für das ganze Gebiet der komplexen Zahlen die 990 besagten Gleichungen gleichzeitig erfüllt — aber schon dadurch auch, dass eingangs des Anhang 5 eine Funktion angegeben ist, welche dies wenigstens für ein Zahlengebiet aus zwei oder vier Ziffern thut — ist die Existenz von Lösungen für alle diese Funktionalgleichungen sowie die Verträglichkeit der letztern miteinander dargethan.

Die 990 „Formeln“ unsrer Mannigfaltigkeit U würden in der üblichen Gestalt von „Funktionalgleichungen“ erscheinen, wenn man für jedes symbolische Produkt ab wieder $f(a, b)$, für die symbol. Quotienten $a:b$ und $\frac{b}{a}$ aber etwa $\varphi(a, b)$ und $\psi(a, b)$ bezüglich schriebe. Beispielsweise müsste so die Formel:

$$\frac{a}{b:c} = b\,\frac{c}{a} \quad \text{eigentlich lauten:} \quad \psi\{\varphi(b, c), a\} = f\{b, \psi(a, c)\}.$$

Subsumtion.

Um hinfort nicht allzu abstrakt zu reden, halte ich mich schon bei der Darstellung der allgemeinsten Begriffserklärungen und Theoreme an das hervorgehobene spezielle Substrat U.

Unter A, B, C verstehen wir lauter „*Algorithmen*“, d. h. irgendwelche *Gruppen* von Funktionalgleichungen, herausgegriffen aus der „Mannigfaltigkeit“, d. i. dem Gebiete der 990 Formeln U.

Ich unterscheide dabei, wie anderwärts, zwischen Formel*gruppen* und Formel*systemen*, indem ich unter einer „Formelgruppe“ verstehe ein solches System von Formeln des Gebietes, welches keine ihm nicht bereits angehörige Formel des Gebietes kraft der „Prinzipien“ nach sich zieht — also ein System, welches ergänzt worden ist durch den Zuzug aller seiner Konsequenzen, so weit diese wieder dem Gebiete U angehören.

Von andern Formelsystemen, als den in dieser Weise zu Algorithmen kompletirten Gruppen sei hier überhaupt nicht die Rede. Nur sei in Bezug auf die *ohne* Rücksicht auf logischen Zusammenhang gebildeten „Formelsysteme“ bemerkt, dass sich auf sie ohne weiteres jener Kalkul anwenden lässt, der für Gebiete einer Mannigfaltigkeit überhaupt in der Algebra der Logik aufgestellt worden ist, und den wir in dieser Anwendung den „*identischen* Kalkul mit Formelsystemen“ zu nennen haben werden im Gegensatz zu dem sogleich zu begründenden „*logischen* Kalkul mit Algorithmen“.

Wenn A aus B (kraft der „Prinzipien“) folgt, aber nicht umgekehrt, so werden wir *hier* schreiben:

α) $$A \subset B.$$

Es ist dann in der That das Formelsystem des Algorithmus A kleiner, *nur* ein Teil (m. a. W. „*echter* Teil“) des Formelsystems des Algorithmus B.

Allerdings ist auch die umgekehrte Schreibweise berechtigt und wird im „Aussagenkalkul“ vorgezogen — vergl. Bd. 2 § 28 — im Hinblick darauf, dass die *Zeit*, während welcher (resp. die Klasse der Gelegenheiten bei welchen) die von einer andern B einseitig bedingte Aussage A als wahr anzuerkennen ist, nur ein Teil sein wird der Zeit (resp. etc.) während welcher die Aussage A gilt:

Wenn (wann, solange, sooft) B gilt, gilt auch A aber nicht umgekehrt; A kann auch gelten ohne B.

Ebenso ist nun auch hier die Gesamtheit der Fälle *in* welchen (die Klasse der Funktionen, *für* welche) der Algorithmus B erfüllt wird, nur ein Teil von derjenigen, für welche es der Algorithmus A ist. Unter diesem Gesichtspunkt müsste man eigentlich die Schreibung:

β) $$B \subset A$$

zur Darstellung des vorausgesetzten Sachverhalts wählen.

Wenn demnach das Zeichen $\subset$ der Unterordnung genau dem Zeichen $<$ entsprechend verwendet werden soll, so hat man doch für einunddieselbe Beziehung *a priori unter zwei Schreibweisen die Wahl*, nämlich einer *extensiven* α), bei der mehr auf die *räumliche* (Flächen-)Ausbreitung der — etwa geschrieben gedachten — Sätze oder Formelsysteme gesehen, und einer *intensiven* β), bei welcher mehr auf ihre *zeitliche* Ausdehnung, ihre Gültigkeitsdauer, das Augenmerk gerichtet wird, oder — sofern man von einer solchen nicht sprechen mag — auf die Klasse der Gelegenheiten, wo sie Anwendung finden, hier also die Fälle des Erfülltseins oder die Klasse der *Lösungen* der Funktionalgleichungen.

Durch die Bevorzugung der extensiven vor der intensiven Schreibung unterscheidet sich der hier vorzutragende Kalkul schon in der Anlage von dem später vorzutragenden Aussagenkalkul.

Ich würde mich unter Umständen wol auch der zweiten Schreibweise anschliessen, muss aber hier der ersteren den Vorzug geben.

Folgt nicht nur A aus B, sondern auch B aus A, so sind die Formelsysteme der Algorithmen A und B identisch dieselben, und schreiben wir:

$$A = B \quad \text{oder} \quad B = A.$$

Denn da wir nur mit Algorithmen zu thun haben wollen, so ist das Formelsystem A ergänzt zu denken durch Zuziehung aller seiner Konsequenzen, zu denen nach der Voraussetzung auch B gehört, und umgekehrt, d. h. beide sind eines.

Um lediglich auszudrücken, dass A aus B folgt, während unbekannt ist oder unentschieden, offen gelassen werden soll, ob auch umgekehrt B aus A folge, werden wir schreiben:

$$A \mathrel{\underline{\in}} B \quad \text{desgl.} \quad B \mathrel{\underline{\ni}} A,$$

was man wie bisher als „eingeordnet" oder „sub" lesen kann, daneben auch: A folgt aus B, ist Teil von B, in B enthalten; B bedingt, umfasst A, schliesst A in sich, involvirt es („implies" A).

Darnach müssen die beiden Axiome zugegeben werden:

I. $A \mathrel{=\!\!\in} A$.

II. Wenn $A \mathrel{=\!\!\in} B$ und $B \mathrel{=\!\!\in} C$, so ist auch $A \mathrel{=\!\!\in} C$.

Auch kann man, das Zeichen $\mathrel{=\!\!\in}$ „der *eventuellen* Unterordnung" als das ursprüngliche ansehend, durch dieses das Gleichheitszeichen definiren mittelst der

Definition (1). Wenn $A \mathrel{=\!\!\in} B$ und zugleich $B \mathrel{=\!\!\in} A$, so werde $A = B$ genannt.

Versinnlichen wir uns die Algorithmen durch Flächengebiete der Ebene, so stellt — wenn nur *grosse* anstatt kleine Buchstaben in sie eingetragen gedacht werden — die Figur 1, S. 155, die Beziehung $A \subset B$, und die Figur 2 ibid. die $A = B$ dar, und falls $A \mathrel{=\!\!\in} B$, so findet entweder das eine oder das andre statt.

Diese Versinnlichung ist aber hier noch mehr als blosse Analogie, auch mehr als eine Abbildung: Man kann sich geradezu die Flächengebiete in soviele Parzellen zerlegt denken, als wie viele Gleichungen des Gebietes U der zugehörige (gleichnamige) Algorithmus umfasst, und in diese Parzellen — wie in die Felder auf einem Bogen karrirten Papiers — diese Gleichungen selbst hineingeschrieben, so wird damit *das wirkliche Verhältniss* der Formelgruppen A, B zu einander direkt zur Anschauung gebracht.

Multiplikation.

Wir definiren jetzt das *„logische" Produkt* $A \cdot B$ oder AB und die *„logische" Summe* $A + B$ zweier Algorithmen, und bringen alsdann die Grundeigenschaften der so eingeführten Gebilde zum Ausdruck.

Hiebei wollen wir für alle Definitionen und Sätze durchweg dieselben Chiffren verwenden, welche den entsprechenden im identischen Kalkul zukamen, wenn diese auch hier in etwas anderem Zusammenhange vorgebracht werden, weil ja gerade die anfängliche Übereinstimmung der beiden Kalkuln von erster Wichtigkeit ist.

AB stelle den, den beiden Algorithmen A und B *gemeinsamen* Formelkomplex vor, es sei also das „logische" Produkt der Formel*gruppen* einerlei mit dem „identischen" Produkt der betreffenden Formel*systeme*, cf. Fig. $9_\times$, S. 214.

Dasselbe werde 0 genannt, also $AB = 0$ geschrieben, wenn A und B *innerhalb* U *keine* Gleichung gemein haben, und diese 0 werde als ein uneigentlicher, der *„Null-Algorithmus"* mit zu den Algorithmen gezählt.

Im andern Falle ist AB auch nicht blos ein Formelsystem, sondern selbst wieder ein Algorithmus, indem es alle Gleichungen, die es innerhalb U nach den „Prinzipien" zur Folge haben kann, bereits in sich schliessen muss.

Ersichtlichermassen gilt nämlich (auch wenn AB nur Formelsystem wäre):

Th. $6_\times$) $\quad AB \mathrel{=\!\!\in} A$ und $AB \mathrel{=\!\!\in} B$.

Hat nun AB innerhalb U eine Konsequenz C, so folgt diese, weil mit A auch AB gegeben ist, nach Prinzip II auch aus A, d. h. es ist $C \mathrel{=\!\!\in} A$; und ganz ähnlich folgt $C \mathrel{=\!\!\in} B$, d. h. es muss C den Algorithmen A und B schon gemeinsam sein, sich *in* AB befinden.

Die Multiplikation von Algorithmen ist ein ungemein fruchtbares Mittel, um neue Algorithmen AB zu *limitiren*, sie als vollständige oder „Gruppen" nachzuweisen, die Grenzen ihrer Konsequenzen (innerhalb U) zu erkennen, wenn bereits diejenigen der Faktoren A, B bekannt, diese selbst limitirt sind. (Beispiele weiter unten, Anhang 5 sub „Beleg 1".)

Aus der Übereinstimmung der logischen mit der („extensiv" aufgefassten) identischen Multiplikation geht hervor, dass jene auch die Grundeigenschaften von dieser besitzt; sie ist kommutativ und assoziativ, auch gilt z. B. Th. $14_\times$) $A \cdot A = A$ — was alles übrigens auch ganz direkt einleuchtet.

Speziell seien hier aber zum Bewusstsein gebracht die der Definition (3) der Theorie entsprechenden beiden Sätze:

$(3_\times)'$ *Sooft* $X \mathrel{=\!\!\in} A$ *und zugleich* $X \mathrel{=\!\!\in} B$, *so ist auch* $X \mathrel{=\!\!\in} AB$.

$(3_\times)''$ *Jedesmal, wenn* $X \mathrel{=\!\!\in} AB$ *ist, muss auch* $X \mathrel{=\!\!\in} A$ *und* $X \mathrel{=\!\!\in} B$ *sein.*

Der letztere $(3_\times)''$ von diesen beiden Sätzen erscheint im Hinblick auf Th. $6_\times$) und II als geradezu selbstverständlich: Wenn X aus dem dem A und B gemeinsamen Formelsystem schon folgt, so folgt es a fortiori aus A, desgl. aus B.

Nicht in gleichem Grade (der Unmittelbarkeit) leuchtet aber der erste Satz $(3_\times)'$ ein. Liesse man hier ausser Acht, dass die Formelgruppe X ganz dem Gebiet U angehören muss, so würde sich der Satz $(3_\times)'$ leicht durch Beispiele widerlegen lassen. In der That ist der Fall denkbar, dass gewisse Behauptungen resp. Formeln X nach den ja *ausserhalb* U liegenden „Prinzipien" zwar aus den Prämissen A folgen, desgl. aus den Prämissen B, ohne jedoch aus den, den beiden Prämissensystemen gemeinsamen Elementen oder Gleichungen zu folgen, welche letztere sogar 0 sein, ganz fehlen können. (Betreffs wirklichen Vorkommens solchen Falles siehe Anhang 5, „Beleg 2".)

Wenn dagegen, wie vorauszusetzen, X, A, B komplete Algorithmen desselben Gebietes U sind, so muss, falls X aus A folgt, das Formelsystem der Gruppe X geradezu ein Teil desjenigen von A sein, ebenso, falls auch X aus B folgt, ein Teil von B, und dann also ein Teil des dem A und B gemeinsamen Formelkomplexes (welcher mithin sicher vorhanden ist).

Sonach gelten also in der That die beiden Teile von $(3_\times)$, einem Satze, von dem wir sahen, dass durch ihn das identische Produkt ausreichend *definirt* werden konnte. Diese Definition hätten wir anstatt der von uns gewählten unmittelbar intuitiven auch hier zu Grunde legen können.

Desgleichen gilt hier das Analogon der

Definition $(2_\times)$: $\quad 0 \mathrel{\overline{\in}} A,$

und zwar hat dieses einfach den Sinn, dass mit dem Gebiet der Felder, in welche die Formeln irgend eines Algorithmus eingetragen sind, auch jederzeit unbeschriebene Felder verbunden gedacht werden mögen. „Nichts" oder „leere" Felder" bilden die *Bedeutung des Nullalgorithmus*, wenn wahr sein soll, dass jeder Algorithmus seine eigenen Formeln und ausserdem 0 enthält.

Zöge man indess die 18 Identitäten der Formelsorte $a, b, c = a, b, c$ mit in den Bereich der alsdann 1008 Gleichungen umfassenden Mannigfaltigkeit U herein, so würden diese 18 den Inhalt des Nullalgorithmus ausmachen. Seine Bedeutung würde die Aussage sein, dass die Formeln $a(b:c) = a(b:c)$, etc., allgemein gelten, und würden diese als konstanter unvermeidlicher Bestandteil sich in jedem Algorithmus mit vorfinden. Durch sie würde aber offenbar über Geltung oder Nichtgeltung von noch andern Formeln des Gebietes kein Präjudiz gegeben.

Addition.

Als die *„logische Summe"* $A + B$ definiren wir denjenigen Formelkomplex, welcher nicht nur die Gleichungen von A und die von B sämtlich enthält, sondern auch noch alle diejenigen Gleichungen des Gebietes U dazu, welche aus diesen, wenn sie gleichzeitig als wahr

angenommen werden, auf Grund der „Prinzipien" hinzugefolgert werden können.*)

Diese logische Summe $A + B$ greift über die „identische Summe" $A (+) B$ der Formelsysteme im Allgemeinen hinaus — wie sich nachher leicht durch Beispiele belegen lassen wird (Anhang 5, „Beleg 3").

Die letztere bedeutet bekanntlich das Formelsystem, zu welchem die Systeme A und B sich gegenseitig ergänzen; dieselbe wird im Allgemeinen kein „Algorithmus" sein, weil aus A und B zusammen als Prämissen sich oft noch weitere Gleichungen schliessen lassen werden, die weder dem A noch dem B für sich angehören.

Es ist demnach die logische Summe zweier Algorithmen etwa in folgender Weise durch eine Figur zu versinnlichen.

Sehr oft ereignet es sich, dass die logische Summe $A + B$ *sämtliche* Gleichungen des Gebietes U umfasst. Diese konstituiren ja zusammen selbst einen Algorithmus: U_0, welcher innerhalb des zur Illustration gewählten Substrates mit dem Formelsystem U zusammenfällt.

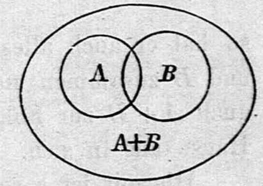


Fig. 31.

Dieser Algorithmus U_0 möge — für den Augenblick — mit dem Zahlzeichen 1 bezeichnet werden, eine Konvention, die sich dadurch rechtfertigt, dass alsdann die Gleichung $A \cdot 1 = A$ allgemein gelten wird. Dann gilt für jedes Individuum A in der Mannigfaltigkeit der zur Betrachtung vorliegenden Algorithmen auch das Analogon der

Definition (2_+): $\quad A \mathrel{\overline{\in}} 1.$

Und endlich gelten die beiden Sätze, welche in der Theorie die Definition (3_+) der identischen Summe zusammensetzten:

$(3_+)'$. *Wenn* $A \mathrel{\overline{\in}} X$ *und* $B \mathrel{\overline{\in}} X$, *so ist auch* $A + B \mathrel{\overline{\in}} X$.

$(3_+)''$ *Wenn* $A + B \mathrel{\overline{\in}} X$, *so ist auch* $A \mathrel{\overline{\in}} X$ *und* $B \mathrel{\overline{\in}} X$.

Da nach unsrer Definition der logischen Summe offenbar:

Th. 6_+) $\quad A \mathrel{\overline{\in}} A + B \quad$ und $\quad B \mathrel{\overline{\in}} A + B$

sein muss, so erscheint der letztere Satz $(3_+)''$ nach II als geradezu selbstverständlich: Wenn A nebst B und allem, was beide noch zur Folge haben, aus X folgt, so folgt natürlich auch A aus X und B aus X.

Weniger unmittelbar leuchtet der erstere Satz $(3_+)'$ ein.

Wäre X kein Algorithmus, sondern blos ein Formelsystem, aller-

*) Bei der „intensiven" Deutung würde unsre obige „Summe" als „Produkt" zu bezeichnen sein (unser „Produkt" aber nicht als „Summe").

dings ganz aus U, jedoch irgendwie, herausgegriffen, so wäre ein Fall denkbar, wie ihn die folgende Figur versinnlicht: wo zwar A und B ganz in X liegen, dagegen $A+B$ doch nicht in X enthalten ist (vgl. Anhang 5, „Beleg 4“). Es brauchte dann $(3_+)'$ nicht zu gelten.

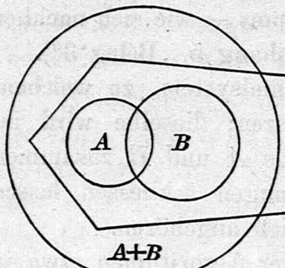


Fig. 32.

Nun aber sollte X einen *Algorithmus* (innerhalb U) bedeuten, komplettirt durch Hinzuziehung aller seiner nach den „Prinzipien“ bedingten Konsequenzen. Wenn dieser A zur Folge hat, dessen ganzes Formelsystem in sich schliesst, desgl. B zur Folge hat, so hat er auch alles das zur Folge, was kraft der Prinzipien aus A und B zusammen noch weiter gefolgert werden kann, d. h. er hat auch $A+B$ zur Folge und schliesst dessen ganzes Formelsystem von Hause aus in sich.

Hiermit ist sorgfältigst erkannt, dass die Axiome I und II, sowie die Definitionen (1), (2), (3) des „identischen Kalkuls“ auch in dem „logischen Kalkul“ mit Algorithmen*) unmodifizirt Geltung haben.

Diese aber bildeten ausschliesslich die formale Grundlage für den ersten Teil jenes Kalkuls, soweit er in den Paragraphen 4, 5 bis 10, 11 der Theorie dargestellt ist. Folglich können wir auch alle aus dieser Grundlage streng deduktiv dort abgeleiteten Sätze jetzt ohne weiteres in den logischen Kalkul herübernehmen, die kleinen Buchstaben von ebendort in grosse umschreibend — *einschliesslich der ersten Subsumtion*, Th. $25_\times$), *des Distributionsgesetzes.*

Dass die *zweite* $26_\times$) *nicht* gilt, werden wir gegen Schluss belegen (Anhang 5, „Beleg 5“); doch sei bemerkt, dass von dem nur *diesen* Zweck im Auge Habenden die vorhergehenden und nachfolgenden Belege des Anhang 5 überschlagen werden können.

Was vorstehend erörtert und festgesetzt worden an dem Substrat der resp. für die „Algorithmen“ oder „Gruppen von Funktionalgleichungen“, das lässt sich noch allgemeiner und für die *Gruppentheorie* überhaupt aufrecht erhalten.

Der Begriff der „Gruppe“ hat neuerdings fast in der gesamten Mathematik eine rapid steigende Bedeutung und zunehmend verbreitete Anwendung gefunden. Sind doch Herrn Dedekind's Zahlenkörper, Kronecker's Rationalitätsbereiche, etc. nichts anderes wie „Gruppen“, und wie die Substitutionentheorie sich fast nur um Gruppen von Substitutionen dreht, so haben auch für die Geometrie Herrn Walter Dyck's gruppentheoretische Untersuchungen, für die höhere Analysis Herrn Sophus Lie's Transformationsgruppen etc. eine fundamentale Wichtigkeit erlangt. Nicht minder sah die Mechanik sich genötigt „Gruppen“ von Bewegungen (Translationen und Rotationen) zu studiren, und ist mit deren Studium durch Camille Jordan u. a. die Bravais-Sohncke'sche Erklärung der Krystallstruktur erwachsen, u. s. w.

*) Hätten wir ein umfassenderes Substrat gewählt, so wäre dieser auch als ein Kalkul mit *Kalkuln* zu bezeichnen.

Unter solchen Umständen dürfte es wohl verlohnen, die Gesetze, nach welchen alle Forscher, die sich mit Gruppen beschäftigen, wenn auch vielleicht unbewusst, denken, sich einmal gründlich zum Bewusstsein zu bringen, zumal diese Gesetze in ihren elementarsten Grundzügen sich als keine andern erweisen als die der Logik überhaupt und des identischen Kalkuls, bis *ex*clusive zur zweiten Subsumtion des Distributionsgesetzes.

Ist ein System von Dingen gegeben, die wir *„Elemente“* nennen wollen, und kennen wir einen *Prozess*, durch welchen aus irgendwelchen von diesen Elementen sich neue Gebilde erzeugen, herstellen, „ableiten“ lassen, so vermögen wir auch die letzteren als weitere „Elemente“ zu dem System der bisherigen hinzuzuschlagen, sie sozusagen dem Systeme als neue Errungenschaft „anzugliedern“.

Auf diese Weise kann man fortfahren, und den gleichen Prozess auch auf die (oder irgendwelche) Elemente des so erweiterten Elementesystems anwenden, solange überhaupt der Prozess noch neue Dinge als Elemente zu liefern vermag und auf die hinzutretenden anwendbar bleibt.

Den Prozess haben wir uns hienach begrifflich bestimmt zu denken als eine gewisse *Art* von Prozessen. Sofern wir ihn eigenmächtig ausführen können, mögen wir ihn auch eine „Operation“ nennen, oder, wenn sich an dieser verschiedene Stadien unterscheiden lassen, ihn hinstellen als ein „System von Operationen“ (den Teiloperationen der vorerwähnten alsdann „zusammengesetzten“ Operationen); die Reihenfolge solcher Teiloperationen kann eine vorgeschriebene, oder auch ganz oder teilweise in unser Belieben gestellte sein, je nach der Art, wie der Prozess begrifflich bestimmt erscheint. Operationen können (als „uni-näre“?) schon aus *einem* Elemente (zuweilen oder immer) ein neues erzeugen, oder aber als „Knüpfungen“ deren zwei oder mehrere bedürfen um ein neues Element hervorzubringen („binäre“, „ternäre“ und „multi-näre“? Knüpfungen). Als auf Beispiele sei auf Negation und Multiplikation als solche Operationen hingewiesen.

Durch die Vorschrift, welche die Natur des Prozesses bestimmt und durch die ursprünglich gegebenen Elemente ist in allen Fällen die Mannigfaltigkeit der Objekte des Denkens bestimmt, welche durch den Prozess aus jenen Elementen ableitbar sind.

Vorbehaltlich jedoch dessen, dass die als gegeben hingestellten Elemente nicht bereits unverträglich miteinander seien und dass als Elemente nicht etwa „*Klassen* von Elementen" figuriren. Die erstere Forderung erscheint sofort als eine selbstverständliche. Bei Nichtbeachtung der letztern aber müsste späterhin Verwirrung, Konfusion entstehen, es müssten Widersprüche sich ergeben insofern keine Sicherheit, keine Garantie dagegen vorläge, dass wir nicht — bei den nötig fallenden Unterscheidungen zwischen den Elementen — ein bestimmtes Element als solches (bei einer bestimmten Betrachtung) auszuschliessen und zugleich dasselbe als ein Individuum einer solchen Gattung oder Klasse, die selbst Element ist, zuzulassen hätten. Nur höchstens *kollektive* Zusammenfassungen von Elementen zu einem *Systeme* solcher, nicht aber *generelle* (zu einer Gattung von solchen) wird man wiederum als „Elemente" gelten lassen dürfen. M. a. W. das *System der* dem Prozess der Gruppenbildung zu unterwerfenden *Elemente* wird von vornherein — in dem in den §§ 7, 9 und 16 erläuterten Sinne — eine *konsistente* sowol als *reine*, wird eine *gewöhnliche* Mannigfaltigkeit sein müssen, und auch der Prozess der Gruppenbildung ist der Einschränkung zu unterwerfen, muss so beschaffen sein, dass jenes System bei seiner Erweiterung zur „Gruppe" eine solche Mn. stets bleiben wird.

Die also aus den gegebenen Elementen ableitbaren Elemente bilden mit diesen selbst zusammen ein System, welches die durch die erstern bestimmte, denselben zugehörige „*Gruppe*" zu nennen ist, und dürfen jene als ausreichende „Bestimmungselemente" dieser Gruppe hingestellt werden.

Der Begriff der Gruppe ist hienach ein engerer als der des „Elementesystems"; jede Gruppe ist ein Elementesystem, aber nicht jedes Elementesystem ist eine Gruppe.

Hienach ist klar, dass (zunächst) die Begriffserklärungen der Einordnung oder Subsumtion, der Gleichheit und der Unterordnung auf die Gruppen ebenso anwendbar sein werden, wie auf die Elementesysteme überhaupt, und bedarf der Ansatz: $A \Subset B$, oder die damit äquivalente Redensart: die Gruppe A ist „*Untergruppe*" der B, keiner neuen Erklärung.

Die in der Wissenschaft eingeführte Arbeitsteilung bringt es mit sich, dass auch gruppentheoretische Untersuchungen sich immer nur auf eine (begrifflich) bestimmte Mannigfaltigkeit von Objekten des Denkens zu beziehen haben, aus welcher nur die Bestimmungselemente aller in Betracht zu ziehenden Gruppen allein hervorzuheben sind. Diese Mannigfaltigkeit (die wir, wie gesagt als eine „gewöhnliche" vorauszusetzen haben) bestimmt ihrerseits eine Gruppe, oder besser gesagt, sie *ist* — wenn mit Rücksicht hierauf eben vollständig, umfassend genug, charakterisirt — schon selbst eine Gruppe.

Diese Gruppe, die umfassendste, welche alle denkbaren Gruppen

des vorliegenden Untersuchungsfeldes in sich schliessen wird — und, als blosses Elementarsystem aufgefasst, etwa „die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit" zu nennen wäre — mag „*die vollständige Gruppe*" (schlechtweg) genannt werden. Sie entspricht der „identischen Eins", 1, des Aussagen- und Gebietekalkuls und würde nicht unpassend auch als „die Gruppe 1" hingestellt werden.

Dieselbe ist jedoch — bei den Substitutionen z. B. — nicht mit der „identischen Substitution" 1 zu verwechseln, welche letztere vielmehr, wie nachher erhellt, eine „Nullgruppe", „die Gruppe 0" konstituiren wird.

Als „Produkt" $A \cdot B$ oder AB zweier Gruppen A und B gilt uns das System der Elemente, welche sowol der Gruppe A als auch der B angehören — m. a. W. das „identische Produkt" der zugehörigen Elementesysteme, die „Gemeinheit" dieser Systeme in Herrn Dedekind's[1] Ausdrucksweise. Dasselbe muss, sofern es kein leeres (oder „Nullsystem") ist, allemal selbst eine Gruppe sein.

Denn wäre dies nicht der Fall, so müsste durch den Prozess der Gruppenbildung aus seinen Elementen ein neues ableitbar sein, welches ihm selbst, dem Systeme AB, nicht angehört, und darum auch nicht dem System A und dem B zugleich angehören kann, vielmehr wenigstens einem dieser beiden — sagen wir dem System A — nicht angehören wird. Da laut Definition die Elemente von AB aber sämtlich auch Elemente von A (sowie von B) sind, so wäre es hienach auch gelungen, aus den Elementen des Systems A ein neues, diesem nicht angehöriges Element abzuleiten — im Widerspruch mit der Voraussetzung, dass A eine Gruppe gewesen.

„*Nullgruppe*" oder „Gruppe 0" nennen wir das Produkt aller erdenklichen Gruppen, welche in der vollständigen Gruppe (als Untergruppen) enthalten sind (diese selbst also einbegriffen).

Wo etwa auch ein mit 0 bezeichnetes Element auftritt, ist diese „Gruppe 0" von dem „Elemente 0" natürlich zu unterscheiden.

Die Nullgruppe wird eine eigentliche Gruppe sein auf jedem solchen Untersuchungsfelde, wo gewisse Elemente in jeder Gruppe enthalten, allen Gruppen gemeinsam sein müssen.

So z. B. wird im Gebiet der Substitutionsgruppen die Nullgruppe bestehen aus der einen identischen Substitution 1; in der Gruppentheorie des identischen Kalkuls — vergl. Anhang 6 — wird die Nullgruppe aus den beiden Elementen 0 und 1 bestehen, und auch auf dem Gebiet der Gruppen von Funktionalgleichungen oder Algorithmen können der Nullgruppe als Inhalt oder ihre Bedeutung eventuell untergelegt werden: die „sechs Fundamentalbeziehungen" nebst all den Formeln, welche etwa noch auf Grund derselben allgemein, als analytische Gleichungen, gelten.

Andernfalles wird die Nullgruppe als eine uneigentliche, nämlich inhaltlose oder *leere*, zu gelten haben.

Summe $A + B$ zweier Gruppen A und B nennen wir diejenige

Gruppe, welche aus den Elementen von A und B zusammengenommen ableitbar ist, welcher m. a. W. die Elemente der „identischen Summe“ der Elementesysteme A und B als Bestimmungselemente dienen. Die erstere greift über die letztere im Allgemeinen hinaus, wie gelegentlich gegebene Beispiele darthun.

Es würde nun blos eine Wiederholung desjenigen sein, was wir im identischen oder Gebietekalkul bereits eingehendst durchgesprochen haben (was uns ferner behufs Angliederung der Dedekind'schen Kettentheorie obliegen wird, in neuer Fassung aufzufrischen) und was wir endlich für das Substrat der Algorithmen im Eingang gegenwärtigen Anhanges erinnernd in Anspruch zu nehmen hatten, wollten wir von neuem darlegen, wie aus den hiemit gegebenen Grundlagen wieder alle Gesetze des identischen Kalkuls bis zu dem in § 12 charakterisirten Divergenz- oder Abzweigungspunkte hin als auch für den „*Gruppenkalkul*“ gültige fliessen. Wir dürfen diese Gesetze für ihn hinfort ohne weiteres in Anspruch nehmen.

Ist der gruppenbildende Prozess eine „uninäre“ Knüpfung, d. h. eigentlich gar keine Knüpfung, sondern vielmehr eine Operation, mittelst welcher je aus *einem* Elemente immer schon ein eventuell neues als Funktion oder Bild desselben abgeleitet werden kann — wie z. B. im identischen Kalkul die Operation des Negirens, in der Arithmetik die der Quadratwurzelausziehung, oder die Herstellung des Briggs'schen Logarithmus, etc. — so steht nichts im Wege die gedachte „Ableitung“ als eine „Abbildung“ anzusehen, und deckt sich der Begriff der „Gruppe“ mit dem Dedekind'schen Begriff der „Kette“. Des Letzteren Ketten sind die durch einen Abbildungsprozess erzeugten Gruppen. Der Gruppentheorie ordnet die Theorie der Ketten als ein besondrer Zweig sich unter.

Es könnte sogar scheinen als ob die letztere sich ebensoweit erstreckte, wie die erstere. Denn ist die eindeutige Abbildung eine solche nur einseitig, nicht auch umgekehrt, ist sie eine „unähnliche“, so mögen irgendviele Elemente das nämliche Bild haben. Dieses Bild als das Ergebniss einer *Verknüpfung* jener Elemente hinzustellen, geht aber dann nicht an, weil der Unterschied besteht, dass es diesen nicht erst in ihrer *kollektiven* Verbindung, als dem Systeme derselben, sondern dass es ihnen bereits einzeln genommen, *distributiv* oder generell, eindeutig entspricht. Immerhin ergeben sich aus diesem Verhältnisse vielleicht Anknüpfungspunkte für beide Theorieen.

Die Gruppentheorie ist hienach anzusehen als eine wirkliche Erweiterung der Theorie der Ketten. —

Anhang 5.

Substrat zum vorigen Anhang und Material zu dessen Belegen.

Als solches muss ich jetzt ein paar spezielle Algorithmen des Gebietes U vorstellen.

Voraus bemerke ich, dass ich den logischen Zusammenhang zwischen den 990 Formeln dieses Gebietes längst vollständig erforscht habe und denselben auch auf die einfachste Weise zu begründen vermag. Die Darlegung dieses Zusammenhanges ist aber nicht der Endzweck der gegenwärtigen Mitteilung. Vielmehr beabsichtige ich ja, denselben nur nebenher zu benutzen, um durch gegenteilige Beispiele darzuthun, dass gewisse Sätze im logischen Kalkul keine Geltung zu haben brauchen.

Ich kann mich daher in Bezug auf das — unter vielen denkbaren, ebenfalls schon ziemlich von mir durchforschten Formelgebieten [vergl. (l. c.)[8], § 3 und 4] willkürlich ausgewählte — Gebiet U darauf beschränken, die meinem Hauptzweck dienlichen Thatsachen einfach anzuführen, sofern diese Thatsachen (mit mehr oder weniger Mühe) von jedermann kontrolirbar sind, und brauche ich dabei weder auf die Methoden einzugehen, durch welche sie (im Zusammenhang) *am bequemsten* zu beweisen wären, noch darauf, wie sie gefunden wurden.

Die Ableitung der einen Formeln aus den andern, von denen sie mitbedingt werden, ist zudem *leicht* und ganz elementar zu bewerkstelligen und mag deshalb dem Leser überlassen bleiben. Nur in Bezug auf das schwierige (und hier besonders wichtige) Problem der Abgrenzung jeder Formelgruppe will ich beweiskräftige Angaben machen.

Wesentlich sind es fünf Algorithmen, mit denen wir Bekanntschaft zu machen haben.

1°) *Der Algorithmus* U_0 selbst, bestehend aus den sämtlichen 990 Gleichungen des Formelgebietes U [vergl. (l. c.)[8], § 7 sq.].

Für uns ist nur der Nachweis von Belang, dass es Funktionen gibt, die alle diese Funktionalgleichungen gleichzeitig erfüllen, dass diese also, als „Formeln“ aufgefasst, miteinander verträglich sein müssen.

Der Nachweis ist zu leisten durch Angabe einer Funktion, die sie wirklich erfüllt. Eine solche wird nun für ein Zahlengebiet von vier Elementen, den Ziffern 1, 2, 3, 4, definirt (in Gestalt eines symbolischen Einmaleinses) vermittelst der Tafel:

$$\begin{aligned}
1 &= 1\cdot 1 = 2\cdot 2 = 3\cdot 3 = 4\cdot 4\\
2 &= 1\cdot 2 = 2\cdot 1 = 3\cdot 4 = 4\cdot 3\\
3 &= 1\cdot 3 = 3\cdot 1 = 2\cdot 4 = 4\cdot 2\\
4 &= 1\cdot 4 = 4\cdot 1 = 2\cdot 3 = 3\cdot 2,
\end{aligned}$$

desgleichen auch schon für ein Zahlengebiet von nur zwei Elementen, 1 und 2, durch das erste Viertel dieser Tafel — (es sind das die Funktionstafeln $1_{0,0})^2$ und $1_{0,0})^4$ von (l. c.)[7].

Überzeugen wir uns wenigstens für ein Beispiel davon, dass solches in der That der Fall ist. Unter anderm müsste etwa gelten:

$$\frac{b}{a:c} = \frac{c}{a\cdot b}$$

— eine Formel, aus der nebenbei gesagt, alle übrigen von U fliessen, die somit für sich schon eine ausreichende Prämisse des Algorithmus U_0 bildet (dergleichen er 156 innerhalb U besitzt). In der Formel dürfen wir nun für a, b, c irgendwelche von den Ziffern 1, 2, 3, 4 setzen, und müssen, falls sie gültig, allemal eine richtige Gleichung erhalten. So muss sich z. B. herausstellen, dass

$$\frac{3}{2:4} = \frac{4}{2\cdot 3}, \quad \text{sowie auch} \quad \frac{1}{2:2} = \frac{2}{2\cdot 1},$$

etc. ist. Um dies nachzusehen entnehmen wir aus der zweiten Zeile der Tafel vom letzten „Produkte" (als zusammengehalten mit seinem angegebenen Werte 2) dass $2:4 = 3$ ist, aus der vierten Zeile aber, dass $2\cdot 3 = 4$. Durch Einsetzung dieser Werte kommt also die erstere Gleichung hinaus auf: $\frac{3}{3} = \frac{4}{4}$, und dass dieses richtig ist, indem beide Seiten den Wert 1 haben, ist aus der dritten und vierten Zeile der Tafel vom ersten „Produkt" zu entnehmen.

Ebenso kommt die andre Gleichung auf $\frac{1}{1} = \frac{2}{2}$ oder $1 = 1$ hinaus. —

Der Leser vergesse bei diesen Betrachtungen nicht, dass hier keineswegs von „eigentlichen" Produkten und Quotienten die Rede ist, für welche ja das Einmaleins schon anderweitig feststeht. Vielmehr ist vorstehend $1\cdot 1$ und $2\cdot 3$ etc. nur aufzufassen als eine abgekürzte Schreibung ad hoc für $f(1, 1)$ und $f(2, 3)$ etc., und konnten solche Funktionswerte bei der Definition, tabellarischen Erklärung von $f(x, y)$ doch nach Belieben festgesetzt werden!

