen.

Gibt man von: Flächenelementen mittels 1, 3 oder 4 Lagen
 (Taf. II) fig. 1-6 Lagen und Konstruktionen mit und ohne
 Winkelreihen Taf. II fig. 6-10.

Man es sich eine dieser Verhältnisse bei festen und Konstruktionen

stellt, so macht man z. B. bei Drehungsspiel in einem fest
 kein Winkelreihen mehr an.
 für eine Art von Knoten und Konstruktion ist die mittels einer
 Drehung fig. 8. Folgt nicht die Verdrehung nach zur Flächenelement-
 stückung, was fig. 3, C u. D darstellen können.

Lagen an Wellen und Drehungsachsen.

Will man Körper um eine Achse drehen, so verfährt man ihn mit einer
 Welle, deren gemachte. Achse mit der Rotationsachse des Körpers zusammen-
 fällt, bringt an beiden Enden der Welle Zugseile an, die durch ant.
 gespannte Lagen gestützt werden.

Man hat nun eine solche Welle der oben angegebenen Drehung nach.
 gezogen soll, also kein Zugseil in. gesamtman Lagen der Welle ein-
 haben kann, müssen die beiden Zugseile sorgfältig auf einer guten
 Drahtseil abgehängt werden.

Es handelt sich nun um die Bestimmung dieser beiden Zugseile, die
 dieselben oft ungenügende Lagen zu bringen haben und es sehr wichtig
 notwendig ist, daß diese Zugseile eine gewisse Anzahl relative festig-
 keit besitzen, wir wollen deshalb die Dimensionen aufweisen,
 welche erforderlich sind um die Lagen dieser Zugseile zu verstehen.

Geben wir eine Welle A, B der Zugseile in C der zugehörigen Lagen,
 so sieht die Zugseile auf der unteren Lagenfläche ein Stück aus, welche
 gleich der selben Lagenfläche drehenden Körper. Geben wir diesen
 Stück D u. es wirkt die Welle mit gleichem Druck auf die Zugseile
 zurück.

Le. rustigen Confection, Ausfertigung u. Aufstellung muß ihn
 Int. des Druckes längs des Hauptes u. längs seiner

Wir dürfen einen solchen Zygfen B empfangen als Cylinder, der am
einen Ende a b befestigt ist, am andern
Ende ist, und mit ihm eine Kugel P
verbunden, die befestigt ist. Dieser Cylinder bei
a b abzuheben. Es darf dieser die Spannung
bei ab nicht zu geringe Spannung überschreiten, wenn der Zygfen die
Lage P bei rot. Körper mit Vorsicht bewegen soll.
Es ist nun A des Elements, das den Zygfen abzugeben steht.
Nicht Pl. B. T.

$$\text{folglich } \frac{Pl}{2} = \frac{\rho \pi}{32} d^3$$

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} d^3$$

$$\text{where } P = \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{d}{l} \right) d^2$$

folglich $d = \sqrt{\frac{16}{\pi \pi} \times \frac{l}{d} \times \mathcal{P}}$

Es ist nun leicht & unfehlbar, formal zu bestimmen, ob ein Piss gegeben,
oder ob irgend ein Theil von dem Lungsorgane z. L. der 10^{ten}, 15^{ten}, 20^{ten}
u. s. f. je nachdem man sich mit einer 10, 15 od. 20 fachen Pissart combinirt
auswill. Es ist willkürlich u. s. f. wie wir es auf einer Annahme, so
genügend überlegen, die Festigkeit und die Härte als das L so
wissen, daß man durch versch. Habituusänderungen aufpassen kann.
Geben wir z. L. ein Knecht zu haben, so müssen wir L klein, ob
wird dann L klein in folgl. einer geringeren Pissart vorzuziehen.
Piss 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30.

Soll ein Harndrüse und Alnützgen der Haysen eingeführt werden,
so muß man 2 groß, also liegt da 1 in d groß sind, der Haysen
mit einer großen fläche in dem Lager auf; und daher auf der Tschaf.
der Drüse klein. Der Kinnan also für alle fülle Koyale missfallen;
allmählich fülle sind mit fahre und wie bequemen uns damit für das

gen. & Nothwendig, so als kein Vornehmes und keine Kraft
verfunden ist, Rathen aufzuhalten. Josef. Ich nimm nur

$\frac{1}{2}$ contained one $\frac{5}{4}$ less $\frac{4}{3}$ fifth and $\frac{3}{2}$.

sieht man sich, so in die Meinen auf. Wohl ein,

so far more $\sqrt{\frac{16}{2\pi}} \left(\frac{l}{d}\right) = \lambda$ min const. Größte.

$$\alpha = \lambda V_P(u) \text{ and } \lambda = \frac{\alpha}{V_P} \quad (2)$$

Man ist wohl d. zu unterfragen, zu welchem Zweck wir gut befehen,
die Constructionen nehmen nur für verschiedene Zwecke brauchen,
von selbst Material. Wir nehmen dafür für d. einen willkürlichen
Prozess, und finden:

für $\beta_{\text{max}} \lambda = 0.18$.

für Plumbis $\lambda = 0.12$.

für Gr/3 Kraft $\lambda = 0.09$.

