$$a = \alpha(\beta_1 + \gamma_1 + \delta_1), \qquad a_1 = \alpha_1 + \beta\gamma\delta,$$
$$b = \beta(\alpha_1 + \gamma_1 + \delta_1) \qquad \text{etc.}$$
$$c = \gamma(\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1)$$
$$d = \delta(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1).$$

Obwol wir uns unter den Koeffizienten fortan diese Ausdrücke vorzustellen haben werden, ziehen wir der Einfachheit wegen vor, doch die alten Namen a, b, c, d für dieselben beizubehalten.

Schon in § 22 unter β) und γ) haben wir die Gleichung $F = 0$ nach x resp. nach y geordnet angeschrieben und aus dem Anblick dieser Darstellungen fliessen — nach dem vollen Schema unsrer Methode — die Gleichungen:

$$x = x(a_1 y + b_1 y_1) + x_1(cy + dy_1),$$
$$y = (a_1 x + c_1 x_1)y + (bx + dx_1)y_1,$$

deren jede mit der aufzulösenden $F = 0$ äquivalent sein wird.

Systematisch zuwerke gehend ersetzen wir rechts in ihnen die Namen x, y der Unbekannten durch unbestimmte Parameter μ, ν. Ordnen wir auch sogleich nach diesen, so ergeben sich die Ausdrücke, neben welche wir diejenigen für ihre Negationen schreiben:

$$x = a_1\mu\nu + b_1\mu\nu_1 + c\mu_1\nu + d\mu_1\nu_1, \qquad x_1 = a\mu\nu + b\mu\nu_1 + c_1\mu_1\nu + d_1\mu_1\nu_1,$$
$$y = a_1\mu\nu + b\mu\nu_1 + c_1\mu_1\nu + d\mu_1\nu_1, \qquad y_1 = a\mu\nu + b_1\mu\nu_1 + c\mu_1\nu + d_1\mu_1\nu_1.$$

Hiermit sind nun leicht die vier Produkte zu bilden:

$$xy = a_1\mu\nu + d\mu_1\nu_1, \qquad xy_1 = b_1\mu\nu_1 + c\mu_1\nu,$$
$$x_1y = b\mu\nu_1 + c_1\mu_1\nu, \qquad x_1y_1 = a\mu\nu + d_1\mu_1\nu_1,$$

deren Einsetzung in $F = 0$ uns die Bedingung liefert:

$$ad(\mu\nu + \mu_1\nu_1) + bc(\mu\nu_1 + \mu_1\nu) = 0,$$

welche einzig noch von μ, ν zu erfüllen ist.

Der Versuch, die Gleichung so, wie die obige, systematisch nach den Unbekannten μ, ν aufzulösen, führt im Zirkel herum — wie auch schon a priori zu sehen ist, in Anbetracht, dass die Gleichung ungeändert bleibt, wenn man in ihr (dem Vorbild entsprechend, das sie mit $F = 0$ zusammengehalten darbietet) das a sowol als das d durch ad, zugleich das b und das c durch bc ersetzt.

Indessen kommt man hier unschwer zum Ziele durch die Bemerkung, dass wenn

$$\mu\nu_1 + \mu_1\nu = \varrho \quad \text{genannt wird, sich} \quad \mu\nu + \mu_1\nu_1 = \varrho_1$$

dazu ergibt, wonach die zu erfüllende Gleichung lautet:

$$ad\varrho_1 + bc\varrho = 0.$$

Dieser wird auf die allgemeinste Weise vermittelst des Ansatzes (cf. Th. 50):

$$\varrho = ad\overline{\omega}_1 + (b_1 + c_1)\omega, \qquad \varrho_1 = (a_1 + d_1)\omega_1 + bc\overline{\omega}$$

— worin die überstrichenen Faktoren auch unterdrückt werden dürften — zu genügen sein, und wenn man darnach

$$\mu = \varkappa\varrho_1 + \lambda\varrho, \qquad \mu_1 = \varkappa_1\varrho_1 + \lambda_1\varrho$$
$$\nu = \varkappa\varrho_1 + \lambda_1\varrho, \qquad \nu_1 = \varkappa_1\varrho_1 + \lambda\varrho$$

nimmt, wie sich dies nach den in Aufgabe 12 gewonnenen Schemata für die symmetrisch allgemeine Auflösung der Gleichung

$$\mu\nu_1 + \mu_1\nu = \varrho$$

nach den Unbekannten μ, ν (bei gegebenem ϱ) ergibt, so wird unser Problem gelöst sein.

Es erübrigt nur mehr die Werte von μ, ν, oder besser sogleich die Produkte:

$$\mu\nu = \varkappa\varrho_1, \quad \mu\nu_1 = \lambda\varrho, \quad \mu_1\nu = \lambda_1\varrho, \quad \mu_1\nu_1 = \varkappa_1\varrho_1$$

nebst den gefundenen Werten von ϱ, ϱ_1 in die letzten Ausdrücke von x, y einzusetzen. Nach ϱ geordnet wird zunächst:

$$x = (a_1\varkappa + d\varkappa_1)\varrho_1 + (b_1\lambda + c\lambda_1)\varrho, \qquad x_1 = (a\varkappa + d_1\varkappa_1)\varrho_1 + (b\lambda + c_1\lambda_1)\varrho,$$
$$y = (a_1\varkappa + d\varkappa_1)\varrho_1 + (b\lambda + c_1\lambda_1)\varrho, \qquad y_1 = (a\varkappa + d_1\varkappa_1)\varrho_1 + (b_1\lambda + c\lambda_1)\varrho$$

und hieraus fliessen bei Unterdrückung jener überstrichenen ω-Faktoren wol die konzisestmöglichen Ausdrücke für die *„Wurzeln" der vorgelegten Gleichung:*

$$x = bc(a_1\varkappa + d\varkappa_1) + ad(b_1\lambda + c\lambda_1) + a_1(d + \varkappa)\omega_1 + b_1(c + \lambda)\omega,$$
$$y = bc(a_1\varkappa + d\varkappa_1) + ad(b\lambda + c_1\lambda_1) + a_1(d + \varkappa)\omega_1 + c_1(b + \lambda_1)\omega,$$
$$x_1 = bc(a\varkappa + d_1\varkappa_1) + ad(b\lambda + c_1\lambda_1) + d_1(a + \varkappa_1)\omega_1 + c_1(b + \lambda_1)\omega,$$
$$y_1 = bc(a\varkappa + d_1\varkappa_1) + ad(b_1\lambda + c\lambda_1) + d_1(a + \varkappa_1)\omega_1 + b_1(c + \lambda)\omega,$$

worin $\varkappa, \lambda, \omega$ unabhängig beliebige Parameter vorstellen.

Direkt dürfte hier nicht ganz leicht zu sehen sein, dass die beiden letzten Ausdrücke wirklich die (korrekt gebildeten) Negationen für die ersten beiden sind. Übersehbar wird dies erst, nachdem man die Ausdrücke nach den drei Parametern entwickelt haben wird, was auch zum Ausmultipliziren derselben behufs Probens der Auflösungen die bequemste Form gibt. Man findet:

$$x = \{(a_1 + b_1d)\varkappa\lambda + (a_1 + cd)\varkappa\lambda_1 + d(a_1 + b_1)\varkappa_1\lambda + d(a_1 + c)\varkappa_1\lambda_1\}\omega_1 +$$
$$+ \{(b_1 + a_1c)\varkappa\lambda + c(a_1 + b_1)\varkappa\lambda_1 + (b_1 + cd)\varkappa_1\lambda + c(b_1 + d)\varkappa_1\lambda_1\}\omega,$$
$$y = \{(a_1 + bd)\varkappa\lambda + (a_1 + c_1d)\varkappa\lambda_1 + d(a_1 + b)\varkappa_1\lambda + d(a_1 + c_1)\varkappa_1\lambda_1\}\omega_1 +$$
$$+ \{b(a_1 + c_1)\varkappa\lambda + (c_1 + a_1b)\varkappa\lambda_1 + b(c_1 + d)\varkappa_1\lambda + (c_1 + bd)\varkappa_1\lambda_1\}\omega;$$

$$x_1 = \{a(b+d_1)\varkappa\lambda + a(c_1+d_1)\varkappa\lambda_1 + (d_1+ab)\varkappa_1\lambda + (d_1+ac_1)\varkappa_1\lambda_1\}\omega_1 +$$
$$+ \{b(a+c_1)\varkappa\lambda + (c_1+ab)\varkappa\lambda_1 + b(c_1+d_1)\varkappa_1\lambda + (c_1+bd_1)\varkappa_1\lambda_1\}\omega,$$
$$y_1 = \{a(b_1+d_1)\varkappa\lambda + a(c+d_1)\varkappa\lambda_1 + (d_1+ab_1)\varkappa_1\lambda + (d_1+ac)\varkappa_1\lambda_1\}\omega_1 +$$
$$+ \{(b_1+ac)\varkappa\lambda + c(a+b_1)\varkappa\lambda_1 + (b_1+cd_1)\varkappa_1\lambda + c(b_1+d_1)\varkappa_1\lambda_1\}\omega.$$

Die Probe, dass, $abcd = 0$ vorausgesetzt, identisch:

$$axy = 0, \quad bxy_1 = 0, \quad cx_1y = 0 \quad \text{und} \quad dx_1y_1 = 0$$

wird, stimmt — was eine Anzahl leichter Rechenexempel liefert, indem man immer nur die *gleichstelligen* Koeffizienten aus den entsprechenden zwei Zeilen zu verknüpfen braucht. Mit Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse brauchte übrigens nur eine von diesen vier Gleichungen auf ihre Richtigkeit geprüft zu werden, wofern die letztere diesmal nicht schon aus der Herleitung erhellte.

Auf Grund der Relation $abcd = 0$ kann man bemerken, dass die folgenden unter den obigen Koeffizienten mit den ihnen rechts gleichgesetzten äquivalent sind:

$$\begin{aligned} a_1 + b_1d &= a_1 + d(b_1+c), & d(a_1+c) &= d(a_1+b_1c),\\ b_1 + a_1c &= b_1 + c(a_1+d), & c(b_1+d) &= c(b_1+a_1d),\\ a_1 + c_1d &= a_1 + d(b+c_1), & d(a_1+b) &= d(a_1+bc_1),\\ c_1 + a_1b &= c_1 + b(a_1+d), & b(c_1+d) &= b(c_1+a_1d). \end{aligned}$$

Ersetzte man jene durch diese, desgleichen ihre Negationen wo sie auftreten durch diejenigen der rechten Seite, so ist es, um alles vollends in den unabhängigen Parametern ausgedrückt zu erhalten, nur mehr erforderlich, dass man die lateinischen Buchstaben a, b, c, d *durchweg* in die griechischen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verwandle.