So leicht es nun auch für ein Beispiel sich erwies, das Erfülltsein einer bestimmten Formel nachzusehen, so würde es doch bei ihr schon sehr weitläufig werden, solches für alle Wertsysteme der Argumente aus dem Zahlengebiete durchzuführen, und vollends kaum durchführbar, fast eine Lebensaufgabe, bei allen 990 Formeln des Formelgebietes U denselben empirischen Weg auszuschreiten.

Der Leser, welcher meinen in jedem beliebig herausgegriffenen Beispiele sich bewährenden Behauptungen gleichwol den Glauben versagt, muss

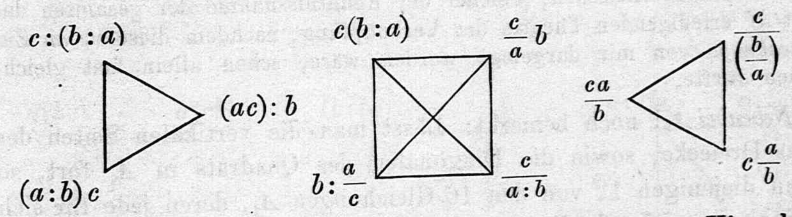
deshalb verwiesen werden auf die generellen Schlüsse, durch welche ich (l. c.)[8] und an andern Orten das empirische Verfahren vereinfacht oder entbehrlich gemacht habe. —

2°) *Der Algorithmus* A_1. Die Gleichung, welche das Assoziationsgesetz ausdrückt:

$$b(ac) = (ba)c$$

ist eine von den 990 Gleichungen U. Aus ihr fliessen noch 15 andere Gleichungen desselben Gebietes, und nur diese. Ich muss dieselben vollständig anführen. Sie lauten:

$$(b:a):c = b:(ac), \quad \frac{a:c}{b} = \frac{a}{b}:c, \quad \frac{c}{ba} = \frac{\left(\frac{c}{a}\right)}{b},$$



wo die Seiten der beiden Dreiecke und des vollständigen Vierecks als Gleichheitszeichen zwischen den an die Ecken gesetzten Ausdrücken interpretirt zu denken sind.

Die Ableitung dieser 15 Gleichungen aus der Prämisse gibt zum Überfluss mein Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, I. Band, p. 242 sqq.

Die vorstehenden 16 Gleichungen bilden dasjenige, was auf dem Gebiete U der Algorithmus A_1 der (eindeutigen und eindeutig umkehrbaren) *assoziativen* Operationen zu nennen ist.

Dass wirklich keine andern als diese 16 Gleichungen des Gebietes aus dem ganzen Systeme folgen, kann auf die elementarste Weise nachgewiesen werden durch die folgende Tafel von Funktionswerten

$$\begin{aligned}
1 &= 1\cdot 1 = 2\cdot 2 = 3\cdot 3 = 4\cdot 4 = 5\cdot 6 = 6\cdot 5\\
2 &= 2\cdot 1 = 1\cdot 2 = 3\cdot 6 = 6\cdot 4 = 4\cdot 5 = 5\cdot 3\\
3 &= 3\cdot 1 = 1\cdot 3 = 2\cdot 5 = 5\cdot 4 = 4\cdot 6 = 6\cdot 2\\
4 &= 4\cdot 1 = 1\cdot 4 = 2\cdot 6 = 6\cdot 3 = 3\cdot 5 = 5\cdot 2\\
5 &= 5\cdot 1 = 1\cdot 5 = 2\cdot 3 = 3\cdot 4 = 4\cdot 2 = 6\cdot 6\\
6 &= 6\cdot 1 = 1\cdot 6 = 2\cdot 4 = 4\cdot 3 = 3\cdot 2 = 5\cdot 5
\end{aligned}$$

welche auf einem Zahlengebiet von 6 Zahlen, die mit den Ziffern 1 bis 6 bequemlichkeitshalber benannt sind, in Gestalt eines symbolischen Einmaleinses eine vollkommen eindeutige und ebenso umkehrbare Funktion definirt.

Man sieht leicht, dass dieses Zahlengebiet der einfachsten „Gruppe", die es gibt, von nicht durchweg vertauschbaren „Substitutionen" entspricht, indem man das Element 1 mit der „identischen Substitution", die Elemente 2, 3, 4 mit den „Transpositionen" $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$ und $(\beta\gamma)$ identifiziren kann, wo dann die Elemente 5 und 6 den „cyklischen" Substitutionen $(\alpha\beta\gamma)$ und $(\alpha\gamma\beta)$ entsprechen werden, und unsre symbolische Multiplikation zusammenfällt mit der eigentlichen Multiplikation der Substitutionen.

Wie die Multiplikation der Substitutionen überhaupt, so ist also auch die vorliegende jedenfalls assoziativ. Und auch der Nachweis, dass keine andern von den 990 Gleichungen U als die sub A_1 angeführten 16 von der durch die Tafel definirten Funktion durchaus erfüllt werden, unterliegt theoretisch nicht der geringsten Schwierigkeit. Dagegen würde, denselben ohne weitere Vorbereitung direkt zu liefern, allerdings einen Aufwand an Mühe erheischen, welcher der Kenntnissnahme der gesamten das Gebiet U erledigenden Theorie der Verknüpfung, nachdem dieselbe *im Zusammenhange* von mir dargelegt worden wäre, schon allein fast gleichkommen dürfte.

Nebenbei sei noch bemerkt: Lässt man die vertikalen Seiten der beiden Dreiecke, sowie die Diagonalen des Quadrats in A_1 fort, so bleiben diejenigen 12 von den 16 Gleichungen A_1, deren jede für sich als eine „ausreichende Prämisse" von A_1 zu bezeichnen ist und also innerhalb U die Tragweite 16 hat. Dagegen bilden die fortgelassenen 4 Gleichungen einen dem A_1 untergeordneten Algorithmus K_1, dessen Prämissen eben jene beiden Vertikalseiten (mit der Tragweite 4) sind. Von den Diagonalgleichungen des Quadrats bildet jede für sich einen eigenen Algorithmus: J_2 resp. J_3, indem sie keine weiteren Konsequenzen innerhalb U nach sich zieht.

Diese Eigenschaft, innerhalb U die Tragweite 1 zu haben, kommt unter allen 990 Gleichungen U ausser den beiden genannten nur noch der Gleichung zu:

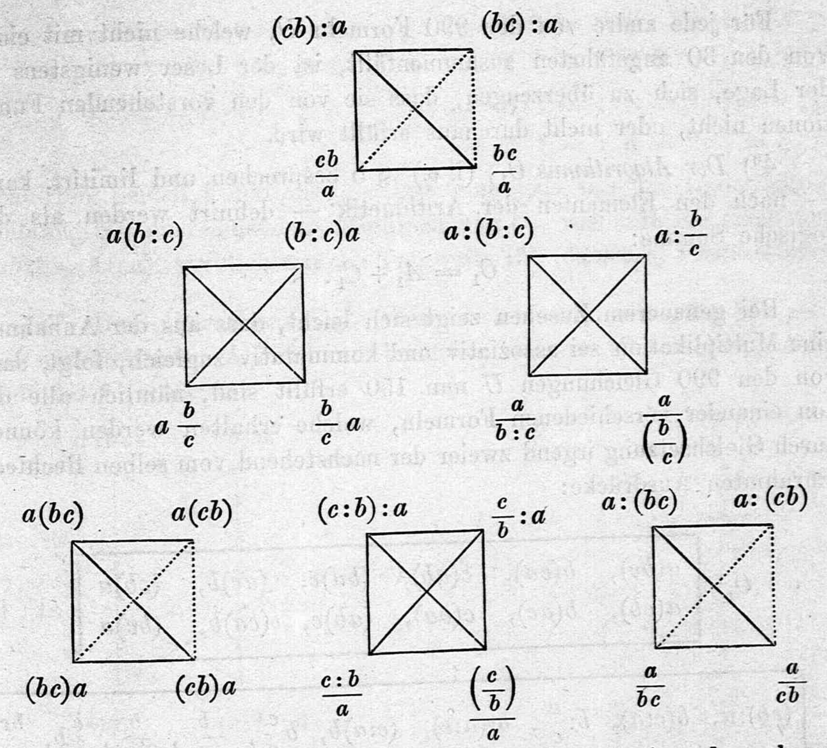
$$(cb):a = \frac{bc}{a},$$

die somit ebenfalls einen eigenen Algorithmus: J_1 vorstellt. (Vergl. unten „Beleg 1".)

3^0) *Der Algorithmus* C_1. Eine Prämisse desselben kann zunächst angegeben werden in Gestalt einer jeden von den beiden Gleichungen:

$$ab = ba, \quad a:b = \frac{a}{b}.$$

Diese gehören zwar dem Gebiete U nicht an; auf letzterem aber ziehen sie folgende 30 Gleichungen als Konsequenzen nach sich, die wir den Algorithmus C_1 (der *kommutativen* Operationen) innerhalb U nennen.



wo die punktirten Linien Wiederholungen (Dubletten) anderer bereits als Seiten ausgezogenen Formeln vorstellen, aus denen sie durch einfache Buchstabenvertauschung hervorgehen und daher nicht mitzuzählen sein werden.

Es ist nun bemerkenswert — wenn auch für unsern Hauptzweck unwesentlich — dass 29 von diesen 30 Gleichungen einzeln als Prämissen des ganzen Algorithmus ausreichen, somit die Tragweite 30 haben. Nur die Diagonalgleichung des obersten Quadrats, d. i. die vorhin erwähnte Gleichung J_1, teilt diese Eigenschaft mit den übrigen nicht, sondern bleibt ein in sich abgeschlossener Unteralgorithmus von C_1 mit der Tragweite 1.

Eine dem Algorithmus C_1 ausschliesslich unterworfene Multiplikation definirt auf einem Gebiete von vier Zahlen die Tafel $11_{1,1})^4$ und, auf eine zweite davon verschiedene Art auch die Tafel $12_{1,1})^4$ meiner Abhandlung (l. c.)[7] — welche lauten:

$1 = 1\cdot 1 = 2\cdot 2 = 3\cdot 4 = 4\cdot 3$	$1 = 3\cdot 3 = 4\cdot 4 = 1\cdot 2 = 2\cdot 1$
$2 = 2\cdot 4 = 4\cdot 2 = 1\cdot 3 = 3\cdot 1$	$2 = 2\cdot 4 = 4\cdot 2 = 1\cdot 3 = 3\cdot 1$
$3 = 3\cdot 3 = 4\cdot 4 = 1\cdot 2 = 2\cdot 1$	$3 = 1\cdot 1 = 2\cdot 2 = 3\cdot 4 = 4\cdot 3$
$4 = 4\cdot 1 = 1\cdot 4 = 2\cdot 3 = 3\cdot 2$	$4 = 4\cdot 1 = 1\cdot 4 = 2\cdot 3 = 3\cdot 2.$

Für jede andre von den 990 Formeln U, welche nicht mit einer von den 30 angeführten zusammenfällt, ist der Leser wenigstens in der Lage, sich zu überzeugen, dass sie von den vorstehenden Funktionen nicht, oder nicht durchaus erfüllt wird.

4⁰) *Der Algorithmus* O_1, (l. c.)[8] § 5 besprochen und limitirt, kann — nach den Elementen der Arithmetik — definirt werden als die logische Summe:

$$O_1 = A_1 + C_1.$$

Bei genauerem Zusehen zeigt sich leicht, dass aus der Annahme, eine Multiplikation sei assoziativ und kommutativ zugleich, folgt, dass von den 990 Gleichungen U nun 150 erfüllt sind, nämlich alle die von einander verschiedenen Formeln, welche erhalten werden können durch Gleichsetzung irgend zweier der nachstehend vom selben Rechteck umrahmten Ausdrücke:

$$O_1^{\,1}\ \boxed{\begin{array}{llllll} a(bc), & b(ca), & c(ab), & (ba)c, & (ac)b, & (cb)a \\ a(cb), & b(ac), & c(ba), & (ab)c, & (ca)b, & (bc)a \end{array}}$$

$$O_1^{\,2}\ \boxed{\begin{array}{llllllllll} (cb):a, & b(c:a), & b:\frac{a}{c}, & b:(a:c), & (c:a)b, & b\frac{c}{a}, & \frac{b}{\left(\frac{a}{c}\right)}, & \frac{b}{a:c}, & \frac{c}{a}b, & \frac{bc}{a} \\ (bc):a, & c(b:a), & c:\frac{a}{b}, & c:(a:b), & (b:a)c, & c\frac{b}{a}, & \frac{c}{\left(\frac{a}{b}\right)}, & \frac{c}{a:b}, & \frac{b}{a}c, & \frac{cb}{a} \end{array}}$$

$$O_1^{\,3}\ \boxed{\begin{array}{llllll} a:(bc), & (a:c):b, & \frac{a}{c}:b, & \frac{a:c}{b}, & \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}, & \frac{a}{cb} \\ a:(cb), & (a:b):c, & \frac{a}{b}:c, & \frac{a:b}{c}, & \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}, & \frac{a}{bc} \end{array}}$$

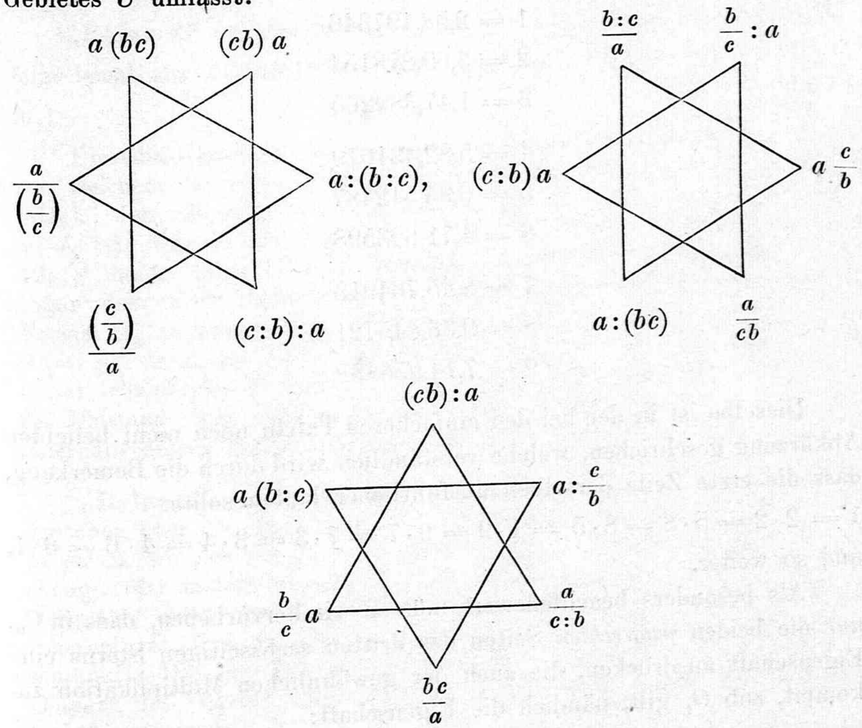
Das erste Rechteck enthält (als nicht durch blosse Buchstabenvertauschung aufeinander zurückkommende) 14, das zweite 100, das dritte 36 von den genannten 150 Gleichungen, welche zusammen den Algorithmus O_1 der *gewöhnlichen* Algebra oder sog. „allgemeinen Arithmetik" im Formelgebiete U ausmachen.

Auf einem Zahlengebiete von 3 resp. 4 Elementen erfüllen ausschliesslich ihn die durch die beiden Tafeln, (l. c.)[7] $3_{1,1})^3$ und $9_{1,1})^4$:

$$\begin{array}{l} 1 = 1\cdot 1 = 2\cdot 3 = 3\cdot 2 \\ 2 = 3\cdot 3 = 1\cdot 2 = 2\cdot 1 \\ 3 = 2\cdot 2 = 3\cdot 1 = 1\cdot 3 \end{array} \quad\Bigg|\quad \begin{array}{l} 1 = 1\cdot 1 = 3\cdot 3 = 2\cdot 4 = 4\cdot 2 \\ 2 = 2\cdot 1 = 1\cdot 2 = 3\cdot 4 = 4\cdot 3 \\ 3 = 3\cdot 1 = 1\cdot 3 = 2\cdot 2 = 4\cdot 4 \\ 4 = 4\cdot 1 = 1\cdot 4 = 2\cdot 3 = 3\cdot 2 \end{array}$$

definirten beiden Funktionen, sodass eine jede von den (innerhalb U beiläufig 60) ausreichenden Prämissen von O_1, wie z. B. die Gleichung $(ab)c = b(ca)$, wirklich nur die Tragweite 150 (daselbst) besitzen kann.

5⁰) Der *Algorithmus* C_{00}. Wesentlich werden wir jetzt nur noch des nachstehenden Algorithmus bedürfen, welcher 18 Gleichungen des Gebietes U umfasst:



und C_{00} genannt werden möge, in Anbetracht, dass er nur als ein Unteralgorithmus des schon anderwärts von mir erwähnten Algorithmus C_0 mit den Prämissen $ab = a:b = \frac{b}{a}$ sich darstellt.

Die 12 Gleichungen an den beiden ersten sechsseitigen Sternen ziehen einander und auch die 6 am dritten Sternecke nach sich, wogegen von diesen letzteren immer nur die zwei Gleichungen an den parallelen Dreieckseiten einander gegenseitig bedingen, und ausserdem keine Konsequenzen haben. Es sei dies nur nebenbei — zur Orientirung — bemerkt.

Wesentlich ist aber der Nachweis, dass dieser Algorithmus komplet ist, keine weiteren als die angeführten 18 Gleichungen des Gebietes U zur Folge haben kann.

Dieser Nachweis lässt sich unschwer führen mit Hülfe der nachstehenden Funktionstafel*), welche auf die einfachst mögliche Weise, und das ist für ein Zahlengebiet von 9 Elementen, eine eindeutige und eindeutig umkehrbare Funktion zweier Argumente so definirt, dass sie eben nur den angeführten Funktionalgleichungen C_{00}, und keinen andern Formeln von U, Genüge leistet:

$$1 = 2{,}58{,}197346$$
$$2 = 3{,}69{,}278154$$
$$3 = 1{,}47{,}389265$$

$$4 = 5{,}82{,}431679$$
$$5 = 6{,}93{,}512487$$
$$6 = 4{,}71{,}623598$$

$$7 = 8{,}25{,}764913$$
$$8 = 9{,}36{,}845721$$
$$9 = 7{,}14{,}956832.$$

Dieselbe ist in der bei den einfacheren Tafeln noch nicht beliebten Abkürzung geschrieben, welche verständlich wird durch die Bemerkung, dass die erste Zeile derselben ausführlicher lauten sollte:

$$1 = 2\cdot 2 = 5\cdot 8 = 8\cdot 5 = 1\cdot 9 = 9\cdot 7 = 7\cdot 3 = 3\cdot 4 = 4\cdot 6 = 6\cdot 1,$$

und so weiter.

Als besonders beachtenswert müssen wir hervorheben, dass in C_{00} *nur* die beiden *wagrechten* Seiten des dritten sechsseitigen Sterns eine Eigenschaft ausdrücken, die auch der gewöhnlichen Multiplikation zukommt, sub O_1 gilt, nämlich die Eigenschaft:

$$E_1) \qquad a\,(b:c) = a:\frac{c}{b}, \quad \frac{b}{c}\,a = \frac{a}{c:b}$$

Dies ist also ein Formelsystem, welches man durch ebendiese Wahrnehmung, dass

$$O_1\cdot C_{00} = E_1$$

---

*) Ich habe dieselbe (mit etwas permutirten Ziffern) erstmalig auf dem 57sten Meeting der British Association, in Manchester — vergl. Report für 1887, p. 621 — der Öffentlichkeit übergeben.

ist, als eine vollständige Gruppe, als einen eigenen Algorithmus von der Tragweite 2 (innerhalb U) erkennt.

Belege (überschlagbar).

Als „Beleg 1“ (cf. Anhang 4 unter „Multiplikation“) mag ausser der Schlussbemerkung des vorigen Absatzes noch angeführt werden, dass die oben behauptete Vollständigkeit der aus nur *einer* Gleichung bestehenden Formelgruppe J_1 hervorgeht durch die Bemerkung, dass

$$A_2\cdot C_1 = J_1$$

ist, wo A_2 charakterisirt ist durch die Prämisse: $a:(b:c) = (a:b):c$. Ebenso ist $A_1\cdot C_2 = J_2$, wo C_2 die Prämisse hat: $a:b = b:a$. Etc.

„Beleg 2“ (cf. ibidem). Die etwa N_1 zu nennende Formel $a:a = \frac{b}{b}$ folgt leicht aus A_1, desgleichen also auch die Formel:

$$M_2) \qquad a:a = b:b.$$

Dieselbe Gleichung M_2 ist auch in einem Algorithmus D_2 enthalten, von welchem das reine Multiplikationsgesetz $(ab)\,c = (ac)\,b$ eine Prämisse bildet. Jene M_2 folgt aber nicht aus dem Algorithmus $A_1\cdot D_2$, welcher $= J_2$ ist; denn in der That sind für J_2 in Gestalt der Tafeln $11_{2,2})^4$ und $12_{2,2})^4$ meiner schon citirten Abhandlung (l. c.)[7] Lösungen angebbar, welche sogar dem noch umfassenderen Algorithmus C_2 genügen, dagegen die Formel M_2 augenscheinlich *nicht* erfüllen. Hier folgt also $X\,(= M_2)$ aus $A\,(= A_1)$ desgl. aus $B\,(= D_2)$, und dennoch nicht aus $A\cdot B\,(= J_2)$. Grund dieses scheinbaren Widerspruchs zu dem Theorem $(3_\times)'$ des Anhang 4 ist der Umstand, dass eben $X, = M_2$, nicht dem Formelgebiet (U) angehört, innerhalb dessen das Produkt AB aufgesucht wurde.

„Beleg 3“ (cf. Anhang 4 sub „Addition“). Das Hinausgreifen der logischen über die identische Summe ist schon an dem Beispiel $A_1 + C_1 = O_1$ zu sehen, wo sich die 16 + 30 Gleichungen der letztern zu den 150 Gleichungen der erstern erweitern. Noch einfacher zeigt es sich an demselben Beispiele, wenn man auf das Gebiet der „reinen“ Multiplikationsgesetze innerhalb U, d. i. auf das Formelsystem $O_1{}^1$ des Algorithmus O_1 sich beschränkt: Die *eine* Prämisse $b\,(ac) = (ba)\,c$ von A_1 mit den vier Gleichungen des Vierecks unten links in C_1 fliesst dann zu den 14 Formeln $O_1{}^1$ logisch zusammen.

„Beleg 4“ (cf. ibid.). Versteht man unter X das Formelsystem, bestehend aus den 150 Gleichungen O_1 und noch irgendwelchen andern Gleichungen des Gebietes U, z. B. der Gleichung $(ca):b = \frac{ab}{c}$, jedoch *ohne* die zwei Gleichungen E_1, so ist — im Gegensatz zu $(3_+)'$ — sowol $A, = A_1$ als auch $B, = C_1$ in X enthalten, dennoch aber $A + B, = A + C_1 = O_1$ *nicht* (ganz) in X enthalten.

Der Hauptbeleg.

„Beleg 5" (cf. ibid.). Man bemerke, dass der obige Algorithmus C_{00} mit den beiden vorhergegangenen Algorithmen A_1 sowol als C_1 überhaupt keine dem Gebiet U angehörigen Formeln gemein hat, dass also hierselbst:

$$A_1 \cdot C_{00} = 0 \quad \text{und} \quad C_1 \cdot C_{00} = 0$$

ist. Darnach haben wir auch:

$$A_1 \cdot C_{00} + C_1 \cdot C_{00} = 0 + 0 = 0.$$

Im Gegensatz dazu ist aber:

$$(A_1 + C_1) \cdot C_{00} = O_1 \cdot C_{00} = E_1$$

nach dem unter O_1 und C_{00} Gesagten.

Eine Unterordnung:

$$(A_1 + C_1) \cdot C_{00} \subseteq A_1 \cdot C_{00} + C_1 \cdot C_{00}$$

ist folglich hier *unmöglich*. Denn diese, nämlich $E_1 = 0$, müsste wegen der ohnehin gültigen Subsumtion $0 \subseteq E_1$ — cf. Def. $(2_\times)$ — nach der Definition (1) der Gleichheit auf $E_1 = 0$ hinauslaufen, während doch E_1 von 0 verschieden ist.

Da nun $0 \subseteq E_1$ stetsfort in Geltung bleibt, während, wie gesagt, die Gleichheit $0 = E_1$ ausgeschlossen ist, so bleibt nur die andere Alternative: $0 \subset E_1$ übrig, d. h. wir haben hier:

$$A_1 \cdot C_{00} + C_1 \cdot C_{00} \subset (A_1 + C_1) \cdot C_{00}$$

und zwar *definitiv untergeordnet*, $\subset$, aber nicht gleich, $=$.

Dieses Ergebniss findet sich im Einklang mit der anderweitig bereits erkannten Thatsache, dass die erste Subsumtion des Distributionsgesetzes notwendig gilt.

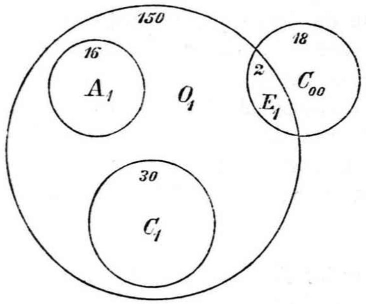


Fig. 33.

Der Sachverhalt wird — in Anbetracht, dass auch A_1 und C_1 innerhalb U keine Formel gemein haben — versinnlicht durch die Fig. 33, bei der wir auch die Zahl der Formeln jeweils in die Gebiete eingetragen haben.

Ein *zweites* Beispiel, wo wirklich Unterordnung eintritt, würde im Anschluss an das vorstehende erste erhalten, indem man den Algorithmus C_{00} ersetzte durch das ebenfalls als ein Algorithmus:

$$E_0 = E_1 + E_2 + E_3$$

nachweisbare Formelsystem seines dritten Sternecks, und ein *drittes*

Beispiel — das allereinfachste — erhielte man durch Ersetzung von C_{00} durch E_1 selber.

Das analoge Verhältniss besteht für die angeführten Beispiele auch noch auf dem umfassenderen Gebiete der 3064 (l. c.)[8] charakterisirten Formeln fort.*)

Der *logische Kalkul* unterscheidet sich demnach in der That von dem *identischen* dadurch, dass in ersterem das *Distributionsgesetz* nicht als Gleichung zu gelten braucht, sondern *nur einseitig* gelten muss *als die Subsumtion:*

$$25_\times) \qquad A \cdot B + A \cdot C \subseteq A \cdot (B + C),$$

wogegen die umgekehrte Subsumtion:

$$26_\times) \qquad A \cdot (B + C) \subseteq A \cdot B + A \cdot C$$

oft *nicht* erfüllt ist.

Jedenfalls kann aus den den beiden Kalkuln gemeinsamen Grundsätzen nicht die Gleichheit der beiderseitigen Ausdrücke folgen.

Noch ein *Beweis* für diese merkwürdige Thatsache, der von den Betrachtungen des gegenwärtigen Anhanges ganz unabhängig ist, wird von mir in Anhang 6 gegeben. Derselbe nimmt die Ausführungen des Anhangs 4 für ein Substrat in Anspruch welches ausschliesslich dem Gebiete des identischen Kalkuls angehört und setzt mithin keinerlei Betrachtungen auf extralogischem Gebiete voraus; auch er jedoch wird kein gänzlich müheloser sein.

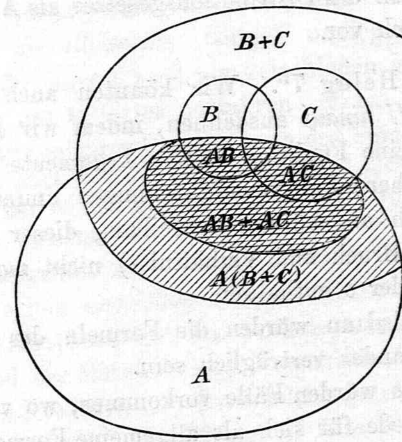


Fig. 34.

Das als nur einseitige Subsumtion geltende Distributionsgesetz $25_\times)$ des logischen Kalkuls wäre in diesem durch die Fig. 34 zu versinnlichen, worin $A\,(B+C)$ den überhaupt (resp. schräge), $AB + AC$ den doppelt schraffirten Teil vorstellt.

Dass diese beiden in eins zusammenfliessen, nämlich Gleichheit

---

*) Ob es auch fortbestehen würde, und nicht vielleicht doch Gleichheit einträte, auf einem Gebiet, welches alle denkbaren Formeln umfasste, ist eine noch offene Frage und bleibt für die Kraft der Beweisführung gleichgültig.

eintritt, kommt übrigens auch zuweilen vor, und geben wir dazu noch folgenden vorletzten

„Beleg 6". Ein gewisser — nämlich der bereits (l. c.)[8], § 6 betrachtetete — Algorithmus Q_0 umfasst 324 Gleichungen innerhalb U (von dessen 132 ausreichenden Prämissen z. B. die Gleichung $a\,(b:c) = \frac{c}{b}\,a$ eine sein würde) und hat mit dem Algorithmus O_1 von 150 Gleichungen ein gewisses, leicht ausfindig zu machendes Formelsystem von 46 Gleichungen gemein, das einen Algorithmus bildet, welcher Q_1 heissen möge — als dessen Prämisse z. B. die Formel genommen werden könnte: $(b:c)\,a = a:\frac{c}{b}$. Wir haben also:

$$O_1 Q_0 = Q_1 \quad \text{oder} \quad (A_1 + C_1)\, Q_0 = Q_1.$$

Ferner ist (siehe unter A_1): $A_1 Q_0 = K_1$; dazu $C_1 Q_0 = C_1$, weil C_1 ganz in Q_0 enthalten; somit: $A_1 Q_0 + C_1 Q_0 = K_1 + C_1$. Dass aber $K_1 + C_1 = Q_1$ ist leicht nachzuweisen. Mithin gilt hier in der That:

$$(A_1 + C_1)\, Q_0 = A_1 Q_0 + C_1 Q_0$$

als Gleichung.

Es kommen also beide durch das Zeichen $\neq\!\!\!\in$ in der ersten Subsumtion des Distributionsgesetzes als Alternative offen gelassenen Fälle faktisch vor.

„Beleg 7". Wir könnten auch unser Untersuchungsfeld noch *über U hinaus* ausdehnen, indem wir es beispielsweise alle diejenigen (auf eine Funktion zweier Argumente nebst ihren Umkehrungen bezüglichen) Funktionalgleichungen umfassen liessen, welche (bei symbolisch abgekürzter Schreibung dieser drei Grundfunktionen als Produkt, Bruch und Verhältniss) nicht *mehr* wie sechs Operationsglieder a, b oder c enthalten.

Alsdann würden die Formeln des Gebietes nicht mehr allesamt miteinander verträglich sein.

Es würden Fälle vorkommen, wo von zwei Funktionalgleichungen zwar jede für sich als allgemeine Formel gelten kann und in der That Lösungen besitzt, indem Funktionen sich angeben lassen, die sie wirklich erfüllen — wo aber beide Gleichungen unmöglich zusammenbestehen können, es keine Funktion geben wird, die sie gleichzeitig erfüllte.

Ein solches Formelpaar wäre z. B. dieses:

$$a = (a \cdot b) \cdot (b \cdot a) \quad \text{und} \quad b = (a \cdot b) \cdot (b \cdot a).$$

Dass jede von diesen Formeln für sich als allgemeingültige bestehen kann, thun bezüglich die beiden Tafeln dar:

$1 = 1,2345678$	$1 = 1,2345,6789$
$2 = 2,1754836$	$2 = 2,4718,3695$
$3 = 3,7186524$	$3 = 3,7561,9824$
$4 = 4,5812763$	$4 = 4,1629,7358$
$5 = 5,4621387$	$5 = 5,8193,4276$
$6 = 6,8573142$	$6 = 6,3974,8512$
$7 = 7,3268415$	$7 = 7,6832,5941$
$8 = 8,6437251,$	$8 = 8,9257,1463$
	$9 = 9,5486,2137,$

welche in der unter C_{00} erläuterten Abkürzung geschrieben sind, sodass ausführlicher z. B. die erste Zeile der erstern Tafel zu lesen wäre:

$$1 = 1 \cdot 1 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 5 = 5 \cdot 6 = 6 \cdot 7 = 7 \cdot 8 = 8 \cdot 2$$

und die der zweiten:

$$1 = 1 \cdot 1 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 5 = 5 \cdot 2 = 6 \cdot 7 = 7 \cdot 8 = 8 \cdot 9 = 9 \cdot 6,$$

etc. — Dass aber jene beiden Formeln nicht zugleich bestehen können, geht daraus hervor, dass durch Vergleichung aus ihnen folgen würde: $a = b$, was für ein, wie wir voraussetzen, mehr als *eine* Zahl enthaltendes Zahlengebiet, mithin als *allgemeine* „Formel" unmöglich ist, indem es die Gleichheit auch für irgend zwei als verschieden vorausgesetzte Zahlen oder Elemente des Gebietes postuliren würde.

Ähnlich würden sich auch Fälle anführen lassen, wo von drei Funktionalgleichungen eine jede für sich, auch irgend zwei zusammen, nicht aber alle drei zugleich von *einer* Funktion erfüllt werden können und dergleichen mehr — worauf ich hier indess verzichte.

Endlich würde das Formelgebiet auch solche Formeln mit umfassen, welche für sich allein schon *unzulässig* sind, nämlich nicht bestehen können, ohne einen Widerspruch mit den Voraussetzungen der Eindeutigkeit der Funktion und der Mehrheit resp. Verschiedenheit der Elemente des Zahlengebietes zu involviren. Eine solche würde z. B., wie der Leser leicht nachweisen wird, die Formel $ab = a\,(ba)$ sein, und andre mehr.

Die Gesamtheit der Formeln des Gebietes, als „Gruppe" oder „Algorithmus" betrachtet mitumfasst also diesmal auch absurde Folgerungen und trägt den Charakter der Unmöglichkeit an sich. Zur Bezeichnung des letztern empfiehlt sich darum nicht die 1, die wir oben für U verwenden mochten, sondern vielmehr ein Symbol, welches die Nichtexistenz, Unmöglichkeit des damit zu Bezeichnenden in sich zu erkennen gibt. Als solches bietet die Mathematik aber nur das Zeichen ∞

der „absoluten Unendlich" dar. Vergl. die Bemerkung in § 10 unsrer Theorie des identischen Kalkuls S. 274 sqq.

Allerdings würde jetzt — ein geringer Übelstand, denn an Sonderbarkeiten und exceptionelles Verhalten ist man ja bei dem Symbol ∞ ohnehin gewöhnt — wenn A einen zulässigen Algorithmus innerhalb des Formelgebietes vorstellt, $A \cdot \infty = A$ zu gelten haben, und nicht, wie in der Arithmetik $= \infty$ (sofern dort $A \neq 0$ ist). Dafür aber bietet sich nun $\infty - A$ als ein mnemonisches und bequemes Zeichen dar, um das System derjenigen Formeln des Gebietes ∞ zu bezeichnen, deren jede für sich mit den Gleichungen des Algorithmus A unverträglich sein muss. Nennten wir σ_0 die erste und σ_1 die zweite der obigen beiden Funktionalgleichungen, so gehörte die erste dem Systeme $\infty - \sigma_1$, die zweite dem $\infty - \sigma_0$ an. —

Anhang 6.

Zur Gruppentheorie des identischen Kalkuls. Geometrisch-logisch-kombinatorische Probleme von Jevons und Clifford.

(Zu § 12, 19 und 24.)

Hier kommt die Frage zur Beantwortung, *wie viel* verschiedene und *welche* Ausdrücke der identische Kalkul mit Gebieten oder Klassen aus einer gegebenen Menge solcher vermittelst seiner drei Spezies überhaupt zu bilden vermag, und ferner im Zusammenhang damit die Frage, *wie vielerlei* und welche Aussagen über zwei Gebiete a, b, über dreie a, b, c, auch wie vielerlei über viere a, b, c, d, etc., die exakte Logik imstande ist abzugeben, *solange sie sich noch auf ihrer ersten Etappe befindet*, nämlich nur erst über das Subsumtions- und Gleichheitszeichen (nicht aber über deren Verneinung) verfügt — eine Frage, die wir für die zweite Etappe erst in § 39 beantworten werden.

Die Beantwortung jener Fragen wird ermöglicht durch das Studium der „Gruppen", zu welchen die Ausdrücke oder Funktionen des identischen Gebietekalkuls zusammentreten.

Als eine Nutzanwendung der Betrachtungen ergibt sich nebenbei ein neuer Beweis für die Nichtbeweisbarkeit der zweiten Subsumtion des Distributionsgesetzes, *bei welchem es nicht erforderlich ist, ein extralogisches Substrat in's Auge zu fassen* (vergl. § 12).

Und endlich wird auf Grund derselben die Unmöglichkeit dargethan, die Gleichung $xyz + x_1y_1z_1 = 0$ in *drei* unabhängigen Parametern symmetrisch allgemein zu lösen (vergl. § 24).

Es wird zu sagen sein: ein System von Ausdrücken (des identischen Kalkuls) bilde eine *„Gruppe"* (in Hinsicht der Operationen dieses Kalkuls), wenn es nicht möglich ist, mittelst der drei identischen Spezies (als da sind Negation und additive sowie multiplikative Verknüpfung) aus denselben einen neuen Ausdruck herzuleiten, welcher nicht schon mit einem unter ihnen identisch gleich wäre, welchen m. a. W. das System nicht bereits in sich schlösse.

Nennen wir jene Ausdrücke die *„Elemente"* der Gruppe, so wird also eine Gruppe ihrem Begriffe gemäss alle diejenigen Ausdrücke, welche *aus* ihren Elementen mittelst der drei Spezies aufgebaut werden können, bereits als Elemente enthalten müssen.