Nun man voraussetzt, so findet man dass 236 in der
Luftschiff. für 236 Personen = 3000, so ist wissl. dass 236 per-
sonen $\frac{3000}{12}$, diese tragen mit 12 fass. Wasser konstruirt sind.
z. B. für ein 40 fass. Wasser und die Dimensionen der Kasse für
zu bestimmen.

$$LMP = 40 \times 250 = 10000 \text{ Kilg.}$$

$$\text{Calc } d = 0.18 \sqrt{10000} = 18^{\text{cm}}$$

genau ist $\frac{l}{d} = \frac{5}{4}$ folgt $l = \frac{5}{4} \cdot 18 = 22.5 \text{ cm}$

Wir können uns aufschreiben $\frac{L}{\lambda} = \frac{3}{2}$ zu setzen in ab wird also zeigen
und auf die geforderteichtigkeit zeigen.

und nach der gehörigen Festigkeit trocknen.
Zwischen 45 u. 46 Pfl. sind 2 Hahnen für größ. u. h. f. in der ersten
Zeile, sowie für versch. Laubstücken P. die aufgefundenen Vorka-
ven u. d. gezeichnet sind. In der Christophallung dieser Hahnen wurde
d. meiste in dem Pfl. beobachtet.

$$\text{Nehmen wir } \sqrt[3]{\frac{16 \times 100 \times 60 \times 75}{2 \pi^2}} = \lambda \quad (4)$$

Dieses λ ist nun also für einen Wellen von bestimmtem Winkel
eine constante Größe, und die verlangte Größe, heißt

$$\text{folglich } d = \lambda \sqrt[3]{N} \quad (5)$$

λ wird nun für die besten construirten Wellen bestimmt und es
ist dieses λ , wenn wir N n, d. durch Uebersetzung von bereits
bestimmten Wellen ^{bestimmte} erhalten:

$$\lambda = \frac{d}{\sqrt[3]{N}}$$

Für die That findet man, daß bei gut construirten Wellen λ
eine constante Größe, fast immer genau ist derselbe

$$\text{für Größereisen } \lambda = 16$$

$$\text{für Schmiedeseisen } \lambda = 12$$

folglich fast immer die beiden Gleichungen:

$$\text{für Schmiedeseisen } d = 12 \sqrt[3]{N}$$

$$\text{für Größereisen } d = 16 \sqrt[3]{N}$$

für welche Werte von N findet sich das entgeg. d in der Taf.
N. 48 u. 49. Tabelle 70 u. 72 angegeben. Auf sie würde
man d anwenden und N berechnen.

Es sei z. B. bei einer schmiedeseisernen Welle $N = 20$ und $n = 80$.

$$\text{so ist also } \frac{N}{n} = \frac{20}{80} = 0.250$$

$$\text{also } d = 4.5$$

Wenn sie bei einer größeisernen Welle $N = 120$ und $n = 800$.

$$\text{so ist also } \frac{N}{n} = \frac{120}{800} = 0.150$$

$$\text{folglich } d = 8.5$$

Man könnte nun fragen, wie stark die Wellen in Anspruch genommen
sind, wenn wir $\lambda = 12$ oder 16 annehmen, wir brauchen deshalb den
Nutz von D. u. S. Gl. 4. und erhalten:

$$\sqrt[3]{\frac{16 \times 100 \times 60 \times 75}{2 \pi^2}} \begin{cases} 12 \text{ für Schmiedeseisen} \\ 16 \text{ für Größereisen.} \end{cases}$$

Nun folgt: $T = 210$ für Schmiedeseisen

und $T = 90$ für Größereisen

Nach P. 36 ist also T der Längsdruck zum Abwinden gleich 4500

und da also $\frac{210}{4500} = \frac{1}{21}$, so folgt, daß eine solche schmiedeseisnerne
Welle nur bis auf den 21. Theil ihrer Umdrehung in Anspruch genommen
wird.

Man ist auf die Größe des Torsionswinkels bei diesen Wellen zu be-
himmern. für einen cyl. Maßstabel sind dieselben angegeben P. 27:

$$\theta = 16 \frac{PR}{G} \left[\frac{360}{d^4 \pi^2} \right]$$

Nehmen wir für PR seinen Werth aus (6), so erhalten wir:

$$\theta = \frac{16 \times 360 \times T \cdot \pi \cdot l \cdot d^3}{\pi^2 \cdot G \cdot 16 \cdot d^4} = \frac{16 \times 360 \cdot T \cdot \pi \cdot l}{\pi^2 \cdot G \cdot 16 \cdot d} \quad (6)$$

Man sieht nun, daß der Torsionswinkel der Länge der Welle
direkt und dem Durchmesser derselben umkehrt proportional ist.
Es folgt daraus, daß der Torsionswinkel bei langen u. dünnen
Wellen groß, bei kurzen, dicken Wellen hingegen klein ist.

Es sei nun in Gl. (6) für T seinen Werth, nämlich 120 u. 90 ein, so
erhält man für Schmiedeseisen $\theta = \frac{1}{41} \left(\frac{l}{d} \right)$

$$\text{für Größereisen } \theta = \frac{1}{39} \left(\frac{l}{d} \right)$$

d. h. diese Wellen haben die Eigenschaft, daß wenn ihre Länge
41 oder 39 mal größer als ihr Durchmesser ist, so werden sie um
einen Grad verdrehen.

der formel $d = \lambda \sqrt[3]{N}$ ist von größter Wichtigkeit, da nämlich d
nur von dem Werth N abhängt, so ist es uns möglich ein
verhältnißmäßig dünne Wellen die größten Torsionskräfte zu
übertragen, indem man diesen Wellen eine große Geschwindigkeit
ertheilt.