Was die Anforderungen der Symmetrie betrifft, so geht die Gleichung $F = 0$ ausschliesslich in sich selbst über durch die folgenden Vertauschungen („Transpositionen") links vom Vertikalstrich:

1^0)	$(x, y)\,(x_1, y_1)\,(b, c)$	(λ, λ_1)
2^0)	$(x, y_1)\,(x_1, y)\,(a, d)$	$(\varkappa, \varkappa_1)$
3^0)	$(x, x_1)\,(a, c)\,(b, d)$	$(\varkappa, \lambda_1)\,(\lambda, \varkappa_1)\,(\omega, \omega_1)$
4^0)	$(y, y_1)\,(a, b)\,(c, d)$	$(\varkappa, \lambda)\,(\varkappa_1, \lambda_1)\,(\omega, \omega_1)$
5^0)	$(x, x_1)\,(y, y_1)\,(a, d)\,(b, c)$	$(\varkappa, \varkappa_1)\,(\lambda, \lambda_1)$

Dieselben, verbunden mit den rechts vom Vertikalstrich daneben gesetzten Vertauschungen zwischen den Parametern, führen auch das System der vier für x, y, x_1, y_1, angegebenen Lösungen nur in sich selbst zurück. Da aus denen 1^0) und 3^0) die übrigen Vertauschungen alle ableitbar sind, so braucht dies nur für jene beiden wirklich nachgesehen zu werden.

Den Forderungen der Symmetrie ist also durch unsre Lösungen durchaus Genüge geleistet.

Es ist nunmehr nur noch die Frage zu erledigen, wie etwa die Parameter $\varkappa, \lambda, \omega$ anzunehmen sind, damit unsre Formeln für die Wurzeln ein *gegebenes* Wertepaar x, y darstellen, das übrigens die Gleichung $F = 0$ erfüllt.

Nach dem Hülfstheorem des Paragraphen — vergl. auch § 21, ω) — ist es zu dem Ende ausreichend $\mu = x$, $\nu = y$ selbst zu machen, desgleichen $\omega = \varrho$ selbst zu nehmen, und nach dem in Aufgabe 12 Ermittelten werden die Annahmen $\varkappa = \mu\nu$ nebst $\lambda = \mu\nu_1$ (oder auch $\mu + \nu_1$) zum Ziele führen. Darnach werden wir in Gestalt von:

$$\varkappa = xy, \qquad \lambda = xy_1 \text{ (oder auch } x + y_1), \qquad \omega = xy_1 + x_1y$$

ein System von Annahmen haben, welches in einfacher Weise unsre Formeln für x, y zu solchen macht die sich als blosse Umformungen der Gleichung $F = 0$ herausstellen, auf Grund von dieser sich identisch bewahrheiten. Die Rechnung bestätigt dies in der That direkt; man wird dazu am besten die konzisesten Ausdrücke von x, y nehmen und auch die aus $F = 0$ durch Elimination von x oder y sich ergebenden beiden Relationen β'), γ') des § 22 dabei berücksichtigen.

Die vorstehend gelösten Aufgaben liefern begreiflicherweise uns auch ebensoviele Eliminationsprobleme: eliminirt man aus ihren Lösungen, resp. den die Wurzeln darstellenden Gleichungen, sämtliche unabhängigen Parameter (also griechischen Symbole), so kann man sich überzeugen, dass als Resultante hervorgeht die ursprünglich zur Auflösung vorgelegt gewesene Gleichung, und zwar *gerade nur diese* aber keine weitergehende Relation zwischen den Unbekannten (und Koeffizienten) — was als eine Kontrole für die Richtigkeit unsrer Betrachtungen dient.

Dies auch bei Aufgabe 15 durchzuführen, ist leicht, obschon ein wenig mühsam.

Eliminirt man hier erst $\varkappa$ und λ ohne ω, so zeigt sich, dass ω diesmal kein Luxus-Parameter ist, wie bei den Aufgaben 1 bis 4, wo es, selbst bei *gegebenen* $x, y, \ldots$, noch beliebig spezialisirt, gleich 0 oder 1 z. B. genommen werden konnte. Vielmehr muss diesmal ω eine als Resultante der Elimination von $\varkappa, \lambda$ sich ergebende Relation erfüllen, welche — mit Rücksicht auf die Endresultante $F = 0$ — in der einfachen Gestalt geschrieben werden kann:

$$(a_1 + d_1)\,(xy_1 + x_1y)\,\omega_1 + (b_1 + c_1)\,(xy + x_1y_1)\,\omega = 0.$$

Nur insofern die Werte von x, y als erst durch die Gleichung

$F = 0$ bestimmt gelten sollen, wird gleichwie $\varkappa$ und λ, so auch ω willkürlich, werden alle dreie wirklich *unabhängige* Parameter sein. —

Aus Vorstehendem wird der Studirende schon inne geworden sein, dass in unsrer Disziplin noch eine Fülle von Problemen der Lösung harrt. Ich signalisire (ausser den Aufgaben 10 und 11) insbesondere: die symmetrisch allgemeine Auflösung der allgemeinsten Gleichung mit *drei* Unbekannten. Ferner: die Ergänzung der Methode zu einer solchen, die in allen Fällen unfehlbar zum Ziele führt — oder andernfalles: der Nachweis, dass in gewissen Fällen die Aufgabe unlösbar ist, nebst der vollständigen Angabe, in welchen Fällen eben ihre Lösung unmöglich bleibt.

In Anbetracht, dass wir bei der Darstellung *zweier* Unbekannten mittelst unabhängiger Parameter in Aufgabe 14 mit *einem* solchen auskamen, in Aufgabe 12 deren *zweie* und in Aufgabe 15 deren *dreie* benötigten, reihen weiter hieran sich Fragen nach der Minimalanzahl der bei jedem Probleme erforderlichen selbständigen Parameter, und anderes mehr.*)

Dies alles schon bei demjenigen Teile unsrer Disziplin, der (nächst dem Aussagenkalkul) als der vollendetste, ja als *im wesentlichen* vollendet hingestellt werden darf! Betreffen ja doch die eben charakterisirten Forderungen nur noch die Art und Weise, nur mehr die Ausdrucksformen einer Lösung, die schon gegeben wurde. —

Des weiteren vergleiche man noch den Anhang 6, welcher (etwa mit den Schlussbetrachtungen des Anhang 4 verschmolzen) auch als eine selbständige, den andern ebenbürtige Vorlesung in die Theorie hätte aufgenommen werden können. Dass ich ihn als eine solche nicht einreihte, geschah hauptsächlich deshalb, weil in ihm das *numerische* Element der Logik in einem Grade hervortritt, welcher mit der auf dessen Ausschluss gerichteten Tendenz des Buches nicht ganz im Einklang sich befindet. —

*) Z. B. noch: Wir stiessen auf Ausdrücke, wie bei Aufgabe 9 auf
$$bc + a_1(b + c),$$
deren Negation einfach erhalten wird, indem man sämtliche einfachen Symbole, welche im Ausdruck vorkommen, in ihre Negationen umwandelt — Beantwortung der Frage: welches sind die Ausdrücke, die diese Eigenschaft haben müssen und allein haben können? Welches sind erschöpfend die zu sich selbst dualen Formeln des Kalkuls? Etc.

Dreizehnte Vorlesung.

§ 25. Anwendungsbeispiele und Aufgaben.

Als einfachste Anwendungen der Theorie läge es nunmehr nahe, etwa die sogenannten *„unmittelbaren Folgerungen“* und alsdann die *Syllogismen* der schulmässigen Logik vorzunehmen. Dies könnten wir auch leicht, insoweit nur *universale* Prämissen und Konklusionen in Betracht zu ziehen sind.

Aufgaben aber, bei welchen *partikulare* Urteile mit in Betracht kommen, müssen wir als um einen Grad schwieriger bezeichnen. Bei der Unbestimmtheit des Zahlworts „einige“ ist dies auch begreiflich. Es stellt sich heraus, dass die Behandlung solcher Aufgaben, selbst wenn sie in ihrer Art noch so einfach angelegt erscheinen, für die bisherige schon leidlich in sich abgeschlossene Theorie zumeist*) *noch gar nicht erreichbar* ist (vergl. § 33). Und so könnte von den angedeuteten Problemen doch nur ein unbedeutender Bruchteil zur Zeit erledigt werden — Grund für uns, das ganze Unternehmen zu verschieben.

Wir beschäftigen uns darum hiernächst nur mit solchen Aufgaben, wie sie unsrer Theorie prinzipiell schon zugänglich sind — mögen dieselben in ihrer Art auch erheblich verwickelter erscheinen als wie die oben angedeuteten. Dabei wird ähnlich, wie in der Mathematik verfahren, wo man z. B. auch die komplizirtesten Aufgaben über quadratische Gleichungen bewältigen lernen wird, bevor man sich mit der einfachsten kubischen Gleichung abgibt. Durch jeweilige „Beschränkung“ auf bestimmte abgegrenzte Gebiete ist allein die „Meister“schaft zu erlangen.

Wir stellen demnach eine Reihe von Problemen und Untersuchungen hier zusammen. In erster Linie sollen diese zur *Erläuterung* dienen für die bisher entwickelten allgemeinen Methoden. Auch mögen sie als *Übungsbeispiele* angesehen werden, um die Bethätigung ebendieser Methoden beim Studirenden anzubahnen. Zum Teil sollen diese Beispiele später auch als Prüfsteine verwendet werden, um an ihnen vergleichende Betrachtungen über diese und noch andere fernerhin auseinanderzusetzende Auflösungsmethoden anzustellen. Alle können sie dazu dienen, die Kraft der rechnerischen Methode gegenüber den herkömmlichen schulmässig verbalen Über-

*) Ausgenommen sind nur diejenigen Fälle, wo durchweg — beim Problem und seiner Lösung — das „einige a“ im selben Sinne verstanden werden muss, sodass es als Klasse von vornherein mit a' bezeichenbar, in Bezug auf welches dann die Aufgabe von universalem Charakter wäre.

legungsweisen in's rechte Licht zu setzen, jene als die überlegene zu erproben.