So bilden — um das einfachste Beispiel voranzustellen — die beiden Ausdrücke

$$0 \text{ und } 1$$

zusammen eine Gruppe — nebenbei bemerkt: die *„Nullgruppe“* — weil auch ihre Negationen 1 und 0 sind, die multiplikativen sowol als die additiven Verknüpfungen dieser beiden Symbole aber immer wieder auf 0 und 1 selbst nach den Theoremen 22) und 23) hinauslaufen.

Kommt in einer Gruppe auch nur *ein* Buchstabe (oder auch Buchstabenausdruck) a vor, so enthält die Gruppe notwendig auch dessen Negation a_1, welche es ja möglich ist, mittelst Negirens aus ihm abzuleiten. Dann lässt aber auch $a \cdot a_1$, welches gleich 0 ist, und $a + a_1$, welches gleich 1 ist, sich mittelst identischer Spezies aus diesen verfügbaren Elementen ableiten, und folglich muss die Gruppe — sofern sie diesen Namen wirklich verdiente — auch die Symbole 0 und 1 enthalten haben, d. h.

Die Nullgruppe ist (selbstverständlicher) *Bestandteil einer jeden Gruppe.*

Es bilden, wie leicht nachzuweisen, die Symbole

$$0,\ 1,\ a,\ a_1$$

selbst wieder eine Gruppe. Wir nennen sie die *„Gruppe von a“*, weil sie aus a allein, wie gezeigt, schon ganz ableitbar ist.

Die Gruppe von a_1 fällt hienach zusammen mit der Gruppe von a, die Nullgruppe auch mit der Gruppe *von* 1.

Wenn in einer Gruppe ein gewisses System von Elementen für sich schon eine Gruppe bildet, so nennt man diese eine *„Untergruppe“* von jener, jene auch, wenn man will, eine *„Übergruppe“* von dieser — vergl. Anhang 4, Schluss.

So war die Nullgruppe eine Untergruppe der a-Gruppe, gleichwie überhaupt von jeder erdenklichen Gruppe zu nennen.

In der Gruppe von a kann indess (wie schon angedeutet) der Buchstabe a auch durch irgend einen Ausdruck, eine Funktion des identischen Kalkuls vertreten sein, und sind z. B.

$$0,\ 1,\ ab,\ a_1 + b_1$$
$$0,\ 1,\ a + b,\ a_1 b_1$$
$$0,\ 1,\ ab_1,\ a_1 + b$$

etc., noch allgemeiner:

$$0,\ 1,\ f(a, b, c, \cdots),\ f_1(a, b, c, \cdots)$$

nach dem Obigen ebenfalls richtige Gruppen, die wir als die „Gruppe von ab (oder $a_1 + b_1$)“ die „Gruppe von $a + b$“, resp. ab_1, $\cdot\cdot$ resp. $f(a, b, c \cdots)$ bezeichnen dürfen.

Bei Angabe oder Aufzählung der Elemente einer Gruppe sollen natürlich tautologische Wiederholungen möglichst unterbleiben. Solange nur die einfachen Gebietsymbole oder Buchstaben, welche allenfalls in den Ausdrücken für die Elemente vorkommen, als von einander unabhängig beliebige Gebiete angesehen, gedeutet werden, müssen hienach auch *sämtliche Elemente* einer Gruppe im Allgemeinen unter sich *verschieden* sein, m. a. W. die Gleichsetzung irgend zweier Ausdrücke der Gruppe muss allemal eine synthetische Gleichung, eine „Relation“ liefern, nicht aber darf dadurch eine „Formel“ entstehen.

Diese Forderung ist stricte aufrecht zu erhalten, sobald etwa die *„Anzahl“* der Elemente in Betracht gezogen werden, wenn von dem „Umfang“ der Gruppe gesprochen werden soll — andernfalles würde ja der Gruppe ein bestimmter Umfang gar nicht zukommen. Ist sie erfüllt, so mögen wir sagen, die Gruppe sei in ihrer „reduzirten“ Form dargestellt, *reduzirt* gegeben, ausgerechnet, ermittelt.

Im übrigen wird es aber bei den in's Auge zu fassenden Erzeugungsweisen der Gruppen sich empfehlen, dass man im Geiste des Tautologiegesetzes *Wiederholung* von Elementen *nicht verbiete*, sondern nur *für belanglos erkläre*. Wo keine Veranlassung dazu vorliegt, wird man alsdann doch sie ohnehin unterlassen — so z. B. bei allen Endergebnissen, bei denen ja auf grösstmögliche Einfachheit derselben für künftigen Gebrauch zu sehen ist.

Auf der andern Seite gewinnt man so die Freiheit, eine Gruppe z. B. auch aus einer Übergruppe entstehen zu lassen dadurch, dass man zwischen den Elementen von dieser Relationen einführt, z. B. einzelne Elemente, die ursprünglich verschieden gedacht wurden, einander gleich werden lässt. Nur aber indem man zulässt, dass verschiedene Buchstaben auch gleichwertig werden dürfen, nur dadurch wird man in der That imstande sein, sich die volle Allgemeinheit der Betrachtungen mitsamt deren Vorteilen zu sichern.

Ein solches System von Elementen der Gruppe aus welchem alle übrigen Elemente derselben durch unsre Operationen (der drei Spezies) schon vollständig ableitbar sind, nannten wir ein „(ausreichendes) System von *Bestimmungselementen*“ der Gruppe.

Wir *bezeichnen* die Gruppe kurz, indem wir hinter den Buchstaben G ein System von Bestimmungselementen derselben — diese durch Kommata getrennt — in eine Klammer schreiben.

Auch die Gruppe selbst kann als ein ausreichendes System von Bestimmungselementen ihrerselbst hingestellt werden, insofern hier „übrige“ Elemente, die erst noch aus den angegebenen abzuleiten wären, gar nicht vorhanden sind. *In solchem Falle mögen wir das Symbol G auch weglassen.*

Sonach werden wir nun haben:

$$G(0) = G(1) = G\{0, 1\} = \{0, 1\};$$
$$G(a) = G(a_1) = G\{0, 1, a, a_1\} = \{0, 1, a, a_1\}$$

und zudem $= G(a, a_1) = G(0, a) = G(1, a) = G(0, a_1) = G(1, a_1) =$
$= G(0, a, a_1) = G(1, a, a_1) = G(a_1, a) = G(a, 0) =$ etc.

indem es auch *auf die Reihenfolge bei der Angabe der Elemente nicht ankommen* wird.

Nehmen wir *in* $G(a)$ das a gleich 0 an, so entsteht:
$$G(0) = \{0, 1, 0, 1\} = \{0, 1\},$$
und ebenso für $a = 1$ erhalten wir $G(1) = \{0, 1, 1, 0\}$ was sich ebenfalls zu $\{0, 1\}$ „reduzirt“ — in Illustration des im vorigen Kontext Gesagten.

Die Nullgruppe besteht aus zwei, die Gruppe von a schlechtweg aus vier Elementen, weil zunächst in ihr das a als beliebig zu denken.

Bei der Angabe von ausreichenden Bestimmungselementen einer Gruppe wird indess im Allgemeinen darauf zu halten sein, dass man sich unnötiger Weitläufigkeiten nicht schuldig mache, d. h. es sind *überflüssige Elemente* dabei *zu unterdrücken.* Als „überflüssig“ wird die Angabe eines Bestimmungselementes dann zu bezeichnen sein, wenn dasselbe aus den bereits angegebenen (resp. den übrigen „Bestimmungselementen“) durch die erlaubten Operationen, eben der drei Spezies, schon ableitbar ist.

So ist bei $G(a, a_1)$ das a_1 ein überflüssiges Bestimmungselement, weshalb es besser unterdrückt und die betreffende Gruppe einfacher mit $G(a)$ dargestellt wird. Resp. falls man a_1 beibehalten will, so wird a als überflüssig zu unterdrücken sein.

Kommen überflüssige Bestimmungselemente nicht (mehr oder von vornherein nicht) vor, so ist das System der Bestimmungselemente ein „reduzirtes“. Wir haben dann „ein *ausreichendes* System von *unentbehrlichen* Bestimmungselementen“ (welche freilich allemal auch durch ganz andere vertreten werden könnten, und darum nur in einem gewissen Sinne als „unentbehrliche“ hingestellt werden dürfen — nämlich als „nicht-überflüssige“ — wie aus dem Obigen erhellt). Auf ein solches System soll der schlechtweg gebrauchte Name „System von Bestimmungselementen“ künftig immer hinweisen. —

Unsre nächste Aufgabe sei: die Gruppen aufzusuchen der Ausdrücke, welche mittelst zwei, resp. 3, resp. 4 Buchstaben a, b, c, d gebildet werden können. So weit thunlich mögen wir auch zusehen, auf welche Art diese Gruppen in Untergruppen sich gliedern. Vor allem aber kommt es darauf an, die Anzahl und Beschaffenheit der verschiedenen *„Arten“* oder *„Typen“* zu ermitteln, von welchen die als Elemente der Gruppe auftretenden Ausdrücke sein werden.

Von zwei Ausdrücken werden wir nämlich sagen, dass sie zum nämlichen *Typus* gehören, wenn sie durch blossen Buchstabenwechsel aus einander hervorgehen, genauer: wenn es möglich ist, aus dem einen Ausdruck den andern, dadurch abzuleiten, dass man für die einfachen Buchstaben $a, a_1, b, b_1, \cdots$ aus denen er sich zusammensetzt und deren positive uns unabhängig beliebige Gebiete vorstellen, eventuell andere (sei es positive, sei es negative) einfache Symbole substituirt, deren positive ebenfalls unabhängig beliebige Gebiete vorzustellen haben.*) Es wird dann immer auch möglich sein, den andern Ausdruck aus dem einen zurückzugewinnen: indem man nämlich die vorigen Einsetzungen wieder rückgängig macht. (Postulat?, dass man dies immer könne.)

Vom *selben* Typus sind z. B. die Ausdrücke
$$a + a_1 b c_1 \quad \text{und} \quad b_1 + a_1 d,$$
weil der zweite (zunächst in der mit ihm äquivalenten Form $b_1 + a_1 b d, = b_1 + b d a_1$) sich aus dem ersten (der auch zu $a + b c_1$ reduzirbar) ergibt, indem man in diesem das a durch b_1' — somit das a_1 durch b' — zugleich das b durch d' und das c_1 durch a_1' ersetzt, hernach aber die Accente weglässt. Darnach wird auch der erste Ausdruck sich aus dem zweiten (in seiner reduzirten Form) ergeben, indem man im letztern b_1 durch a', d durch b', und a_1 durch c_1' ersetzt, sodann die Accente fortlässt.

Hat man zwei Ausdrücke auf die Übereinstimmung ihres Typus zu untersuchen, in welchen teilweise oder durchaus die *nämlichen* Buchstaben auftreten, so ist es ratsam (so, wie es im vorstehenden Beispiel durchgeführt worden), die Buchstaben des einen Ausdrucks provisorisch mit Accenten zu versehen und dadurch von denen des andern unterscheidbar zu machen.

In der That sollten die Buchstaben des einen Ausdrucks eine von den gleichnamigen des andern unabhängig beliebige Bedeutung haben, und wird man so nur die allgemeine für das Bezeichnen maassgebende Maxime im vorliegenden Falle befolgt haben, dass in *einer* Untersuchung als verschieden Denkbares nicht übereinstimmend bezeichnet werden dürfe.

Andernfalles läuft man nicht selten Gefahr die gleichnamigen Buchstaben als solche des ersten und als solche des zweiten Ausdruckes zu vermengen, wie an einem Beispiel dargelegt werden möge: Um den Ausdruck:
$$a x + a_1 b y + b_1 c \quad \text{in} \quad b_1 x + b c_1 y + a c$$
zu verwandeln und damit zu erkennen, dass beide zum selben Typus gehören, ist erforderlich und hinreichend, a tempo zu ersetzen:
$$(x \text{ durch } x, \quad y \text{ durch } y),$$

*) Selbstverständlich ist bei diesen Einsetzungen zu beachten, dass nach Th. 32), wenn b für a gesetzt wird, auch b_1 für a_1 gesetzt werden muss, gleichwie, wo a durch b_1 ersetzt wird, auch a_1 durch b ersetzt werden muss.

$$
\begin{array}{llll}
a \text{ durch } b_1, & \text{somit } a_1 \text{ durch } b, \\
b \text{ durch } c_1, & \;\;\text{„}\;\; b_1 \text{ durch } c, \\
c \text{ durch } a, & (\;\text{„}\;\; c_1 \text{ durch } a_1).
\end{array}
$$

Bringt man sich aber zum Bewusstsein, dass *gleichzeitig* a_1 durch b und b durch c_1 (desgleichen b_1 durch c und c durch a) ersetzt werden solle (im ersten Ausdrucke), so liegt das Missverständniss, der Wahn, nahe, als ob etwa a_1 durch c_1 (desgl. b_1 durch a) zu ersetzen wäre. Dies ist nicht der Fall, denn das b (des ersten Ausdruckes) *welches durch* c_1 daselbst ersetzt werden soll, ist ein ganz anderes Gebietsymbol, als das b (des zweiten Ausdruckes), *durch welches* das a_1 (im ersten) zu ersetzen war.

Dem Missverständniss wird vorgebeugt, wenn man sich die Buchstaben des zweiten Ausdruckes mit Accenten versieht, wo dann zu sagen ist, dass man a durch b_1', b durch c_1', c durch a', somit auch zugleich a_1 durch b', b_1 durch c', (c_1 durch a_1') zu ersetzen habe.

Jedenfalls wird man bei Beachtung dieser einfachen Vorsichtsmassregel leichter und sicherer diejenigen (oder solche) Vertauschungen ausfindig machen, welche den einen Ausdruck in den andern überführen, sofern es deren gibt — und andernfalles wird man ebenso die Unmöglichkeit solcher Verwandlung bequemer erkennen.

In vielen Fällen freilich — wo Vertauschungen von immer nur zwei Buchstaben auf einmal, sogenannte *„Transpositionen“* schon hinreichen, die beabsichtigte Überführung zustande zu bringen, *und zwar* solche Transpositionen, die nie einen Buchstaben als Vertauschungselement miteinander gemein haben — braucht man nicht zu solcher Weitläufigkeit (der Einführung und Wiederfortlassung von Accenten) seine Zuflucht zu nehmen.

Man erkennt z. B. augenblicklich, dass von den beiden Ausdrücken:

$$ab + ac + a_1 b_1 c_1 \quad \text{und} \quad ab + bc_1 + a_1 b_1 c$$

der eine aus dem andern durch Vertauschung von a mit b und zugleich von c mit c_1 hervorgeht, mithin auch diese von einerlei Art sein werden.

[Wo dagegen sog. *„cyklische“* Vertauschungen von höherer Ordnung, Vertauschungen im Ringe herum erforderlich werden, wie beim vorhergehenden Beispiel die Ersetzung von a durch b_1, von b_1 durch c und von c durch a, da möchte die kleine Weitläufigkeit sich für den Anfänger lohnen.]

Nicht vom selben Typus sind z. B. die beiden Ausdrücke:

$$ab + a_1 b_1 \quad \text{und} \quad ab + ab_1$$

deren zweiter sich auf a reduzirt. Was für unabhängig beliebige Gebiete man auch für a und b einsetzen möge, nie wird derselbe hier in den zweiten übergehen, wie leicht durchzuprobiren wäre.

Die *„Gruppe von a und b“* besteht aus 16 Elementen, als da sind:

$$
\begin{aligned}
G\,(a;\,b) = \{&0,\, 1,\, a,\, b,\, a_1,\, b_1,\, ab,\, ab_1,\, a_1 b,\, a_1 b_1,\, a + b,\, a + b_1, \\
&a_1 + b,\, a_1 + b_1,\, ab + a_1 b_1,\, ab_1 + a_1 b\}
\end{aligned}
$$

Dass diese Ausdrücke in der That durch die identischen Spezies aus a und b „ableitbar“, nämlich *abgeleitet* sind, ist augenscheinlich.

Ebenso ist ersichtlich, dass dieselben unter sich verschieden. Um es zu beweisen, brauchte man nur ein jedes der Elemente nach den beiden Argumenten a und b im Sinne des § 19 „entwickelt“ darzustellen, wie es die beiden letzten derselben, sowie die viere von ab bis $a_1 b_1$ schon sind. Alsdann würde sich offenbaren, dass keine der Entwickelungen durchaus dieselben Glieder enthält, wie irgend eine andere, dass sie lauter verschiedene (additive) Kombinationen von den vier Konstituenten ab, ab_1, $a_1 b$, $a_1 b_1$ vorstellen, m. a. W. durch die Werte 0 oder 1 der Koeffizienten, mit denen diese Konstituenten in ihnen (in den Entwickelungen) behaftet sind, sich unterscheiden.

Bleibt also nur noch darzuthun, dass mit dem angegebenen System von Elementen die Gruppe erschöpfend angegeben ist: es bleibt die „Vollständigkeit der Gruppe“ zu beweisen.*)

Dieser Nachweis kann auf zwei Wegen geliefert werden.

Der erste Weg besteht in der Anwendung der Methode, durch welche sich ein gegebenes System von Bestimmungselementen einer Gruppe allemal zu dieser Gruppe vervollständigen oder ergänzen lässt. Bleibt diese Methode bei dem vorliegenden System von (16) Elementen erfolglos, indem durch sie keine weiteren Elemente demselben hinzugefügt werden, so musste das System schon die vollständige Gruppe gewesen sein.

Bevor wir von dem zweiten Wege sprechen, wollen wir diese Methode näher in's Auge fassen.

Gegeben irgend welche Symbole oder Ausdrücke als Bestimmungselemente einer Gruppe. Es handle sich darum, die ganze Gruppe herzustellen. Dies lässt sich unfehlbar, wie folgt, bewerkstelligen:

Man füge den gegebnen Bestimmungselementen (durch Kommata getrennt) zunächst die 0 und 1, sowie die Negationen jener hinzu, sofern sie nicht bereits unter denselben sich mitangegeben finden. Hiermit wird dieser erste Prozess — des Negirens — sich als schon abgeschlossen erweisen, indem es nicht nötig fallen wird noch weiter vom Negiren Anwendung zu machen.

Die Elemente 0 und 1, die wir uns *voran*geschrieben denken,

---

*) Diese Ausdrucksweise ist bequem und verständlich, obzwar sie keine ganz
genaue. Ihrem Begriffe nach ist jede Gruppe eine vollständige. Eine „unvoll-
ständige Gruppe“ wäre eine contradictio in adjecto, verdiente den Namen „Gruppe“
nicht, sondern wäre als blosses System von Elementen zu bezeichnen. Durch die
Redensart soll der Nachweis gemeint sein, dass das *für eine Gruppe ausgegebene*
System die Elemente einer solchen vollständig enthält, sonach den ihm gegebenen
Namen verdiente.

mögen bei den folgenden Prozessen ausser Betracht bleiben, sintemal es nicht möglich ist, durch multiplikative oder additive Verknüpfung eines Ausdruckes mit ebendiesen jemals einen neuen Ausdruck zu gewinnen.

Von der hinter 0, 1 stehenden Reihe als nunmehrigem Bestande von Elementen verknüpfe man nun (in Gedanken), zunächst z. B. stets *multiplikativ*, ein jedes Element mit jedem andern, und füge, wenn das Produkt keinem einzigen von den bisherigen Elementen gleich ist, dasselbe allemal als ein neues Element den bisherigen am Ende der Reihe hinzu. Man fahre solange damit fort, bis sich durch die multiplikative Verknüpfung keine neuen Elemente mehr ergeben, bis nämlich jede zwei von den vorhandenen (den gegebenen nebst den hinzugetretenen) Elementen verknüpft worden. Der Prozess des Multiplizirens wird sich damit als abgeschlossen erweisen.

Ebenso verfahre man endlich in Hinsicht *additiven* Verknüpfens indem man von dem dermalen verfügbaren Vorrate jede zwei Elemente zu einer Summe zusammenhält und diese, wenn sie von allen bisherigen verschieden, denselben sofort als ein neues Element am Ende der Reihe angliedert. *Die Gruppe muss dann vollständig dastehen*, sobald auch dieser Prozess des Addirens zu Ende gekommen.

Da die verknüpfenden Operationen kommutative sind, so wird man natürlich, nachdem ein a mit einem b zusammengehalten worden, das b nicht nochmals mit diesem a zu verbinden brauchen. Es genügt darum, ein jedes Element gewissenhaft *mit jedem der ihm vorhergehenden* in der Reihe verknüpft zu haben. Verknüpfungen der Elemente mit sich selbst können wegen der Tautologiegesetze erlassen werden.

Auch zulässig zwar, jedoch minder gut würde die Taktik sein, ein Element je mit allen ihm nachfolgenden zu verknüpfen, weil im Lauf der Prozesse das Ende der Reihe sich oft noch weiter hinausschiebt und man sonach genötigt wäre, nachdem ein frühes Element mit allen zur Zeit auf dasselbe folgenden, nebst den eventuell ebendadurch noch neu hinzutretenden, schon vollständig verknüpft worden, später, wenn durch Verknüpfen späterer Elemente deren abermals neue hinzugekommen sein werden, nochmals auf jenes zurückzukommen um es auch mit diesen inzwischen neuhinzugetretenen noch zu verknüpfen — und dieses eventuell wiederholt, bei jedem Elemente! Man müsste so von jedem Elemente im Sinne behalten oder notiren, bis zu welcher Stelle der Reihe als ihrem dermaligen Endpunkte man es bereits mit den ihm nachfolgenden verknüpft hat, von wo an noch nicht; man käme aus der gleichmässigen Ordnung heraus und würde leichter Auslassungen begehen.

Um zu erkennen, dass das so gewonnene Elementesystem die ge-

suchte vollständige Gruppe ist, sind folgende Überlegungen anzustellen.

Nachdem der Prozess des Multiplizirens beendigt ist kann selbstverständlich durch multiplikative Verknüpfung *zweier* Elemente kein neues Element mehr gewonnen werden, auch nicht durch multiplikatives Verknüpfen *beliebig vieler* von den vorhandenen Elementen — denn solches läuft bekanntlich auf das successive Verknüpfen von immer nur zweien ebendieser Elemente hinaus, welches, wie wir wissen, ein neues Element nie liefern konnte.

Ebenso, nachdem der Prozess des Addirens beendigt, kann additive Verknüpfung von zweien oder beliebig vielen der nun vorhandenen Elemente kein neues Element mehr liefern.

Wir wollen die Reihe der nach diesem dritten Prozesse vorliegenden Elemente kurz die „Summenreihe" nennen, und ebenso das System der Elemente soweit es nach Beendigung des zweiten Prozesses vorgelegen, die „Produktenreihe".

In der That kann jedes Element dieser Summenreihe angesehen werden als die Summe $\alpha + \beta$ zweier Elemente α und β der Produktenreihe, indem man, wenn es mit einem Element α dieser Produktenreihe selbst zusammenfallen sollte, sich nur die 0 unter β vorzustellen braucht.

Ebenso konnte jedes Element α der Produktenreihe angesehen werden als das Produkt $\gamma\delta$ zweier Elemente γ und δ der vorhergehenden (durch den ersten oder Negationsprozess ergänzten) Reihe — sie möge kurz die „erste" Reihe heissen — (im Gegensatz zu dem ursprünglich gegebnen Systeme von Bestimmungselementen als der „nullten" Reihe). Denn wenn das Element auch als ein γ zu diesem ursprünglichen System selbst gehörte, so braucht man sich nur (unter α ebendieses γ und) unter δ die 1 vorzustellen.

Ich behaupte jetzt, dass auch die *Multiplikation* irgend zweier (und darnach auch beliebig vieler) Elemente der *Summen*reihe kein neues Element mehr liefern kann. Denn durch $\alpha + \beta$ wird sich das eine, durch $\alpha' + \beta'$ das andere dieser Elemente darstellen lassen, wo α und β sowie α' und β' der Produktenreihe angehören. Nun ist:

$$(\alpha + \beta)(\alpha' + \beta') = \alpha\alpha' + \alpha\beta' + \alpha'\beta + \beta\beta'.$$

Die vier Glieder rechterhand gehören aber unfehlbar selbst schon der Produktenreihe an, denn diese enthält ja als Element bereits jedes Produkt von zweien ihrer Elemente.

Die Summenreihe aber enthält jede Summe nicht nur von zweien, sondern auch von beliebig vielen Elementen der Produktenreihe; sie enthält nämlich auch als Element jede Summe von irgend zweien (und beliebig vielen) ihrer eigenen Elemente. Im vorliegenden Falle müssen z. B. auch $\alpha\alpha' + \alpha\beta'$, sowie $\alpha'\beta + \beta\beta'$ schon Elemente dieser Summenreihe sein, und ebendarum muss auch die Summe dieser beiden wieder ein ihr selber angehöriges Element sein, wie zu zeigen gewesen.

Bei dem Beweise wurde augenscheinlich kein Gebrauch gemacht von der Annahme, dass zuvor der erste Prozess vollzogen sei, dass die Vervollständigung des Systems mittelst Einverleibung auch der Negationen seiner Elemente überhaupt stattgefunden habe. Wir müssen vielmehr allgemein den Satz haben:

Wenn ein System von Elementen so beschaffen ist, dass es durch multiplikative Verknüpfung zwischen seinen Elementen — „Intermultipliziren" — keine neuen Elemente mehr liefern kann, und man vervollständigt das System soweit, dass sich auch durch additive Verknüpfungen zwischen seinen Elementen — „Interaddiren" — keine neuen Elemente mehr ergeben können, so kann auch das so vervollständigte System beim Intermultipliziren keine neuen Elemente mehr liefern. M. a. W.:

Eine „Gruppe hinsichtlich Multiplikation", wenn vermehrt auch zu einer „Gruppe hinsichtlich Addition", bleibt dennoch Gruppe hinsichtlich der Multiplikation, wird also eine *„Gruppe in Hinsicht beider Operationen"*.

Des Dualismus halber liefert natürlich dieser Satz noch einen zweiten richtigen, wenn man die Worte „Multiplikation" und „Addition" in ihm vertauscht.

Ich behaupte ferner, dass nachdem der erste Prozess vorausgegangen, nun auch die Operation des *Negirens* aus keinem Element der Summenreihe ein neues mehr erzeugen kann.

Zunächst wird als $\alpha + \beta$ das zu negirende Element darzustellen sein, wo α und β der Produktenreihe angehören. Und wir haben:

$$(\alpha + \beta)_1 = \alpha_1 \beta_1.$$

Der Beweis wäre erbracht, wenn etwa auch α_1 und β_1 der Produktenreihe angehören müssten. Dies lässt sich aber keineswegs behaupten. Nachweisbar ist gleichwol, dass $\alpha_1 \beta_1$ wenigstens der Summenreihe angehören muss.

Als Element der Produktenreihe ist nämlich:

$$\alpha = \gamma\delta \quad \text{und ebenso} \quad \beta = \gamma'\delta',$$

wo $\gamma, \delta, \gamma', \delta'$ der „ersten" (abgeleiteten) Reihe als Elemente angehören. Da diese mittelst Negirens vervollständigt worden, so enthält sie notwendig auch schon die Negationen $\gamma_1, \delta_1, \gamma_1', \delta_1'$ ebendieser Elemente. Nun ist

$$\alpha_1 \beta_1 = (\gamma_1 + \delta_1)(\gamma_1' + \delta_1') = \gamma_1 \gamma_1' + \gamma_1 \delta_1' + \gamma_1' \delta_1 + \delta_1 \delta_1',$$

wo die Glieder rechterhand notwendig der Produktenreihe, und dar-

nach das Aggregat derselben auch der Summenreihe, schon unvermeidlich angehören.

Hiermit ist erkannt, dass weder durch Addiren, noch durch Multipliziren, noch durch Negiren aus der Summenreihe neue Elemente abgeleitet werden können. Dies ist also auch nicht möglich durch irgendwelche Verbindung dieser Operationen unter einander.

D. h. jene Summenreihe muss die gesuchte Gruppe sein. q. e. d.

So sehr die Ergänzung von Bestimmungselementen zur vollständigen Gruppe durch vorstehendes Verfahren auch vereinfacht erscheint, so ist sie doch immerhin noch mühsam genug.

Beispielsweise aus den Bestimmungselementen a, b ergibt sich als „erste" Reihe:

$$0,\ 1,\ a,\ b,\ a_1,\ b_1,$$

sodann als zweite oder Produktenreihe bei strenger Einhaltung der vorgeschriebenen Ordnung:

$$0,\ 1,\ a,\ b,\ a_1,\ b_1,\ ab,\ a_1 b,\ ab_1,\ a_1 b_1$$

— ein System, welches die Negationen der vier letzten Elemente in der That noch nicht enthält. Zur dritten oder Summenreihe treten dann zu den angegebenen noch der Reihe nach:

$$a + b,\quad a_1 + b,\quad a + b_1,\quad a_1 + b_1,\quad ab_1 + a_1 b,\quad ab + a_1 b_1$$

als weitere Elemente hinzu.

An ferneren beiläufig von uns angeführten Gruppen wird der Leser reichliche Gelegenheit haben, die Methode einübend zu festigen.

Ein zweiter Weg, die Vollständigkeit einer gegebenen Gruppe nachzuweisen, besteht darin, dass man die Anzahl ihrer Elemente a priori ermittelt und sich überzeugt, dass dieselbe hier vorliegt.

Zu diesem Zwecke muss man ein System von Bestimmungselementen der Gruppe kennen.

Ein solches ausschliesslich und auf jede mögliche Weise aus der Gruppe herauszulesen, ist eine keineswegs leichte Aufgabe, die wir einstweilen als ein systematisch erst noch zu lösendes Problem vormerken.

Sehr häufig genügt jedoch schon die blosse Beaugenscheinigung, Okularinspektion der Gruppe, um ein System von Bestimmungselementen derselben zu entdecken, indem man eben wahrnimmt, dass aus gewissen als Elemente auftretenden einfachen oder Buchstabensymbolen die übrigen Elemente alle aufgebaut sind — als Funktionsausdrücke des identischen Kalkuls. Diese einfachen Symbole, nach Weglassung derer, welche die Negationen von beibehaltenen sind, bilden dann das System der Bestimmungselemente. So oben a und b.

Sind aber n unabhängig beliebige Symbole als Bestimmungselemente einer Gruppe gegeben, so muss dieselbe aus 2^{2^n} Elementen bestehen.

Die Ermittelung ihrer Elementenzahl ist sonach eine leichteste Aufgabe.

Analog Jevons[9] p. 221, [10] und[8] p. 137 ... 143 lässt dies sich in der That unschwer wie folgt beweisen.

Jedes Element der Gruppe ist eine Funktion lediglich der n Bestimmungselemente, und enthält die Gruppe alle Funktionen, welche durch die Operationen des identischen Kalkuls aus diesen aufgebaut werden können.

Denkt man sich jedes Element gemäss § 19 nach den n Bestimmungselementen als den Argumenten „entwickelt", so enthält diese Entwickelung, vollständig angeschrieben, 2^n Glieder (vgl. ibidem). Jeder von den 2^n Konstituenten der Entwickelung kann zum Koeffizienten nur entweder 0 oder 1 haben, weil laut Voraussetzung noch andere Buchstaben als die der Argumente nicht vorkommen, und 0 und 1 die einzigen speziellen Gebietsymbole des identischen Kalkuls waren. Jenachdem wird der betreffende Konstituent als Glied in der Entwickelung fehlen oder ganz in derselben vertreten sein. Darnach haben wir aber:

$$\underset{\frown\atop 1}{2} \times \underset{\frown\atop 2}{2} \times \underset{\frown\atop 3}{2} \cdots \times \underset{\frown\atop 2^n}{2} = 2^{(2^n)} = 2^{2^n}$$

verschiedene Möglichkeiten, die Koeffizientenstellen mit Nullen oder Einsern zu besetzen, und ebensoviel *verschiedene „Ausdrücke"*, aufgebaut aus den n Argumenten, kann es nur, ebensoviele muss es auch geben.

Die ermittelte Zahl, nur um 1 vermindert, muss auch zugleich die Anzahl sein der inhaltlich verschiedenen (einander nicht äquivalenten) *Aussagen*, welche von der auf simultane Subsumtionen und Gleichungen beschränkten Logik abgegeben werden können *in Bezug auf n Gebiete* oder *Klassen*.

Denn da die Aussage eine Subsumtion oder eine Gleichung sein soll (zu welcher ja auch ein System von simultanen Propositionen ebendieser Art stets sich vereinigen lässt), so kann sie als *Gleichung mit der rechten Seite* 0 *geschrieben werden.* Das Polynom, die linke Seite dieser Gleichung kann aber als eine Funktion der n gegebenen Klassen, nur einer von den obigen 2^{2^n} Ausdrücken sein, und somit gibt es auch anscheinend genau so viel verschiedene Aussagen. Von diesen Aussagen läuft aber *eine* auf: $1 = 0$ hinaus, diejenige nämlich, bei der links alle Koeffizienten als Einser angesetzt sind, das Polynom also die Summe sämtlicher Konstituenten sein wird. Diese eine Aussage ist als absurde, unzulässige, nicht mitzurechnen, sonach die fragliche Anzahl der über n Klassen möglichen Aussagen:

$$= 2^{2^n} - 1.$$

Eingerechnet dagegen ist (wieder) die „nichtssagende" oder „identische Aussage, bei der linkerhand alle Koeffizienten Nullen sein werden und welche auf: $0 = 0$ hinausläuft.

Nach diesen Ergebnissen muss also a priori

$$2^{2^2} = 2^4 = 16, \qquad 2^{2^3} = 2^8 = 256, \qquad 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536,$$

$$2^{2^5} = 2^{32} = 4\,294\,967296,\ 2^{2^6} = 2^{64} = 18\,446744\ 073709\ 551616, \cdots$$

die Anzahl sein der im Allgemeinen unter sich verschiedenen Ausdrücke, welche aus zwei Gebieten a, b resp. aus dreien a, b, c, resp. aus vieren, a, b, c, d, resp. etc. durch die Operationen des identischen Kalkuls aufgebaut werden können (bei sechs Gebieten mithin über 18 Millionen Billionen!).

Ebendiese muss bezüglich auch die Anzahl sein der Elemente für die Gruppen

$$G(a, b), \quad \text{resp. } G(a, b, c), \quad \text{resp. } G(a, b, c, d), \cdots$$

Die Vollständigkeit der oben angegebenen Gruppe $G(a, b)$ ist hiermit auch auf dem zweiten Wege bewiesen.

Wir wenden uns nunmehr der Frage zu, wie vielerlei und welche *Typen* die Ausdrücke aufweisen müssen, welche unsre Gruppen $G(a)$, $G(a, b)$, $G(a, b, c)$, $G(a, b, c, d)$, $\cdots$ — in nunmehr ja bekannter Anzahl — als Elemente zusammensetzen.

Es zeigt sich, dass diese Frage für die Anwendungen der Gruppentheorie (von denen wir am Schluss eine geben) von Wichtigkeit ist.

Leicht ist die Frage bei den Gruppen $G(a)$ und $G(a, b)$ zu beantworten, die ja oben schon fertig gebildet vor unsern Augen stehen.

Zunächst müssen die Elemente 0 und 1 für *von verschiedenem Typus* erklärt werden, welcher Gruppe sie auch angehören mögen, sodass jedes von diesen beiden Elementen als für sich allein schon einen aparten Typus konstituirend anzusehen ist. Es ist nämlich nicht möglich, von den beiden Ausdrücken

$$0 \cdot a + 0 \cdot a_1, \qquad 1 \cdot a + 1 \cdot a_1,$$

desgleichen von den beiden

$$0 \cdot ab + 0 \cdot ab_1 + 0 \cdot a_1b + 0 \cdot a_1b_1, \qquad 1 \cdot ab + 1 \cdot ab_1 + 1 \cdot a_1b + 1 \cdot a_1b_1$$

etc. den einen aus dem andern durch eine *Buchstabenvertauschung* abzuleiten.

Bei $G(a)$ gesellt sich nun zu dem „ersten" Typus 0, als „zweiter" der Typus a, a_1, dessen beide Repräsentanten in der That durch die Vertauschung von a mit a_1 in einander übergehen, und endlich als „dritter" der Typus 1. Wir haben also nach Typen ordnend für $G(a)$ das Schema:

$$\begin{array}{c} 0 \\ a,\ a_1 \\ 1 \end{array}$$

Die Reihenfolge der Typen bestimmt sich hier unter dem Gesichtspunkt, dass aus der Entwickelung der 1 nach dem Bestimmungselemente a der Gruppe: $1 = a + a_1$ beim ersten Typus *kein*, beim zweiten *ein* Glied und beim dritten Typus alle *zwei* Glieder in einem Repräsentanten des Typus vereinigt, zu einem solchen zusammengefasst erscheinen.

„*Komplementär*" werden wir zwei Typen zu nennen haben, wenn ein Repräsentant des einen Typus die Negation ist von einem Repräsentanten des andern. Als „Repräsentanten" eines Typus dürfen wir jeden aus den Bestimmungselementen der Gruppe aufgebauten Ausdruck bezeichnen, der zu dem Typus gehört („von" diesem Typus „ist").

Darnach wäre es nicht schwer zu zeigen, dass zwei komplementäre Typen immer gleichviele Repräsentanten besitzen, gleichviel Elemente der Gruppe umfassen müssen, und zwar sind die Repräsentanten des einen gerade die Negationen von denen des andern. „Entwickelt" nach den Bestimmungselementen der Gruppe enthält der eine Repräsentant immer gerade diejenigen Glieder, welche in der Entwickelung des andern fehlen — vgl. den Zusatz auf S. 314 sq.

Bei strenger Anordnung der Typen nach der Zahl von Gliedern in der Entwickelung ihrer Repräsentanten werden also komplementäre Typen einen Rang einnehmen, der sich dadurch kennzeichnet, dass der eine Typus vom Anfang der Typenreihe gerade so weit absteht, als der komplementäre vom Ende derselben. Es wird sich aber später zumeist empfehlen, von dieser strengen Anordnung abzugehen, nämlich die Reihe der Typen gleichsam in der Mitte zu knicken und die beiden Schenkel zusammenzulegen, sodass die komplementären Typen zu Nachbarn werden.