Dagegen wolle man diesen Beispielen nicht etwa die Bestimmung zuschreiben, dass sie den *Nutzen* unsrer Kunstlehre des Denkens — vielleicht für das praktische Leben — darzuthun hätten.*) Utilitarische Bestrebungen liegen uns nach wie vor ferne und setzen wir voraus, dass auch der Leser von dem wissenschaftlichen Interesse geleitet sei.

Ich gebe die Aufgaben nicht etwa peinlich nach ihrer Schwierigkeit geordnet. Der Studirende, welcher mit den leichtesten beginnen und von diesen allmälig aufsteigend zu den verwickelteren fortschreiten will („schwierige" gibt es eigentlich unter den bisherigem Kalkul überhaupt zugänglichen Problemen, nachdem derselbe so weit entwickelt ist, nicht mehr) braucht sich nur zuerst an diejenigen zu machen, welchen der geringste Druckumfang gewidmet ist, und bei denen sich am wenigsten Formelanhäufungen dem Auge darbieten!

Ich beginne vielmehr mit jener komplizirtesten der von Boole gestellten Aufgaben, welche ich erstmalig in[2] nach seiner geläuterten Methode behandelt habe und auch hier mit allen Zwischenrechnungen durchnehme — weil mir dieselbe jenen oben angedeuteten Zwecken der Methodenerläuterung und später auch -vergleichung am vielseitigsten und besten zu dienen fähig erscheint.

1. Aufgabe. (Boole[1] p. 146 .. 149.) Es werde (gemäss Boole) angenommen**), dass die Beobachtung einer Klasse von Erscheinungen (Natur- oder Kunsterzeugnissen, z. B. Substanzen) zu den folgenden allgemeinen Ergebnissen geführt hat:

α) Dass in welchem auch von diesen Erzeugnissen die Merkmale A und C gleichzeitig fehlen, das Merkmal E gefunden wird, zusammen mit einem der beiden Merkmale B und D, aber nicht mit beiden.

β) Dass, wo immer die Merkmale A und D in Abwesenheit von E gleichzeitig auftreten, die Merkmale B und C entweder beide sich vorfinden oder beide fehlen.

γ) Dass überall, wo das Merkmal A mit dem B oder E, oder mit beiden zusammen besteht, auch entweder das Merkmal C vorkommt oder das D, aber nicht beide. Und umgekehrt, überall wo von den Merkmalen C und D das eine ohne das andre wahrgenommen wird, da soll auch

*) Dafür sind sie meistens zu künstlich ersonnen. Zum Teil werden die Aufgaben *mehr* nur mit Scherzrätseln, Vexiraufgaben, Spielproblemen verwandt erscheinen.

**) Über die Zulässigkeit (in gewissem Sinne Unzulässigkeit) dieser Annahme vergleiche die unten folgende „Anmerkung" zur Aufgabe.

das Merkmal A in Verbindung mit B oder mit E oder mit beiden zugleich auftreten.

Verlangt sei

erstens dass ermittelt werde, was in jedem gegebenen Falle aus der erwiesenen Gegenwart des Merkmals A in Bezug auf die Merkmale B, C und D geschlossen werden kann,

zweitens auch zu entscheiden, ob irgendwelche Beziehungen unabhängig von der An- oder Abwesenheit der übrigen Merkmale bestehen zwischen derjenigen der Merkmale B, C, D (und bejahendenfalles welche?),

drittens in ähnlicher Weise zu beantworten, was aus dem Vorhandensein des Merkmals B folgt in Bezug auf die Merkmale A, C und D (sowie umgekehrt, wann aus An- oder Abwesenheit von Merkmalen dieser letzteren Gruppe auf diejenige von B geschlossen werden kann),

viertens zu konstatiren, was für die Merkmale A, C, D an sich folgt.

Auflösung. Die ganze Klasse der Fälle von Erscheinungen, resp. die Klasse der Erzeugnisse, in welchen sich eines der Merkmale A, B, C, D, E vorfindet, werde mit dem entsprechenden Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets bezeichnet.*) Bedeutet sonach a die Klasse der Fälle in welchen das Merkmal A vorliegt, so wird a_1 die Klasse derjenigen Fälle bedeuten, in welchen dieses Merkmal A fehlt, etc.

Nach dem in den Paragraphen 8 und 16 über die Interpretation des identischen Kalkuls für Klassen Gesagten — vergl. auch § 18, $\varepsilon) \ldots \vartheta)$ übersetzen sich im engsten Anschluss an den Worttext die Data $\alpha), \beta), \gamma)$ unseres Problems bezüglich in die nachstehenden Propositionen (Subsumtionen resp. Gleichungen):

$$\delta) \quad a_1 c_1 \Subset (b d_1 + b_1 d) e, \qquad a d e_1 \Subset b c + b_1 c_1, \qquad a (b + e) = c d_1 + c_1 d.$$

Die Gleichung erhält man eigentlich zuerst als Subsumtion vor und rückwärts gelesen, nämlich als

$$a (b + e) \Subset c d_1 + c_1 d \quad \text{nebst} \quad c d_1 + c_1 d \Subset a (b + e),$$

was aber nach Def. (1) der Gleichheit sofort eben in die Gleichung zusammenzuziehen ist.

Man bemerkt nun, dass in jedem unsrer drei Data $\alpha), \beta), \gamma)$ die

*) Für unser a, b, c, d, e verwenden Boole und Einige der nach ihm das Problem Behandelnden bezüglich: x, y, z, w, v.

bezüglich der Merkmale A, B, C, D gegebene Auskunft verquickt erscheint mit einem andern Element E, über welches wir in den verlangten Schlussfolgerungen nichts zu sagen wünschen.

Es wird deshalb in erster Linie erforderlich sein, das dem Merkmal E entsprechende Klassensymbol e zu eliminiren aus dem System der Propositionen δ), in welches wir die Data eingekleidet haben.

Zu dem Ende bringen wir dieselben rechts auf Null — nach dem Schema der Theoreme $38_{\times}$) und 39_{+}) — und bilden gemäss Th. 20_{+}) — ihre „vereinigte Gleichung", indem wir, statt jeder einzelnen, sogleich die Summe ihrer linken Seiten gleich Null setzen. Dabei ist lediglich Sorge zu tragen, dass man die Negationen der vorkommenden Ausdrücke richtig ansetze, mit Rücksicht namentlich auf Th. 36) und 46_{+}). Die vereinigte Gleichung lautet:

$$\varepsilon)\quad a_1c_1(bd+b_1d_1+e_1)+ade_1(bc_1+b_1c)+a(b+e)(cd+c_1d_1)+(a_1+b_1e_1)(cd_1+c_1d)=0.$$

Die Resultante der Elimination von e besteht nun nach § 21, ι) aus dem von e und e_1 freien Gliede im Polynome dieser Gleichung:

$$a_1c_1(bd+b_1d_1)+ab(cd+c_1d_1)+a_1(cd_1+c_1d),$$

dessen erster Term a_1c_1bd noch in dem letzten a_1c_1d nach dem Absorptionsgesetze 23_{+}) eingeht, vermehrt um das Produkt der Koeffizienten, welche e und e_1 in ε) besitzen — das Ganze gleich 0 gesetzt.

Der Koeffizient von e ist aber: $a(cd+c_1d_1)$, der von e_1 ist desgleichen leicht aus ε) herauszulesen als:

$$a_1c_1+ad(bc_1+b_1c)+b_1(cd_1+c_1d);$$

das Produkt beider ist gleich:

$$adb_1c\,^{*}),$$

mithin die Resultante:

$$a_1(cd_1+c_1d+b_1c_1d_1)+a(bcd+bc_1d_1+b_1cd)=0,$$

oder durch Zusammenziehung zweier Terme:

$$\zeta)\quad a(cd+bc_1d_1)+a_1(cd_1+c_1d+b_1c_1d_1)=0.$$

Diese schon recht übersichtliche Gleichung hat nun den Ausgangspunkt für unsere weiteren Betrachtungen zu bilden.

Man bemerkt zunächst, dass, betrachtet als „entwickelt" nach den Argumenten c und d, die Koeffizienten von a und a_1 in ζ) geradezu die Negationen von einander sind, meinem Theorem 46_{+}) gemäss

*) Miss Ladd hat[1] p. 58 darauf aufmerksam gemacht, dass Herr Wundt[1] p. 356 sq., indem er die auf b bezüglichen Schlüsse zieht, dieses Glied zufällig auslässt, weshalb dieselben falsch ausfielen; ich finde: nur unvollständig.

gebildet.*) Das Produkt dieser beiden Koeffizienten sowol als auch dasjenige ihrer beiden Negationen ist demnach gleich Null.

Um die *zweite* der gestellten Fragen zu beantworten und zugleich die Beantwortung der *ersten* Frage vorzubereiten, müssen wir jetzt a aus ζ) eliminiren. Dem Gesagten zufolge führt diese Elimination aber auf die Identität $0=0$, womit in Beantwortung jener *zweiten* Frage bewiesen erscheint: *dass zwischen den Merkmalen B, C und D* für sich hinsichtlich ihrer An- oder Abwesenheit *keine unabhängige Beziehung besteht.*

Die Gleichung ζ) ist demnach äquivalent ihrer „Auflösung" nach a.

Weil indess, wie bemerkt, auch das Produkt der Negationen der Koeffizienten von a und a_1 verschwindet, der eine Koeffizient die Negation des andern ist, muss hier der in § 21, σ) betrachtete Fall vorliegen: der in dem Ausdruck der Wurzel gemeinhin auftretende ein unbestimmtes Gebiet u enthaltende Term geht in den andern ein, die Gleichung hat nur *eine* Wurzel, die Unbekannte a ist durch die Gleichung eindeutig bestimmt, und zwar hat sie zum Ausdrucke den Koeffizienten ihrer Negation a_1 in der Gleichung, sodass ganz unmittelbar:

$$\eta)\quad a=cd_1+c_1d+b_1c_1d_1$$

als die gesuchte Auflösung nach a erhalten wird.

Dieselbe könnte nebenbei gesagt auch in den Formen angesetzt werden:

$$\vartheta)\quad a=cd_1+c_1d+b_1c_1=cd_1+c_1d+b_1d_1=cd_1+c_1d+b_1(c_1+d_1),$$

die unbedingt mit dem Ausdruck η) äquivalent sind, vergl. § 18, β_1).

Die Gleichung η) beantwortet nun die *erste* der gestellten Fragen, und zwar, indem wir sie als Subsumtion vor- und rückwärts interpretiren, dahin: *wo immer das Merkmal A zu finden ist, muss auch das Merkmal C oder das D vorliegen, aber nicht beide zugleich, oder aber es müssen beide zusammen mit dem Merkmal B fehlen;* umgekehrt: *Wo die Merkmale B, C, D alle drei fehlen, sowie auch, wo von den Merkmalen C, D das eine ohne das andere vorliegt, da muss auch das Merkmal A sich finden.*

*) Die Bemerkung des Herrn Peirce in [5] p. 42, Z. 5 v. o. dass die in Gleichung ζ) über a, b, c, d enthaltene Information sich in: $a+cd+bc_1d_1=1$ zusammenziehen lasse, beruht auf einem Versehen. Will man die Gleichung rechts auf 1 bringen, so hat man nur die Koeffizienten von a und a_1 auszutauschen, und eine einfachere Fassung als die nachherige η) oder ϑ) lässt sich der Aussage nicht geben.

Des weiteren muss nun b aus der Gleichung ζ) eliminirt werden. Da die Koeffizienten ac_1d_1 und $a_1c_1d_1$ von b und b_1 daselbst disjunkt sind, Null zum Produkte haben, so besteht die Resultante dieser Elimination einfach in der gleich 0 gesetzten Summe der von b und b_1 freien Glieder in ζ), d. h. sie lautet:

ι) $$acd + a_1cd_1 + a_1c_1d = 0$$

— eine Gleichung, aus welcher die Antwort auf die *vierte* Frage nachher zu entnehmen sein wird.

Mit Rücksicht auf diese Relation ι) vereinfacht nun die Gleichung ζ) sich zu:

$\varkappa$) $$ac_1d_1b + a_1c_1d_1b_1 = 0$$

und gibt dieselbe dem Th. 50_+) gemäss regelrecht nach der Unbekannten b aufgelöst:

$$b = a_1c_1d_1 + v\,(ac_1d_1)_1 = a_1c_1d_1 + v\,(a_1 + c + d),$$

wobei v eine unbestimmte Klasse vorstellt. Hier lässt aber nach Th. 33_+) Zusatz der in v zu multiplizirende Term a_1 sich mit dem Faktor $(c + d)_1 = c_1d_1$ ausstatten und geht hernach das betreffende Glied $va_1c_1d_1$ im ersten Term der rechten Seite nach dem Absorptionsgesetze auf, sodass:

λ) $$b = a_1c_1d_1 + v\,(c + d)$$

als ein einfacherer Ausdruck für die gesuchte Auflösung nach b erscheint.

Behufs bequemster Deutung mittelst Worten werden wir dieses Ergebniss — dasselbe für $v = 0$ und $v = 1$ in Anspruch nehmend — umschreiben in die Doppelsubsumtion:

μ) $$a_1c_1d_1 \mathrel{\underline{\in}} b \mathrel{\underline{\in}} a_1 + c + d,$$

die auch gemäss Th. 49_+) direkt aus $\varkappa$) herausgelesen werden konnte. Damit ist in Beantwortung der *dritten* Frage gefunden: *Wenn die Merkmale A, C und D gleichzeitig fehlen, so findet sich das Merkmal B, und wo das Merkmal B sich findet, da muss das Merkmal C oder auch das D vorliegen, wonicht A fehlt.*

Behufs Beantwortung der *vierten* Frage könnte man die Gleichung ι) direkt in Worte fassen wie folgt: *Die Merkmale A, C und D kommen nicht alle drei zusammen vor und wo das Merkmal A fehlt kann von den Merkmalen C und D das eine nicht ohne das andere auftreten.*

Etwas übersichtlicher vielleicht wird man die Gleichung ι) in ihre Auflösung nach a umschreiben mit der sie (weil Elimination von a blos auf $0 = 0$ führt) äquivalent sein muss. Diese Auflösung lautet:

ν) $$a = cd_1 + c_1d + w\,(c_1 + d_1) = cd_1 + c_1d + wc_1d_1,$$

wo w unbestimmt ist — cf. Th. 33_+) nebst dem Absorptionsgesetze (behufs Rechtfertigung der letztvollzogenen Kürzung). Oder als Doppelsubsumtion geschrieben:

ξ) $$cd_1 + c_1d \mathrel{\underline{\in}} a \mathrel{\underline{\in}} c_1 + d_1.$$

Sie lehrt, *dass aus der Anwesenheit von A geschlossen werden kann auf die Abwesenheit von wenigstens einem der beiden Merkmale C, D,* und umgekehrt, *dass wo von diesen letztern C und D das eine allein (ohne das andere) sich vorfindet, geschlossen werden kann auf die Anwesenheit von A.*

Zur Übung möge der Leser aus ζ) auch c durch a, b, d und d durch a, b, c ausdrücken und die Ergebnisse interpretiren — Aufgaben die auch McColl sich gestellt. Man findet leicht als Eliminationsresultante, vereinfachte Gleichung und Lösung:

$$a_1b_1d_1 = 0, \qquad (ad + a_1d_1)\,c + (abd_1 + a_1d)\,c_1 = 0,$$
$$c = abd_1 + a_1d + uad_1 \quad \text{oder} \quad abd_1 + a_1d \mathrel{\underline{\in}} c \mathrel{\underline{\in}} ad_1 + a_1d;$$
$$a_1b_1c_1 = 0, \qquad (ac + a_1c_1)\,d + (abc_1 + a_1c)\,d_1 = 0,$$
$$d = abc_1 + a_1c + tac_1 \quad \text{oder} \quad abc_1 + a_1c \mathrel{\underline{\in}} d \mathrel{\underline{\in}} ac_1 + a_1c.$$

Anmerkung zur 1. Aufgabe.

Natürlich sind die Data unseres Problems auch mögliche und logisch zulässige; denn ihre vereinigte Gleichung ε) ist eine Relation, die keinen Widerspruch involvirt, die nach den Regeln des Kalkuls auf die im bisherigen Aussagengebiete *allein* absurde Behauptung $1 = 0$ nicht hinausläuft.

Unmöglich können aber diese Data, so wie Boole angibt, ganz durch *Beobachtung* (einer Klasse von Naturerzeugnissen) gewonnen worden sein, indem der in der Prämisse β) angeführte Fall ade_1, dass „wo immer die Merkmale A und D in Abwesenheit von E gleichzeitig auftreten“, kraft des Gesamtsystems dieser Prämissen, *überhaupt nie vorgekommen sein kann.*

Liest man nämlich aus der vereinigten Gleichung ε) diejenigen Glieder heraus, welche die Kombination ade_1 zum Faktor haben, indem man da, wo einer dieser Buchstaben a, d oder e — nennen wir ihn für den Augenblick x — unvertreten erscheint, sich den Faktor $1, = x + x_1$, hinzudenkt, so ergibt sich leicht als die Gesamtheit dieser Glieder:

$$ade_1\,(bc_1 + b_1c) + abcde_1 + ab_1c_1de_1 =$$
$$= ade_1\,(bc + bc_1 + b_1c + b_1c_1) = ade_1 \cdot 1 = ade_1.$$

In der That ist also nach der vereinigten Gleichung selbst:

o) $$ade_1 = 0,$$

d. h. der Fall konnte niemals vorgekommen sein — ein Umstand, auf welchen mich aufmerksam gemacht zu haben ich Herrn M. Badorff in Baden-Baden verdanke.

Das Boole'sche Problem ist darnach eigentlich als eine Vexiraufgabe zu bezeichnen, und um von diesem ihrem vexatorischen Charakter befreit zu sein, hätte die Aufgabe vielmehr etwa mit den Worten eingeleitet werden sollen: „Gesetzt durch Beobachtung einer Klasse von Erscheinungen *oder sonst auf irgend eine Weise* sei erkannt, dass . . .“.

2. Aufgabe von Herrn Venn[4] p. 487.

Die Mitglieder eines Aufsichtsrats (Verwaltungsrats, members of a board) a *sind entweder Obligationenbesitzer* b (bondholders) *oder aber Aktienbesitzer* c (shareholders) — d. h. also nicht beides zugleich. *Wenn nun die Obligationenbesitzer zufällig alle im Aufsichtsrat sind, was folgt in Bezug auf diese und die Aktienbesitzer* (die b und die c)?

Auflösung. Übersetzung der Data in die Zeichensprache liefert:

$$a \subseteq bc_1 + b_1c, \qquad b \subseteq a.$$

Aus diesem Prämissensystem ist a zu eliminiren. Die vereinigte Gleichung desselben lautet:

$$a\,(bc + b_1c_1) + a_1b = 0$$

und gibt regelrecht als die Resultante: $(bc + b_1c_1)\,b = 0$, oder:

$$bc = 0;$$

dies heisst: *kein Obligationenbesitzer ist Aktienbesitzer.*

Noch kürzer lässt die Elimination des a aus den beiden Prämissen sich hier unmittelbar nach Prinzip II ausführen, den Schluss liefernd:

$$b \subseteq bc_1 + b_1c, \qquad \text{oder} \qquad b\,(bc + b_1c_1) = 0, \qquad bc = 0,$$

wie oben.

Auch die beste *allgemeine* Methode wird so in einzelnen Fällen durch besondre denselben angepasste Kunstgriffe sich oft nach Einfachheit der Lösung noch übertreffen lassen.

Herr Venn verwendete die obige Aufgabe zu einem Wettstreit zwischen einer „Klasse“ von gut in der verbalen Logik geschulten Studirenden und einer andern in der rechnerischen Logik bewanderten — welcher eklatant zugunsten der letztern ausfiel.

3. Aufgabe. (Boole[4], p. 118 .. 120 und 128 .. 129.) Das Studium einer Klasse von Substanzen habe zu den Ergebnissen geführt: Treten die Merkmale a und b zusammen auf, so findet sich das Merkmal c oder aber das d. Treten b und c zusammen auf, so findet sich

sowol das Merkmal a, als das d, oder beide fehlen. Sooft die Merkmale a und b zusammen fehlen, fehlen auch die c und d, und umgekehrt. Gefragt, was ohne Rücksicht auf das Merkmal d von den übrigen ausgesagt werden kann.