Von zwei komplementären Typen werden wir sagen, dass sie zusammen einen „*Haupttypus*" ausmachen.

Die komplementären Typen könnten auch einander „*dual entsprechende*" genannt werden. Zu einem Ausdruck als Repräsentanten eines Typus erhält man nämlich den dual entsprechenden, wenn man — während die in ihn eingehenden einfachen Symbole (seien sie positive oder negative) ungeändert gelassen werden — „plus" mit „mal" in ihm vertauscht. Die Negation erhält man — nach den Theoremen 36) — *ebenso*, indem man nur obendrein noch jene einfachen Symbole in ihre Negationen verwandelt. Die Negation des Ausdrucks geht also aus dem dualen Gegenstück desselben hervor, indem man die Buchstaben des letzteren mit ihren Negationen vertauscht — sowie umgekehrt, d. h. Negation und duales Gegenstück des Ausdrucks gehören zum selben Typus, den wir den komplementären von demjenigen des Ausdrucks nannten.

Wie zahlreiche Beispiele darthun, kann aber ein Ausdruck auch sich selbst, oder wenigstens einem solchen vom nämlichen Typus dual entsprechen, sodass es auch Typen gibt, die zu sich selber dual und komplementär sind.

Ein sich selber komplementärer Typus ist zugleich ein Haupttypus, konstituirt für sich einen solchen. Ein solcher kann nach dem Vorstehenden aber nur vorkommen innerhalb derjenigen Abteilung, welche die Mitte innehält in der Reihe der Typen, somit je gerade die Hälfte aller Konstituenten zu einem Elemente zusammenfasst.

Dies alles exemplifizirt sich bereits bei der Gruppe $G(a)$, wo die Verhältnisse freilich höchst einfach liegen:

Der mittlere (zweite) Typus, repräsentirt durch a, a_1, ist zu sich selbst komplementär, und zugleich der zweite Haupttypus. Der dritte Typus, repräsentirt durch 1, ist komplementär zum ersten, durch 0 repräsentirten, und macht mit ihm den ersten Haupttypus aus. Wir haben also bei $G(a)$ *drei Typen* und *zwei Haupttypen*.

Der Analogie mit dem Folgenden wegen heben wir noch hervor, dass sich die Frage nach der Anzahl der Typen in der Gruppe $G(a)$ geometrisch deckt mit der Frage nach der Anzahl der Arten, auf welche sich an der zweipunktig begrenzten Strecke, dem (geradlinigen) „Zweieck" Ecken auswählen lassen.

Man kann entweder *keine* Ecke, oder *irgend eine*, oder alle zwei Ecken auswählen.

Fig. 35.

Analog wird bei der Frage nach der Zahl der Typen, in welche die Elemente der Gruppe $G(a, b)$ sich einordnen, es darauf ankommen, zu ermitteln, auf wie viele Arten sich beim (ebenen) *Viereck*, z. B. beim *Quadrate* (Fig. 36) Ecken auswählen lassen.

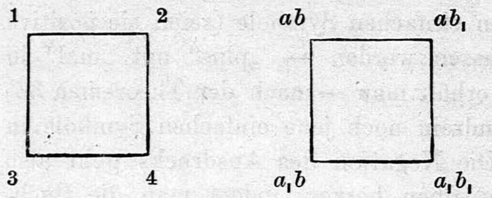


Fig. 36.

Offenbar kann man entweder *keine* Ecke wählen, oder *irgend eine*, oder *irgend zweie*, und dann entweder zwei *benachbarte*, oder aber zwei *gegenüberliegende*, oder *irgend dreie* (mit Auslassung jedes vierten) oder *alle viere*.

Wenn wir für die Konstituenten der Entwickelung der identischen 1 nach den Bestimmungselementen a, b der Gruppe die Nummern beibehalten, welche aus der Vergleichung der beiden Quadrate der Figur ersichtlich werden, so haben wir in der That bei den Elementen von $G(a, b)$ die folgenden 6 Typen — in strenger Anordnung:

Erster Typus: 0

Zweiter „ : $1 = ab,\ \ 2 = ab_1,\ \ 3 = a_1b,\ \ 4 = a_1b_1$

Dritter „ : $1+2 = a,\ \ 1+3 = b,\ \ 2+4 = b_1,\ \ 3+4 = a_1$

Vierter „ : $1+4 = ab + a_1b_1,\ \ 2+3 = ab_1 + a_1b$

Fünfter „ : $2+3+4 = a_1 + b_1,\ \ 1+3+4 = a_1 + b,\ \ 1+2+4 = a + b_1,$
$1+2+3 = a + b$

Sechster „ : $1+2+3+4 = 1$,

und schliessen sich von diesen der erste und sechste zu einem Haupttypus, ebenso der zweite und fünfte zu einem zweiten Haupttypus zusammen, während der dritte und vierte je für sich einen Haupttypus konstituiren. Wir haben also bei zwei Bestimmungselementen *sechs* Typen und *vier* Haupttyen.

Nachdem dies erledigt, nehmen wir die analoge Aufgabe bei der Gruppe aus *drei* unabhängigen Bestimmungselementen: $G(a, b, c)$, in Angriff. Und zwar wollen wir die fragliche Anzahl der Typen und Haupttypen erst a priori ermitteln. Eine empirische Bestätigung der Ergebnisse wird sich nachträglich ergeben, indem wir die 256 Elemente der Gruppe in den einfachsten Ausdrucksformen, deren sie im identischen Kalkul fähig scheinen, wirklich hinschreiben — was sich der mannigfachen Anwendungen halber, die von der Zusammenstellung gemacht werden können, verlohnen wird.

Numeriren wir in der Entwickelung der identischen Eins nach den Bestimmungselementen a, b, c:

$$1 = \overset{1}{abc} + \overset{2}{abc_1} + \overset{3}{ab_1c} + \overset{4}{ab_1c_1} + \overset{5}{a_1bc} + \overset{6}{a_1bc_1} + \overset{7}{a_1b_1c} + \overset{8}{a_1b_1c_1}$$

die acht Glieder kurz mit den darübergesetzten Ziffern, so erkennt man sogleich, dass unser Problem sich deckt mit der Aufgabe, die Anzahl der Arten zu ermitteln, auf welche an einem *Würfel* — mit wie nebenstehend numerirten Ecken — deren irgend welche ausgewählt werden können.

Genauer lässt dies sich in folgender Weise einsehen. Denken wir uns irgend eine Funktion $f(a, b, c, \cdots)$ von den „Argumenten“ $a, b, c, \cdots$ nach diesen im Boole'schen Sinne entwickelt, so wird nach § 19 ein jeder „Konstituent“ der Entwickelung sich darstellen als das Produkt der sämtlichen Argumentbuchstaben:

$$abc \cdots$$

— je *mit* oder aber *ohne* Negationsstrich genommen.

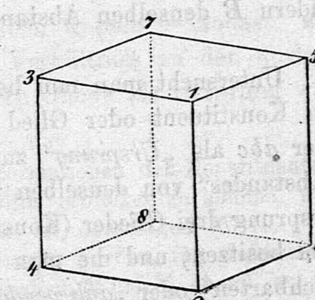


Fig. 37.

Und bei den Problemen der vorliegenden Gattung haben wir nur mit den Entwickelungen der identischen Eins zu thun, welche der Summe aller jener Konstituenten gleich ist.

Nach dem Gesagten muss ein jeder Konstituent in jeden andern (zu der nämlichen Entwickelung gehörigen) sich überführen lassen lediglich dadurch, dass man gewisse Argumentbuchstaben in ihre Negationen verwandelt. Vergleichen wir irgend zweie dieser Konstituenten mit einander, so lassen dieselben sich jedenfalls dadurch in einander überführen, dass man diejenigen Argumentbuchstaben ungeändert lässt, welche in beiden Konstituenten übereinstimmend vorkommen, nämlich entweder beidemal positiv (unnegirt), oder aber beidemal negativ (mit Negationsstrich versehen) erscheinen, *dass man* dagegen diejenigen *Argumente mit ihren Negationen vertauscht*, welche in beide Konstituenten in verschiedener Weise als Faktor eingehen, nämlich im einen — gleichviel welchem von beiden — unnegirt, im andern negirt auftreten.

Mit Clifford (siehe weiter unten) kann man passend *„Abstand“* der beiden in Vergleichung zu ziehenden Konstituenten nennen: die Anzahl der Argumentbuchstaben, welche dergestalt behufs Überführung des einen Konstituenten in den andern zu vertauschen sind mit ihren Negationen.

So werden beispielsweise die beiden Konstituenten

$$abcd \quad \text{und} \quad ab_1cd$$

den Abstand 1 besitzen, weil es erforderlich und ausreichend ist, das *eine* Argument b mit seiner Negation b_1 zu vertauschen, um aus dem einen von ihnen den andern abzuleiten.

Die Konstituenten a_1bcd und ab_1cd dagegen haben den Abstand 2, weil zu diesem Zwecke die *beiden* Argumente a und b mit ihren Negationen a_1 und b_1 vertauscht werden müssen.

Die Konstituenten ab_1cd_1 und $a_1b_1c_1d$ haben den Abstand 3, etc.

Ein jeder Konstituent besitzt von sich selbst oder einem ihm identisch gleichen (wie z. B. a_1b_1cd von a_1b_1cd) den Abstand 0.

Nach den Erörterungen besitzt ein Konstituent A von einem andern B denselben Abstand, wie der andere B vom ersten A.

Untersucht man nun beim oben vorliegenden Probleme, wie sich ein Konstituent oder Glied unserer Entwickelung, z. B. das erste 1 oder abc als „*Ursprung*" zu den übrigen Gliedern in Hinsicht seines „Abstandes" von denselben verhält, so bemerkt man, dass es zu dem Ursprung drei Glieder (Konstituenten) gibt, welche den Abstand 1 von ihm besitzen, und die man darum passend als die dem Ursprung „benachbarten" oder „*anliegenden*" Glieder wird bezeichnen können. Drei andere von den 7 übrigen Gliedern haben von ihm den Abstand 2, und sollen die dem Ursprung „*abliegenden*" Glieder heissen. Das letzte noch übrige Glied hat von dem Ursprung den grössten hier vorkommenden, nämlich den Abstand 3, und mag das denselben „*gegenüberliegende*" oder der „Gegenkonstituent" des Ursprungs genannt werden.

Für den eben gewählten Ursprung versinnlicht diesen Sachverhalt die Figur:

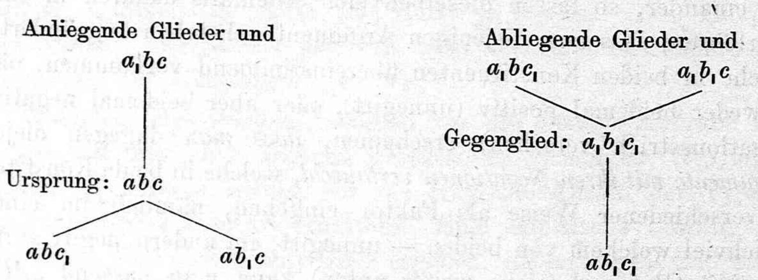


Fig. 38.

Während Ursprung und Gegenglied ungeändert bleiben (festgehalten werden), können, durch blosse Vertauschungen unter den Argumenten a, b, c selbst, die drei anliegenden Glieder ineinander übergeführt werden, desgleichen die drei abliegenden.

Ganz ebenso verhält sich nun die Würfelecke 1 zu den drei ihr benachbarten 2, 3 und 5, nebst den ihr abliegenden Ecken 4, 6 und 7 und ihrer Gegenecke 8 — wofern die Abstände entlang dem Kantensystem des Würfels gemessen werden.

Und wie die Würfelecken als gleichwertig zu gelten haben, indem man jede Ecke in die Lage jeder andern bringen kann, ohne dass der Würfel aufhört mit sich selbst zusammenzufallen, so kann man auch durch blosse Vertauschungen von Argumenten a, b oder c mit ihren Negationen (sowie auch von jenen unter sich) die ganze Konstituentensumme so in sich selber transformiren, dass irgend zwei verlangte Glieder derselben den Platz gewechselt haben werden — sodass, was oben über den Ursprung abc in seinem Verhältniss zu den übrigen Gliedern gesagt ist, auch von jedem andern Gliede als Ursprung wird gelten müssen.

Um alle analytisch ausführbaren Transformationen der Konstituentensumme in sich selbst unter geometrischem Bilde erblicken zu können, wird man auch den „umgestülpten" Würfel, das ist denjenigen Würfel, bei welchem die Ziffern aller Gegenecken ausgetauscht worden, für gleichwertig gelten zu lassen haben mit dem ursprünglichen Würfel, obwol er mit diesem nie zur Deckung mit allen gleichnamigen Ecken gebracht werden kann, demselben vielmehr nur „symmetrisch gleich" sein wird.

Jene, die Konstituentensumme in sich selbst transformirenden Vertauschungen sind leicht zu ermitteln. Es sind vor allem die folgenden Produkte von „Transpositionen", bei denen wir solche Buchstabenvertauschungen, die von selbst aus andern folgen, jeweils *unter* diese schreiben:

$$(a, a_1)(1, 5)(2, 6)(3, 7)(4, 8); \quad (b, b_1)(1, 3)(2, 4)(5, 7)(6, 8);$$

$$(c, c_1)(1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8);$$

$$\begin{matrix} (a, b)(3, 5)(4, 6); & (a, c)(2, 5)(4, 7); & (b, c)(2, 3)(6, 7) \\ (a_1, b_1) & (a_1, c_1) & (b_1, c_1) \end{matrix}$$

Aus diesen schon würden sich die folgenden Vertauschungen nach den Multiplikationsregeln der „Substitutionen"theorie ableiten lassen, gleichwie sie direkt sich ergeben:

$$\begin{matrix} (a, b, c)(2, 5, 3)(4, 6, 7); & (a, c, b)(2, 3, 5)(4, 7, 6) \\ (a_1, b_1, c_1) & (a_1, c_1, b_1) \end{matrix}$$

$$(a, a_1)(b, b_1)(1, 7)(2, 8)(3, 5)(4, 6); \quad (a, a_1)(c, c_1)(1, 6)(2, 5)(3, 8)(4, 7);$$

$$(b, b_1)(c, c_1)(1, 4)(2, 3)(5, 8)(6, 7);$$

$$(a, a_1)(b, b_1)(c, c_1)(1, 8)(2, 7)(3, 6)(4, 5);$$

$$\begin{matrix} (a, b_1)(1, 7)(2, 8); & (a, c_1)(1, 6)(3, 8); & (b, c_1)(1, 4)(5, 8); \\ (a_1, b) & (a_1, c) & (b_1, c) \end{matrix}$$

$(a, a_1)(b, c_1)(1,8)(2,6)(3,7)(4,5)$; $(b, b_1)(a, c_1)(1,8)(2,4)(3,6)(5,7)$;
(b_1, c) (a_1, c)

$(c, c_1)(a, b_1)(1,8)(2,7)(3,4)(5,6)$;
(a_1, b)

$(a,b,c_1)(1,6,4)(3,5,8)$; $(a,b_1,c)(1,4,7)(2,8,5)$; $(a,b_1,c_1)(1,7,6)(2,3,8)$;
(a_1,b_1,c) (a_1,b,c_1) (a_1,b,c)

— desgleichen in den drei letzten Vertauschungen die Cyklen sämtlich rückwärts gelesen, beziehungsweise die beiden letzten Elemente in denselben durchweg vertauscht.

Da es nun bequemer ist, sich von der geometrischen Anschauung des Würfels leiten zu lassen, als derartige Zeichenvertauschungen vorzunehmen, so wollen wir die uns obliegende kombinatorische Untersuchung jetzt am geometrischen Bilde ausführen.

Wir haben entweder *keine* Aushebung: dies gibt den ersten Typus welcher der nichtssagenden Aussage entspricht und das Element 0 der Gruppe $G(a, b, c)$ liefert.

Oder wir haben *eine* Aushebung, indem wir als Element der Gruppe irgend ein Glied, einen Konstituenten jener achtgliedrigen Summe, oder also eine Ecke des Würfels nehmen — einer von Jevons und Clifford so genannten „einfaltigen" Aussage („one-fold statement") entsprechend. Dies gibt den zweiten Typus mit den 8 Repräsentanten oder Formen (als Elementen der Gruppe):

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Oder wir haben *zwei* Aushebungen, indem wir zwei Ecken des Würfels nehmen, entsprechend zweien Konstituenten, welche additiv vereinigt zu denken sind zu einem Ausdrucke, als einem Elemente der Gruppe, oder als dem Polynom einer (rechts auf 0 gebrachten) Aussage, die als eine „zwiefältige" oder „zweifache" (twofold statement) bezeichnet werden dürfte.

Zwei Ecken des Würfels lassen nun aber auf *drei*erlei Weisen sich auswählen.

Beginnen wir jedesmal mit der Ecke 1, so kann die zweite Ecke entweder eine ihr benachbarte (*anliegende*) Ecke sein, d. h. eine von den dreien 2, 3, 5 und dann gleichviel welche, oder eine *abliegende*, d. h. 4, 6 oder 7, oder die gegenüberliegende, somit 8. Dies gibt für die drei folgenden Typen, bei denen die verbundenen (kombinirten) Ecken entweder Endpunkte *einer* Kante, oder Gegenecken *einer* Seitenfläche des Würfels oder endlich Gegenecken des Würfels selbst sind:

Dritter Typus mit den 12 Repräsentanten (wenn wir Raumersparniss halber die Pluszeichen jeweils unterdrücken, welche die Ziffern einer jeden Kombination eigentlich verbinden sollten):

12, 34, 56, 78, 13, 24, 57, 68, 15, 26, 37, 48.

Vierter Typus mit den 12 Repräsentanten:

14, 23, 58, 67, 16, 25, 38, 47, 17, 35, 28, 46.

Fünfter Typus mit den 4 Repräsentanten:

18, 27, 36, 45.

Oder wir haben *drei* Aushebungen („threefold" statement) Auch diese lassen sich auf drei Arten bewerkstelligen und liefern *drei* weitere Typen.

Entweder nämlich: zwei von den drei auszuhebenden Ecken sind benachbarte; dann mögen wir 1 und 2 als diese nehmen. Alsdann kann auch die dritte auszuhebende Ecke einer von diesen beiden benachbart sein (aber nicht beiden zugleich, weil sonst der Würfel ein Dreieck zur Seitenfläche haben müsste), gleichviel welcher — wie z. B. 3 der 1, und die drei Ecken bestimmen eine rechtwinklig gebrochene Linie: 213, ein „Knie"; dies gibt den

Sechsten Typus mit den 24 Repräsentanten:

312, 124, 243, 431, 657, 578, 786, 865,
215, 156, 562, 621, 734, 348, 487, 873,
513, 137, 375, 751, 426, 268, 684, 842.

Andernfalles wird die dritte neben 1 und 2 auszuwählende Ecke keiner von diesen beiden benachbart sein; dann fallen die Ecken 3, 4, 5, 6 ausser Betracht, und kann jene nur einer von den beiden Endpunkten 7 und 8 der Gegenkante von 12 sein, gleichviel welcher von diesen. Diese Aushebung verknüpft also die Endpunkte einer Kante je mit einem Endpunkt ihrer Gegenkante und gibt den

Siebenten Typus mit den 24 Repräsentanten:

127, 128, 781, 782, 345, 346, 563, 564,
136, 138, 681, 683, 245, 247, 572, 574,
154, 158, 481, 485, 263, 267, 372, 376.

Oder unter den auszuhebenden Ecken sind keine zwei benachbarte. Beginnen wir mit 1, so werden also die drei anliegenden 2, 3 und 5 zu verwerfen sein. Nun kann aber auch die Gegenecke 8 nicht genommen werden, weil dieser die drei noch übrigen Ecken 4, 6 und 7 benachbart sind und dann keine nicht benachbarte Ecke mehr vorhanden wäre, die für die dritte sich nehmen liesse. Folglich müssen in diesem Falle die *beiden* andern Ecken unter den der ersten abliegenden 4, 7, 8 ausgewählt werden, gleichviel auf welche Weise. Wie 147 bestimmen dann die gewählten Ecken ein gleichseitiges Dreieck, welches von Diagonalen dreier Seitenflächen des Würfels gebildet wird, und auf welchem als Grundfläche je eine Ecke des Würfels pyramidenförmig steht. Dies ist der

Achte Typus mit den 8 Repräsentanten:

523, 641, 714, 832, 176, 258, 385, 467. —

Da hiermit bei drei Aushebungen alle Möglichkeiten erschöpft wurden, so haben wir überzugehen zu dem Falle, wo *vier* Aushebungen gemacht werden. Es wird sich herausstellen, dass diese auf *sechs*erlei Arten geschehen können.

Erster Unterfall: Drei von den vier auszuwählenden Ecken bilden die Figur des rechten Winkels (das Knie, wie 213 etc. beim sechsten Typus), sodass zwei von ihnen der von uns in die Mitte gesetzten dritten benachbart sind. Alsdann kann die vierte Ecke einer von diesen dreien benachbart sein, oder nicht.

Ist sie der bevorzugten oder mittleren Ecke benachbart, so erweist sie sich als vollkommen bestimmt. Weil nämlich von den drei derselben benachbarten Ecken schon zwei ausgehoben sind, muss sie die dritte sein. Die vier gewählten Ecken bestimmen dann ein Dreikant (einen Dreifuss); ihr System besteht aus einer Ecke des Würfels mitnebst den Endpunkten der drei in ihr zusammenstossenden Kanten. Dies ist der

Neunte Typus mit den 8 Repräsentanten:

1523, 2641, 3714, 4832, 5176, 6258, 7385, 8467.

Ist die vierte Ecke aber einer von den beiden andern benachbart, mithin bei 213 der 2 oder der 3, so kann sie entweder demselben durch die bisherigen drei Ecken bestimmten Seitenquadrate als dessen vierte Ecke angehören, oder, wenn diesem nicht, so sicher dem gegenüberliegenden. Im ersten Falle sind die gewählten vier Ecken diejenigen einer quadratischen Seitenfläche des Würfels; sie bestimmen dann auf vier Arten jene zweiteilig im rechten Winkel gebrochene Linie (ein Knie), sowie eine dreiteilig in Hufeisenform gebrochene Linie. Dies gibt den

Zehnten Typus mit den 6 Repräsentanten:

1243, 5786, 1562, 3487, 1375, 2684.

Im andern Falle muss die zu 213 hinzu zu wählende vierte Ecke entweder 6 oder 7 sein (weil 5, als der mittleren benachbart, schon unter dem neunten Typus berücksichtigt ist, und 8 zu keiner von den dreien benachbart). Die vier Ecken, wie 6213, bestimmen jetzt eine windschiefe dreiteilig gebrochene Linie (windschiefes Doppelknie) und haben wir den

Elften Typus mit den 24 Repräsentanten:

3126, 5124, 1348, 7342, 1568, 7562, 3786, 5784,

2137, 5134, 1248, 6243, 1578, 6573, 2687, 5684,

2157, 3156, 1268, 4265, 1378, 4375, 2487, 3486.

Bleibt der Fall zu erledigen, wo die vierte Ecke keiner von den drei ein Knie 312 bildenden benachbart ist.

Als vierte werden dann also auszuschliessen sein die Ecken 4, 5, 6 und 7, sodass als einzig zulässige 8 geblieben. Die vier erwählten Ecken erscheinen als diejenigen an einem rechtwinkligen Knie in Verbindung mit der Gegenecke seines Scheitels und haben wir den

Zwölften Typus mit den 24 Repräsentanten:

3128, 1247, 2435, 4316, 6574, 5782, 7861, 8653,

2158, 1564, 5623, 6217, 7346, 3485, 4871, 8732,

5138, 1376, 3752, 7514, 4267, 2683, 6841, 8425.

Hiermit sind die Fälle abgethan, bei denen eine erwählte Ecke zwei andern erwählten benachbart ist, also drei von den vier zu erwählenden Ecken in der Lage wie beim sechsten Typus zu einander stehen; denn das von diesen dreien gebildete Knie könnte man immer für 213 im obigen Räsonnement eintreten lassen, welches in allen seinen möglichen Kombinationen bereits aufgeführt worden. Sollen Wiederholungen vermieden werden, so ist also fortan solcher Fall nicht mehr zuzulassen.

Bleibt der Unterfall zu erledigen, wo drei von den vier erwählten Ecken in der Lage wie beim siebenten Typus sich zu einander befinden — wie z. B. 127. In diesem Falle sind 3, 4, 5, 6 als zu 1 oder 2 benachbart nach dem soeben gesagten zu verwerfen, und bleibt blos 8 als vierte zulässige Ecke übrig. Die vier erwählten Punkte bilden jetzt die Ecken von einem der rechteckigen Diagonalquerschnitte des Würfels, und haben wir den

Dreizehnten Typus mit den 6 Repräsentanten:

1278, 3456, 1368, 2457, 1548, 2637.

Bleibt als letzter noch der Unterfall zu erledigen, wo drei von den vier auszuhebenden Ecken die Figur des achten Typus miteinander bilden. Und zwar wird auch die vierte Ecke mit je zweien der drei erwähnten nur diese Figur des achten Typus eingehen dürfen, weil andernfalles (wenn nämlich eine Konfiguration des siebten oder sechsten Typus dabei mit unterliefe) die Aushebungsweise schon im Bisherigen abgethan sein müsste. Insbesondere dürfen sonach benachbarte Ecken jetzt überhaupt nicht mehr vorkommen.

Gehen wir von der Aushebung der Ecken 235 aus, so sind 1, 4, 6 und 7 als einer (oder mehreren) von den drei erwählten Ecken benachbart, zu verwerfen und bleibt nur mehr 8 als vierte zulässige Ecke übrig. Die vier zu erwählenden Ecken sind jetzt durchweg von einander abliegende und bilden das System der Ecken von einem der beiden regelmässigen (dem Würfel einschreibbaren) Tetraeder. Wir haben somit als letzten Typus dieser Aushebung den

Vierzehnten Typus mit den zwei Repräsentanten:

1476, 2358. —

Nunmehr auch die Fälle von 5, 6, 7 und 8 Aushebungen durchzugehen ist nicht erforderlich, weil hierbei gerade die Ecken auszuheben sein werden, die bei den ersten vier Aushebungen (diese in umgekehrter Reihenfolge genommen) bezüglich zurückgelassen wurden. Die Typen von jenen Aushebungen sind zu denen von diesen bezüglich komplementär. Insbesondere werden (die) 8 Aushebungen liefern: das Element 1 der Gruppe $G(a,b,c)$, als einzigen Repräsentanten des letzten Typus derselben — entsprechend der absurden Aussage: $1 = 0$.

Wir müssen demnach im Ganzen haben entsprechend je

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8 \text{ Aushebungen:}$$
$$1 + 1 + 3 + 3 + 6 + 3 + 3 + 1 + 1 = \textit{22 Typen}$$

von Elementen der Gruppe $G(a,b,c)$, mithin so viele Arten von Ausdrücken, welche aus a, b und c mittelst der drei Spezies aufgebaut werden können.

Und diese Typen konstituiren zusammen:

$$1 + 1 + 3 + 3 + 6 = \textit{14 Haupttypen}$$

zu welchen sich je die von Anfang und Ende der obigen Reihe gleichweit abstehenden Typen bezüglich zusammenthun. —

Wir wollen nunmehr von jedem Typus einen Repräsentanten wirklich anschreiben, um denselben auf seine einfachste Gestalt oder bequemste Ausdrucksform im identischen Kalkul zu bringen. Es repräsentirt den

1. Typus: 0; 2. Typus: $1 = abc$; 3. Typus: $1 + 2 = abc + abc_1 = ab$;

4. Typus: $1 + 4 = abc + ab_1c_1 = a\,(bc + b_1c_1)$;

5. Typus: $1 + 8 = abc + a_1b_1c_1$;

6. Typus: $1 + 2 + 3 = abc + abc_1 + a_1bc = a\,(b + c)$;

7. Typus: $1 + 2 + 7 = abc + abc_1 + a_1b_1c = ab + a_1b_1c$;

8. Typus: $2 + 3 + 5 = abc_1 + ab_1c + a_1bc = a\,(bc_1 + b_1c) + a_1bc$;

die geringfügige Vereinfachung findet hier jedoch auf Kosten, unter Verhüllung der Symmetrie statt.

9. Typus: $1 + 2 + 3 + 5 = abc + abc_1 + ab_1c + a_1bc =$
$= a\,(bc_1 + b_1c) + bc = a\,(b + c) + a_1bc = a(b + c) + bc = ab + ac + bc$;

10. Typus: $1 + 2 + 3 + 4 = abc + abc_1 + ab_1c + ab_1c_1 = a$;

11. Typus: $1 + 2 + 3 + 6 = abc + abc_1 + ab_1c + a_1bc_1 =$
$= a\,(b + c) + a_1bc_1 = ac + bc_1$;

12. Typus: $1 + 2 + 3 + 8 = abc + abc_1 + ab_1c + a_1b_1c_1 = a(b + c) + a_1b_1c_1$;

13. Typus: $1 + 2 + 7 + 8 = abc + abc_1 + a_1b_1c + a_1b_1c_1 = ab + a_1b_1$;

14. Typus: $1 + 4 + 6 + 7 = abc + ab_1c_1 + a_1bc_1 + a_1b_1c =$
$= a(bc + b_1c_1) + a_1(bc_1 + b_1c) = b(ac + a_1c_1) + b_1\,(ac_1 + a_1c) =$
$= c\,(ab + a_1b_1) + c_1\,(ab_1 + a_1b)$;

15. Typus (komplementär zum 8. Typus): $1 + 4 + 6 + 7 + 8 =$
$= abc + ab_1c_1 + a_1bc_1 + a_1b_1c + a_1b_1c_1 = abc + b_1c_1 + a_1\,(b_1 + c_1) =$
$= (a + b_1 + c_1)\,(a_1 + b + c_1)\,(a_1 + b_1 + c) = abc + a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1$;

16. Typus (kompl. zum 7. Typ.): $3 + 4 + 5 + 6 + 8 =$
$= ab_1c + ab_1c_1 + a_1bc + a_1bc_1 + a_1b_1c_1 = ab_1 + a_1b + (a_1 + b_1)\,c_1 =$
$= ab_1 + a_1b + a_1c_1 = ab_1 + a_1b + b_1c_1 = ab_1 + a_1\,(b + c_1) =$
$= (a + c_1)\,b_1 + a_1b = ab_1 + a_1b + a_1b_1c_1$;

17. Typus (kompl. zum 6. Typ.): $4 + 5 + 6 + 7 + 8 =$
$= ab_1c_1 + a_1bc + a_1bc_1 + a_1b_1c + a_1b_1c_1 = b_1c_1 + a_1$;

18. Typus (kompl. zum 5. Typ.): $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 =$
$= abc_1 + ab_1c + ab_1c_1 + a_1bc + a_1bc_1 + a_1b_1c =$
$= ab_1 + bc_1 + ca_1 = ac_1 + cb_1 + ba_1 = (a + b + c)\,(a_1 + b_1 + c_1)$;

19. Typus (kompl. zum 4. Typ.): $2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8 =$
$= abc_1 + ab_1c + a_1bc + a_1bc_1 + a_1b_1c + a_1b_1c_1 = bc_1 + b_1c + a_1$;

20. Typus (kompl. zum 3. Typ.): $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 =$
$= ab_1c + ab_1c_1 + a_1bc + a_1bc_1 + a_1b_1c + a_1b_1c_1 = a_1 + b_1$;

21. Typus (kompl. zum 2. Typ.): $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 =$
$= abc_1 + ab_1c + ab_1c_1 + a_1bc + a_1bc_1 + a_1b_1c + a_1b_1c_1 = a_1 + b_1 + c_1$;

22. Typus (kompl. zum 1. Typ.): $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 =$
$= abc + abc_1 + ab_1c + ab_1c_1 + a_1bc + a_1bc_1 + a_1b_1c + a_1b_1c_1 = 1$.

Die vorstehend von mir durchgeführte Untersuchung — ohne das geometrische Gewand, in das ich sie gekleidet, und ohne die Bezugnahme auf „Ausdrücke“ sowie „Gruppen“ — ist zuerst von Jevons in Angriff genommen, der sich die Frage vorlegte, wie vielerlei *„Aussagen“* (innerhalb der von uns charakterisirten Schranken) über drei Klassen a, b, c gemacht werden können. Jevons schreibt — freilich in ganz andrer Gestalt, als die oben gewonnene — die 256 rechts auf 0 gebrachten Aussagen wirklich hin ([9] p. 286 … 289 cf. auch [8] p. 137 sqq.) — eine Zusammenstellung, die er als „the logical index“ bezeichnet. Er ordnet diese Aussagen in verschiedene „Typen“ ein, deren er aber (statt 22) nur 15 aufstellt. Die der übrigen zu klassifiziren verhindert ihn ein fundamentaler Irrtum, zufolge dessen er eine Aussage als eine sich selbst widersprechende (als „inconsistent“) erklärt wenn sie das Verschwinden von einer der drei Klassen a, b, c, oder von einer ihrer Negationen a_1, b_1, c_1 involvirt. Mit Recht hebt Venn[1] p. 162 Fussnote hervor, dass was (auch von Jevons) bei abgeleiteten Symbolen, z. B. Produkten wie ab, etc. als zulässig erklärt wird, auch bei den ursprünglichen Symbolen nicht ausgeschlossen werden darf, dass aber die Einführung einer solchen Restriktion überhaupt (ein Verbot, leere oder verschwindende Klassen zur Sprache zu bringen) für die Logik ein geradezu selbstmörderisches Verfahren (suicidal) wäre.

Zu verwundern ist, dass Clifford, der wie nachher zu schildern, das analoge Problem für vier Symbole a, b, c, d gelöst, gleichwol die Jevons'sche Lösung des niedereren Problems (für dreie) nicht revidirt zu haben scheint.

Ist ein Ausdruck von einem der vorstehenden 22 Typen *gleich Null* zu setzen, so lässt sich die damit gegebene Aussage oft noch auf eine einfachere Gestalt bringen dadurch, dass man einzelne Glieder auf die andere Seite des Gleichheitszeichens wirft, oder auch die Gleichung in mehrere zerfällt, diese in Subsumtionen umschreibt, etc.

Wir kommen damit den von Jevons in seinem „logical index“ gegebenen Formen der Aussage näher, werden diese aber meist an Einfachheit der Ausdrucksweise noch überbieten können, weil Jevons des Subsumtionszeichens noch entbehrte und die Einordnung $a ⋹ b$ zum Beispiel durch die Gleichung $a = ab$ auszudrücken genötigt war.

Wenn wir uns genau an die oben vorgeführten Typus-Repräsentanten halten, so ergeben auf die angeführte Weise in der That sich leicht die folgenden Aussagen zum

1. Typ. $0 = 0$ (identische Aussage);
2. Typ. $abc = 0$ oder unsymmetrisch $ab ⋹ c_1$, oder auch $a ⋹ b_1 + c_1$;
3. Typ. $ab = 0$ oder $a ⋹ b_1$;
4. Typ. $abc = 0$ und $a ⋹ b + c$; oder $ab = ac_1$ oder $ab_1 = ac$;
5. Typ. $abc = 0$ und $a_1b_1c_1 = 0$ (oder $1 ⋹ a + b + c$);
6. Typ. $ab = 0$ und $ac = 0$; oder $a ⋹ b_1c_1$;
7. Typ. $ab = 0$, $c ⋹ a + b$;
8. Typ. $ab ⋹ c$, $ac ⋹ b$, $bc ⋹ a$; oder $bc ⋹ a ⋹ bc + b_1c_1$;
9. Typ. $ab = 0$, $ac = 0$, $bc = 0$;
10. Typ. $a = 0$;
11. Typ. $ac = 0$, $b ⋹ c$.
12. Typ. $ab = 0$, $ac = 0$, $1 ⋹ a + b + c$;
13. Typ. $ab = 0$ und $1 ⋹ a + b$, oder: $a = b_1$ oder $a_1 = b$;
14. Typ. $abc = 0$, $a ⋹ b + c$, $b ⋹ a + c$, $c ⋹ a + b$, oder $ab = ac_1$, $a_1b = a_1c$, oder etc.
15. Typ. $abc = 0$, $1 ⋹ ab + ac + bc$;
16. Typ. $a = b$ und $1 ⋹ a + b + c$ (oder $1 ⋹ a + c$);
17. Typ. $1 ⋹ a$, $1 ⋹ b + c$;
18. Typ. $a = b = c$;
19. Typ. $1 ⋹ a$, $b = c$;
20. Typ. $1 ⋹ a = b$;
21. Typ. $1 ⋹ a = b = c$;
22. Typ. $1 = 0$ (absurde Aussage).