Auflösung. Die Klasse der Substanzen, die ein bestimmtes Merkmal besitzt, möge für die Zwecke der Rechnung hier mit dem Namen des Merkmals selbst dargestellt werden. So fordern die Prämissen, dass:

$$ab \subseteq cd_1 + c_1d, \qquad bc \subseteq ad + a_1d_1, \qquad a_1b_1 = c_1d_1$$

sei. Aus diesen ist d zu eliminiren, die Resultante nach a oder b oder c aufzulösen, das Ergebniss mit Worten zu deuten. Vereinigte Gleichung des Prämissensystemes ist:

$$ab\,(cd + c_1d_1) + bc\,(ad_1 + a_1d) + a_1b_1\,(c + d) + c_1d_1\,(a + b) = 0.$$

Die Elimination von d erfordert den Ansatz:

$$a_1b_1c + (abc + a_1bc + a_1b_1)\,(abc_1 + abc + ac_1 + bc_1) = 0$$

zu dessen Herstellung man aus der vereinigten Gleichung blos herauszulesen braucht: das von d sowol als d_1 freie Glied, sodann die Koeffizienten, mit welchen d behaftet erscheint und endlich die Koeffizienten von d_1. Der erste Klammerfaktor zieht sich in $bc + a_1b_1$, der zweite in $ab + ac_1 + bc_1$ zusammen, wonach leicht abc als das Produkt der beiden erkannt wird. Mithin ist unsre Resultante:

$$abc + a_1b_1c = 0.$$

Sie lehrt, dass die Merkmale a, b und c nie alle drei zusammen auftreten, auch in Abwesenheit von a und b das c nicht vorkommt.

Elimination irgend eines der drei Buchstaben a, b, c aus ihr führt auf: $0 = 0$ (z. B. des a auf $bc \cdot b_1c = 0$). Die Resultante sagt demnach genau dasselbe, wie ihre Auflösung nach irgend einer dieser Unbekannten. Die Auflösungen sind, wenn u, v, w unbestimmte Klassen (von Substanzen) vorstellen, bezüglich:

$$a = b_1c + u\,(b_1 + c_1) = b_1c + u\,(b_1c + c_1) = b_1c + uc_1,$$

analog

$$b = a_1c + vc_1 \quad \text{und endlich} \quad c = w\,(ab_1 + a_1b),$$

oder in Form von Doppelsubsumtionen:

$$b_1c \subseteq a \subseteq b_1 + c_1, \qquad a_1c \subseteq b \subseteq a_1 + c_1, \qquad 0 \subseteq c \subseteq ab_1 + a_1b.$$

Sie zeigen, dass wo in Abwesenheit von b das Merkmal c vorliegt, auch a sich finden muss; wo a sich findet aber b oder auch c notwendig fehlen wird. Desgleichen, a und b vertauscht. Endlich wo c

sich findet, da muss von den Merkmalen a und b das eine ohne das andere (muss a *oder aber* b) zugegen sein.

4. **Aufgabe.** (Jevons[9] p. 202.)

In einer Mannigfaltigkeit ist jedes Ding entweder ein b oder ein c, und jedes c ist ein b, wofern es nicht ein a ist. Zu beweisen, dass jedes a ein b sein muss.

Beweis. Prämissen sind: $1 \subseteq b + c$ und $c \subseteq b + a_1$. Sie geben die vereinigte Gleichung:

$$b_1 c_1 + a b_1 c = 0$$

aus welcher c zu eliminiren ist. Die Resultante lautet:

$$a b_1 = 0, \quad \text{oder also:} \quad a \subseteq b$$

wie zu zeigen war.

5. **Aufgabe** — aus dem „Moral science tripos“ von Cambridge 1879, behandelt von Jevons[9] p. 206. Es stehe fest, dass jedes b, welches nicht d ist, entweder a sowol als c, oder weder a noch c ist; und ferner, dass kein c und kein d ein a und b zugleich sein kann.*) Zu beweisen, dass kein a ein b ist.

Beweis. Die Prämissen in Formeln eingekleidet lauten:

$$b d_1 \subseteq a c + a_1 c_1, \qquad c \subseteq (ab)_1, \qquad d \subseteq (ab)_1,$$

und geben die vereinigte Gleichung:

$$(a c_1 + a_1 c)\, b d_1 + abc + abd = 0.$$

Elimination von d aus dieser gibt:

$$abc + ab\,(a c_1 + a_1 c) = 0, \quad \text{oder} \quad abc + abc_1 = 0,$$

und hieraus Elimination von c:

$$ab = 0,$$

d. h. kein a ist b, wie zu beweisen war.

6. **Aufgabe.** (McColl[3] p. 21.)

Es sollen x und y eliminirt werden aus den Prämissen:

$$a x_1 \subseteq c + dy, \quad bx \subseteq c + dy + e, \quad a_1 b_1 \subseteq x + c + d e_1, \quad a + b + c \subseteq x + y.$$

*) In Gestalt von „neither c nor d is both a and b“ gibt Jevons (eventuell schon der Aufgabensteller) diesem letzten Teil der Aufgabe einen inkorrekten Ausdruck. Es müste heissen: „neither *any* c nor *any* d is . . .“. Denn in der angegebenen Fassung wäre der Sinn unstreitig der, dass weder alle c, noch alle d, a und b zugleich sein könnten, und würde das Problem, nach den Methoden des § 41 behandelt, nicht die verlangte Konklusion, vielmehr nach Elimination des c und d nur die Resultante: $a_1 + b_1 \neq 0$ oder $ab \neq 1$ liefern, welche blos lehrt, dass es Dinge gibt, die nicht a und b zugleich sind.

Auflösung. In der vereinigten Gleichung:

$$a c_1 x_1 (d_1 + y_1) + b c_1 e_1 x (d_1 + y_1) + a_1 b_1 c_1 (d_1 + e)\, x_1 + (a + b + c)\, x_1 y_1 = 0$$

kommt y nur als y_1 in der Form $A + B y_1 = 0$ vor, weshalb als Resultante der Elimination von y anzusetzen ist $A = 0$, d. h. die Glieder, welche y_1 zum Faktor haben, sind einfach wegzulassen. Um aus dem Rückstande:

$$b c_1 d_1 e_1 x + \{a c_1 d_1 + a_1 b_1 c_1 (d_1 + e)\}\, x_1 = 0$$

noch x herauszuwerfen, hat man alsdann das Produkt der beiden Koeffizienten gleich 0 zu setzen, welches augenscheinlich gibt:

$$a b c_1 d_1 e_1 = 0, \quad \text{oder} \quad ab \subseteq c + d + e.$$

7. **Aufgabe.** (Boole[4] p. 237.)

Eine Anzahl Tuchmuster lieferte bei der Untersuchung folgende Regeln:

Jedes weiss (w) und grün (g) gestreifte Stück war auch schwarz (s) und gelb (e) gestreift und umgekehrt.

Jedes rot (r) und orange (a) gestreifte Stück war auch mit blau (b) und gelb gestreift, und umgekehrt.

Was kann ohne Rücksicht auf gelb geschlossen und über grün ausgesagt werden?

Auflösung. Die Data sind:

$$wg = se, \qquad ra = be,$$

sonach in vereinigter Gleichung:

$$wg\,(s_1 + e_1) + se\,(w_1 + g_1) + ra\,(b_1 + e_1) + be\,(r_1 + a_1) = 0$$

woraus e eliminirt:

$$wgs_1 + rab_1 + (sw_1 + sg_1 + br_1 + ba_1)(wg + ra) = 0$$

oder

$$ra\,(b_1 + sw_1) + w\,(s_1 + br_1 + ba_1)\, g + rasg_1 = 0.$$

Die Resultante der Elimination von g läuft auf die Nullsetzung des ersten Terms hinaus:

$$ra\,(b_1 + sw_1) = 0 \quad \text{oder} \quad ra \subseteq b, \qquad ras \subseteq w.$$

Unabhängig von gelb *und* grün ist also lediglich zu schliessen: dass rot und orange gestreifte Muster auch blau, sowie rot, orange und schwarz gestreifte auch weiss gestreift sein müssen.

Mit Rücksicht hierauf lässt sich nun der erste Term der obigen von e freien Endgleichung unterdrücken, und gibt dieselbe nach der Unbekannten g aufgelöst leicht:

$$g = ras + u\{w_1 + s\,(b_1 + ra)\},$$

d. h. die grün gestreiften Muster bestehen aus allen, die zugleich rot, orange und schwarz gestreift sind, nebst einer unbestimmten Menge solcher (keinen, einigen oder allen solchen), die entweder nicht weiss gestreift sind, oder die schwarz, und zugleich nicht blau oder rot nebst orange, gestreift sind.

Bequemer wird sich dies in Gestalt der Doppelsubsumtion beschreiben lassen, welche darum für die Einkleidung der Lösung den Vorzug verdient:

$$ras \mathrel{\underline{\in}} g \mathrel{\underline{\in}} w_1 + s(b_1 + ra)$$

und zu erkennen gibt: dass die zugleich rot, orange und schwarz gestreiften Muster auch grün gestreift sein müssen. Jedes grün gestreifte Muster aber muss, falls es nicht weiss gestreift ist, sicher schwarz und entweder nicht blau, oder rot nebst orange gestreift sein.

Es versteht sich, dass vorstehend ein jeder Buchstabe nicht das Merkmal der betreffenden Farbe, sondern die Klasse der mit diesem Merkmal behafteten Objekte in unsrer Mannigfaltigkeit — der Tuchmuster — vorzustellen hatte. —

Man vergleiche auch die Lösung vorstehenden Problems nach Peirce's Methode in § 27. Das Problem ist auch behandelt von Grove (Educational Times, April 1881), Miss Ladd[1] p. 55 .. 57.

8. Aufgabe. (Lambert[3] I, 14.)

Wenn die x ohne die a einerlei sind mit den b, und die a ohne die x zusammenfallen mit den c, wie drückt sich x durch a, b und c aus?

Auflösung. Data sind:

$$a_1 x = b \quad \text{und} \quad a x_1 = c,$$

also in vereinigter Gleichung:

$$a_1 b_1 x + (a + x_1) b + a c_1 x_1 + (a_1 + x) c = 0.$$

Durch Elimination des x ergibt sich zunächst die Relation:

$$ab + a_1 c + (a_1 b_1 + c)(b + a c_1) = 0, \quad \text{oder:} \quad ab + a_1 c + bc = 0, \quad \text{oder:}$$
$$ab + a_1 c = 0$$

— vergl. Th. ι) des § 18 — wonach die Gleichung sich vereinfacht zu:

$$x(a_1 b_1 + c) + x_1 (a c_1 + b) = 0$$

und nach x aufgelöst gibt:

$$x = a c_1 + b + u(a + b) c_1 = a c_1 + b,$$

indem der unbestimmte Term eingeht.

In Anbetracht, dass $bc = 0$ ist, also $b = bc_1 + bc = bc_1$ gesetzt werden kann, lässt sich dem Ergebniss auch die Gestalt geben:

$$x = (a + b) c_1$$

und lehrt dasselbe: die Klasse x besteht aus den a und den b, mit Ausschluss der c (was wir in § 23 mit $x = a + b - c$ dargestellt

haben würden, wonach es mit Lambert's Ergebniss buchstäblich übereinstimmte).

Wie Herr Venn[1] p. 272 bemerkt, besitzt vorstehende Aufgabe ein gewisses historisches Interesse als einer der frühesten Versuche, logische Aufgaben rechnerisch (in Symbolen) zu lösen, und reiht sich unter dem gleichen Gesichtspunkt hieran auch die folgende von Lambert behandelte Frage.

9. Frage. Wenn $ad = bc$ ist, lässt sich alsdann schliessen, dass $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sein müsse, d. h. wenn die a mit den d die nämlichen Individuen gemein haben, wie die b mit den c, muss dann jede (resp. überhaupt eine, resp. eine bestimmte) Klasse, welche durch b determinirt sich in a zusammenzieht, sich decken mit jeder (resp. etc.) Klasse, welche durch d determinirt c gibt?

Wie in den Klammern schon angedeutet, unterscheiden wir mehrerlei Auffassungen der Frage, für welche alle sie *verneinend* zu beantworten sein wird. Herr Venn l. c. konstatirt einen Irrtum Lambert's, welcher, obwol die Nichthebbarkeit beiderseits übereinstimmender Faktoren in einer Gleichung schon bemerkend, doch mehr als einmal annehme, dass es sich also verhalte (die Frage nämlich zu bejahen sei). Indessen gibt Venn selbst, unter Äusserung berechtigter Zweifel, eine unrichtige Beantwortung der Frage, indem er ihre Bejahung an die Bedingung knüpft, dass $a = c$ und $b = d$ sei — was sich bei einer jeden der Auffassungen nicht gerade als notwendig, eventuell als nicht hinreichend, herausstellen wird.

Um dies alles aufzuhellen, sei die Frage auch hier behandelt, obwol sie nicht ganz in den die übrigen Aufgaben umschliessenden Rahmen passt: wir wünschten mit § 23 die inversen Operationen des Kalkuls endgültig aus unserer Disziplin ausgemerzt zu haben, weshalb wir denn auch die Untersuchung auf gegenwärtigen Kontext beschränken.

Zur Unterscheidung von General- und Prinzipalwert des Quotienten greifen wir auf die Bezeichnungen des § 23 zurück.

Die Prämisse, rechts auf 0 gebracht lautet:

$$ad(b_1 + c_1) + bc(a_1 + d_1) = 0,$$

oder links nach a, b, c, d entwickelt

$$ad(b_1 c_1 + b_1 c + b c_1) + bc(a_1 d_1 + a_1 d + a d_1) = 0;$$

sie leugnet also die Existenz von sechsen der sechzehn zwischen a, b, c, d und ihren Negationen überhaupt denkbaren Kombinationen, welche die Mannigfaltigkeit 1 der Möglichkeiten zusammensetzen, wogegen sie über die zehn übrigen Kombinationen derselben nichts aussagt.

Soll nun *überhaupt ein* Wert von $a :: b$ übereinstimmen mit einem Werte von $c :: d$, so müssen zunächst die beiderseitigen Valenzbedingungen erfüllt sein, welche lauten: $ab_1 = 0$ und $cd_1 = 0$. Um die vereinigte Gleichung der letztern $ab_1 + cd_1 = 0$ nach allen vier Symbolen zu entwickeln, wird man am besten das Th. 33_+) links anwenden, wonach sie die Form annimmt:

$$ab_1 cd_1 + ab_1(c_1 + d) + cd_1(a_1 + b) = 0,$$

also

$$ab_1cd_1 + ab_1(c_1d + c_1d_1 + cd) + cd_1(a_1b + a_1b_1 + ab) = 0.$$

[Hätte man statt dessen jedes ihrer beiden Glieder mit der Entwickelung von 1 nach den beiden andern im betreffenden Glied nicht vorkommenden Symbolen gemäss Th. 34_+) multiplizirt, so wäre der Term ab_1cd_1 unnötig zweimal angesetzt worden.] Versammelt man nun hieraus diejenigen Glieder, deren Verschwinden durch die Prämisse nicht ohnehin garantirt ist, so bemerkt man dass es die folgenden dreie sind: ab_1cd_1, $ab_1c_1d_1$ und $a_1b_1cd_1$. Darnach ist $b_1d_1(ac + ac_1 + a_1c) = 0$ oder $b_1d_1(a + c) = 0$, das heisst:

$$a + c \mathrel{\underline{\in}} b + d$$

die notwendige Bedingung dafür, dass ein Wert von $a :: b$ nur überhaupt mit einem solchen von $c :: d$ übereinstimmen *könne*. Da schon diese Bedingung im allgemeinen nicht erfüllt ist, und, wie erkannt, ganz und gar nicht in der Voraussetzung liegt, so wird die gestellte Frage für jegliche Auffassung derselben zu *verneinen* sein.

Nehmen wir nun aber ausser der Prämisse $ad = bc$ auch noch diese Forderung $a + c \mathrel{\underline{\in}} b + d$ als erfüllt an, so ist uns nicht nur letztere, sondern sind auch die Valenzbedingungen $a \mathrel{\underline{\in}} b$ und $c \mathrel{\underline{\in}} d$ selbst gesichert, und ausser diesen stipulirt die Prämisse nur noch, dass

$$bd(ac_1 + a_1c) = 0 \quad \text{oder} \quad bd(a + c) \mathrel{\underline{\in}} ac$$

sei. Die so erweiterte Prämisse läuft also auf die drei Voraussetzungen:

$$a \mathrel{\underline{\in}} b, \qquad c \mathrel{\underline{\in}} d, \qquad (a + c)\,bd \mathrel{\underline{\in}} ac$$

hinaus, deren vereinigte Gleichung das Verschwinden von neunen jener sechzehn Konstituenten festsetzt — die im bisherigen sich auch angegeben finden.

Unter dieser Annahme können wir nun weiter fragen, ob, oder unter welchen ferneren Bedingungen auch *jeder* Wert von $a :: b$ mit *jedem* Werte von $c :: d$ übereinstimmen wird?

Dies ist nur möglich, wenn diese beiden Ausdrücke eindeutig ausfallen, nämlich selbst nicht schon mehrere unter sich verschiedene Werte umfassen.

Für den Generalwert des Quotienten von a und b hatten wir in § 23, η) den Ausdruck:

$$a :: b = au_1 + (a + b_1)\,u$$

und soll dieser von u unabhängig ausfallen, so muss für beliebige u, v sein:

$$au_1 + (a + b_1)\,u = av_1 + (a + b_1)\,v,$$

was rechts auf 0 gebracht: $a_1b_1(uv_1 + u_1v) = 0$ gibt und für jedes Wortepaar u, v nur bestehen kann, wenn selber $a_1b_1 = 0$ ist — vergl. unten Studie 21. Da nun ohnehin $ab_1 = 0$ nach der Valenzbedingung war, so haben wir alsdann $ab_1 + a_1b_1 = 0$ oder $b_1 = 0$, d. h. $b = 1$ und wird $a :: b = a :: 1 = a$ sein müssen. Analog $d = 1$ und $c :: d = c$.

Die obige Frage wird demnach sich nur bejahen lassen, wenn

$$a = c \quad \text{und} \quad b = d = 1$$

ist; mithin war hier Herrn Venn's Entscheidung, bei welcher $b = d$ noch unbestimmt blieb, nicht ausreichend.

Von grösserem Interesse erscheint die Frage, ob oder wann vielleicht *die Gesamtheit* der Werte von $a :: b$ sich deckt *mit der Gesamtheit* der Werte von $c :: d$?

Diese Gleichheit $a :: b = c :: d$ tritt nur dann und sicher dann ein, wenn unter der oben stipulirten Annahme die Gleichung:

$$a + ub_1 = c + vd_1$$

für ein beliebig angenommenes u erfüllbar ist durch ein v und für ein irgendwie angenommenes v erfüllbar ist durch gewisse u — vergl. § 23, η).

Letzteres tritt ein, wenn für die (rechts auf 0 gebrachte) Gleichung:

$$(a + b_1u)\,c_1(d + v_1) + a_1(b + u_1)(c + d_1v) = 0$$

die Resultante der Elimination des v:

$$ac_1d + a_1bc + b_1c_1du + a_1cu_1 = 0$$

auflösbar ist nach u, d. h. wieder, wenn nur die Resultante auch seiner Elimination hieraus erfüllt ist. Als die gesuchte Bedingung finden wir hienach schlechtweg die Resultante der Elimination von u *nebst* v aus der obigen Gleichung, also:

$$ac_1d + a_1bc = 0$$

— eine Gleichung, welche laut Prämisse schon ohnehin erfüllt ist.

Unter den durch Zuzug der Valenzbedingungen von $a :: b$ und $c :: d$ zu der Prämisse $ad = bc$ *erweiterten Voraussetzungen* wird folglich allerdings aus letzterer auch auf die Geltung der „Proportion“ $a :: b = c :: d$ zu schliessen erlaubt sein, indess auch nur unter diesen Voraussetzungen.

Fragen wir endlich, ob oder wann auch die *Hauptwerte* der beiderseitigen Quotienten übereinstimmen werden, d. h. wann in unsrer Bezeichnung wirklich $a : b = c : d$, oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, sein wird? — unter ebendiesen Voraussetzungen, ohne welche ja die Frage gar keinen Sinn haben würde!