Die Gruppe $G(a, b, c)$ besteht hienach aus folgenden 256 Elementen:

1. Typus: 0; 22. Typus: 1;

---

2. Typus:

$$abc,\ abc_1,\ ab_1c,\ ab_1c_1,\ a_1bc,\ a_1bc_1,\ a_1b_1c,\ a_1b_1c_1.$$

21. Typus:

$$a_1+b_1+c_1,\ a_1+b_1+c,\ a_1+b+c_1,\ a_1+b+c,\ a+b_1+c_1,\ a+b_1+c,\ a+b+c_1,\ a+b+c.$$

---

3. Typus:

$$ab,\ ab_1,\ a_1b,\ a_1b_1,\ ac,\ ac_1,\ a_1c,\ a_1c_1,\ bc,\ bc_1,\ b_1c,\ b_1c_1.$$

20. Typus:

$$a_1+b_1,\ a_1+b,\ a+b_1,\ a+b,\ a_1+c_1,\ a_1+c,\ a+c_1,\ a+c,\ b_1+c_1,\ b_1+c,\ b+c_1,\ b+c.$$

4. Typus:

$$a(bc+b_1c_1),\quad a(bc_1+b_1c),\quad a_1(bc+b_1c_1),\quad a_1(bc_1+b_1c),$$
$$b(ac+a_1c_1),\quad b(ac_1+a_1c),\quad b_1(ac+a_1c_1),\quad b_1(ac_1+a_1c),$$
$$(ab+a_1b_1)c,\quad (ab_1+a_1b)c,\quad (ab+a_1b_1)c_1,\quad (ab_1+a_1b)c_1.$$

19. Typus:

$$a_1+bc_1+b_1c,\quad a_1+bc+b_1c_1,\quad a+bc_1+b_1c,\quad a+bc+b_1c_1,$$
$$b_1+ac_1+a_1c,\quad b_1+ac+a_1c_1,\quad b+ac_1+a_1c,\quad b+ac+a_1c_1,$$
$$ab_1+a_1b+c_1,\quad ab+a_1b_1+c_1,\quad ab_1+a_1b+c,\quad ab+a_1b_1+c.$$

5. Typus:

$$abc+a_1b_1c_1,\quad abc_1+a_1b_1c,\quad ab_1c+a_1bc_1,\quad ab_1c_1+a_1bc.$$

18. Typus:

$$(a+b+c)(a_1+b_1+c_1),\ (a+b+c_1)(a_1+b_1+c),\ (a+b_1+c)(a_1+b+c_1),\ (a+b_1+c_1)(a_1+b+c)$$
$$\left\{\begin{array}{lllll} \text{oder:} & ab_1+bc_1+ca_1, & ab_1+a_1c_1+bc, & ab+a_1c+b_1c_1, & ac+a_1b_1+bc_1 \\ \text{oder:} & ac_1+cb_1+ba_1, & ac+a_1b+b_1c_1, & ac_1+a_1b_1+bc, & ab+a_1c_1+b_1c. \end{array}\right\}$$

---

6. Typus:

$$a(b+c),\ a(b+c_1),\ a(b_1+c_1),\ a(b_1+c),\ a_1(b+c),\ a_1(b_1+c),\ a_1(b_1+c_1),\ a_1(b+c_1),$$
$$b(a+c),\ b(a_1+c),\ b(a_1+c_1),\ b(a+c_1),\ b_1(a+c),\ b_1(a+c_1),\ b_1(a_1+c_1),\ b_1(a_1+c),$$
$$(a+b)c,\ (a+b_1)c,\ (a_1+b_1)c,\ (a_1+b)c,\ (a+b)c_1,\ (a_1+b)c_1,\ (a_1+b_1)c_1,\ (a+b_1)c_1.$$

17. Typus:

$$a_1+b_1c_1,\quad a_1+b_1c,\quad a_1+bc,\quad a_1+bc_1,\quad a+b_1c_1,\quad a+bc_1,\quad a+bc,\quad a+b_1c,$$
$$b_1+a_1c_1,\quad b_1+ac_1,\quad b_1+ac,\quad b_1+a_1c,\quad b+a_1c_1,\quad b+a_1c,\quad b+ac,\quad b+ac_1,$$
$$a_1b_1+c_1,\quad a_1b+c_1,\quad ab+c_1,\quad ab_1+c_1,\quad a_1b_1+c,\quad ab_1+c,\quad ab+c,\quad a_1b+c.$$

7. Typus:

$ab + a_1b_1c$, $ab + a_1b_1c_1$, $abc + a_1b_1$, $abc_1 + a_1b_1$,
$ab_1 + a_1bc$, $ab_1 + a_1bc_1$, $ab_1c + a_1b$, $ab_1c_1 + a_1b$,
$ac + a_1bc_1$, $ac + a_1b_1c_1$, $abc + a_1c_1$, $ab_1c + a_1c_1$,
$ac_1 + a_1bc$, $ac_1 + a_1b_1c$, $abc_1 + a_1c$, $ab_1c_1 + a_1c$,
$ab_1c_1 + bc$, $a_1b_1c_1 + bc$, $abc + b_1c_1$, $a_1bc + b_1c_1$,
$ab_1c + bc_1$, $a_1b_1c + bc_1$, $abc_1 + b_1c$, $a_1bc_1 + b_1c$.

16. Typus:

$ab_1 + a_1b + a_1b_1c_1$, $ab_1 + a_1b + a_1b_1c$, $ab_1 + a_1b + abc_1$, $ab_1 + a_1b + abc$,
$ab + a_1b_1 + a_1bc_1$, $ab + a_1b_1 + a_1bc$, $ab + a_1b_1 + ab_1c_1$, $ab + a_1b_1 + ab_1c$,
$ac_1 + a_1c + a_1b_1c_1$, $ac_1 + a_1c + a_1bc_1$, $ac_1 + a_1c + ab_1c$, $ac_1 + a_1c + abc$,
$ac + a_1c_1 + a_1b_1c$, $ac + a_1c_1 + a_1bc$, $ac + a_1c_1 + ab_1c_1$, $ac + a_1c_1 + abc_1$,
$a_1b_1c_1 + bc_1 + b_1c$, $ab_1c_1 + bc_1 + b_1c$, $a_1bc + bc_1 + b_1c$, $abc + bc_1 + b_1c$,
$a_1b_1c + bc + b_1c_1$, $ab_1c + bc + b_1c_1$, $a_1bc_1 + bc + b_1c_1$, $abc_1 + bc + b_1c_1$

[in welchen Ausdrücken von dem ternären Gliede auch jeweils der eine, oder aber der andere von den beiden Faktoren unterdrückt werden darf, die in einem der übrigen mit ihm verbundenen Glieder vorkommen].

8. Typus:

$abc_1 + ab_1c + a_1bc$, $abc + (ab_1 + a_1b)c_1$, $abc + b_1(ac_1 + a_1c)$, $a(bc_1 + b_1c) + a_1b_1c_1$,
$abc + a_1(bc_1 + b_1c)$, $b(ac_1 + a_1c) + a_1b_1c_1$, $(ab_1 + a_1b)c + a_1b_1c_1$, $ab_1c_1 + a_1bc_1 + a_1b_1c$.

15. Typus:

$abc + a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1$, $abc_1 + (a_1 + b_1)c + a_1b_1$, $ab_1c + b(a_1 + c_1) + a_1c_1$, $ab_1c_1 + a_1(b + c) + bc$,
$a(b_1 + c_1) + a_1bc + b_1c_1$, $a_1bc_1 + b_1(a + c) + ac$, $a_1b_1c + (a + b)c_1 + ab$, $ab + ac + bc + a_1b_1c_1$,
[oder: $(a + b_1 + c_1)(a_1 + b + c_1)(a_1 + b_1 + c)$, $(a + b_1 + c)(a_1 + b + c)(a_1 + b_1 + c_1)$, etc.]

---

9. Typus:

$ab + ac + bc$, $ab + (a + b)c_1$, $ac + b_1(a + c)$, $a(b_1 + c_1) + b_1c_1$,
$a_1(b + c) + bc$, $b(a_1 + c_1) + a_1c_1$, $(a_1 + b_1)c + a_1b_1$, $a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1$.

10. Typus:

a, a_1, b, b_1, c, c_1.

11. Typus:

$ac + bc_1$, $ac_1 + bc$, $ac + b_1c_1$, $ac_1 + b_1c$, $a_1c_1 + bc$, $a_1c + bc_1$, $a_1c_1 + b_1c$, $a_1c + b_1c_1$,
$ab + b_1c$, $ab_1 + bc$, $ab + b_1c_1$, $ab_1 + bc_1$, $a_1b_1 + bc$, $a_1b + b_1c$, $a_1b_1 + bc_1$, $a_1b + b_1c_1$,
$ab + a_1c$, $ac + a_1b$, $ab + a_1c_1$, $ac_1 + a_1b$, $ac + a_1b_1$, $ab_1 + a_1c$, $ac_1 + a_1b_1$, $ab_1 + a_1c_1$.

12. Typus:

$a(b + c) + a_1b_1c_1$, $a(b + c_1) + a_1b_1c$, $a(b_1 + c_1) + a_1bc$, $a(b_1 + c) + a_1bc_1$,

$ab_1c_1 + a_1(b + c)$, $abc_1 + a_1(b_1 + c)$, $abc + a_1(b_1 + c_1)$, $ab_1c + a_1(b + c_1)$,
$b(a + c) + a_1b_1c_1$, $ab_1c_1 + b(a_1 + c)$, $ab_1c + b(a_1 + c_1)$, $b(a + c_1) + a_1b_1c$,
$b_1(a + c) + a_1bc_1$, $b_1(a + c_1) + a_1bc$, $abc + b_1(a_1 + c_1)$, $abc_1 + b_1(a_1 + c)$,
$(a + b)c + a_1b_1c_1$, $(a + b_1)c + a_1bc_1$, $abc_1 + (a_1 + b_1)c$, $ab_1c_1 + (a_1 + b)c$,
$(a + b)c_1 + a_1b_1c$, $ab_1c + (a_1 + b)c_1$, $abc + (a_1 + b_1)c_1$, $(a + b_1)c_1 + a_1bc$.

13. Typus:

$ab + a_1b_1$, $ab_1 + a_1b$, $ac + a_1c_1$, $ac_1 + a_1c$, $bc + b_1c_1$, $bc_1 + b_1c$.

14. Typus:

$a(bc + b_1c_1) + a_1(bc_1 + b_1c)$, $a(bc_1 + b_1c) + a_1(bc + b_1c_1)$.

Die Ausdrücke eines jeden Typus sind so geordnet, dass sie, wenn der Reihe nach gelesen, genau entsprechen den vorher zusammengestellten Aushebungen chiffrirter Würfelecken. Durch Vergleichung eines Ausdrucks mit der gleichstelligen Ziffernkombination unter dem gleichen Typus wird darnach auch sogleich ersichtlich, wie der erstere nach a, b, c entwickelt sich darstellen würde, z. B. der erste Ausdruck (Repräsentant) des elften Typus muss sein:

$$ac + bc_1 = 3 + 1 + 2 + 6 = 1 + 2 + 3 + 6 = abc + abc_1 + ab_1c + a_1bc_1.$$

Die Anzahl der Typen und Haupttypen in welche die $2^{16} = 65\,536$ Elemente der Gruppe $G(a, b, c, d)$ zerfallen, hat Clifford[3] bestimmt — vergl. auch eine hierauf bezügliche Bemerkung von Cayley[2].

Dabei ist es ihm um die Typenzahl der *Aussagen* zu thun, welche in simultanen universalen Urteilen über vier Klassen a, b, c, d abgegeben werden können (wenn also Alternativen zwischen solchen Urteilen ausgeschlossen bleiben, sodass nur die von uns später sogenannten einfachen oder monomischen Urteile in Betracht kommen werden).

Wir wollen über den Charakter und die Ergebnisse seiner mühsamen Untersuchung wenigstens kurz referiren, uns einige Zusatzbemerkungen gestattend.

Die 16 Glieder oder Konstituenten in der geordneten Entwickelung der identischen Eins nach den Argumenten a, b, c, d:

$$1 = abcd + abcd_1 + abc_1d + abc_1d_1 + ab_1cd + \cdots a_1b_1c_1d_1$$

wollen wir uns wieder mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots 16$ der Reihe nach numerirt denken.

Was die Abstandsverhältnisse dieser 16 Konstituenten betrifft, so gibt es zu irgend einem derselben als „Ursprung“ („origin“) vier „anliegende" („proximates"), welche den Abstand 1 von ihm besitzen, sechs „mittelständige" („mediates"), die von ihm den Abstand 2 haben, vier „abliegende" („ultimates") mit dem Abstand 3, endlich einen „gegenüberliegenden" („obverse") mit dem Abstand 4 — so wie es für den Ursprung $abcd$ das folgende Schema zu erkennen gibt:

1 origin und 4 proximates; 6 mediates; 4 ultimates und 1 obverse.

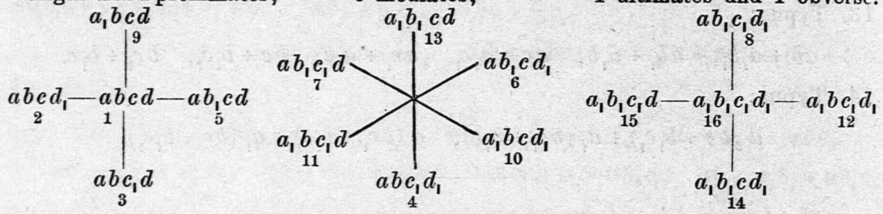


Fig. 39.

Die Frage ist: auf wie viele Arten irgendwieviele von diesen 16 Konstituenten ausgehoben und zu einer identischen Summe vereinigt, additiv kombinirt werden können, wenn man zu einerlei Art alle diejenigen Aushebungen rechnet, bei welchen die resultirenden Summen durch blosse Vertauschungen unter den Buchstaben $a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1$ auf einander zurückgeführt werden können.

Auch hier lässt das Problem sich unter geometrischem Bilde betrachten. Und zwar läuft es hinaus auf die Ermittelung der Anzahl der Arten, auf welche bei dem *„Analogon des Würfels in einer räumlichen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen"* sich Ecken auswählen lassen. Um zunächst für dieses Gebilde einen geeigneten Namen zu gewinnen, möge man bedenken, dass auch zutreffend bezeichnet werden könnte

die Strecke als *Zweieck*
das Quadrat „ (reguläres) *Vierstreck* (Vierseit)
der Würfel, Kubus „ „ *Sechsquadrat* (Hexaeder)

— indem in dem ohnehin für letztern gebräuchlichen Namen „Sechsflach" (Hexa-hedron) nur zufällig nicht ausgedrückt erscheint, dass jede Seitenfläche ein Quadrat sein solle.

Für jenes fragliche vierdimensionale Gebilde bietet demnach ungezwungen der Name „Achtwürfel" „Oktokub" oder
(reguläres) *„Achtzell"*
sich dar. Dieses Achtzell ist in der That zu denken als ein vierdimensionales (hyper-)räumliches Gebiet, welches begrenzt ist von acht Würfeln, von denen immer viere in einer Ecke der Figur zusammenstossen und zu je zweien eine quadratische Seitenfläche gemein haben.

Man kann das Gebilde ganz gut auch in unserm (dreidimensionalen) Raume veranschaulichen — sei es durch seine Projektion in den letztern, wo die Würfel sich als Rhomboeder darstellen, sei es auf eine Weise, die ich jetzt beschreiben will.

Schon das Quadrat kann selber (ich meine nicht eine Projektion desselben) mit seinen vier Ecken in eine gerade Linie eingezeichnet werden,

desgleichen der Würfel mit seinem Ecken- und Kantensystem in eine Ebene, wofern man nur sich gestattet, einzelne Seiten resp. Kanten desselben zu verbiegen, dieselben kürzend oder dehnend. Für das Quadrat soll dies Fig. 40, für den Würfel Fig. 41 erläutern; in beiden haben wir auch die Nummern der Ecken eingetragen (bezogen auf die Glieder unsrer Entwickelung der identischen Eins nach a, b resp. a, b, c).

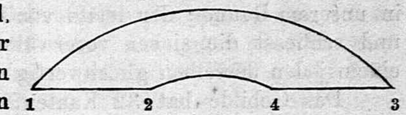


Fig. 40.

Zwei Seiten des Quadrates sowie zwei Seitenflächen des Würfels erblickt man unverzerrt.

Nichts hinderte, beim Quadrat die beiden andern Seiten geradlinig anzunehmen; jedoch geschähe dies auf Kosten der Übersichtlichkeit, indem die vier Seiten dann in- und übereinander fallen würden. Nun kann man aber doch von den Verzerrungen absehen, und deren ungeachtet die Seiten resp. Kanten für gleichwertig gelten lassen. Indem man die Quadratseiten den Deformationen geschmeidig folgen lässt, kann man z. B. auch in der Anschauung das soit-disant „Quadrat" Fig. 40 in sich selbst herumschwingen, sodass die Ecke 1 nach 2, 2 nach 4, 4 nach 3 und 3 nach 1 rückt. Ebenso kann man den — sit venia verbo! — „Würfel" Fig. 41 in sich selbst verschieben, sodass er stets mit seiner Anfangslage in Deckung bleibt, aber z. B. die Ecken 3, 1 nach 4, 2, die 4, 2 nach 8, 6, letztere nach 7, 5 und diese nach 3, 1 rücken, etc. Kurz man kann alle am wirklichen Quadrat resp. Würfel ausführbaren Prozesse oder Operationen im Geiste auch zur Ausführung bringen an den vorstehenden Abbildern dieser Gebilde, welche eine Dimension weniger als das Gebilde selbst besitzen und — nach Analogie eines Herbariums — füglich als „gepresstes" Quadrat, *„gepresster"* Würfel zu bezeichnen wären.

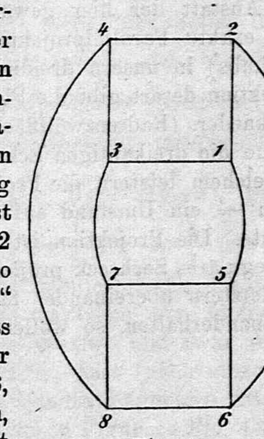


Fig. 41.

Analog bietet nun der vierdimensionale Oktokub *im dreidimensional gepressten Zustande* (gepresst natürlich unter Verbiegung und Zerrung von einzelnen seiner Kanten) sich in einer Gestalt dar, die wir nebenstehend in einer annähernd perspektiven, nämlich orthogonalen Projektion in der Ebene der Zeichnung darstellen, die 16 Nummern an die Ecken setzend.

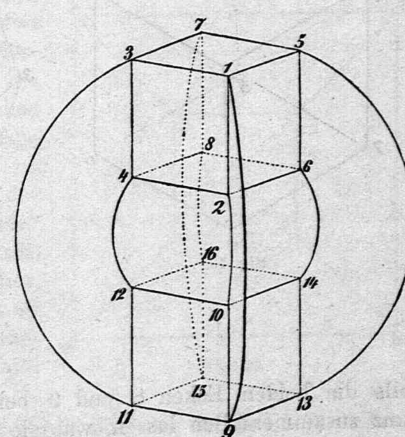


Fig. 42.

Vier von den Würfeln haben, wie man sieht, jetzt eine wiegenförmige Gestalt gewonnen, welche an gewisse viersitzige Kinderschaukeln erinnert; zwei von den Würfeln sind unverzerrt geblieben; zwischen diesen erscheint einer als der Kern der ganzen Figur in unserem Raume; der letzte von den Würfeln ist diese ganze Figur selbst, und schliesst die sieben vorerwähnten in sich, ist aber gleichwol als mit einem jeden derselben gleichwertig anzusehen.

Das Gebilde hat 32 Kanten, von welchen immer viere in einer von den 16 Ecken zusammenstossen. Je dreie von solchen 4 von einer Ecke ausgehenden Kanten bestimmen einen „Würfel“ und von den vier so bestimmten Würfeln (von welchen ebenfalls zu sagen sein wird, dass sie in dieser Ecke zusammenstossen) haben je zweie wieder *eine* Seitenfläche miteinander gemein, sodass auch sechs „quadratische Seitenflächen in jeder Ecke zusammentreffen; der Seitenflächen sind es 24 im ganzen.

Anstatt der hier gewählten Veranschaulichungsweise kann man auch eine exakte Parallelprojektion des vierdimensionalen Gebildes (regulären Oktokubs) in unsern dreidimensionalen Raum betrachten. Eine orthogonale Projektion derart gibt die Figur (das Kantensystem) des regulären Rhombendodekaeders (Rautenzwölfflächners, Granatoeders) mitsamt den acht Radien, welche die dreikantigen Ecken desselben mit seinem Mittelpunkte verbinden, in welchem letztern die Projektionen zweier Ecken des Achtzells zusammenfallen — ein Umstand auf welchen Herr Kollege Hertz mich aufmerksam machte. Die Projektion ist analog derjenigen, bei welcher ein Würfel sich als reguläres Sechseck projizirt, wobei zwei Würfelecken in dem Mittelpunkt des letztern übereinander fallen. Wie wir diese in der Fig. 43 ein wenig auseinanderhalten, so wollen wir auch in der Fig. 44 des projizirten Acht-

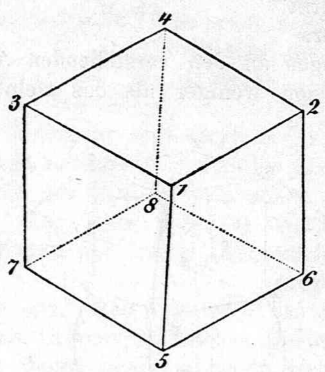


Fig. 43.

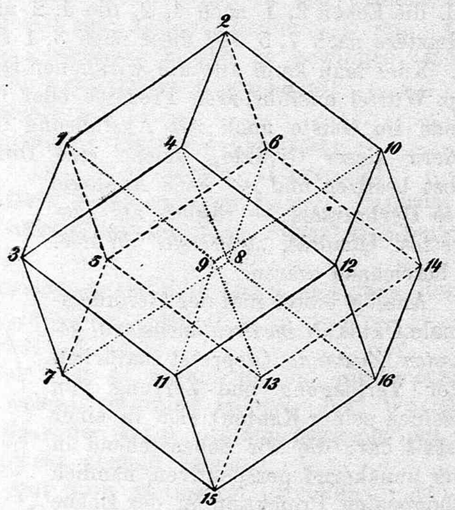


Fig. 44.

zells die beiden Ecken 8 und 9 behufs Vermehrung der Übersicht nicht ganz zusammenfallen lassen, was sie eigentlich thun sollten.

Die 24 quadratischen Seitenflächen des Achtzells projiziren sich zur

einen Hälfte als die 12 rautenförmigen Seitenflächen des Granatoeders, zur andern Hälfte als die im Innern des Körpers liegenden Rauten, die auf zweien Gegenkanten einer vierkantigen Granatoederecke stehen und dessen Mittelpunkt 8 oder 9 zur vierten Ecke haben. Und ganz deutlich wird man nun allemal die beiden als Rhomboeder projizirten Würfel erblicken, die auf irgend einer von den vorerwähnten 24 Rauten als auf einer gemeinsamen Grundfläche stehen.

In der Regelmässigkeit der vorstehenden Figur prägt sich mit der Umstand aus, dass die 16 Ecken des regulären Oktokubs auf dem vierdimensionalen Analogon einer Kugelfläche, auf einer „Vierer-Sphäre“ liegen müssen.

Würde die Seite des Quadrats oder Kante des Würfels und Oktokubs zur Längeneinheit genommen, so würde nebenbei gesagt der Radius dieser vierdimensionalen Hyper-Sphäre leicht als $= \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$ sich berechnen, gleichwie der Radius der durch die Ecken eines Würfels gelegten (dreidimensionalen) Kugel $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$, der des dem Quadrat umschriebenen Kreises $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und der des „eindimensionalen Hypo-Kreises“, gelegt durch die Ecken des Zweiecks (der Strecke 1), $= \frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$ ist. Die dem Granatoeder umschreibbaren Kugeln, welche nämlich durch die Ecken von einerlei Art desselben hindurchgehen, sind natürlich von kleinerem Halbmesser, als dem vorerwähnten 1 der Hyper-Sphäre, und zwar wären ihre Radien unschwer zu finden — in Anbetracht, dass (nach einer Bemerkung von Hertz) gleichwie in Fig. 43 die Quadratdiagonalen 23, 47, etc. und die Dreiecke 235, 476) so in der räumlichen Figur zu Fig. 44 die Würfeldiagonalflächen 4, 6, 16; 4, 6, 7, etc. sowie die Tetraeder 1, 10, 11, 13 und 4, 6, 7, 16 sich in natürlicher Grösse präsentiren müssen. Wol die *einfachste* Veranschaulichung des Achtzells entnehme ich einem Modelle Herrn Victor Schlegel's — Modell Nr. 2 der 15. Serie (Projektionsmodelle der vier ersten regelmässigen vierdimensionalen Körper) aus der hübschen Sammlung von Modellen für den höheren mathematischen Unterricht, welche in L. Brill's Verlage in Darmstadt erschienen. Das Gebilde ist in des ersteren Abhandlung: „Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde“ in den Nova acta der Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher, Bd. 44, p. 343..457, angeführt p. 434 — auch als Stringham's reguläres „Oktaedroid“ (cf. American Journal of Math. Vol. 3, p. 1..14).

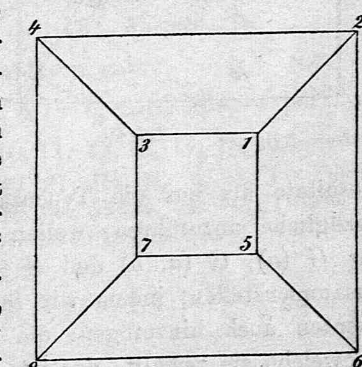


Fig. 45.

Das Modell stellt eine centrische Projektion des Achtzells in unsern Raum vor, analog derjenigen durch Fig. 45 dargestellten, bei der man einen Würfel auf die Ebene stellt und von einem Punkte oberhalb desselben auf diese projizirt. Es sei durch die beifolgenden Fig. 46 und 47 veranschaulicht — jene wie die früheren orthogonal, diese nach Kopp'scher Manier schief projizirt — bei welcher der innere oder Kern-Würfel thatsächlich in unserm Raume steht.

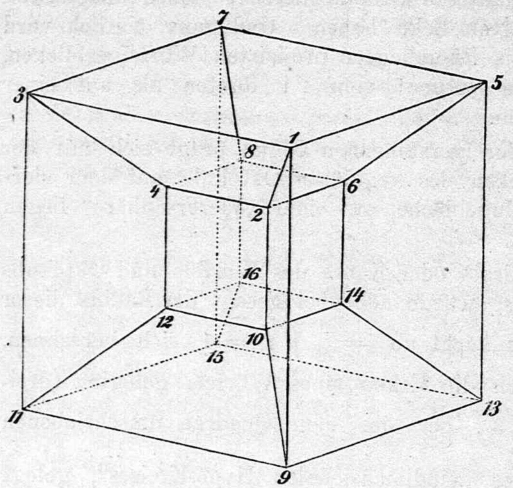


Fig. 46.

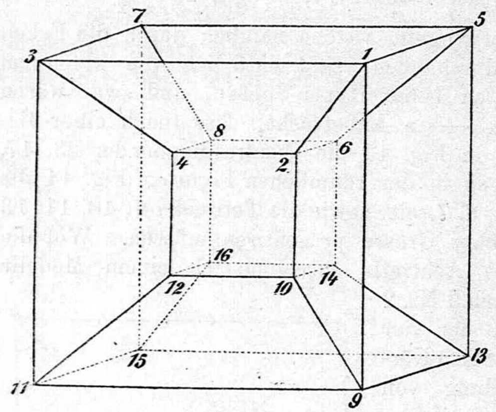


Fig. 47.

Es kann nun die geometrisch-kombinatorische Aufgabe gestellt werden, zu ermitteln, auf wie viele Arten sich an erwähntem Achtzell Ecken auswählen lassen, wenn zu einerlei Art alle diejenigen Aushebungen gezählt werden, bei welchen die Systeme der ausgewählten Ecken kongruente oder symmetrisch gleiche Figuren bilden. Und mit dieser Aufgabe fällt das von Clifford gelöste logisch-kombinatorische Problem zusammen, die Anzahl der Typen zu ermitteln, in welche die aus vier (und nur vier) Argumenten a, b, c, d (also ohne Zutritt von Parametern als Koeffizienten) zusammensetzbaren „Funktionen im identischen Kalkul" zerfallen, oder die Typenzahl der Aussagen zu finden (vermehrt um 1), welche über vier Klassen oder Begriffe (ohne Hinzuziehung von noch anderen) in simultanen universalen Urteilen abgegeben werden können.

Um nunmehr Clifford's Resultate als auf die Typenzahl der Elemente von $G\ (a, b, c, d)$ bezügliche anzuführen, wollen wir unsre vorangeschickten Resultate für $G\ (a)$, $G\ (a, b)$ und $G\ (a, b, c)$ noch einmal rekapitulirend zusammenstellen, indem wir für jede Zahl von ausgehobnen Konstituenten auch hinzufügen: die Summe der Formenzahlen der Typen, in welche sie zerfällt, das ist die Gesamtanzahl der Elemente unsrer Gruppe, welche entwickelt aus soviel Konstituenten sich additiv zusammensetzen.

Diese Formenzahl ist bei n Bestimmungselementen der Gruppe und λ

auszuhebenden von den 2^n Konstituenten (der Entwickelung der identischen 1 nach jenen) a priori bekannt, indem sie sein muss: die Anzahl der (additiven) Kombinationen ohne Wiederholungen zur λ^{ten} Klasse von diesen 2^n Konstituenten (oder Entwickelungsgliedern) als „Elementen". Sie ist mithin der Binominalkoeffizient:

$$(2^n)_\lambda,$$

wofern wir uns für den Binominalkoeffizienten zum Exponenten m und vom Index λ der bekannten Schlömilch'schen Bezeichnungsweise bedienen:

$$\frac{m \times (m-1) \times (m-2) \cdots \times (m-\lambda+1)}{1 \times \quad 2 \quad \times \quad 3 \quad \cdots \times \quad \lambda} = (m)_\lambda .$$

Wir hatten für $n = 1$, mithin bei $G\ (a)$, zu

$0,\ 1,\ 2$ *Aushebungen* (resp. -facher Aussage, -fold statement):
$1,\ 1,\ 1$ *Typen*, mit zusammen
$1,\ 2,\ 1$ oder
$(2)_0, (2)_1, (2)_2$ *Formen* (Repräsentanten oder Elementen der Gruppe),
dabei $1 + 1 = 2$ Haupttypen.

Desgleichen hatten wir für $n = 2$, also bei $G\ (a, b)$, zu

$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *Aushebungen:*
$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1$ *Typen*, mit zusammen bezüglich
$1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1$ oder
$(4)_0, (4)_1, (4)_2, (4)_3, (4)_4$ *Formen*, somit
$1 + 1 + 2 = 4$ Haupttypen.

Ferner für $n = 3$, also bei $G\ (a, b, c)$, zu

$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ *Aushebungen:*
$1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 6,\ 3,\ 3,\ 1,\ 1$ *Typen* mit zusammen
$1,\ 8,\ 28,\ 56,\ 70,\ 56,\ 28,\ 8,\ 1$ oder
$(8)_0, (8)_1, (8)_2, (8)_3, (8)_4, (8)_5, (8)_6, (8)_7, (8)_8$ *Formen*,
was $1 + 1 + 3 + 3 + 6 = 14$ Haupttyen gab.

Endlich für $n = 4$, mithin bei $G\ (a, b, c, d)$, gibt es bei

$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$ *Aushebungen:*
$1,\ 1,\ 4,\ 6,\ 19, 27, 47, 55,\ 78,\ 55,\ 47, 27,\ 19,\ 6,\ 4,\ 1,\ 1$ *Typen* mit
$1,\ 16,\ 120,\ 560,\ 1820, 4368, 8008, 11440, 12870, 11440, 8008, 4368,\ 1820,\ 560,\ 120,\ 16,\ 1$ oder
$(16)_0, (16)_1, (16)_2, (16)_3, (16)_4, (16)_5, (16)_6, (16)_7, (16)_8, (16)_9, (16)_{10}, (16)_{11}, (16)_{12}, (16)_{13}, (16)_{14}, (16)_{15}, (16)_{16}$ *Formen*

und beträgt die Zahl der Haupttypen:

$$1 + 1 + 4 + 6 + 19 + 27 + 47 + 55 + 78 = 238.$$

In Summa haben wir also für

$n = 1,$	$2,$	$3,$	$4:$	
$3,$	$6,$	$22,$	398	Typen und
$2,$	$4,$	$14,$	238	Haupttypen.

Die von Clifford gegebne Typenzahl 396 war hier um 2 zu vermehren, weil er die Elemente 0 und 1 der Gruppe, als identische (0-fold statement) und absurde Aussage (16-fold statement) nicht mitberücksichtigte.

Ich habe nur die vier ersten Typenzahlangaben des obigen Schema's selbst nachgerechnet.

Bei drei Aushebungen hat man in der That in Bezug auf die Abstandsverhältnisse der drei ausgehobenen Glieder die folgenden 6 Möglichkeiten: *ppm*, *pmu*, *puo*, *mmm*, *mmo*, *muu*, oder

112, 123, 134, 222, 224, 233

wo die Buchstaben p, m, u, o als Anfangsbuchstaben auf „proximate, mediate, ultimate und obverse" hinweisen sollen, und selber — oder besser die darunter gesetzten Abstandsziffern — je an die Seiten eines Dreiecks gesetzt zu denken sind, an dessen Ecken die drei ausgehobenen Glieder stehen. Repräsentanten dieser 6 Typen sind etwa die Ausdrücke:

$$abcd + abcd_1 + abc_1d = ab\,(c + d),$$
$$abcd + abcd_1 + ab_1c_1d = a\,(bc + b_1c_1d),$$
$$abcd + abcd_1 + a_1b_1c_1d = abc + a_1b_1c_1d,$$
$$abcd + abc_1d_1 + ab_1cd_1 = a\{bcd + (bc_1 + b_1c)\,d_1\},$$
$$abcd + abc_1d_1 + a_1b_1cd = ab\,(cd + c_1d_1) + a_1b_1cd = (ab + a_1b_1)\,cd + abc_1d_1,$$
$$abcd + abc_1d_1 + a_1b_1c_1d = (abc + a_1b_1c_1)\,d + abc_1d_1.$$

Wie man sieht läuft das Problem, arithmetisch gefasst, hinaus auf die additive Zerlegung der Binomialkoeffizienten von der Form $(2^n)_\lambda$ in die Formenzahlen der verschiedenen Typen, welche sich bei λ Aushebungen ergeben. Für $n = 2$ und 3 ergaben sich als solche Zerlegungen:

$$(4)_2 = 4 + 2;$$
$$(8)_2 = (8)_6 = 12 + 4 + 12, \quad (8)_3 = (8)_5 = 24 + 8 + 24,$$
$$(8)_4 = 24 + 6 + (8 + 2) + 6 + 24.$$

Das allgemeine Gesetz scheint jedoch nicht leicht zu ermitteln.

Will man das Problem bei beliebigem n und λ mithin allgemein behandeln, so empfiehlt es sich vielleicht, die 2^n Konstituenten der Entwickelung so zu numeriren, dass ihre Ordnungszahlen im „dyadischen Zahlensystem" dargestellt erscheinen. Aus dem strenge nach den Argumentbuchstaben geordnet dargestellten Konstituenten ergibt sich die Ordnungszahl in der dyadischen Darstellung auf's leichteste, indem man alle unnegirten Argumentfaktoren in Nullen, alle mit Negationsstrich versehenen in Einser umschreibt. Man kann hernach die Entwickelung der identischen Eins so zusammenfassen:

$$1 = \sum_0^1{}_{\varkappa_1} \sum_0^1{}_{\varkappa_2} \cdots \sum_0^1{}_{\varkappa_n} \overline{\varkappa_1 \varkappa_2 \cdots \varkappa_n} \quad \text{(als „identische Summe).}$$

Um den Abstand irgend zweier Glieder dieser Summe zu erfahren, setze man sie mit den gleichstelligen Ziffern (ihrer dyadischen Ordnungszahlen) unter einander, und setze eine Null an, wo zwei gleiche Ziffern (zwei Nullen oder zwei Einser) unter einander stehen, eine Eins, wo zwei ungleiche Ziffern (0 und 1 oder 1 und 0) unter einander stehen. Der gesuchte Abstand ist die Ziffernsumme („Quersumme") des so gebildeten Ansatzes. [Den letztern könnte man als das „symbolische Produkt" der beiden Glieder im Sinne meiner Abhandlung[8] § 9 und 10 hinstellen.]

Für 0, 1, 2 Aushebungen hat man jedenfalls bezüglich 1, 1, n als Typenzahlen. Doch schon für 3 Aushebungen ist die Typenzahl mit ihren den Typen einzeln zugehörigen Formenzahlen nur sehr mühsam zu gewinnen.

Das Problem sei den Mathematikern zur Weiterführung empfohlen. —

Was die eingangs angeregte Frage nach der Gliederung einer gegebenen Gruppe in Untergruppen, und deren Anzahl, betrifft, so ist dieselbe noch sehr leicht empirisch für $G\,(a)$ und $G\,(a, b)$ zu beantworten.

Es enthält nämlich*) $G_4\,(a) = (0, 1, a, a_1)$ — ausser sich selbst — nur die *eine* Untergruppe $G_2\,(0) = (0, 1)$.

$G_{16}\,(a, b)$ enthält als Untergruppen

erstens die Nullgruppe $G_2\,(0)$;

zweitens die sieben vierelementigen Gruppen:

$$G_4\,(a),\ G_4\,(b),\ G_4\,(ab),\ G_4\,(ab_1),\ G_4\,(a_1b),\ G_4\,(a_1b_1),\ G_4\,(ab_1 + a_1b)$$

drittens die sechs achtelementigen Gruppen:

$$G_8\,(a, ab) = (0, 1, a, a_1, ab, a_1 + b_1, ab_1, a_1 + b),$$
$$G_8\,(b, ab) = (0, 1, b, b_1, ab, a_1 + b_1, a_1b, a + b_1),$$
$$G_8\,(a, a_1b) = (0, 1, a, a_1, a_1b, a + b_1, a_1b_1, a + b),$$
$$G_8\,(b, ab_1) = (0, 1, b, b_1, ab_1, a_1 + b, a_1b_1, a + b),$$
$$G_8\,(ab, a_1b_1) = (0, 1, ab, a_1 + b_1, a_1b_1, a + b, ab + a_1b_1, ab_1 + a_1b),$$
$$G_8\,(ab_1, a_1b) = (0, 1, ab_1, a_1 + b, a_1b, a + b_1, ab + a_1b_1, ab_1 + a_1b)$$

viertens sich selber als 16elementige Gruppe. Zusammen enthält $G\,(a, b)$ also $1 + 7 + 6 + 1 = 15$ Untergruppen.

Die Gliederung auch dieser Untergruppen wäre leicht in ähnlicher Weise anzugeben.