Nach $\varkappa$) des § 23 deckt sich dies mit der Forderung, dass

$$a + b_1 = c + d_1, \quad \text{oder} \quad (a + b_1)\,c_1d + a_1b\,(c + d_1) = 0,$$

sei. Da laut Prämisse schon zwei von den vier Termen links fortfallen, reduzirt sich dies auf die Forderung:

$$b_1c_1d + a_1bd_1 = 0 \quad \text{oder} \quad (a + a_1)\,b_1c_1d + a_1b\,(c + c_1)\,d_1 = 0,$$

worin nach den Valenzbedingungen abermals zwei Terme sich wegheben. Es bleibt die Bedingung:

$$a_1c_1(b_1d + bd_1) = 0, \quad \text{oder} \quad b + d \mathrel{\underline{\in}} a + c + bd$$

durch welche den neun schon verschwindenden Konstituenten noch zwei weitere zugesellt werden. Schliesslich haben wir:

$$ad \mathrel{\underline{\in}} c \mathrel{\underline{\in}} d \mathrel{\underline{\in}} b + c, \qquad bc \mathrel{\underline{\in}} a \mathrel{\underline{\in}} b \mathrel{\underline{\in}} a + d$$

als den Inbegriff der erforderlichen Bedingungen für die Bejahung der Frage, ob $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$?

10. **Aufgabe.** (Venn[1] p. 267.)

Aus einer gewissen Klasse von Gegenständen liest eine Person heraus (picks out) die x, welche z sind und die y, welche nicht z sind. Aus dem Rückstande scheidet eine andere Person aus die z, welche y und die x, welche nicht y sind. Man findet, dass nur die z, welche nicht x sind, diese aber sämtlich, übrig bleiben.

Was kann alsdann über die ursprüngliche Klasse — w möge sie heissen — ausgesagt werden?

Auflösung. In die Zeichensprache übersetzt lautet die Prämisse:

$$w\,(xz+yz_1)_1\,(zy+xy_1)_1 = zx_1$$

— vergleiche das über die Ausschliessung, Exception in § 23 S. 495 gesagte.

Nach meinem Th. 46) stellt die linke Seite sich dar als:

$$w\,(x_1z+y_1z_1)\,(z_1y+x_1y_1) = w\,(x_1y_1z+x_1y_1z_1) = wx_1y_1.$$

Es lautet also die Gleichung:

$$x_1y_1w = x_1z,$$

wobei die linke Seite zu erkennen gibt: der Erfolg der zweimaligen Ausscheidungen war einfach die Beseitigung der x und der y aus der Klasse der w.

Da nun die Gleichung, rechts auf 0 gebracht, aussagt:

$$x_1yz + x_1y_1z_1w + x_1zw_1 = 0,$$

so haben wir erstlich als Resultante der Elimination von w die Relation:

$$x_1yz = 0 \quad \text{oder} \quad yz ⋹ x,$$

d. h. alle y, welche z sind, mussten auch x gewesen sein, und zweitens haben wir als Auflösung:

$$w = x_1z + u\,(x+y)$$

bei unbestimmtem u, oder:

$$x_1z ⋹ w ⋹ x+y+z,$$

d. h. die Klasse w musste sicherlich die z, welche nicht x sind, alle enthalten haben, und konnte nur aus Individuen der Klassen x, y und z zusammengesetzt gewesen sein — was auch unmittelbar als selbstverständlich einleuchtet.

11. **Aufgabe.** (Mc Coll, Math. Questions etc. from the Educational Times, Vol. 31, p. 43 und 44, auch gelöst von Herrn Lloyd Tanner.)

Durch Beobachtung sei erkannt, dass sooft die Ereignisse a und b

zusammen eintreten, denselben allemal folgt*) das Ereigniss c, desgleichen das d oder auch e, ferner: dass, sooft die Ereignisse d und e beide eintreten, ihnen allemal vorhergegangen*) ist das Ereigniss a, oder auch b nebst c. Wann können wir (aus dem Eintreten oder Nichteintreten der Ereignisse a, b, c oder d) schliessen erstens, dass e gewisslich eintreffen wird, und zweitens, dass e sicher nicht eintrifft?

Auflösung. Die Data lauten (wenn a gedeutet wird als Klasse der Fälle, wo das gleichnamige Ereigniss eintritt, etc.):

$$ab ⋹ c\,(d+e), \qquad de ⋹ a+bc,$$

oder:

$$ab\,(c_1+d_1e_1) + a_1\,(b_1+c_1)\,de = 0,$$

woraus durch Elimination von e zunächst zu ersehen ist, dass $abc_1 = 0$ oder $ab ⋹ c$, d. h. das Zusammentreffen von a und b stets von c gefolgt ist, wie dies auch schon die Prämissen statuirten, sodann durch Auflösen der restirenden Gleichung nach der Unbekannten e, sowie e_1, sich ergibt:

$$abd_1 ⋹ e ⋹ a+bc+d_1, \qquad a_1d\,(b_1+c_1) ⋹ e_1 ⋹ a_1+b_1+d.$$

Die ersten Teile von diesen Doppelsubsumtionen enthalten die Antwort auf die gestellten Fragen: e tritt sicher ein, wenn a und b (und c) ohne d eintreten, und e tritt zuverlässig nicht ein, wenn d eintritt und entweder a und b, oder a und c nicht eintreten.

12. **Aufgabe.** (W. B. Grove, Educational Times 1. Febr. 1881, 6616; Miss Ladd[1] p. 54.) Die Mitglieder einer wissenschaftlichen Gesellschaft zerfallen in drei Abteilungen (Sektionen) a, b, c von denen jedes Mitglied mindestens *einer* angehören muss, und gelten folgende Bestimmungen:

Wer der Sektion a aber nicht der Sektion b angehört, desgleichen wer der b und nicht der c angehört, endlich wer der Sektion c aber nicht a angehört, darf der Gesellschaft einen Vortrag halten, falls er seinen Beitrag bezahlt hat, aber sonst nicht.

Ein jeder, der Sektion a aber nicht c, c aber nicht a, b aber nicht a, Angehörende, darf den Mitgliedern ein Experiment vormachen, falls er seinen Beitrag gezahlt hat, sonst nicht.

Jedes Mitglied muss jährlich den übrigen Mitgliedern entweder einen Vortrag halten oder ein Experiment vormachen.

*) Meines Erachtens müssten diese Verba des zeitlichen Folgens und Vorhergegangenseins wol durch ein auf eine *Begleit*erscheinung hinweisendes Verbum, wie „mit denselben Einhergehen" ersetzt werden — so wenigstens bezüglich des Ereignisses c.

Gesucht der Minimalzusatz zu den Bestimmungen, durch welchen jedes Mitglied gezwungen würde, entweder seinen Beitrag zu zahlen oder seine Mitgliedschaft zu verwirken.

Auflösung. Sei 1 die Klasse der Mitglieder, x die Klasse derer, die einen Vortrag halten müssen (sonach auch dürfen), y die Klasse derer, die ein Experiment vormachen müssen, z die Klasse derer, die ihren Beitrag bezahlt haben.

Dann garantiren die bisherigen Bestimmungen schon dass:

$a_1 b_1 c_1 = 0, \quad (ab_1 + bc_1 + ca_1)\, xz_1 = 0, \quad (ac_1 + a_1 c + a_1 b)\, yz_1 = 0, \quad x_1 y_1 = 0$

ist, und handelt es sich darum, hinzubringen, dass z_1 ausgeschlossen werde aus allen den Teilen der Gesamtheit 1 der Mitglieder, aus denen es nicht bereits ausgeschlossen wurde, nämlich aus der Negation von:

$$a_1 b_1 c_1 + (ab_1 + bc_1 + a_1 c)\, x + (ac_1 + a_1 b + a_1 c)\, y + x_1 y_1.$$

Diese ist:

$$(a + b + c)\,(abc + a_1 b_1 c_1 + x_1)\,(ac + a_1 b_1 c_1 + y_1)\,(x + y)$$

in Anbetracht, dass der Koeffizient von x vollends nach a entwickelt sich als $a\,(b_1 + c_1) + a_1\,(b + c)$ darstellt, während der von y als $ac_1 + a_1\,(b + c)$ schon ebendarnach entwickelt ist, wonach die Negationen dieser Koeffizienten sich sofort als $abc + a_1 b_1 c$ resp. $ac + a_1 b_1 c_1$ nach meinem Th. 46_+) ergeben.

Hier sind nun zunächst die beiden Terme $a_1 b_1 c_1$, als in ihre Negation $a + b + c$ zu multiplizirende fortzulassen. Darnach gibt das Produkt der beiden mittleren von den vier Faktoren:

$$abc + acx_1 + abcy_1 + x_1 y_1,$$

wovon der letzte Term als Negation des nachfolgenden Faktors $x + y$ zu unterdrücken, der vorletzte vom ersten absorbirt wird. Dann erhalten wir durch Ausmultipliziren leicht: $abc\,(x + y) + acx_1 y$, wobei jedoch statt $x + y$ genommen werden kann: $x + x_1 y$ und dann der vom zweiten dieser Glieder herrührende Term in dem letzten Gliede eingeht.

Es bleibt:

$$abcx + acx_1 y$$

als Ausdruck jener Klasse, von welcher z_1 auszuschliessen wäre.

Daher ist der gesuchte geringste erforderliche Zusatz zu den Bestimmungen dieser:

$$ac\,(bx + x_1 y)\, z_1 = 0,$$

d. h. „Wer seinen Beitrag nicht gezahlt hat, kann nicht allen drei Sektionen zugleich angehören und einen Vortrag halten, desgleichen kann er nicht den Sektionen a und c gleichzeitig angehören und ohne Vortrag zu halten ein Experiment vormachen“.

Hätte man oben die Koeffizienten von x und y mittelst Ausmultiplizirens von $(a_1 + b)\,(b_1 + c)\,(c_1 + a)$ resp. $(a_1 + c)\,(a + b_1)\,(a + c_1)$ negirt, so

konnte diese Aufgabe schon in § 18, als χ_1) gebracht werden, da sie eine Elimination oder Berechnung einer Unbekannten nicht erforderte.

13. Aufgaben. Unter dieser Nummer geben wir eine Reihe von leichteren Rechnungsaufgaben.

α) Man bringe die Gleichung $x = a$ rechts auf Null, löse sie alsdann systematisch nach x auf und überzeuge sich, dass der unbestimmte Term eingeht.