Dagegen ist die analoge Aufgabe, die Untergruppen von $G_{256}\,(a, b, c)$ vollständig anzugeben, eine noch ungelöste und signalisirt sich

---

*) Der Deutlichkeit zuliebe fügen wir die Elementezahl der Gruppe dem Buchstaben G als Suffix bei.

hier abermals eine Reihe von Problemen dem Mathematiker und Philosophen.

Anstatt von „Gruppen“ schlechtweg, d. i. von Gruppen hinsichtlich aller drei Operationen oder Spezies des identischen Kalkuls hat man zuweilen Veranlassung, auch zu reden von Gruppen in Hinsicht nur gewisser von diesen drei Operationen. Und verdient es, hier noch kurz erörtert zu werden, auf wie viele und welche Arten solches möglich ist.

Von vornherein erscheint es möglich zu reden von einer Gruppe in Hinsicht *keiner*, oder *irgend einer*, oder *irgend zweier* oder endlich *aller dreie* von den genannten Operationen.

Der erste Fall bleibe ausser Betracht. Von den übrigen $3 + 3 + 1 = 7$ Möglichkeiten erweisen aber nur *fünfe* sich als wesentlich verschieden, wo 5 entstanden aus $3 + 1 + 1$.

In der That ist haltbar der Begriff einer *Gruppe in Hinsicht der Negation* für sich als eines Systems von Elementen, welches durch Negiren nicht weiter vermehrt werden kann, welches nämlich zu jedem Ausdrucke, der als Element des Systems auftritt, auch dessen Negation bereits als Element enthält.

Desgleichen der Begriff
einer *Gruppe in Hinsicht der Multiplikation* und (dual entsprechend) der
einer *Gruppe in Hinsicht der Addition* allein.

Weiter der Begriff
einer *Gruppe in Hinsicht der Multiplikation und Addition* (mit Ausschluss jedoch der Negation) und endlich der Begriff
einer *Gruppe in Hinsicht aller drei Spezies*, der Gruppe schlechtweg.

Beispiele gelegentlich in Band 2.

Dagegen kann es *nicht* geben:
eine Gruppenbildung hinsichtlich Multiplikation und Negation allein, desgleichen nicht eine solche nur in Hinsicht auf Addition und Negation — denn sind die Operationen eines von diesen beiden Paaren von Spezies zugelassen, so ist es von selbst auch immer die dritte Spezies, und wird der letzte Fall vorliegen: der Gruppenbildung schlechtweg oder in Hinsicht aller drei Spezies.

Dies beruht auf der Anmerkung zu den Theoremen 36), wonach auch (S. 353)

$$(a_1 b_1)_1 = a + b \quad \text{resp.} \quad (a_1 + b_1)_1 = ab$$

allemal gebildet werden kann, sobald es gestattet ist, neben der Operation des Negirens nur die eine der beiden direkten Operationen des Kalkuls auf die Elemente a und b der Gruppe anzuwenden.

In der That sind also im identischen Kalkul nur die aufgezählten fünferlei Arten der Gruppenbildung möglich, von welchen die letzte als die wichtigste diejenige ist, mit der wir uns vorwiegend beschäftigten.

Wir können auch das Substrat der hier untersuchten „Gruppen“ benutzen, um (auf's neue) jene Behauptung des § 12 unsrer Theorie zu erhärten: dass die zweite Subsumtion des Distributionsgesetzes *nicht* syllogistisch beweisbar ist.

Im *logischen Kalkul mit „Gruppen“* (speziell von Ausdrücken, Funktionen, wie sie im identischen Kalkul vorkommen) gilt in der That diese zweite Subsumtion des Distributionsgesetzes *im allgemeinen nicht* und gelten gleichwol doch alle andern Sätze des identischen Kalkuls, wie solche bis einschliesslich des § 11 der Theorie entwickelt worden — insbesondre natürlich also auch die erste Subsumtion des Distributionsgesetzes.

Um gedachten Nachweis zu leisten, braucht man sich nur nach der oben von uns begründeten Methode von der Vollständigkeit nachstehender vier Gruppen zu überzeugen, die wir kurz mit den links beigesetzten Buchstaben bezeichnen wollen:

$$A = G_8(abc,\ ab + ac + bc) = \{0,\ 1,\ abc,\ a_1 + b_1 + c_1,$$
$$ab + ac + bc,\ a_1 b_1 + a_1 c_1 + b_1 c_1,\ a_1 bc + ab_1 c + abc_1,\ abc + a_1 b_1 + a_1 c_1 + b_1 c_1\},$$

$$B = G_{16}(ab,\ bc) = \{0,\ 1,\ ab,\ bc,\ a_1 + b_1,\ a_1 + c_1,\ abc,\ abc_1,\ a_1 bc,$$
$$a_1 + b_1 + c_1,\ a_1 + b_1 + c,\ a + b_1 + c_1,\ b(a+c),\ b_1 + a_1 c_1,\ b(ac_1 + a_1 c),\ b_1 + ac + a_1 c_1\},$$

$$C = G_{16}(ac,\ bc) = \{0,\ 1,\ ac,\ bc,\ a_1 + c_1,\ b_1 + c_1,\ abc,\ ab_1 c,\ a_1 bc,$$
$$a_1 + b_1 + c_1,\ a_1 + b + c_1,\ a + b_1 + c_1,\ c(a+b),\ c_1 + a_1 b_1,\ c(ab_1 + a_1 b),\ c_1 + ab + a_1 b_1\},$$

$$D = G_{32}(ab,\ ac,\ bc) = \{0,\ 1,\ ab,\ ac,\ bc,\ a_1 + b_1,\ a_1 + c_1,\ b_1 + c_1,$$
$$abc,\ abc_1,\ ab_1 c,\ a_1 bc,\ a_1 + b_1 + c_1,\ a_1 + b_1 + c,\ a_1 + b + c_1,\ a + b_1 + c_1,$$
$$a(b + c),\ b(a + c),\ c(a + b),\ a_1 + b_1 c_1,\ b_1 + a_1 c_1,\ c_1 + a_1 b_1,$$
$$a(bc_1 + b_1 c),\ b(ac_1 + a_1 c),\ c(ab_1 + a_1 b),\ a_1 + bc + b_1 c_1,\ b_1 + ac + a_1 c_1,\ c_1 + ab + a_1 b_1,$$
$$abc + a_1 b_1 + a_1 c_1 + b_1 c_1\}.$$
$$ab + ac + bc,\ a_1 b_1 + a_1 c_1 + b_1 c_1,\ a_1 bc + ab_1 c + abc_1,$$

Die drei ersten von diesen: A, B, C, sind Untergruppen der vierten D, was selbstverständlich erscheint auch bei der ersten A, in Anbetracht, dass die Bestimmungselemente von dieser nichts anderes sind, als Produkt und Summe der Bestimmungselemente von D.

Da C aus B hervorgeht, indem man b und c vertauscht, so braucht die Probe auf Vollständigkeit blos bei den Gruppen A, B und D ausgeführt zu werden: für diese aber ist sie von erster Wichtigkeit, da auf der konstatirten Vollständigkeit die Beweiskraft der Überlegungen beruht. [Man müsste sich hier also der nicht unerheblichen Mühe des systematischen Intermultiplizirens und Interaddirens unterziehen.]

Nach dem aufgestellten Begriffe der logischen Summe von Gruppen haben wir nun:

$$B + C = D,$$

weil $G(ab, ac, bc)$ die Bestimmungselemente von $G(ab, bc)$ und $G(ac, bc)$ in sich vereinigt. Daher ist:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot D = A$$

— nach Th. $20_\times$), weil ja $A \mathrel{\overline{\in}} D$, wie oben erwähnt, sein musste.

Andrerseits ist es leicht, die Produkte $A \cdot B$ und $A \cdot C$ der ersten Gruppe in die beiden auf sie folgenden zu ermitteln.

Sucht man die Elemente auf, welche die Gruppen A und B, nämlich ihre Elementensysteme, gemein haben, so bildet deren System notwendig wieder eine Gruppe. Diese möge E heissen; so lehrt der blosse Anblick von A und B, dass

$$E = G_4(abc) = \{0,\ 1,\ abc,\ a_1 + b_1 + c_1\}$$

ist, und haben wir also:

$$A \cdot B = E.$$

Ebenso zeigt sich aber auch, dass

$$A \cdot C = E$$

ist (wie zum Überfluss auch schon aus der Symmetrie von E bezüglich a, b, c hervorgeht).

Darnach wird sein müssen:

$$A \cdot B + A \cdot C = E + E = E.$$

Nun deckt aber E sich keineswegs mit A, es ist sonach auch $AB + AC$ verschieden von, jedenfalls *ungleich* $A(B + C)$, welches gleich A erwiesen. Man bemerkt, dass E *nur* eine (d. i. eine „echte") Untergruppe von A ist; wir haben:

$$E \subset A$$

und folglich auch (durch beiderseitige Einsetzung des Gleichen):

$$AB + AC \subset A(B + C)$$

womit nachgewiesen ist, dass es im logischen Kalkul mit Gruppen Fälle gibt, in welchen die Formel des Distributionsgesetzes nur einseitig als eine Unterordnung gilt.

Die Unterordnung folgte hier auch schon aus dem Nichtvorliegen der Gleichheit in Anbetracht, dass $AB + AC$ als $\mathrel{\overline{\in}}$, das ist $=$ oder $\subset$, $A(B + C)$ in Th. $25_\times$) bewiesen ist.

Von der erworbenen Bekanntschaft mit den Typen der Gruppe $G(a, b, c)$ und von der gegebenen Zusammenstellung ihrer Elemente wollen wir schliesslich eine Nutzanwendung machen, um die Theorie der Eliminationsresultanten sowie diejenige der symmetrisch allgemeinen Lösungen um einen Schritt zu fördern.

Denken wir uns x, y und z irgendwie durch „Parameter" $a, b, c, d, \ldots$ ausgedrückt, mithin sie als Funktionen des Gebietekalkuls von eben diesen Symbolen — und *nur* von diesen — gegeben, so kann man nach der Relation $f(x, y, z) = 0$ fragen, die als Resultante der Elimination sämtlicher Parameter aus den vorliegenden Gleichungen:

$$x = \varphi(a, b, c, d, \cdot\cdot), \quad y = \psi(a, b, c, d, \cdot\cdot), \quad z = \chi(a, b, c, d, \cdot\cdot)$$

folgen muss. Das Polynom $f(x, y, z)$ dieser Resultante kann nur eines der 256 Elemente der Gruppe $G(x, y, z)$ sein, da es andere Symbole als x, y und z selbst laut Voraussetzung nicht in sich aufweist, mithin bei seiner „Entwickelung" nach seinen drei Argumenten x, y, z als Koeffizienten *nur* die Symbole 0 und 1 zur Verfügung stehen können.

Sehr häufig — wie wir bereits erfahren — tritt insbesondre der Fall ein, dass unser Polynom das Element 0 der Gruppe $G(x, y, z)$ ist. Die Resultante stellt sich alsdann in der Gestalt $0 = 0$ dar und ist eine nichtssagende. Wir dürfen alsdann sagen, dass bei unbestimmt gelassenen Werten der Parameter $a, b, c, d, ..$ auch die Gebiete x, y, z *von einander unabhängig beliebige* bleiben, oder dass *keine* Relation, Beziehung zwischen denselben bestehn *muss* oder folgt (S. 454).

Falls $f(x, y, z)$ sich als das Element 1 der Gruppe $G(x, y, z)$ herausstellen sollte, wäre die Resultante (als da ist: die Gleichung $1 = 0$) eine *absurde* (Behauptung).

Dieser Fall kann aber *nicht vorkommen*, — und die Erfahrung wird es bestätigen — auch lässt es sich strenge, wie folgt, beweisen. Eine Resultante $1 = 0$ wäre als ein Ergebniss der Elimination nicht nur von $a, b, c, \ldots$ sondern auch von x, y, z anzuerkennen. Als letzteres müsste es auch in der vollen Resultante für x, y, z enthalten sein. Eliminirt man aber regelrecht aus der vereinigten Prämissengleichung

$$x_1\varphi + x\varphi_1 + y_1\psi + y\psi_1 + z_1\chi + z\chi_1 = 0$$

ebendiese drei Symbole, so ergibt sich als die gedachte volle Resultante nur: $0 = 0$.

Der Aussagenbereich, mit dem wir es im vorliegenden ersten Bande der exakten Logik ausschliesslich zu thun haben, war auf die *universalen* Urteile beschränkt, umfasste nämlich nur, was mittelst Gleichungen oder Subsumtionen ausdrückbar ist.

In diesem Bereiche kann ein *unmittelbarer* Widerspruch (S. 6) überhaupt nicht vorkommen, sintemal bekanntlich das kontradiktorische Gegenteil einer universalen allemal eine partikulare Behauptung ist — vergl. S. 33. Gleichwol kann mittelbar, innerlich, auch schon auf dieser ersten Logiketappe ein Widerspruch *zwischen* sowol als *in* Aussagen auftreten, insofern sie zusammen oder für sich schon auf die Behauptung $1 = 0$ hinauslaufen oder zu schliessen gestatten — zusammen, wie z. B. die Gleichungen $a = 0$ und $a_1 = 0$, und für sich schon, wie z. B. $x + x_1 = 0$, oder wie $axy_1 + a_1 + x_1 + y = 0$ — womit sie denn in unmittelbaren Widerspruch treten würden zu der allen unsern Betrachtungen implicite zugrunde liegenden Annahme, dass 1 nicht gleich, $\neq 0$ sei.

Dass dergleichen nun hier nicht vorliegen kann, ist mit obigem dargethan.

Und wie sollten auch jene Prämissen $x = \varphi(a, b, \cdot\cdot)$, $y = \psi(a, \cdot\cdot)$, ... einen Widerspruch mit einander involviren, da durch eine jede derselben doch nur festgesetzt wird, was unter dem Buchstaben linkerhand verstanden werden solle, einem Buchstaben, der neu, noch unerwähnt war, und auf den in den übrigen Prämissen auch keinerlei Bezug genommen ist?!

Aus diesen Gründen wird uns also die absurde Resultante überhaupt nicht in den Weg kommen und mag fortan unberücksichtigt bleiben. —

Als in x, y, z *symmetrische Resultanten* können nun überhaupt nur folgende *fünfzehn* — von *acht*erlei Typus — auftreten*), für die wir die beigesetzten Chiffren einführen:

R_0) $\quad 0 = 0.$

R_1) $\quad xyz = 0,\qquad R_1'$) $\quad x_1y_1z_1 = 0.$

R_2) $\quad xyz + x_1y_1z_1 = 0.$

R_3) $\quad x_1yz + y_1zx + z_1xy = 0,\qquad R_3'$) $\quad xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 = 0.$

R_4) $\quad xyz + x_1yz + y_1zx + z_1xy = 0$ oder $yz + zx + xy = 0$

R_4') $\quad x_1y_1z_1 + xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 = 0$ oder $y_1z_1 + z_1x_1 + x_1y_1 = 0.$

R_5) $\quad xyz + xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 = 0$ oder $x = yz_1 + y_1z$

*) Bei Mitberücksichtigung der absurden Resultante: R_9), nämlich $1 = 0$ wären es 16 Resultanten von 9 verschiedenen Typen.

[womit nach § 18, Th. π) auch $y = zx_1 + z_1x$ und $z = xy_1 + x_1y$ gegeben ist],

R_5') $\quad x_1y_1z_1 + x_1yz + y_1zx + z_1xy = 0$ oder $x = yz + y_1z_1$

(womit zugleich auch $y = zx + z_1x_1$, $z = xy + x_1y_1$ sein muss).

R_6) $\quad xyz + x_1yz + y_1zx + z_1xy + x_1y_1z_1 = 0$, oder:

$$(x = y_1z_1),\quad y = z_1x_1,\quad z = x_1y_1,$$

von welchen drei Gleichungen nämlich eine aus den zwei andern folgt — ein Satz, der denen § 18, π, σ, τ) sich anschliesst.

R_6') $\quad xyz + xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 + x_1y_1z_1 = 0$, oder

$$(x = y_1 + z_1),\quad y = z_1 + x_1,\quad z = x_1 + y_1.$$

R_7) $\quad x_1yz + y_1zx + z_1xy + xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 = 0$,

oder: $(x + y + z)(x_1 + y_1 + z_1) = 0$, oder: $x = y = z$

(somit auch: $x_1 = y_1 = z_1$)

R_8) $\quad xyz + x_1yz + y_1zx + z_1xy + xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 = 0$

oder $x + y + z = 0$, oder: $x = y = z = 0$

R_8') $\quad x_1y_1z_1 + x_1yz + y_1zx + z_1xy + xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 = 0$

oder $x_1 + y_1 + z_1 = 0$, oder $x = y = z = 1.$

Von diesen Resultanten sind paarweise *komplementär:* R_0 mit R_9 (siehe oben die Fussnote)

R_1 mit R_8', $\qquad R_1'$ mit R_8,

R_2 und R_7

R_3 mit R_6', $\qquad R_3'$ mit R_6

R_4 und R_4'

R_5 und R_5'

insofern die Polynome derselben (nicht aber die resultirenden Aussagen selber) Negationen von einander sind — wogegen die zum selben Typus gehörigen (die hier gleich numerirt erscheinen und sich nur durch den Accent unterscheiden) als solche, welche durch Vertauschung der x, y, z mit ihren Negationen in einander übergehen, nur als *obverse* von einander bezeichnet werden dürften.

Wir haben hienach nur *sechs* Haupttypen.

Die Vollständigkeit der Zusammenstellung nachzuweisen sei als eine ganz leichte Aufgabe dem Leser überlassen.

Wie man einerseits die Gleichung $R = 0$ betrachten konnte als die *Resultante* der Elimination von a, b, .. aus den gegebenen Gleichungen

$$x = \varphi(a, b, \cdot\cdot), \quad y = \psi(a, b, \cdot\cdot), \quad z = \chi(a, b, \cdot\cdot)$$

so kann man andrerseits auch umgekehrt, indem man jene Resultante $R = 0$ als *gegeben*, als eine von den Unbekannten x, y, z zu erfüllende Relation ansieht, diese drei Gleichungen $x = \varphi$, etc. auffassen als die *Lösungen* dieser Aufgabe, nämlich als die Formeln, welche die (oder gewisse) Wurzeln jener Gleichung $R = 0$ in unabhängigen Parametern $a, b, \ldots$ ausgedrückt darstellen.

Wie von Anfang schon bei der Zahl der Unbekannten, so wollen wir jetzt auch hinsichtlich der Anzahl der Parameter uns auf die Annahme beschränken, dass es ihrer dreie seien: a, b und c.

Die rechten Seiten unserer drei Gleichungen nämlich

$$\varphi(a, b, c), \quad \psi(a, b, c), \quad \chi(a, b, c),$$

werden alsdann ebenfalls Elemente sein der Gruppe $G(a, b, c)$. Und sollten etwa durch cyklische Vertauschung von a, b und c diese drei Funktionen in einander übergehen, so werden wir in Gestalt von

$$\alpha) \qquad z = \varphi(a, b, c), \quad y = \varphi(b, c, a), \quad z = \varphi(c, a, b)$$

symmetrische Lösungen haben für die, wie sich zeigen wird, auch hinsichtlich der Unbekannten symmetrische Aufgabe, die Gleichung

$$R = 0, \quad \text{ausführlicher} \quad R(x, y, z) = 0$$

aufzulösen.

Gedachte Lösungen verdienen den Beinamen von *allgemeinen* Lösungen allermindestens insofern, als sie bei der Willkürlichkeit der Parameter a, b, c uns unendlich viele Systeme von Wurzeln der Gleichung $R = 0$ ausdrücken. Sie verdienen aber sogar als „*die* allgemeinen“ Lösungen hingestellt zu werden, nämlich als Ausdrücke, welche *jedes* erdenkliche System von Wurzeln der Gleichung $R = 0$ schon in sich fassen werden, indem in § 22 erkannt wurde, dass (die notwendige und) eine hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit des Gleichungensystems $x = \varphi$, $y = \psi$, $z = \chi$ *nach den Unbekannten* a, b, c die ist, dass die Resultante $R = 0$ der Elimination von a, b, c aus dem Systeme erfüllt sei; es werden demnach die Parameter a, b, c sich auch immer so bestimmen lassen, dass für ein (irgendwie) gegebenes, nur aber die Forderung $R = 0$ erfüllendes Wertsystem der Unbekannten x, y, z jene drei Gleichungen gerade dieses Systems von Wurzeln darstellen.

Wir haben dann also kurz „die symmetrisch allgemeinen Lösungen“ der Gleichung $R = 0$. Der Form nach kann (und wird) es noch verschiedene Systeme solcher Lösungen für eine nämliche Gleichung $R = 0$

geben, doch werden diese immer gleich umfassende sein, der Bedeutung nach sich mit einander decken.

In der Absicht, die symmetrisch allgemeinen Lösungen der Gleichung R_2 (und damit auch die von R_6 nebst R_6' — vergl. § 24, Aufg. 10 und 11) welche bislang nicht erreichbar schien, zu entdecken, oder andernfalles nachzuweisen, dass die Lösung dieser Aufgabe mittelst *dreier* unabhängigen Parameter unmöglich ist, habe ich nun für alle erdenkunabhängigen Parameter unmöglich ist, habe ich nun für alle erdenklichen Annahmen der Funktion $\varphi(a, b, c)$ die Resultante $R = 0$ aufgesucht.

Um die Ergebnisse der Untersuchung übersichtlich angeben zu können, bemerke ich, dass von den drei Gleichungen $x = \varphi(a, b, c)$, $y =$ etc. immer nur die erste wirklich angeführt zu werden braucht, indem die beiden andern ja durch die cyklische Vertauschung von a, b, c zugleich mit der von x, y, z aus ihr sich auf das leichteste ergeben.

Was die Untersuchung herausstellte, können wir hiernach dahin zusammenfassen. Es ergibt sich als Resultante der Elimination von a, b, c: R_0 aus der Annahme $x = a$, desgleichen aus der $x = ab + a_1 c$, desgleichen aus der Annahme

$$x = bc + a_1(b + c), \text{ desgl. aus der } x = abc_1 + a_1(b_1 + c);$$

R_1 aus $x = a_1(b + c)$, $\quad x = bc_1 + ab_1 c$;

R_1' aus $x = a_1 + bc$, $\quad abc_1 + bc + b_1 c_1$;

R_3 aus $x = bc$, $a + bc$, $a(b + c_1)$, $a(bc + b_1 c_1)$, $ab_1 c_1 + bc$, $abc + b_1 c_1$,
$ab_1 c_1 + a_1(b + c)$, $ab_1 c_1 + a_1(b + c) + bc$;

R_3' aus $x = b + c$, $a(b + c)$, $a + bc_1$, $a + bc_1 + b_1 c$, $abc + bc_1 + b_1 c$,
$a_1 bc + bc_1 + b_1 c$, $abc + a_1(b_1 + c_1)$, $abc + a_1(bc_1 + b_1 c)$;

R_4 aus $x = bc_1$, $\quad a_1 bc$, $\quad ab_1 c_1 + a_1 bc$;

R_4' aus $x = b + c_1$, $\quad a_1 + b + c$, $\quad (a + b_1 + c_1)(a_1 + b + c)$;

R_5 aus $x = bc_1 + b_1 c$, $\quad a(bc_1 + b_1 c)$, $\quad ab_1 + a_1 c$;

R_5' aus $x = bc + b_1 c_1$, $\quad a + bc + b_1 c_1$, $\quad ab + a_1 c_1$;

R_7 aus $x = abc$, $abc + a_1 b_1 c_1$, $a_1 bc + ab_1 c + abc_1$, $bc + ca + ab$ und
$a(bc + b_1 c_1) + a_1(bc_1 + b_1 c)$, $a + b + c$, $(a + b + c)(a_1 + b_1 + c_1)$, $ab + ac + bc + a_1 b_1 c_1$.

Nicht vertreten sind die Resultanten:

$$R_2, \; R_2', \; R_6, \; R_6', \; R_8, \; R_8'$$

[und — wie vorauszusehen gewesen — auch die absurde Resultante R_9 oder $1 = 0$ nicht].

Was zunächst die beiden letzteren betrifft, so wird bei ihnen die Frage nach ihrer symmetrisch allgemeinen Lösung gewissermassen hinfällig, indem durch die Forderungen R_8 oder R_8' sich die Unbekannten als

$$x = y = z = 0 \quad \text{resp. als} \quad x = y = z = 1$$

absolut bestimmt erweisen. Wenn man wollte, könnte man freilich auch hier in Gestalt von:

$$\begin{cases} x = aa_1 \\ y = bb_1 \\ z = cc_1 \end{cases} \quad \text{resp.} \quad \begin{cases} x = a + a_1 \\ y = b + b_1 \\ z = c + c_1 \end{cases}$$

solche Lösung in drei willkürlichen Parametern a, b, c angeben.

Auch R_7 lässt sich schon einfacher wie oben mittelst *eines* Parameters lösen in Gestalt von

$$\begin{cases} x = a \\ y = a \\ z = a. \end{cases}$$

Bei allen andern von den vorgekommenen Gleichungen wird 3 die Minimalzahl von den zu ihrer symmetrischen Lösung erforderlichen Parametern sein.

Die Vollständigkeit unsrer Resultantentafel vorausgesetzt wird durch das Nichtauftreten der Resultanten R_2, R_2', R_6, R_6' der *Beweis* erbracht sein, dass diese Gleichungen eine symmetrisch allgemeine Lösung in *drei* unabhängigen Parametern *nicht besitzen können.*

Darnach bleibt es aber unbenommen, *in vier oder mehr Parametern* immer noch nach einer solchen Lösung zu fahnden. So ist z. B. die Resultante der Elimination von a, b, c, d aus den drei Gleichungen:

$$x = ab + cd$$
$$y = ac + bd$$
$$z = ad + bc$$

keine andere als: R_3 — von welcher Gleichung denn also auch umgekehrt die drei vorhergehenden eine symmetrische allgemeine Lösung geben. Und es erscheint nicht undenkbar, sondern fast als wahrscheinlich, dass auch für R_2 sich in solcher Art Lösungen finden liessen.

Mit der Fertigstellung gegenwärtigen Lehrgebäudes noch allzusehr anderweitig in Anspruch genommen muss ich das interessante Problem, dies zu entscheiden, zur Zeit Andern überlassen.

Was aber die Vollständigkeit unserer für drei Parameter gegebenen Resultantentafel betrifft, die für den obigen Beweis von erster Wichtigkeit war — sowie überhaupt in Betreff der Gewinnung derselben, so ist folgendes zu bemerken.

Keineswegs braucht man alle 256 Elemente von $G(a, b, c)$ einzeln gleich x gesetzt (und durch cyklische Permutation der beiden Buchstabensysteme a, b, c und x, y, z zu einem Systeme von drei Gleichungen ergänzt) direkt auf ihre Resultante zu prüfen.

Zunächst liefern die hinsichtlich a, b, c symmetrischen Ausdrücke oder Elemente von $G(a, b, c)$ stets ohne alle Rechnung R_7, weil der Ansatz auf $x = y = z$ augenscheinlich hinausläuft. Dergleichen Ausdrücke kommen nur bei dem

1\. und 22., 2. und 21., 5. und 18., 8. und 15., beim 9., und beim 14.

Typus vor, mithin bei 10 Typen und 6 Haupttypen, und finden sich — abgesehen von den Elementen 0 und 1 — oben bei R_7 vertreten durch Repräsentanten, welche mit Rücksicht auf die nachfolgenden Bemerkungen als ausreichende hingestellt werden durften.

Wir brauchten also nur mehr die Ausdrücke durchzugehen, welche *nicht* bezüglich aller drei Buchstaben a, b, c symmetrisch erscheinen.

Solche können nun aber noch in Hinsicht zweier von diesen drei Buchstaben symmetrisch sein, was in der That vorkommt bei den Typen:

	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,			
und	21,	20,	19,	18,	17,	16,	15,	9,	10,	12, 13.

sonach bei allen Typen ausser 11 und den schon abgethanen 1 nebst 22 und 14.

In solchem Falle braucht man nur solche Ausdrücke zu berücksichtigen, bei welchen der Buchstabe a bevorzugt erscheint, die Symmetrie also hinsichtlich b und c vorliegt. Denn war dies nicht der Fall, war ein andrer Buchstabe als a bevorzugt, so lässt sich durch cyklische Vertauschung der drei Parameter immer hinbringen, dass es der Fall wird, dass in dem $= x$ zu setzenden Ausdrucke $\varphi(a, b, c)$ der bevorzugte Buchstabe gerade a ist.

Denken wir für den Augenblick uns den bevorzugten Buchstaben als das erste Argument angeführt, so müssen in der That die drei Gleichungen

$$x = \varphi(b, c, a), \quad y = \varphi(c, a, b), \quad z = \varphi(a, b, c),$$

desgleichen diese:

$$x = \varphi(c, a, b), \quad y = \varphi(a, b, c), \quad z = \varphi(b, c, a)$$

bei der Elimination von a, b, c uns die nämliche Resultante $R = 0$ liefern, als wie die drei Gleichungen:

$$x = \varphi(a, b, c), \quad y = \varphi(b, c, a), \quad z = \varphi(c, a, b)$$

sintemal die Resultante, weil sie die Eliminanden a, b, c gar nicht enthält, auch ungeändert bleiben muss, wenn man diese irgendwie unter sich vertauscht.

Auf Grund dieser Bemerkung reduzirt sich nicht nur bei den hinsichtlich zweier Argumente symmetrischen, sondern auch bei den gänzlich unsymmetrischen Funktionen $\varphi(a, b, c)$ die Menge der direkt zu ermittelnden Resultanten sehr beträchtlich, und wird die Resultante schon nur für höchstens ein Drittel der Ausdrücke wirklich aufzusuchen sein.

Nehmen wir vorläufig als erwiesen an, dass die Resultante aus den drei letzten Gleichungen, wie immer auch die Funktion $\varphi(a, b, c)$ beschaffen sein möge, hinsichtlich x, y, z *symmetrisch* sein muss — ein Punkt über welchen nachher noch zu sprechen sein wird — so kommt aber um die Menge der auf Resultanten zu prüfenden Ausdrücke zu vereinigen noch folgendes hinzu.

War $R(x, y, z) = 0$ die zum Ansatz $x = \varphi(a, b, c)$ etc. gehörige Resultante, so muss ebendiese, nämlich $R(x, z, y) = 0$ auch zu dem Ansatze $x = \varphi(a, c, b)$ gehören, weil die Gleichungen

$$x = \varphi(a, c, b), \quad y = \varphi(b, a, c), \quad z = \varphi(c, b, a)$$

durch die gleichzeitige Vertauschung von b mit c und y mit z in die vorigen augenscheinlich verwandelt werden (mit Umstellung der beiden letzten von ihnen).

Von den sechs Ausdrücken, welche aus $\varphi(a, b, c)$ durch Vertauschung, Permutation der Argumente ableitbar wären, braucht also immer nur *einer* auf seine Resultante (wenn $= x$ gesetzt, etc.) geprüft zu werden — womit im Allgemeinen (d. h. sofern jene sechs Ausdrücke verschieden), eine Reduktion der Arbeit auf ihren sechsten Teil erzielt sein wird.

Weiter aber muss der Ansatz $x = \varphi(a_1, b_1, c_1)$, etc. auch seinerseits die obige Resultante $R(x, y, z) = 0$ liefern, da die Bezeichnung der Eliminanden gleichgültig ist, diese also auch durch ihre Negationen durchweg ersetzt werden durften — eine Bemerkung, durch welche die restirende Arbeit sich abermals um nahe die Hälfte reduzirt, nämlich nur dann sich nicht verringern wird, wenn die Funktion $\varphi(a, b, c)$ bei Vertauschung der Argumente mit ihren Negationen ungeändert blieb.

Eine abermalige Reduktion der Arbeit auf ihre Hälfte ermöglicht endlich diese Bemerkung: Hat der Ansatz $x = \varphi(a, b, c)$, etc. zu einer Resultante $R_\varkappa(x, y, z) = 0$ geführt, wo $\varkappa$ einen gewissen von den Indices 1 bis 8 vorstellt, so muss natürlich aus den Gleichungen:

$$x_1 = \varphi_1(a, b, c) \text{ etc. [d. h. } y_1 = \varphi_1(b, c, a), \quad z_1 = \varphi_1(c, a, b)]$$

— unter φ_1 die Negation von φ verstanden — sich ganz dieselbe Resultante ergeben, weil diese Gleichungen bezüglich äquivalent, blosse Transskriptionen von, den vorhergehenden sind. Daraus folgt aber, dass nun auch der Ansatz:

$$x = \varphi_1(a, b, c) \text{ etc. [d. h. } y = \varphi_1(b, c, a), \quad z = \varphi_1(c, a, b)]$$

nun auch nicht mehr durch mühsames Eliminiren auf seine Resultante geprüft zu werden braucht, vielmehr letztere sich aus der vorigen unmittelbar abschreiben lässt, indem man die Symbole x, y, z mit ihren Negationen vertauscht. Das heisst, die hier in Frage kommende Resultante lautet: $R_\varkappa(x_1, y_1, z_1) = 0$, oder nach der eingeführten Nomenklatur: $R_\varkappa'(x, y, z) = 0$. Die gleiche Bemerkung trifft auch für $\varkappa = 0$ zu, wenn man R_0' für einerlei mit R_0 gelten lässt.

Auf Grund derselben brauchen die Ausdrücke der zu schon geprüften „komplementären" Typen nicht mehr auf ihre Resultanten geprüft zu werden, und von den Ausdrücken eines zu sich selbst komplementären Typus nur die eine Hälfte.

Ist beispielsweise R_4 als Resultante zu $x = a_1bc + ab_1c_1$ ermittelt, so muss R_4' die Resultante sein zu dem Ansatze $x = (a + b_1 + c_1)(a_1 + b + c) = ab + a_1c_1 + b_1c$. Und — in Illustration zu den vorhergehenden Bemerkungen — ist R_3' die Resultante zu dem Ansatze $x = a + bc_1$, so muss es auch die Resultante sein zu dem $x = a + b_1c$, der durch Vertauschung von b und c aus ihm hervorgeht.

Ist R_5 die Resultante zu $x = a(bc_1 + b_1c)$, so muss es auch die zu $x = a_1(bc_1 + b_1c)$ sein, weil letzteres Gleichungensystem durch Vertauschung von a, b, c mit a_1, b_1, c_1 in das vorige übergeht. Etc.

Hiernach ist es nur mehr eine kleine Geduldsprobe, die Vollständigkeit unsrer Resultantentafel nachzuweisen.

Mühsam bleibt aber die Ableitung von 19 der zusammengestellten 44 Resultanten selbst, von welchen 20 direkt abgeleitet werden mussten (was nur bei dem Ansatze: $x = a$ sich auf den ersten Blick erledigt — und wobei die ebenso selbstverständlich auf R_7 führenden Fälle nicht eingerechnet sind). Ich habe nach schon erläuterten und auch noch nicht erläuterten Methoden das Eliminationsverfahren auf die mannigfaltigste Weise variirt, dasselbe aber immer als ein mühsam anzuwendendes gefunden; und wer mir auch nur einen Teil der Resultanten nachrechnet, wird sicherlich gleich mir den Wunsch nicht unterdrücken können, dass hierbei eine Art von Denkrechenmaschine die mechanische Arbeit abnehmen möchte! —

Versuchen wir jetzt noch den rückständigen Beweis des sehr plausibeln Satzes zu leisten, den auch die Erfahrung in den vorstehenden Aufgaben bestätigte: dass die Resultante $R(x, y, z) = 0$ der Elimination von a, b, c aus den drei Gleichungen:

$$x = \varphi(a, b, c), \quad y = \varphi(b, c, a), \quad z = \varphi(c, a, b)$$

eine *symmetrische* Funktion von x, y, z sein müsse, so sollte man meinen,
dieser Beweis müsste a priori gelingen: es müsste gelingen, zu zeigen, dass
wenn man irgend zwei Argumente von R, wie etwa y und z, in den vor-
liegenden Gleichungen vertauscht, die nämliche Resultante herauskommen
wird. Gelänge dies, so wäre in der That der Beweis der Symmetrie von
R erbracht, indem sich durch eventuell wiederholtes Vertauschen („Trans-
position") von immer nur zweien der Argumente x, y, z bekanntlich jede
erdenkliche Anordnung derselben würde herstellen lassen. Auffallender-
weise ist es nun aber auf keine Weise möglich, die drei Gleichungen:

$$x = \varphi(a, b, c), \quad z = \varphi(b, c, a), \quad y = \varphi(c, a, b)$$

durch was immer für Vertauschungen unter den Parametern a, b, c in die
vorigen dreie zu transformiren, wie es der Leser leichtlich nachweisen wird.
Und die Versuche einer Beweisführung auf dem angedeuteten Wege scheinen
fehlzuschlagen, auch wenn man etwa noch in Berücksichtigung zieht, dass
es von vornherein gleichgültig gewesen, in welcher Reihenfolge man die
Argumente der Funktion φ ansetzen mochte. Die Funktion $\varphi(a, b, c)$ hätte
man ja z. B. auch $\Phi(a, c, b)$ nennen können. Allerdings, wenn man b

mit c vertauscht und dazu das zweite Argument mit dem dritten, so gehen die drei letzten Gleichungen in der That in die drei vorigen über. Von rechtswegen heisst es dann aber durchweg nun Φ statt φ. —

Auch die Hinzuziehung der Annahme, dass die Funktion $\varphi(a, b, c)$ ausser a, b, c sonst keine Parameter enthalte — eine Annahme, die sich übrigens für die Geltung des Satzes als unwesentlich erweisen wird — scheint eine aprioristische Beweisführung nicht zu fördern.

Und somit bleibt nichts übrig als den Beweis des Satzes a posteriori anzutreten, indem man die Resultante für die allgemeinste Funktion $\varphi(a, b, c)$ wirklich herstellt, und ihre Symmetrie darnach sozusagen empirisch nachweist als eine unmittelbar wahrzunehmende.

Zu dem Ende lösen wir zunächst die noch allgemeinere

Aufgabe. Die Parameter a, b, c zu eliminiren aus den drei Gleichungen:

$$x = \varphi(a, b, c), \quad y = \psi(a, b, c), \quad z = \chi(a, b, c),$$

wo φ, ψ, χ irgendwelche Funktionen im identischen Kalkul sind.

Auflösung. Man hat „entwickelt“:

$$\begin{aligned}\varphi(a, b, c) = {} & \varphi_{111} abc + \varphi_{110} abc_1 + \varphi_{101} ab_1c + \varphi_{100} ab_1c_1 + \\ & + \varphi_{011} a_1bc + \varphi_{010} a_1bc_1 + \varphi_{001} a_1b_1c + \varphi_{000} a_1b_1c_1,\end{aligned}$$

analog für ψ und χ, worin nun also die Koeffizienten als gegeben zu denken sind in Gestalt von irgendwelchen Gebiets- oder Klassensymbolen.

Bezeichnen wir *bei diesen Koeffizienten* die Negation durch übergesetzten Horizontalstrich, so ist ferner:

$$\begin{aligned}\varphi_1(a, b, c) = {} & \bar{\varphi}_{111} abc + \bar{\varphi}_{110} abc_1 + \bar{\varphi}_{101} ab_1c + \bar{\varphi}_{100} ab_1c_1 + \\ & + \bar{\varphi}_{011} a_1bc + \bar{\varphi}_{010} a_1b_1c + \bar{\varphi}_{101} a_1b_1c + \bar{\varphi}_{000} a_1b_1c_1,\end{aligned}$$

analog für ψ und χ.

Vereinigte Gleichung der Prämissen ist nun:

$$x_1\varphi + x\varphi_1 + y_1\psi + y\psi_1 + z_1\chi + z\chi_1 = 0,$$

wo die linke Seite nun leichtlich nach den a, b, c geordnet sich schreiben liesse. Man liest indess die Koeffizienten der verschiedenen Konstituenten schon bequem aus den für φ und φ_1 gemachten Angaben heraus. Resultante der Elimination von a, b, c ist das Produkt dieser Koeffizienten $= 0$ gesetzt, mithin:

$$\begin{aligned}0 = {} & (x_1\varphi_{111} + x\bar{\varphi}_{111} + y_1\psi_{111} + y\bar{\psi}_{111} + z_1\chi_{111} + z\bar{\chi}_{111})(x_1\varphi_{110} + x\bar{\varphi}_{110} + y_1\psi_{110} + y\bar{\psi}_{110} + z_1\chi_{110} + z\bar{\chi}_{110}) \cdot \\ & \cdot (x_1\varphi_{101} + x\bar{\varphi}_{101} + y_1\psi_{101} + y\bar{\psi}_{101} + z_1\chi_{101} + z\bar{\chi}_{101})(x_1\varphi_{100} + x\bar{\varphi}_{100} + y_1\psi_{100} + y\bar{\psi}_{100} + z_1\chi_{100} + z\bar{\chi}_{100}) \cdot \\ & \cdot (x_1\varphi_{011} + x\bar{\varphi}_{011} + y_1\psi_{011} + y\bar{\psi}_{011} + z_1\chi_{011} + z\bar{\chi}_{011})(x_1\varphi_{010} + x\bar{\varphi}_{010} + y_1\psi_{010} + y\bar{\psi}_{010} + z_1\chi_{010} + z\bar{\chi}_{010}) \cdot \\ & \cdot (x_1\varphi_{001} + x\bar{\varphi}_{001} + y_1\psi_{001} + y\bar{\psi}_{001} + z_1\chi_{001} + z\bar{\chi}_{001})(x_1\varphi_{000} + x\bar{\varphi}_{000} + y_1\psi_{000} + y\bar{\psi}_{000} + z_1\chi_{000} + z\bar{\chi}_{000}).\end{aligned}$$

Diese Resultante soll jetzt noch nach den Argumenten x, y, z entwickelt werden. Man erhält unschwer:

$$\begin{aligned}0 = {} & xyz(\bar{\varphi}_{111} + \bar{\psi}_{111} + \bar{\chi}_{111})(\bar{\varphi}_{110} + \bar{\psi}_{110} + \bar{\chi}_{110})(\bar{\varphi}_{101} + \bar{\psi}_{101} + \bar{\chi}_{101})(\bar{\varphi}_{100} + \bar{\psi}_{100} + \bar{\chi}_{100}) \cdot \\ & \cdot (\bar{\varphi}_{011} + \bar{\psi}_{011} + \bar{\chi}_{011})(\bar{\varphi}_{010} + \bar{\psi}_{010} + \bar{\chi}_{010})(\bar{\varphi}_{001} + \bar{\psi}_{001} + \bar{\chi}_{001})(\bar{\varphi}_{000} + \bar{\psi}_{000} + \bar{\chi}_{000}) + \\ & + xyz_1(\bar{\varphi}_{111} + \bar{\psi}_{111} + \chi_{111})(\bar{\varphi}_{110} + \bar{\psi}_{110} + \chi_{110})(\bar{\varphi}_{101} + \bar{\psi}_{101} + \chi_{101})(\bar{\varphi}_{100} + \bar{\psi}_{100} + \chi_{100}) \cdot \\ & \cdot (\bar{\varphi}_{011} + \bar{\psi}_{011} + \chi_{011})(\bar{\varphi}_{010} + \bar{\psi}_{010} + \chi_{010})(\bar{\varphi}_{001} + \bar{\psi}_{001} + \chi_{001})(\bar{\varphi}_{000} + \bar{\psi}_{000} + \chi_{000}) + \\ & + xy_1z(\bar{\varphi}_{111} + \psi_{111} + \bar{\chi}_{111})(\bar{\varphi}_{110} + \psi_{110} + \bar{\chi}_{110})(\bar{\varphi}_{101} + \psi_{101} + \bar{\chi}_{101})(\bar{\varphi}_{100} + \psi_{100} + \bar{\chi}_{100}) \cdot \\ & \cdot (\bar{\varphi}_{011} + \psi_{011} + \bar{\chi}_{011})(\bar{\varphi}_{010} + \psi_{010} + \bar{\chi}_{010})(\bar{\varphi}_{001} + \psi_{001} + \bar{\chi}_{001})(\bar{\varphi}_{000} + \psi_{000} + \bar{\chi}_{000}) + \\ & + xy_1z_1(\bar{\varphi}_{111} + \psi_{111} + \chi_{111})(\bar{\varphi}_{110} + \psi_{110} + \chi_{110})(\bar{\varphi}_{101} + \psi_{101} + \chi_{101})(\bar{\varphi}_{100} + \psi_{100} + \chi_{100}) \cdot \\ & \cdot (\bar{\varphi}_{011} + \psi_{011} + \chi_{011})(\bar{\varphi}_{010} + \psi_{010} + \chi_{010})(\bar{\varphi}_{001} + \psi_{001} + \chi_{001})(\bar{\varphi}_{000} + \psi_{000} + \chi_{000}) + \\ & + x_1yz(\varphi_{111} + \bar{\psi}_{111} + \bar{\chi}_{111})(\varphi_{110} + \bar{\psi}_{110} + \bar{\chi}_{110})(\varphi_{101} + \bar{\psi}_{101} + \bar{\chi}_{101})(\varphi_{100} + \bar{\psi}_{100} + \bar{\chi}_{100}) \cdot \\ & \cdot (\varphi_{011} + \bar{\psi}_{011} + \bar{\chi}_{011})(\varphi_{010} + \bar{\psi}_{010} + \bar{\chi}_{010})(\varphi_{001} + \bar{\psi}_{001} + \bar{\chi}_{001})(\varphi_{000} + \bar{\psi}_{000} + \bar{\chi}_{000}) + \\ & + x_1yz_1(\varphi_{111} + \bar{\psi}_{111} + \chi_{111})(\varphi_{110} + \bar{\psi}_{110} + \chi_{110})(\varphi_{101} + \bar{\psi}_{101} + \chi_{101})(\varphi_{100} + \bar{\psi}_{100} + \chi_{100}) \cdot \\ & \cdot (\varphi_{011} + \bar{\psi}_{011} + \chi_{011})(\varphi_{010} + \bar{\psi}_{010} + \chi_{010})(\varphi_{001} + \bar{\psi}_{001} + \chi_{001})(\varphi_{000} + \bar{\psi}_{000} + \chi_{000}) + \\ & + x_1y_1z(\varphi_{111} + \psi_{111} + \bar{\chi}_{111})(\varphi_{110} + \psi_{110} + \bar{\chi}_{110})(\varphi_{101} + \psi_{101} + \bar{\chi}_{101})(\varphi_{100} + \psi_{100} + \bar{\chi}_{100}) \cdot \\ & \cdot (\varphi_{011} + \psi_{011} + \bar{\chi}_{011})(\varphi_{010} + \psi_{010} + \bar{\chi}_{010})(\varphi_{001} + \psi_{001} + \bar{\chi}_{001})(\varphi_{000} + \psi_{000} + \bar{\chi}_{000}) + \\ & + x_1y_1z_1(\varphi_{111} + \psi_{111} + \chi_{111})(\varphi_{110} + \psi_{110} + \chi_{110})(\varphi_{101} + \psi_{101} + \chi_{101})(\varphi_{100} + \psi_{100} + \chi_{100}) \cdot \\ & \cdot (\varphi_{011} + \psi_{011} + \chi_{011})(\varphi_{010} + \psi_{010} + \chi_{010})(\varphi_{001} + \psi_{001} + \chi_{001})(\varphi_{000} + \psi_{000} + \chi_{000}). —\end{aligned}$$

Sei nun insbesondere:

$$\psi(a, b, c) = \varphi(b, c, a), \qquad \chi(a, b, c) = \varphi(c, a, b),$$

mithin

$$\begin{aligned}\psi(a, b, c) = {} & \varphi_{111} abc + \varphi_{101} abc_1 + \varphi_{011} ab_1c + \varphi_{001} ab_1c_1 + \\ & + \varphi_{110} a_1bc + \varphi_{100} a_1bc_1 + \varphi_{010} a_1b_1c + \varphi_{000} a_1b_1c_1, \\ \chi(a, b, c) = {} & \varphi_{111} abc + \varphi_{011} abc_1 + \varphi_{110} ab_1c + \varphi_{010} ab_1c_1 + \\ & + \varphi_{101} a_1bc + \varphi_{001} a_1bc_1 + \varphi_{100} a_1b_1c + \varphi_{000} a_1b_1c_1,\end{aligned}$$

oder also:

$$\begin{aligned}& \psi_{111} = \varphi_{111}, \quad \psi_{110} = \varphi_{101}, \quad \psi_{101} = \varphi_{011}, \quad \psi_{100} = \varphi_{001}, \\ & \psi_{011} = \varphi_{110}, \quad \psi_{010} = \varphi_{100}, \quad \psi_{001} = \varphi_{010}, \quad \psi_{000} = \varphi_{000}, \\ & \chi_{111} = \varphi_{111}, \quad \chi_{110} = \varphi_{011}, \quad \chi_{101} = \varphi_{110}, \quad \chi_{100} = \varphi_{010}, \\ & \chi_{011} = \varphi_{101}, \quad \chi_{010} = \varphi_{001}, \quad \chi_{001} = \varphi_{100}, \quad \chi_{000} = \varphi_{000},\end{aligned}$$

desgleichen mit übergesetzten Horizontalstrichen, so erhalten wir durch diese Einsetzungen als die Resultante der Elimination von a, b, c aus den drei Gleichungen:

$$x = \varphi(a, b, c) \qquad y = \varphi(b, c, a), \qquad z = \varphi(c, a, b)$$

die nachstehende Gleichung:

$$0 = xyz\cdot\bar\varphi_{111}(\bar\varphi_{110}+\bar\varphi_{101}+\bar\varphi_{011})(\bar\varphi_{100}+\bar\varphi_{010}+\bar\varphi_{001})\bar\varphi_{000}+$$
$$+xyz_1(\bar\varphi_{110}+\bar\varphi_{101}+\varphi_{011})(\bar\varphi_{101}+\bar\varphi_{011}+\varphi_{110})(\bar\varphi_{100}+\bar\varphi_{001}+\varphi_{010})(\bar\varphi_{011}+\bar\varphi_{110}+\varphi_{101})\cdot$$
$$\cdot(\bar\varphi_{010}+\bar\varphi_{100}+\varphi_{001})(\bar\varphi_{001}+\bar\varphi_{010}+\varphi_{100})+$$
$$+xy_1z(\bar\varphi_{110}+\bar\varphi_{011}+\varphi_{101})(\bar\varphi_{101}+\bar\varphi_{110}+\varphi_{011})(\bar\varphi_{100}+\bar\varphi_{010}+\varphi_{001})(\bar\varphi_{011}+\bar\varphi_{101}+\varphi_{110})\cdot$$
$$\cdot(\bar\varphi_{010}+\bar\varphi_{001}+\varphi_{100})(\bar\varphi_{001}+\bar\varphi_{100}+\varphi_{010})+$$
$$+xy_1z_1(\bar\varphi_{110}+\varphi_{101}+\varphi_{011})(\bar\varphi_{101}+\varphi_{011}+\varphi_{110})(\bar\varphi_{100}+\varphi_{001}+\varphi_{010})(\bar\varphi_{011}+\varphi_{110}+\varphi_{101})\cdot$$
$$\cdot(\bar\varphi_{010}+\varphi_{100}+\varphi_{001})(\bar\varphi_{001}+\varphi_{010}+\varphi_{100})+$$
$$+x_1yz(\bar\varphi_{101}+\bar\varphi_{011}+\varphi_{110})(\bar\varphi_{011}+\bar\varphi_{110}+\varphi_{101})(\bar\varphi_{001}+\bar\varphi_{010}+\varphi_{100})(\bar\varphi_{110}+\bar\varphi_{101}+\varphi_{011})\cdot$$
$$\cdot(\bar\varphi_{100}+\bar\varphi_{001}+\varphi_{010})(\bar\varphi_{010}+\bar\varphi_{100}+\varphi_{001})+$$
$$+x_1yz_1(\bar\varphi_{101}+\varphi_{110}+\varphi_{011})(\bar\varphi_{011}+\varphi_{101}+\varphi_{110})(\bar\varphi_{001}+\varphi_{100}+\varphi_{010})(\bar\varphi_{110}+\varphi_{011}+\varphi_{101})\cdot$$
$$\cdot(\bar\varphi_{100}+\varphi_{010}+\varphi_{001})(\bar\varphi_{010}+\varphi_{001}+\varphi_{100})+$$
$$+x_1y_1z(\bar\varphi_{011}+\varphi_{110}+\varphi_{101})(\bar\varphi_{110}+\varphi_{101}+\varphi_{011})(\bar\varphi_{010}+\varphi_{100}+\varphi_{001})(\bar\varphi_{101}+\varphi_{011}+\varphi_{110})\cdot$$
$$\cdot(\bar\varphi_{001}+\varphi_{010}+\varphi_{100})(\bar\varphi_{100}+\varphi_{001}+\varphi_{010})+$$
$$+x_1y_1z_1\cdot\varphi_{111}(\varphi_{110}+\varphi_{101}+\varphi_{011})(\varphi_{100}+\varphi_{010}+\varphi_{001})\varphi_{000};$$

hierbei wurde lediglich Gebrauch gemacht von den Tautologiegesetzen 14), dem Th. 30_+) $\bar\varphi+\varphi=1$, 22_+) $a+1=1$ und $21_\times$) $a\cdot 1=a$.

Beachtet man überdies, dass die Koeffizienten von xyz_1, xy_1z und x_1yz die nämlichen sind, desgleichen sich als einerlei herausstellen die Koeffizienten von xy_1z_1, x_1yz_1 und x_1y_1z, so treten weitere Vereinfachungen ein. In diesen Koeffizienten lassen zudem nach dem Schema:

$$(\alpha_1+\beta+\gamma)(\alpha+\beta_1+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma_1)=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha_1\beta_1\gamma_1$$

noch drei und drei Faktoren sich ausmultipliziren, sodass die Resultante sich am einfachsten darstellt als:

$$0 = xyz\bar\varphi_{111}(\bar\varphi_{110}+\bar\varphi_{101}+\bar\varphi_{011})(\bar\varphi_{100}+\bar\varphi_{010}+\bar\varphi_{001})\bar\varphi_{000}+$$
$$+(x_1yz+xy_1z+xyz_1)(\bar\varphi_{110}\bar\varphi_{011}+\bar\varphi_{110}\bar\varphi_{101}+\bar\varphi_{101}\bar\varphi_{011}+\varphi_{110}\varphi_{101}\varphi_{011})\cdot$$
$$\cdot(\bar\varphi_{100}\bar\varphi_{001}+\bar\varphi_{100}\bar\varphi_{010}+\bar\varphi_{010}\bar\varphi_{001}+\varphi_{100}\varphi_{010}\varphi_{001})+$$
$$+(xy_1z_1+x_1yz_1+x_1y_1z)(\varphi_{110}\varphi_{011}+\varphi_{110}\varphi_{101}+\varphi_{101}\varphi_{011}+\bar\varphi_{110}\bar\varphi_{101}\bar\varphi_{011})\cdot$$
$$\cdot(\varphi_{100}\varphi_{001}+\varphi_{100}\varphi_{010}+\varphi_{010}\varphi_{001}+\bar\varphi_{100}\bar\varphi_{010}\bar\varphi_{001})+$$
$$+x_1y_1z_1\varphi_{111}(\varphi_{110}+\varphi_{101}+\varphi_{011})(\varphi_{100}+\varphi_{010}+\varphi_{001})\varphi_{000}.$$

Die Symmetrie derselben in Bezug auf x, y, z ist nun ersichtlich.

Ersetzen wir die Namen der Argumente a, b, c durch die griechischen Buchstaben α, β, γ um die lateinischen Buchstaben frei zu bekommen für andre Zwecke, so empfiehlt es sich noch, die zwar ausdrucksvolle, doch etwas schwerfällige Bezeichnung der bisherigen Koeffizienten von φ durch die darunter gesetzten Zeichen zu ersetzen:

$$\begin{matrix}\varphi_{111}, & \varphi_{110}, & \varphi_{101}, & \varphi_{100}, & \varphi_{011}, & \varphi_{010}, & \varphi_{001}, & \varphi_{000} \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, & h.\end{matrix}$$

Als Resultante der Elimination von α, β, γ aus den drei Gleichungen:

$$x = a\alpha\beta\gamma + b\alpha\beta\gamma_1 + c\alpha\beta_1\gamma + d\alpha\beta_1\gamma_1 + e\alpha_1\beta\gamma + f\alpha_1\beta\gamma_1 + g\alpha_1\beta_1\gamma + h\alpha_1\beta_1\gamma_1,$$
$$y = a\beta\gamma\alpha + \cdots, \quad z = a\gamma\alpha\beta + \cdots$$

ist dann gefunden:

$$0 = xyza_1(b_1+c_1+e_1)(d_1+f_1+g_1)h_1 +$$
$$+(x_1yz+xy_1z+xyz_1)(b_1e_1+b_1c_1+c_1e_1+bce)(d_1g_1+d_1f_1+f_1g_1+dfg)+$$
$$+(xy_1z_1+x_1yz_1+x_1y_1z)(be+bc+ce+b_1c_1e_1)(dg+df+fg+d_1f_1g_1)+$$
$$+x_1y_1z_1a(b+c+e)(d+f+g)h.$$

Soll sich dies in

$$0 = xyz + x_1y_1z_1$$

zusammenziehen — wie es doch der Fall sein müsste, wenn diese Gleichung eine symmetrisch-allgemeine Lösung $x=\varphi(\alpha,\beta,\gamma)$, etc. in drei arbiträren Parametern α, β, γ besässe — so müssen der erste und der letzte Koeffizient gleich 1 gemacht werden (durch geeignete Bestimmung von a, b, c, d, e, f, g, h) während die beiden mittleren Koeffizienten verschwinden. Jene beiden Gleichungen:

$$a_1(b_1+c_1+e_1)(d_1+f_1+g_1)h_1 = 1 = a(b+c+e)(d+f+g)h$$

geben aber durch Kontraposition:

$$a+h+bce+dfg=0 \quad \text{und} \quad a_1+h_1+b_1c_1e_1+d_1f_1g_1=0$$

und involviren Widersprüche miteinander, wie diesen: dass gleichzeitig $a=0$ und $a_1=0$ sein müsste (desgleichen $h+h_1=0$, anstatt $=1$). Vergl. auch Th. $24_\times$).

Es geht hieraus von neuem die Unmöglichkeit hervor, die Gleichung $R_2=0$ (und damit auch die R_6 resp. $R_6'=0$) in drei Parametern symmetrisch allgemein zu lösen.

Literaturverzeichniss
nebst Bemerkungen.

Nachstehend gebe ich das Verzeichniss der von mir selbst benützten Literatur, noch ergänzt durch Literaturangaben aus Venn's Schrift[1] ebenda. Von diesen sollen die besternten nach ihm besonders für die symbolisirende oder rechnerische Logik von Interesse sein. Wo mir dies auf Grund eigener Überzeugung oder Einsichtnahme der Fall scheint oder mir überhaupt zum Bewusstsein gekommen, dass unmittelbar ein Werk von erheblichem Einfluss auf die Gestaltung meiner vorliegenden Schrift geworden, habe ich dasselbe meistens noch durch den Druck hervorgehoben. Von jeder Schrift, die ich zu Gesicht bekommen, findet sich die Anzahl ihrer Seiten angeführt.

Alsted, J. H. 1) Logicae systema harmonicum, 1614.

Apelt, E. F. 1) Die Theorie der Induktion, Leipzig 1854, 204 Seiten.

Aristoteles. 1) *Kategorien,* oder Lehre von den Grundbegriffen, Ed. von J. H. v. Kirchmann, „Philosophische Bibliothek", Bd. 70 und 71. Leipzig 1876, 41 + 54 Seiten.
2) *Hermeneutica,* oder Lehre vom Urteil, desgleichen 41 + 60 Seiten.
3) Erste *Analytiken,* oder Lehre vom Schluss, desgl. Bd. 72 u. 73, 1877, 150 + 260 Seiten.
4) Zweite *Analytiken,* oder Lehre vom Erkennen, Bd. 77 u. 78, 1877, 102 + 190 Seiten.
5) *Topik,* desgl. Bd. 89 u. 90, 1882, 206 + 130 Seiten.
6) Sophistische Widerlegungen, desgl. Bd. 91 u. 92, 66 + 64 Seiten — je einschliesslich der Erläuterungen v. Kirchmann's.
7) Die Metaphysik des etc. Bd. 38 u. 39, 422 + 346 Seiten.

Bachmann, C. F. 1) System der Logik, 1828.

*Bain, Alexander. 1) Logic, 1870. Part. I. Deduction, 2. ed. London 1873, 283 Seiten, Part. II. Induction, 445 Seiten.
2) A higher English grammar, new edition, London 1884, 358 Seiten. Im erwähnten Jahre wurde das 80ste Tausend der revised ed. ausgegeben.
3) A companion to the higher English grammar; second ed. London 1877, 358 Seiten.

*Bardili, C. G. 1) Grundriss der ersten Logik, gereiniget von den Irrthümmern bisheriger Logiken überhaupt, der Kantischen insbesondere. Keine Kritik, sondern eine Medicina mentis, brauchbar hauptsächlich für Deutschlands kritische Philosophie. Stuttgart 1800, 360 Seiten.

Baynes, T. S. 1) Essay on the new analytic of logical forms, 1850.

Behaghel, Otto. 1) Die deutsche Sprache. Leipzig und Prag 1886, 231 Seiten; zugleich 54. Band der deutschen Universalbibliothek für Gebildete „Das Wissen der Gegenwart."

Beneke, Friedrich Eduard. 1) System der Logik als Kunstlehre des Denkens. Berlin, Dümmler, 1842; zwei Bände mit 328 + 397 Seiten.

Bentham, George. 1) Outline of a new system of logic, 1827.

Bergmann, Julius. 1) Die Grundprobleme der Logik. Berlin 1882, 196 Seiten.

Bernoulli, Johann. 1) Parallelismus ratiocinii logici et algebraici (1685; Opera I, 214).

Binet, Alfred. 1) La psychologie du raisonnement. Recherches expérimentales par l'hypnotisme, „Bibliothèque de philosophie contemporaine", Paris 1886, 168 Seiten.

Bolzano B. 1) Logik, 1837.

Boole, George (gesprochen: Buhl).
*1) *The mathematical analysis of logic,* being an essay towards a calculus of deductive reasoning. Cambridge, Macmillan, Barclay & Macmillan, London, George Bell, 1847; 82 Seiten.
*2) The calculus of logic, „Cambridge and Dublin, Mathematical Journal", Vol. 3, 1848, p. 183 .. 198.
3) The claims of science (Lecture at Cork, 1851).
*4) *An investigation of the Laws of thought* on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities. London, Walton and Maberly, Cambridge, Macmillan & Co., 1854; 424 Seiten.
*5) Of propositions numerically definite, „Transactions of the Cambridge philosophical society", Vol. 11, p. 396 .. 411, posthum mitgeteilt von A. De Morgan.

Born, Th. 1) Über die Negation und eine notwendige Einschränkung des Satzes vom Widerspruch. Ein Beitrag zur Kritik des menschlichen Erkenntnissvermögens. Leipzig, Friedrich (ohne Jahreszahl), 91 Seiten.

Bowen, F. 1) Treatise on logic 1872.

Brentano, T. 1) Psychologie vom empirischen Standpunkte, 1874.

*Busch, M. 1) Anfangsgründe der logikalischen Algebra, Tübingen 1768.

Carrol, Lewis. 1) The game of logic, London, Macmillan 1887, cf. Rezension von Alfred Sidgwick p. 3 sq. und John Venn p. 53 sq. von „Nature" Vol. 36, 1887.

Cayley, Arthur (gespr. Keleh).
*1) Note on the calculus of logic. „The Quarterly Journal of pure and applied mathematics", Vol. 11, 1871, p. 282 sq.

2) On compound combinations, „Proceedings of the literary and philosophical society of Manchester“, Vol. 16, 1876 .. 77, p. 113 .. 114.

*de Castillon, G. F. 1) *Sur un nouvel algorithme logique* 1803 (Classe de philosophie spéculative), p. 3 .. 24 der „Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres depuis l'avènement de Frédéric Guillaume III au trône 1803 avec l'histoire pour le même temps“, Berlin 1805.

Chase, D. P. 1) First logic book, 1875.

Clifford, W. K.
*1) Lectures and essays, 1879.
2) „Contemporary Review“, 1873.
3) *On the types of compound statement involving four classes,* „Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester“, Jan. 1877, Vol. 16, p. 88 .. 101.
4) On the nature of things-in-themselves, „Mind“ (A quarterly review of psychology and philosophy, ed. by Croom Robertson) Vol. 3, 1878, p. 57 .. 67.

Dalgarno, G. 1) Ars signorum, ed. 1834.

*Darjes, J. G. 1) Weg zur Wahrheit, 1776.

Dedekind, Richard.
1) *Was sind und was sollen die Zahlen?,* Braunschweig, Vieweg 1888, 58 Seiten.
2) Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872, 31 Seiten.
3) Siehe unter Dirichlet[1].

*Delboeuf, J. 1) *Logique algorithmique.* Essai sur un système de signes appliqué à la logique avec une introduction ou sont traitées les questions générales relatives à l'emploi des notations dans les sciences. Liège et Bruxelles, 1877, 99 Seiten.

De Morgan, Augustus.
1) First notions of logic (preparatory to the study of geometry). London, Taylor & Walton 1839; 32 Seiten.
*2) *Formal logic,* or the calculus of inference necessary and probable. London, Taylor and Walton, 1847; 336 Seiten.
*3) *Syllabus* of a proposed system of logic, London, Walton and Maberly 1860; 72 Seiten.
* Sodann in den „Transactions of the Cambridge Philosophical Society“:
4) *On the structure of the syllogism* and its application (Nr. I) Nov. 9, 1846, Vol. 8, part 3, 1847, p. 379 .. 408.
Diese Abhandlung (Nr. 29) rief jene denkwürdige Polemik in Betreff der Selbständigkeit von De Morgan's Entdeckungen mit Sir W. Hamilton hervor, worin letzterer sie schliesslich anerkannte (Die Kontroverse begann 1846, setzte sich intermittirend im „Athenaeum“ fort und kam in der „Contemporary Review“ 1873 zum Abschluss) vgl. Venn[1] p. 9.
5) *On* the symbols of logic, the theory of *the syllogism* (Nr. II) and in particular of the copula, and the application of the theory of probabilities to some questions of evidence. Febr. 25, 1850, Vol. 9, 1851, part. 1, p. 79 .. 127.
6) *On the syllogism* Nr. III and on logic in general. Febr. 8, 1858, Vol. 10, 1864, part. 1, p. 173 .. 230.
7) *On the syllogism* Nr. IV and on the logic of relations. April 23, 1860, Vol. 10, 1864, part. 2, p. 331 .. 358.
8) *On the syllogism* Nr. V and on various points of the onymatic system. May 4, 1863, Vol. 10, 1864, part. 2, p. 428 .. 487.
9) Artikel *Logic* in der „Englisch Cyclopaedia“ von 1860.
10) Vergl. Boole[5].

Dieffenbach, Ludwig. 1) Der menschliche Wille und seine Grundlagen. Die Freiheit des Willens und die Zurechnung. Darmstadt 1886, 130 S. (Selbstverlag des nun verstorbenen Verfassers, C. F. Winter'sche Buchdruckerei.)

Dirichlet, Lejeune. 1) Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben und mit Zusätzen versehen von Dedekind, 3. Aufl., 2 Bände. Braunschweig 1879, 627 Seiten.

*Drobisch, Moritz Wilhelm. 1) Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachsten Verhältnissen mit Rücksicht auf Mathematik und Naturwissenschaften. Vierte Auflage. Leipzig, L. Voss, 1875, 244 Seiten. Inzwischen ist eine fünfte Auflage erschienen.

Du Bois Reymond, Emil. 1) Reden. Erste Folge, Leipzig 1886, 550 Seiten (darin: Die sieben Welträthsel, p. 381 .. 411), 2. Folge, ibid. 1887, 589 Seiten.

*Ellis, A., J. 1) On the algebraical analogues of logical relations, „Proceedings of the Royal Society of London“, Vol. 21, p. 497 sq.

Ellis, R. L. 1) Edition of Bacon's works, 1858.
*2) Mathematical and other writings 1863.

Erdmann, J. E. 1) Geschichte der neueren Philosophie 1834 .. 53.

Euler, Leonhard.
1) Briefe an eine deutsche Fürstinn über verschiedene Gegenstände aus der Naturlehre. Nach der Ausgabe von Condorcet und de la Croix, übers. von F. Kries. Leipzig 1792 .. 94, 3 Bde. von 547 + 384 + 424 Seiten. Das Original führt den Titel: Lettres à une princesse d'Allemagne sur quelque sujets de physique et de philosophie, 1768 .. 72 — daselbst vergleiche II p. 106, Lettre 102 .. 105 — auch existirt eine englische Ausgabe: Letters to a German Princess, Ed. Brewster, 1823.

Franklin, Frau, s. Ladd.

Frege, Gottlob.

*1) *Begriffsschrift,* eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle a. S. L. Nebert, 1879, 88 Seiten.

2) Anwendungen der Begriffsschrift, Vortrag. In den Sitzungsberichten der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaften, 1879; 5 Seiten.

3) Über den Zweck der Begriffsschrift, ibid. Jan. 1882, p. 1 .. 10.

4) Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Breslau 1884, 119 Seiten.

Diese Schrift enthält manch' kritischen Seitenblick auf mein Buch[1] (siehe unter Schröder); indess vermag ich nicht zu finden, dass der Verfasser demselben sonderlich gerecht geworden. So z. B. gründet er selbst seine Begriffserklärung der „Anzahl" von Einheiten einer Menge auf den besonders von ihm erklärten Begriff "gleichzahlig" und bittet, p. 79, dies Wort als eine willkürlich gewählte Bezeichnungsweise zu betrachten deren Bedeutung nicht der sprachlichen Zusammensetzung sondern jener Erklärung zu entnehmen ist — ansonst ja in der That ein circulus in definiendo vorliegen würde. Die gleiche Rücksicht aber lässt Herr Frege keineswegs auch mir angedeihen, indem er (p. 28) bemängelt, dass in meiner Definition der Anzahl das Wort „Häufigkeit" nur ein andrer Ausdruck für Anzahl sei, ohne dessen Erwähnung zu thun, dass daneben auch meinerseits der Begriff „gleichhäufig" („von gleicher Häufigkeit") seine strenge Erklärung selbständig gefunden. p. VIII findet es Herr Frege „ergötzlich", dass ich unter der Überschrift „Einziges Axiom" auf die „Permanenz der Zeichen" hingewiesen, ein Vergnügen, das ich gern ihm lasse; die Ausstellung trifft nur das (von mir beliebte) Wort „Axiom", womit ich glaubte und noch glaube, eine Voraussetzung oder Annahme bezeichnen zu *dürfen,* die den Beweisführungen mit zugrunde liegt — wenn sie meinetwegen auch „innere oder äussere Bedingung einer jeden Beweisführung" ist. Wesentlich wollte ich l. c. andeuten, dass jedenfalls eine *andere* Voraussetzung empirisch-synthetischer Art bei den arithmetischen Wahrheiten nicht gefordert zu werden braucht, und da auch Herr Frege zu der Überzeugung gelangt, dass die arithmetischen Wahrheiten „analytische" seien, so besteht wol in sachlicher Hinsicht hier Übereinstimmung. Über andere einzelnen meiner Aussprüche zuteil gewordene Auslegungen, mit denen ich nicht ganz einverstanden, glaube ich hinweggehen zu dürfen, sie dem Urteil Derer anheimstellend, die von denselben Kenntniss nehmen. Richtig ist (p. 63) dass ich einmal genauer hätte sagen sollen, dass ein (gewisser) „Name" zu einem gewissen „Begriffs*worte*" (anstatt „Begriffe") wird.

Gergonne, J. D.
1) *Essai de dialectique rationelle* (Gergonne's „Annales de mathématiques", Tome 7, p. 189 .. 228.

Gilman, B. J. 1) Observations in relative number with applications to the theory of probabilities, siehe „Studies in logic", p. 107 .. 125.

Grassmann, Hermann. 1) Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten. Berlin 1861, 220 Seiten.

Grassmann, Robert.
Die Wissenschaftslehre oder Philosophie. Zweiter Ergänzungsteil: Die Formenlehre oder Mathematik.
1) Erstes Buch: Die Grössenlehre; 52 Seiten.
*2) Zweites Buch: *Die Begriffslehre oder Logik;* 43 Seiten. Stettin, R. Grassmann, 1872.

*Günther Sigmund. 1) „Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie", 1879.

Halsted, George Bruce.
*1) 1_a) Boole's logical method, „The Journal of speculative philosophy" (edited by Wm. T. Harris, St. Louis MO.). Vol. 12, 1878, Nr. 1, p. 81 .. 91.
1_b) Statement and reduction of syllogism, ibid. Nr. 4, p. 418 .. 426.
1_c) Algorithmic division in logic, ibid. Vol. 13, 1879. Nr. 1, p. 107 .. 112.
2) The modern logic. ibid. April 1883, Vol. 17, Nr. 2, p. 210 .. 213.
3) De Morgan as logician, ibid. Vol. 18, Nr. 1, p. 1 .. 9.
*4) Algebras, spaces, logics, „Popular science monthly", Aug. 1880.

Hamilton, W. 1) Lectures on Logic, 1860.
2) Discussions on philosophy, 1866.

Hamilton, William Rowan. 1) Elements of Quaternions, 1866.

Hankel, Hermann. 1) Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen. Theorie der complexen Zahlensysteme etc. Leipzig 1867, 196 Seiten.

Harley, Robert.
*1) „British Quarterly Review", July 1866.
*2) On Boole's laws of thought, „Report of the British Association" 1866, p. 3 .. 6 der Notices and abstracts, und 1870, p. 14 sq.
3) Remarks on Mr. Murphy's paper[3], „Proceedings of the Literary and philosophical society of Manchester", Vol. 23, 1884, p. 36 .. 40.

Harms, Friedrich. 1) Logik. Aus dem h. Nachlasse des Verf. herausgegeben von Heinrich Wiese, Leipzig 1886, 308 Seiten.

Hauber, F. C. 1) Scholae logico-mathematicae, 1829.

v. Helmholtz. 1) Vorträge und Reden. 1. Bd. Braunschweig 1884, 396 Seiten, 2. Bd. ibid. 380 Seiten, darin: Die Thatsachen in der Wahrnehmung (1878) p. 217 .. 251 — auch separat erschienen.

Herbart, J. F. 1) Einleitung in die Philosophie. Vierte Aufl. 1850.

Hoffbauer, J. C. 1) Analytik der Urtheile und Schlüsse. 1792.

*v. Holland, Georg Jonathan. 1) Abhandlung über die Mathematik, die allgemeine Zeichenkunst und die Verschiedenheit der Rechnungsarten, 1764.

*Hughlings, J. P. The logic of names, an introduction to Boole's Laws of thought, 1869.

Ingleby, C. M. 1) Outlines of theoretical logic, 1856.

Itelson, Gregor. 1) Zur Geschichte des psychophysischen Problems, Stein's „Archiv für Geschichte der Philosophie", 1889, Bd. 3, p. 282 .. 290.

Jevons, William Stanley (gespr. Dschihwns).

*1) *Pure logic,* or the logic of quality apart from quantity: with remarks on Boole's system and on the relation of logic and mathematics. London, E. Stanford, 1864; 87 Seiten.
*2) *The substitution of similars,* the true principal of reasoning, derived from a modification of Aristotle's dictum. London, Macmillan & Co., 1869; 86 Seiten.
3) On a general system of numerically definite reasoning, 1870, Vol. 4 der 3^d Series der „Memoirs of the literary and philosophical society of Manchester", 1871, p. 330 .. 352.
4) On the mechanical performance of logical inference, „Philosophical Transactions of the Royal society of London", 1870, Vol. 160, p. 497 .. 518.
5) Primer of logic. With illustrations and questions — unter den „Science primers" London, Macmillan 1876, erschienen.
6) *Elementary lessons in logic:* deductive and inductive. With copious questions and examples and a vocabulary of logical terms. 7^th Edition. London, Macmillan & Co. 1878; 340 Seiten.
7) Lessons in logic, inductive and deductive. With numerous illustrations, London, Macmillan & Co., 3^sh. 6^d; 2^d Ed. (laut Buchhändleranzeige).
*8) *The principles of science.* A treatise on logic and scientific method. 3^d Ed. London, Macmillan & Co. 1879; 786 Seiten. (Erste Ausgabe 1874, 2 Bände.)
*9) *Studies in deductive logic.* A manual for students. London, Macmillan & Co. 1880, 304 Seiten.
10) On the inverse, or inductive, logical problem, 1871, „Memoirs of the literary and philosophical society of Manchester", 3^d series, Vol. 5, 1876, p. 119 .. 130.
11) Who discovered the quantification of the predicate? „The Contemporary Review" 1873, Vol. 21, p. 821 .. 824.

Kant, Immanuel
1) Logik. Ein Handbuch zu Vorlesungen, herausgegeben von G. B. Jäsche; erläutert von J. H. v. Kirchmann, 2. Aufl., Leipzig 1876, 164 Seiten.
2) Die falsche Spitzfindigkeit der vier syllogistischen Figuren, 1762, Ed. Rosenkranz von Kant's Werken, Leipzig 1838, Bd. 1, p. 57 .. 74.
3) Kritik der reinen Vernunft, Ed. v. Kirchmann, 2. Aufl. Berlin 1870, 720 Seiten.

Keller, Julius. 1) Der Ursprung der Vernunft. Eine kritische Studie über Lazarus Geiger's Theorie von der Entstehung des Menschengeschlechts. Heidelberg 1884, 220 Seiten.

Keynes, John Neville. 1) Studies and exercises in formal logic, including a generalisation of logical processes in their application to complex inferences, London, Macmillan 1884, 414 Seiten.
2) Matter of fact logic, „Mind", Vol. 4, p. 120 .. 122.

3) On the position of formal logic, ibid. p. 362 .. 375.

Kircher, Athanasius. 1) Ars magna sciendi, 1631.

v. Kries, Johannes. 1) Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, eine logische Untersuchung. Freiburg i. B. 1886, 298 Seiten.

Kvĕt, F. B. 1) Leibnizen's Logik, 1857.

Ladd, Christine (Frau Fabian Franklin).
1) *On the algebra of logic,* siehe unter „Studies in logic" p. 17 .. 71.
2) *On some characteristics of symbolic logic,* „American Journal of psychology" edited by G. Stanley Hall, Worcester 1889, Vol. 2, p. 543 .. 567.
3) *Some proposed reforms in common logic,* „Mind", January 1890. p. 75 .. 88.
4) Aufgaben in den „Mathematical Questions".

Lambert, Johann Heinrich.
*1) Neues Organon, oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichnung des Wahren und dessen Unterscheidung vom Irrthum und Schein, 2 Bde., Leipzig 1764, 592 + 436 Seiten.
*2) „Nova acta eruditorum" 1765.
*3) Logische und philosophische Abhandlungen, 1781.
*4) Deutscher gelehrter Briefwechsel, herausg. von J. Bernoulli, 4 Bde, 1782 .. 84.
5) Anlage zur Architectonic, oder Theorie des Ersten und des Einfachen in der philosophischen und mathematischen Erkenntniss, 2 Bde, Riga 1771, 376 + 560 Seiten.

Lange, Friedrich Albert.
1) *Logische Studien.* Ein Beitrag zur Neubegründung der formalen Logik und der Erkenntnisstheorie. Iserlohn 1877, 149 Seiten.

Lange, J. C. 1) Nucleus logicae Weisianae, 1712.
2) Inventum novum quadratilogici.

Latham, R. G. 1) Logic in its applications to language, 1856.

Leechman, J. 1) Logic, 1864.

v. Leibniz, Gottfried Wilhelm.
*1) Opera philosophica, Erdmann's Ed. 1840.

Liard, Louis.
*1) *Les logiciens anglais contemporains.* 2^me Edit. Paris, Germer Baillère 1883; 177 Seiten.
Unter dem Titel: „Die neuere englische Logik" auch in's Deutsche übersetzt von J. Imelmann, 2. Aufl. Leipzig, Denicke, 1883, 153 Seiten.

Liebmann, Otto.
1) Zur Analysis der Wirklichkeit, Philosophische Untersuchungen, Strassburg, K. J. Trübner, 1876; 619 Seiten. (Inzwischen in zweiter Auflage erschienen.)

Lindsay, T. M. 1) Ueberweg's logic, 1871.

Lipschitz, Rudolf. 1) Lehrbuch der Analysis. 1. Band, Grundlagen d. A., Bonn 1877; 594 Seiten. (2. Bd. Diff.- und Integralrechnung, Bonn 1880; 734 Seiten.)

Lotze, Hermann.
1) Logik. Drei Bücher vom Denken, vom Untersuchen und vom Erkennen. Zweite Aufl. Leipzig, Hirzel, 1880; 608 Seiten.
2) Metaphysik. Drei Bücher der Ontologie, Kosmologie und Psychologie. Ibid. 1879; 604 Seiten.

Maass, J. G. E. 1) Grundriss der Logik, 1793.

Macfarlane, Alexander (gesprochen: Mkfärlehn).
*1) *Principles of the algebra of logic,* with examples, Edinbourgh, D. Douglas, 1879; 155 Seiten.
*2) *On a calculus of relationship.* Part I. „Proceedings of the Royal Society of Edinbourgh", Vol. 10, p. 224 .. 232, May 1879.
3) *Algebra of relationship.* Part II. ibid. Vol. 11. p. 5 .. 13, Dec. 1880.
4) *Desgl.* Part III. ibid. Vol. 11, p. 162 .. 173, March 1881.
5) *An analysis of relationship.* „Philosophical Magazine", June 1881, p. 436 .. 446.
6) Analysis of relationships applied to various problems. „Journal of the anthropological Institute", London 1882.
7) *Analysis of relationships,* of consanguinity and affinity. London, Harrisons & Sons, 1882, 18 Seiten.
8) Besprechung von Kant's critique of pure reason: translated into English bei F. Max Müller, 2 vols. London, Macmillan — „Philosophical Magazine", June 1882, p. 1 .. 4.
9) *The logical spectrum,* „Philos. Mag.", April 1885, p. 286 .. 289.
10) Aufgaben in der „Educational Times", cf. „Math. Questions".

*Maimon, Salomon. 1) Versuch einer neuen Logik 1794.

Mansel, H. L. 1) Prolegomena logica 1860. 2) Aldrich, 1862.

McColl, Hugh (gesprochen: Hjuh Măkohl).
*1) *The calculus of equivalent statements and integration limits.* („Proceedings of the London Mathematical Society", Vol. 9, 1877 .. 78, p. 9 .. 20.
*2) *The calculus of equivalent statements* (second paper), ibid. p. 177 .. 186.
*3) *Desgl.* (third paper), ibid. Vol. 10, 1878, p. 16 .. 28.
*4) *Desgl.* (fourth paper), ibid. Vol. 11, 1880, p. 113 .. 121.
5) A note on prof. C. S. Peirce's probability notation of 1867, ibid. Vol. 12, p. 102.
*6) Symbolical reasoning, „Mind", Jan. 1880, Vol. 5, p. 45 .. 60.
7) On the growth and use of a symbolical language, „Proceedings of the literary and philosophical society of Manchester", 1881, Vol. 20, p. 103.
8) Aufgaben in den „Math. Questions", und der „Educational Times".

Marquand, Allan.
1) The logic of the Epicureans, siehe „Studies in logic", p. 1 .. 11.
2) A machine for producing syllogistic variations, mit Note on an eight-term logical machine. Ibid. p. 12 .. 16.
3) A new logical machine, Proceed. Americ. Acad. Vol. 21, p. 303 .. 307.

Mill, John Stuart.
1) *System of logic,* ratiocinative and inductive 8$^{\text{th}}$ ed. (Zuletzt 9$^{\text{th}}$ ed. erschienen.)
2) Dasselbe in deutscher Ausgabe, als „System der deductiven und inductiven Logik" von J. Schiel, Braunschweig, Vieweg, 1868, 3. Aufl., 573 + 586 Seiten. Die Citate beziehen sich auf Bd. 1 der 5. Aufl. der Übersetzung.
3) Examination of Sir W. Hamilton's Philosophy, 1865.

Mitchell, O. H.
1) *On a new algebra of logic.* Siehe „Studies in logic", p. 72 .. 106.

Müller, Max.
1) Vorlesungen über die Wissenschaft der Sprache. Für das deutsche Publikum bearbeitet von Carl Böttger. Leipzig, Gust. Mayer, 1863; 400 Seiten.
2) Dasselbe in neuer Auflage, in zwei Bänden. Bd. 1, 3. Aufl. 1875, 500 Seiten, Bd. 2, 2. Aufl. 1870, 636 Seiten.
3) The science of thought, unter dem Titel: „Das Denken im Lichte der Sprache", übersetzt von Engelbert Schneider, Leipzig 1888, 607 Seiten.
4) No language without reason — no reason without language, „Nature" Vol. 36, 1887, p. 249 .. 251.
5) The original intention of collective and abstract terms, „Mind" Vol. 1, p. 345 .. 351.

Murphy, Joseph John.
*1) *Relation of logic to language,* „Belfast Natural history and philosophical society", Febr. 1875, 21 Seiten.
*2) Fundamental logic, „Mind", Jan. 1877, Vol. 2, p. 47 .. 55.
*3) *On an extension of the ordinary logic, connecting it with the logic of relatives.* „Proceedings of the Literary and philosophical. society of Manchester", Vol. 19, 1880, p. 90 .. 101.
4) On the transformation of a logical proposition containing a single relative term, ibid. 1882, Vol. 21, p. 36 sq.
5) On the quantification of predicates and on the interpretation of Boole's logical symbols, ibid. 1884, Vol. 23, p. 33 .. 36.
6) On the meaning of addition and subtraction in logic, ibid. 1886, Vol. 25, p. 8 .. 16.

Peano, Giuseppe (Joseph).
1) *Calcolo geometrico* secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva, Torino, Fratelli Bocca, 1888, 170 Seiten.

2) *Arithmetices principia*, nova methodo exposita, Turin, Rom, Florenz, Fratelli Bocca, 1889, 40 Seiten.
3) *I principii di Geometria,* logicamente esposti, Saggio di .. ibid. 1889, 40 Seiten.

Die sehr beachtenswerten Schriften sind dem Verf. zu spät bekannt geworden um in diesem Bande noch eingehende Berücksichtigung zu finden. Es ist höchst frappant, in 3) z. B. eine riesige Menge von geometrischen Sätzen mitsamt deren Beweisen — fast einen Druckbogen hindurch ungefähr von Zeile zu Zeile fortschreitend — ohne jeglichen Text oder Figuren *lediglich in der Zeichensprache* dargestellt zu erblicken — nur erläutert noch durch einige ganz am Schlusse angehängte Noten nebst vorausgeschicktem Schlüssel. Die Zeichensprache ist wesentlich die unsres Klassen- und Aussagenkalkuls (mit wenigen Zufügungen), obwol äusserlich ganz eigenartig ersonnen und von der hier verfochtnen leider verschieden. Es erhellt aus ihrem Anblick, dass das S. 93 aufgestellte Ideal der Pasigraphie für die Zwecke der Wissenschaft bereits in ganz erheblichem Umfange *verwirklicht ist.* — Die Menge der sog. Axiome müsste jedenfalls noch weiter, noch sehr verringert werden. —

Peirce, Benjamin (gesprochen: Pörss).

1) Linear associative algebra, new edition with addenda and notes by Ch. S. Peirce, son of the author. New-York, Van Nostrand 1882 — Abdruck aus dem „American Journal of Mathematics", Vol. 4, p. 97 .. 229.

Peirce, Charles S(antiago).

*1) Three papers on logic, read before the American Academy of arts and sciences 1867 — siehe: „Proceedings of the American Academy of arts and sciences" Vol. 7, 1865 .. 1868:
1_a) *On an improvement in Boole's calculus of logic*, p. 250 .. 261.
1_b) On the natural classification of arguments, p. 261 .. 287.
1_c) On a new list of categories, p. 287 .. 298.
2) *Description of a notation for the logic of relatives* resulting from an amplification of the conceptions of Boole's calculus of logic. „Memoirs of the American Academy" Vol. 9, 1870, p. 317 ... 378.
3) On the application of logical analysis to multiple algebra, „Proceedings of the American Acad." 1875, Vol. 10, p. 392 .. 394.
4) Note on Grassmann's calculus of extension, ibid. 1878, Vol. 13, p. 115 sq.
*5) *On the algebra of logic,* „American Journal of Mathematics" 1880, Vol. 3, p. 15 .. 57.
6) Brief description of the algebra of relatives, 6 Seiten (wo?).
7) On the logic of number, „Amer. Journ. of Math.", Vol. 4, p. 85 .. 95.
8) *On the algebra of logic:* a contribution to the philosophy of notation. „Am. Journ. of Math." 1884, Vol. 7, p. 180 .. 202.
9) In dem Buche „Studies in logic" siehe unter S unsres Verzeichnisses:
9_a) A theory of probable inference, p. 126 .. 182.
9_b) Note A. On a limited universe of marks, p. 182 .. 187.
9_c) Note B. *The logic of relatives,* p. 187 .. 203.
*10) „Journal of speculative philosophy", Vol. 2, 1868 (three papers):
10_a) Questions concerning certain faculties claimed for man, p. 103 .. 114.
10_b) Some consequences of four incapities p. 140 .. 157.
10_c) Grounds of validity of the laws of logic. Further consequences of four incapacities p. 193 .. 208.

Ich würde diese Schriften in der Einleitung berücksichtigt haben, wenn sie mir früher zugänglich gewesen wären.

11) Upon the logic of mathematics, „Proceedings Americ. Acad." Vol. 7, p. 402 .. 412.

Ploucquet, Gottfried.

*1) Sammlung der Schriften, welche den logischen Kalkul des Herrn Prof. Ploucquet betreffen, Frankfurt und Leipzig, 1773 — von A. F. Bök. Nach Itelson[1]: 1776 — cf. p. 284, ibid.
2) Methodus calculandi in logicis, Francof. et Lips. 1763.
3) Godofredi Ploucquet Principia de substantiis et phaenomenis (Accedit Methodus calculandi in logicis ab ipso inventa cui praemittitur Commentatio de Arte Characteristica), Francof. et Lipsiae 1764. Die erste Auflage der „Principia" (ohne die Beilage) ist 1753 erschienen.
4) Elementa philosophiae contemplativae, sive de scientia ratiocinandi notionibus disciplinarum fundamentalibus Deo, Universo et speciatim de Homine, Stuttgart 1778, 543 Seiten; enthält p. 37 .. 42 ein Kapitel: de Calculo logico.

Pommer, Josef. 1) Beispiele und Aufgaben zur Lehre vom kategorischen Syllogismus, Wien 1884, 36 Seiten.

Port-Royal, La logique de.

1) Edition nouvelle, avec introduction et notes suivie d'éclaircissements et d'extraits d'Aristote, Descartes, Malebranche, Spinosa, Leibnitz, Kant, Hamilton, Stuart Mill, par Alfred Fouillée. Paris, E. Belin, 1879, 456 Seiten.

Das ursprüngliche Werk: „La logique, ou l'art de penser", bekannter unter obigem Titel, hatte zu Verfassern Arnauld und Nicole, Patres in einer neben dem Cisterciensernonnenkloster Port-Royal-des-Champs unweit Versailles (in einem Gebäude Les-Granges) gegründeten Klosterschule; es erschien 1662.

v. Prantl, Karl.

1) Geschichte der Logik im Abendlande. Vier Bände, Leipzig 1855 .. 1870, 733 + 403 + 426 + 305 Seiten.

Riehl, A.

*1) „Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie", 1877.
2) Der philosophische Kriticismus und seine Bedeutung für die positive Wissenschaft, 2 Bände, Leipzig, 1876 .. 79, 447 + 358 Seiten.

Rüdiger, A. 1) De sensu veri et falsi, 1741.

Scheffler, Hermann.

1) Die Naturgesetze und ihr Zusammenhang mit den Prinzipien der abstrakten Wissenschaften.
* Dritter Theil. Die Theorie der Erkenntniss oder die logischen Gesetze. Leipzig 1880, 930 Seiten.

Schlötel, W. 1) Zum 4. Mai 1876. Kleine Bausteine zu einem Denk-

male. Zur Privatmittheilung an Gelehrte bestimmt. Freiburg i. Br. 1876, 206 Seiten.

S. 89 .. 114 nimmt der (auf dem Titelblatt nicht genannte) Verfasser auch einen Anlauf zu einer von ihm als „Recursionssyllogistik" bezeichneten Symbolik (den ich aber nicht für einen glücklichen halte). Ich würde die Arbeit, ganz versteckt wie sie ist, in einem seiner vielen, zumeist gegen Professor Drobisch, die Berliner Akademie, Bibliotheksvorstände etc. gerichteten Pamphlete, sicher übersehen haben, hätte mich nicht ihr Verfasser in einer seltsamen Zuschrift auf dieselbe und darauf aufmerksam gemacht, dass ich sie bei der Grossh. Badischen Hof- und Landesbibliothek entleihen könne.

2) Die Logik, neu bearbeitet. Göttingen 1854, 118 Seiten.

*Schlosser, F. P. 1) Disputatio de sororio logices et matheseos nexu, et applicatione praeceptorum logicorum in disciplinis mathematicis, 1727.

Schopenhauer, Arthur. 1) Über die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde, 3. Aufl. Leipzig 1864, 160 Seiten.

Schröder, Friedrich Wilhelm Karl Ernst.

1) Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende. 1 Band: Die sieben algebraischen Operationen. Leipzig, Teubner 1873, 360 Seiten.

*2) *Der Operationskreis des Logikkalkuls,* ibid. 1877, 37 Seiten — rezensirt von Adamson „Mind", Vol. 3, p. 252 .. 255.

3) Note über den Operationskreis des Logikkalkuls, „Mathematische Annalen" 1877, Bd. 12, p. 481 .. 484.

4) Rezension von Frege's „Begriffsschrift" in Schlömilch's „Zeitschrift für Math. und Physik", 1880, Bd. 25, p. 81 .. 94 der historisch-literarischen Abteilung.

5) Exposition of a logical principle, as disclosed by the algebra of logic, but overlooked by the ancient logicians, „Report of the 53d Meeting of the British Association held at Southport", 1883, p. 412.

6) *Über das Eliminationsproblem im identischen Kalkul.* „Tagblatt der 58. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Strassburg" 1885, p. 353 sq.

7) Tafeln der eindeutig umkehrbaren Funktionen zweier Variabeln auf den einfachsten Zahlengebieten. „Math. Annalen" 1887, Bd. 29, p. 299 .. 317.

8) Über Algorithmen und Kalkuln. Hoppe's „Archiv für Math. und Physik", 1887, 2. Reihe, Teil 5, p. 225 .. 278.

Leider wurde mir der Aufsatz einigermassen verunstaltet zufolge Intervenirens der Redaktion bei den Korrekturen, an die ich nicht ohne Schaudern zurückdenke. Am empfindlichsten bleibt, dass bei Erwähnung der Integrabilitätsbedingungen, p. 267, nicht nur mir die beabsichtigte Fussnote mit den ausführlichen Literaturangaben, sondern auch im Texte die gebührende Erwähnung der Namen Riemann und Paul Du Bois Reymond (neben dem von Thomae) ungeachtet aller meiner Bitten, Anerbietungen und wiederholten Vorstellungen aus erster und zweiter Korrektur gestrichen wurde. Ich muss den Leser ersuchen, vor der Lektüre die (zumeist zweimal vergebens angebrachten) Korrekturen und Verbesserungen aus den Berichtigungen des Bandes eintragen zu wollen, in welche sie wenigstens schliesslich aufgenommen erschienen.

9) *Über die Anzahl der Urteile, welche die Logik abzugeben vermag über zwei Begriffe,* „Tagblatt der 62. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Heidelberg" 1889, p. 190.

Anlässlich genannter Versammlung wurde ich erst durch Herrn Walter Dyck auf die Schriften[2] und[3] des Herrn Peano aufmerksam gemacht, nach welchen ich auch dessen Schrift[1] erwarb. Ich ersehe aus dem Vorwort der letzteren, dass die von mir ermittelte Zahl 32767 schon Herrn Peano bekannt war und in einer allgemeineren Formel desselben enthalten ist, die ich im zweiten Bande nun begründen werde.

Schuppe, Wilhelm. 1) Erkenntnisstheoretische Logik, Bonn 1878, 701 Seiten.

*Segner, J. A. 1) Specimen logicae universaliter demonstratae, 1740.

*Semler, C. A. 1) Versuch über die combinatorische Methode, 1811.

Servois. 1) Cf. Gergonne's „Annales de Mathématiques" Tome 5, p. 98, 111, 142, etc. wo sich die Namen „commutative" und „distributive" erstmalig finden.

Sigwart, Christoph.

1) *Logik.* Erster Band. Die Lehre vom Urtheil, vom Begriff und vom Schluss. Tübingen, Laupp, 1873, 420 Seiten.

2) Zweiter Band. Die Methodenlehre. Ibid. 1878, 612 Seiten.

*Solly, T. 1) Syllabus of logic, 1839.

Spalding, W. 1) Introduction to logical science, 1857.

Spottiswoode, W. 1) Remarks on some recent generalizations of algebra, „Proceedings of the London Math. society" 1872.

Steinthal, H. 1) Der Ursprung der Sprache, im Zusammenhang mit den letzten Fragen alles Wissens, eine Darstellung, Kritik und Fortentwickelung der vorzüglichsten Ansichten. 3. Ausgabe, Berlin 1877, 374 Seiten.

Stolz, Otto.

1) Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, nach den neueren Ansichten bearbeitet. 2 Bände, Leipzig, Teubner, 1885 .. 86; 344 + 326 Seiten.

Studies in logic by members of the Johns Hopkins University. Boston, Little, Brown & Co., 1883, 203 Seiten.

Sweet, Henry. 1) Words, logic and grammar, „Transactions of Philological society", 1876.

Thomson, W. 1) Laws of thought, 1875.

Thoughts on logic, or the S. N. I. X. propositional theory, 1877.

*Tönnies. 1) De logicae scientiae ad exemplum arithmeticae instituenda ratione, 1752.

Trendelenburg, Adolf.

1) Logische Untersuchungen, 2 Bde, Leipzig 1870, 3. Aufl. 388 + 538 Seiten.

2) Historische Beiträge zur Philosophie, 4 Bde. Band 3, Berlin 1867, 444 Seiten.

Twesten, A. D. C. 1) Logik 1825.

Ueberweg, Friedrich.
1) System der Logik und Geschichte der logischen Lehren. 4. Aufl., Bonn, Marcus 1874, 434 Seiten.

Ulrich, J. H. 1) Institutiones logicae et metaphysicae, 1792.

Ulrici, H. „Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik", 1878.

Venn, John.
1) *Symbolic Logic,* London, Macmillan, 1881; 446 Seiten.
Wegen der ausserordentlichen Belesenheit des Verfassers, seiner sorgfältigen kritischen Anmerkungen und seiner „Historic notes" in Chapter XX, in Bezug auf die Entwickelungsgeschichte der symbolisirenden Logik eine schätzenswerte Ergänzung zum vorliegenden Buche.
2) The logic of chance, an essay on the foundations and province of the theory of probability with especial reference to its logical bearings and its application to moral and social science. 2d ed. London, Macmillan, 1876, 488 Seiten.
3) Consistency and real inference, „Mind", Vol. 1, 1876, p. 43 .. 52.
*4) Boole's logical system, ibidem p. 479 .. 491.
*5) On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasonings (The London, Edinbourgh and Dublin), „Philosophical Magazine" (and Journal of Science), Vol. 10, 5th series, 1880, p. 1 .. 18.
*6) Symbolic logic, „Princeton Review", New York, Sept. 1880, p. 247 .. 267.
*7) On the various notations adopted for expressing the common propositions of logic, „Proceedings of the Cambridge Philosophical society", Dec. 1880, Vol. 4, p. 35 .. 46.
*8) On the employment of geometrical diagrams for the sensible representation of logical propositions, ibid. p. 46 .. 58.
9) The difficulties of material logic, „Mind" Vol. 4, p. 35 .. 47.
10) On the forms of logical proposition, „Mind" Vol. 5, p. 336 .. 349.
In 4) bis 8) sind einzelne Kapitel von 1) vorausbearbeitet.
11) The principles of empirical or inductive logic, Macmillan 1889, 594 Seiten.
Enthält auch viel zur formalen Logik gehöriges, u. a. schätzenswerte Angaben über Universalsprachen.

Vives, Ludwig. 1) De censura veri, 1555.

Voigt, Andreas Heinrich.
1) Die Auflösung von Urteilssystemen, das Eliminationsproblem und die Kriterien des Widerspruchs in der Algebra der Logik. Freiburger Doktordissertation, Leipzig, Alex. Danz 1890.

Waitz, Theodor. 1) Lehrbuch der Psychologie als Naturwissenschaft, Braunschweig 1849, 685 Seiten.

Weber, Heinrich. 1) Über Causalität in den Naturwissenschaften.

Rede, gehalten bei der Übergabe des Prorectorats der Albertus-Universität zu Königsberg. Leipzig, Engelmann 1881, 30 Seiten.

Weise, Chr. cf. Lange, J. C.

Wilkins, J. 1) Essay towards a real character and philosophical language, 1668.

Wolf, Christian. Psychologia empirica, 1779.

Wundt, Wilhelm.
1) *Logik.* Eine Untersuchung der Principien der Erkenntniss und der Methoden wissenschaftlicher Forschung. 1. Bd. Erkenntnisslehre, Stuttgart, Enke 1880; 586 Seiten.
2) 2. Bd. Methodenlehre, ibid. 1883; 620 Seiten.

Was die Logikliteratur überhaupt betrifft, soweit solche hier *nicht* angeführt worden, so sind schon in Ueberweg[1] und Prantl[1] die reichhaltigsten Angaben zu finden und ausserdem sei bemerkt, dass nach De Morgan[2] p. 333 — schon 1847 — die zweite Auflage von Blakey's „Essay on logic" einen Katalog von über tausend Logikschriften mit kurzer Titelangabe enthält.

Biographische Notizen über De Morgan, Boole und Jevons finden sich bei Liard[1] p. 71, 99, 147. Boole's Leben ist unter dem Titel „Homeside life of a scientific mind" in dem „University Magazine" von 1878 anonym von seiner Wittwe Mrs. Mary Boole beschrieben — vgl. über dasselbe auch Harley[1]. Über Augustus De Morgan's Leben und Schriften gibt auch die „Encyclopaedia Britannica" 9th Ed., Vol. 7, p. 64 .. 67 schätzenswerte Notizen.

Da ich die Anwendungen der Algebra der Logik auf *numerische* Probleme (im Allgemeinen) und insbesondere auf die Aufgaben der *Wahrscheinlichkeitsrechnung,* wie im Vorwort erwähnt, vorerst beiseite lassen musste, so sei zum Schlusse hier wenigstens die Literatur darüber zusammengestellt, soweit solche mir irgend zur Kenntniss gekommen. Es möchten in erwähnter Hinsicht in Betracht kommen:

Boole[4] p. 243 .. 398, (De Morgan[4] p. 393 .. 405, [5] p. 116 .. 125),

Ch. Peirce[1a], wo er Fehler Boole's berichtigt,

Macfarlane[1] sowie „Math. Questions" Vol. 32, p. 18 sq., p. 74 .. 77, Vol. 36, p. 101 sq.

Gilman[1], Elizabeth Blackwood, „Math. Questions", Vol. 29, p. 106 .. 108.

McColl[1] p. 16 .. 17, [4], sowie „Math. Questions" Vol. 29, p. 20 .. 23, p. 100, Vol. 33, p. 113.

Betreffs numerischer Syllogismen und Probleme überhaupt: Boole[5], Jevons[3] und Macfarlane und McColl, „Math. Questions" Vol. 35, p. 103 sq. Vol. 36, p. 27 sq., p. 55, p. 72.

Namenverzeichniss zum ersten Bande.

Die Zahlen hinter den Namen bedeuten die Nummer der Seite, auf welcher der Name sich erwähnt findet.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Matthiessen, Dr. Ludwig, ord. Professor der Physik an der Universität zu Rostock, **Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen.** [XVI u. 1001 S.] gr. 8. 1878. geh. n. *M.* 20.—

Dieses Werk kann in mehrfacher Beziehung als eine Neubearbeitung und vollständige Ausgabe der im Jahre 1866 in demselben Verlage erschienenen kleinen Schrift: „Die algebraischen Methoden der Auflösung der litteralen quadratischen, cubischen und biquadratischen Gleichungen“ angesehen werden. Dasselbe liefert in seinem jetzigen Umfange einen vollständigen Abriſs der Theorie und Geschichte der algebraischen Gleichungen, speziell der Gleichungen der ersten vier Grade. Bei dem reichhaltigen Stoffe, welchen das Werk nicht sowohl den Algebraisten von Studium und Fach, als insbesondere dem Historiker darbietet, fehlt hier der Raum, eine Detaillierung des gesamten Inhaltes zu geben; wir beschränken uns darauf, Inhalt und Anordnung der Hauptabschnitte summarisch anzudeuten. Zum allgemeinen Verständnis der Tendenz des Werkes muſs vorweg bemerkt werden, daſs durchaus und selbst in denjenigen Partieen des Werkes, in welchen die Resultate der Forschungen der sogenannten modernen Algebra, von Hesse und Aronhold begründet, von Cayley, Salmon und Clebsch zur vollständigen Theorie ausgebildet, die gebührende Berücksichtigung finden, immer das Hauptproblem der antiken Algebra in den Vordergrund gestellt worden ist, nämlich diejenigen Werte der Variablen zu bestimmen, welche einer gegebenen Funktion den Wert Null geben. Denn bekanntlich haben es die Untersuchungen der sogenannten modernen Algebra im strengen Sinne dieser Disziplin nur selten mit Gleichungen zu thun und werden die Methoden ihrer Auflösung nur nebensächlich behandelt; vielmehr ist der Hauptgegenstand dieses neuen Zweiges der algebraischen Analysis die Entdeckung derjenigen Eigenschaften einer binären Form, welche insbesondere durch lineare Transformationen unveränderlich bleiben, deren genaue Kenntnis aber für ein tieferes Studium der Theorie der algebraischen Gleichungen in ihrer gegenwärtigen Ausbildung unerläſslich ist.

Was Inhalt und Anordnung des in acht Kapitel zergliederten Werkes anbetrifft, so enthält

der erste Abschnitt eine Darstellung der allgemeinen Eigenschaften der Gleichungen mit einer Unbekannten und der Cayleyschen binären Formen;

der zweite Abschnitt die Lehre von den verschiedenen Transformationen und den symmetrischen Funktionen der Wurzeln, sowie die Darstellungsmethoden der Varianten, Retrovarianten, Geminanten und Diskriminanten;

der dritte Abschnitt die direkte Auflösung der partikulären Gleichungen;

der vierte Abschnitt ist dem Hauptgegenstande des Werkes gewidmet, nämlich einer systematischen Darstellung aller seit den ältesten Zeiten entdeckten Methoden der direkten Auflösung der Gleichungen der ersten vier Grade bei Anwendung der Substitution und der Reduzenten, untermischt mit historischen Durchblicken auf die Entwickelung der Disziplin und unter steter Hervorhebung des gemeinsamen die Methoden innerlich miteinander verknüpfenden Prinzips. In diesem Kapitel finden selbstverständlich die Erfindungen der modernen Algebraisten in ausführlicher Weise ihre Berücksichtigung.

In den folgenden drei Abschnitten sind dann die Methoden der Wurzeltypen oder die Kombinationsmethoden, sowie die goniometrischen und geometrischen Methoden der Auflösung der Gleichungen in entsprechender teils systematischer, teils historischer Anordnung entwickelt. Welch einer mannigfaltigen Behandlung die Algebra der Gleichungen fähig ist, mag aus dem Umstande entnommen werden, daſs in den letzterwähnten vier Abschnitten weit über zwei Centurien von Methoden ihrer Auflösung beschrieben werden.

Das Werk schlieſst mit dem achten Abschnitte, welcher ein chronologisch geordnetes Verzeichnis aller auf diesem Gebiete seit den ältesten Zeiten erschienenen Werke und Abhandlungen enthält, die die Theorie der Gleichungen in irgend einer Beziehung bereichert haben. Diese Gesamtlitteratur, von welcher grundsätzlich alle Handbücher der Algebra ausgeschlossen sind, umfaſst allein einen Raum von über zwei Druckbogen, indem auſser den Schriften, welche sich auf die litteralen Gleichungen der ersten vier Grade sowie auf die partikulären Gleichungen beziehen, auch noch in zwei besonderen Abteilungen die Schriften über die Behandlung der numerischen sowie die Gleichungen fünften Grades aufgeführt sind.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Lie, Sophus, Professor der Geometrie an der Universität Leipzig, Theorie der Transformationsgruppen. Erster Abschnitt. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel bearbeitet. [X u. 632 S.] gr. 8. 1888. geh. n. *M.* 18.—

Galois und seine Nachfolger, besonders C. Jordan, haben die fundamentale Bedeutung des Begriffes einer diskontinuierlichen Gruppe für die Theorie der algebraischen Gleichungen in helles Licht gesetzt. Derselbe Begriff ist später von Dedekind für die Zahlentheorie und in den letzten Jahren namentlich von Klein, Poincaré und Picard mit grofsem Erfolge für die allgemeine Funktionentheorie verwertet worden.

Es giebt nun neben den diskontinuierlichen Gruppen noch andere Kategorieen von Gruppen, unter denen zunächst die endlichen kontinuierlichen Gruppen Beachtung verdienen, indem ihre Theorie für mehrere mathematische Disziplinen, insbesondere für die Theorie der Differentialgleichungen von grofser Bedeutung ist.

Das vorliegende Werk giebt eine ausführliche und systematische Darstellung von Lies vieljährigen Untersuchungen über diesen Gegenstand, welche bisher in vielen einzelnen, meist schwer zugänglichen Schriften niedergelegt worden sind.

——— Zweiter Abschnitt. Unter Mitwirkung von Prof. Dr. Friedrich Engel bearbeitet. [VIII u. 555 S.] gr. 8. 1890. geh. n. *M.* 16.—

Die ursprüngliche Absicht, die beiden letzten Abschnitte dieses Werkes in einen Band zu vereinigen, ist aufgegeben, daher wird der zweite Abschnitt als ein besonderer Band erscheinen, ebenso wie der dritte, der bald folgen wird.

Der zweite Abschnitt enthält die Theorie der Berührungstransformationen und der Gruppen von solchen Transformationen, er zerfällt in fünf Abteilungen: In den beiden ersten werden der Begriff und die Eigenschaften der Berührungstransformationen entwickelt, die dritte Abteilung handelt von den infinitesimalen Berührungstransformationen, die beiden letzten beschäftigen sich mit der Theorie der Gruppen von Berührungstransformationen.

In der ersten Abteilung ist überdies die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung entwickelt, soweit es für den Plan des Ganzen notwendig war.

Besonders mufs erwähnt werden, dafs die beiden ersten Abteilungen, welche beinahe die Hälfte des ganzen Bandes ausmachen, von den Entwickelungen des ersten Abschnitts ganz unabhängig sind und daher auch von solchen verstanden werden können, welchen der erste Abschnitt unbekannt ist.

Schröder, Dr. E., Professor an der technischen Hochschule in Karlsruhe, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende. I. Band: Die sieben algebraischen Operationen. [X u. 360 S.] gr. 8. 1873. geh. n. *M.* 8.—

Dieser erste Band bildet ein in sich abgeschlossenes Ganzes und soll (ebenso wie jeder folgende) auf selbständigen Wert Anspruch haben, wenngleich er aufserdem bestimmt ist, ein ausführliches Werk über die Anfangsgründe des rein analytischen Teils der Mathematik einzuleiten.

Ein zweiter Band wird die Lehre von den natürlichen Zahlen enthalten, spezieller: die wissenschaftliche Begründung der gemeinen Arithmetik, die Elemente der Zahlentheorie, der Kombinatorik und der Gröfsenlehre; ein dritter Band soll dann die analytischen Zahlen behandeln und ein vierter überhaupt die Analysis des Endlichen zum Abschlufs bringen.

——— Abriss der Arithmetik und Algebra für Schüler an Gymnasien und Realschulen. Erstes Heft. Die sieben algebraischen Operationen. [48 S.] gr. 8. 1874. geh. *M.* —.60.

Dieser Abrifs hat die Bestimmung, den Schülern von denjenigen Lehrern in die Hand gegeben zu werden, welche ihren Unterricht auf eine völlig strenge und vorwurfsfreie Begründung der Elemente der Algebra zu stützen wünschen, in dem Sinne, wie dieselbe in dem ausführlichen „Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende“ (Leipzig 1873, X u. 360 S.) von dem Verfasser zu geben versucht worden ist. Das Vorwort zu jenem „Lehrbuche“ enthält eine nähere Anleitung über die dabei beabsichtigte Art der Verwendung.

——— der Operationskreis des Logikkalkuls. [VI u. 37 S.] gr. 8. 1877. geh. *M.* 1.50.

Die Schrift entwickelt eine durchaus elementare Methode, die Probleme der deduktiven Logik mittelst eleganter Rechnung zu lösen — wodurch diese Disziplin in die grofse Kette der rein mathematischen Wissenschaften endgültig eingereiht wird.

17. Okt. 1968 Fl

030270143

280478084
161178194