β) Aus der Gleichung $ax + b = 0$ soll x eliminirt [und berechnet] werden. Auflösung: die Resultante ist: $b = 0$. [Darnach würde sich berechnen: $x = ua_1$, d. h. $x \Subset a_1$.]

γ) Analog x und y aus der Gleichung

$$ax + by + c = 0$$

zu eliminiren etc. Resultante: $c = 0$. Berechnen würde sich darnach:

$$x = ua_1, \quad y = vb_1 \quad \text{oder} \quad x \Subset a_1, \quad y \Subset b_1.$$

δ) Wenn $a = xb$ und $b = ya$, so ist durch Elimination von x und y zu zeigen, dass $a = b$ sein muss.

Anstatt das systematische Verfahren anzuwenden, kann man hier auch mittelst Durchmultiplizirens der Prämissen schliessen, dass

$$ab = xbb = xb = a, \quad ba = yaa = ya = b, \quad \text{sonach} \quad ab = a = b$$

sein muss.

ε) Aus $ax = b$ das x zu eliminiren und zu berechnen.
Resultante: $a_1 b = 0$, Lösung: $x = b + ua_1$, resp.

$$b \Subset a, \quad b \Subset x \Subset b + a_1.$$

Durch beiderseitiges Multipliziren der Prämisse mit a und Vergleichung, erkennt man auch direkt, dass $ab = b$ sein muss; doch gibt das systematische Verfahren die Gewissheit, dass man hiermit die volle Resultante besitze.

ζ) Nach x aufzulösen die Gleichung:

$$(ab + a_1 b_1)\, x + (ab_1 + a_1 b)\, x_1 = 0.$$

Auflösung: $x = ab_1 + a_1 b$. [Resultante: $0 = 0$.]

η) Desgl. $a_1 b_1 x + (ab_1 + a_1 b)\, x_1 = 0$. Aufl. $x = ab_1 + a_1 b + uab$.

ϑ) Man zeige, dass aus der Gleichung:

$$(b_1 + c_1)\, x + (ac + a_1 b)\, x_1 = 0, \quad \text{wo} \quad ab_1 c + a_1 bc_1 = 0$$

sein wird, sich $x = ac + a_1 b$ völlig eindeutig bestimmt. Man sieht: die Bedingung S. 463 in σ) des § 21 braucht nicht etwa analytisch erfüllt zu sein, sondern es genügt, wenn sie nur erfüllt ist kraft der Resultante.

ι) Dagegen für $(b_1 + c_1)\,x + a_1\,(b + c)\,x_1$; wo $a_1\,(bc_1 + b_1c) = 0$, wird $x = a_1\,(b + c) + ubc$ irgendwie zwischen $a_1\,(b + c)$ und $a_1\,(b + c) + bc$ liegen können.

$\varkappa$) (Boole?) Aus $ab + xab_1 + ya_1b + a_1b_1 = 0$ eliminire man x, y. Die Resultante heisst $ab + a_1b_1 = 0$, oder $a = b_1$. $b = a_1$. Mit Rücksicht darauf vereinfacht die Gleichung sich zu $xa + ya_1 = 0$, woraus $x = ua_1$, $y = va$ oder $x \mathrel{=\!\!\!\!\in} a_1$, $y \mathrel{=\!\!\!\!\in} a$ sich berechnen würde.

λ) Das Gleichungenpaar nach x aufzulösen:

$$a = ab + x\,(a + b), \qquad b = ab + x_1\,(a + b).$$

Die Wurzel ist: $x = ab_1 + u(a + b_1)$, und ergibt sich keine Relation zwischen a und b. Die zweite Prämisse deckt sich mit der ersten — vergl. § 18, o_1).

μ) (De Morgan[2] p. 123.) Zu zeigen, dass aus den Prämissen: „Jedes a ist b oder c und jedes c ist a“ *kein Schluss* in Bezug auf nur zweie der drei Klassen a, b, c gezogen werden kann.

Auflösung. $a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b + c$, $c \mathrel{=\!\!\!\!\in} a$ gibt $ab_1c_1 + a_1c = 0$ als vereinigte Gleichung. Elimination von a allein, desgleichen von c für sich, führt augenscheinlich nur auf $0 = 0$, als der vollen Resultante. Die von b führt blos auf die zweite Prämisse zurück.

ν) Venn[5] p. 13. Die Data zu vereinfachen:

$$x \mathrel{=\!\!\!\!\in} yz + y_1\,(= y_1 + z), \qquad xyz \mathrel{=\!\!\!\!\in} w, \qquad wxyz = 0.$$

Resultat: $$xy = 0.$$

14. Aufgabe (nach Venn[1] p. 270 den deutschen Schulverhältnissen angepasst).

Wir beschränken unsre Aufmerksamkeit (confine ourselves) auf die Schüler der Mittelschulen einer Stadt als da sind:

$$a = \text{Gymnasiasten und } a_1 = \text{Realschüler}.$$

Bedeutet b die welche Hebräisch und c die welche Englisch hatten, so soll von der Kategorie x der bei den Promotionsprüfungen durchgefallenen, der sitzen bleibenden oder nichtpromovirten Schüler bekannt sein, dass — was der Leser sich leicht in Worte fasst:

$$x \mathrel{=\!\!\!\!\in} ab_1 + a_1c, \qquad ax \mathrel{=\!\!\!\!\in} b + c, \qquad cx \mathrel{=\!\!\!\!\in} ab$$

ist. Man ermittle diese Klasse.

Auflösung. Unschwer überzeugt man sich, dass der Faktor, welchen x in der vereinigten Gleichung erhält:

$$ab + a_1c_1 + ab_1c_1 + a_1c + b_1c = 1$$

ist, und diese sich zu: $x = 0$ vereinfacht. Mithin sind alle promovirt worden.

15. Aufgabe. Venn[1] p. 268 — desgleichen.

Bei einer andern Schüleraufgabe bedeute x die Knaben, x_1 die Mädchen, a die prämiirten, b und c die an einem bestimmten Unterrichtsgegenstand, z. B. Griechisch resp. Literaturgeschichte teilnahmen.

So soll aus der Angabe:

$$a = bx + cx_1$$

die Unbekannte x berechnet werden.

Auflösung. Man findet:

$$x = ac_1 + a_1c + u\,(ab + a_1b_1),$$

wo u unbestimmt; d. h. die Knaben zählten zuverlässig in ihren Reihen die sämtlichen prämiirten Schulkinder, die nicht Literaturgeschichte hatten nebst den nicht prämiirten Schulkindern, die Literaturgeschichte hatten; zudem vielleicht irgendwelche prämiirte Kinder die Griechisch hatten sowie ev. nicht prämiirte Kinder die kein Griechisch hatten, doch jedenfalls keine andern.

16. Aufgabe. Venn[1] p. 262 — auch Math. Quest. Vol. 34, p. 35 und 36. (Lösungen von Harley, Matz, Mc Coll, Genese, u. a.) Bei einem Klub bedeute

$x =$ Mitglied des Finanzausschusses	(financial committee)	
$y =$ „ der Bibliothekskommission	(library „	)
$z =$ „ des Verwaltungsausschusses	(general „	),

so sollen die folgenden (in Worten zu gebenden) Klubregeln:

$$x \mathrel{=\!\!\!\!\in} z, \qquad yz \mathrel{=\!\!\!\!\in} x, \qquad xy = 0$$

vereinfacht werden.

Auflösung. In der vereinigten Gleichung:

$$xz_1 + x_1yz + xy = 0$$

lässt zuerst der Faktor x_1 sich unterdrücken — indem man in den beiden letzten Gliedern linkerhand sich y als gemeinsamen Faktor ausgeschieden denkt und in der Klammer das Th. 33_+) Zusatz anwendet, die Klammer hernach wieder auflösend. Alsdann aber lässt unmittelbar das Th. ι) des § 18 sich anwenden und entsteht:

$$xz_1 + yz = 0 \quad \text{oder} \quad x \mathrel{=\!\!\!\!\in} z \quad \text{nebst} \quad yz = 0,$$

was wieder in Worte zu fassen.

Venn findet dies mittelst „Entwickelung“ der einzelnen Teilaussagen nach x, y und z und nachheriger Zusammenziehung der Ergebnisse, welch letztere, wie er nicht ganz unrichtig bemerkt „is purely a matter of tact and skill, for which no strict rules can be given“.

17. **Aufgabe.** Venn[5] p. 14.
Gegeben:

$$a \subseteq b + c, \quad b \subseteq c + d, \quad c \subseteq d + a, \quad d \subseteq a + b.$$

Welche Bedingung muss mindestens hinzugefügt werden, damit

$$ab \subseteq d \quad \text{sei?}$$

Auflösung. Die Forderung $abd_1 = 0$ gibt, nach allen vier Symbolen entwickelt:

$$abcd_1 + abc_1d_1 = 0.$$

In der vereinigten Gleichung der Prämissen:

$$ab_1c_1 + bc_1d_1 + cd_1a_1 + da_1b_1 = 0$$

ist aber das einzige Glied in welchem abd_1 als Faktor stecken kann, weil es von a_1 sowol als b_1 und d frei ist, das zweite, und dieses garantirt, dass $abc_1d_1 + a_1bc_1d_1 = 0$ ist. Demnach ist der zweite Teil der entwickelten Forderung bereits ohnehin erfüllt, und braucht nur mehr noch stipulirt zu werden, dass: $abcd_1 = 0$, das heisst $abc \subseteq d$ sei. —

18. **Aufgabe.** Man eliminire und berechne x aus der Subsumtion:

$$ax + bx_1 + c \subseteq \alpha x + \beta x_1 + \gamma.$$

Auflösung. Homogen gemacht lautet dieselbe Prämisse:

$$(a + c)x + (b + c)x_1 \subseteq (\alpha + \gamma)x + (\beta + \gamma)x_1$$

und wird dieselbe rechts auf 0 gebracht, indem man ihre linke Seite mit der Negation der rechten multiplizirt. Nach den Theoremen 38), 36) und 46) lässt sich dies unmittelbar hinschreiben in Gestalt von:

$$(a + c)\alpha_1\gamma_1 x + (b + c)\beta_1\gamma_1 x_1 = 0,$$

woraus nun als Resultante der Elimination von x folgt:

$$(ab + c)\,\alpha_1\beta_1\gamma_1 = 0, \quad \text{oder} \quad ab + c \subseteq \alpha + \beta + \gamma,$$

und als Auflösung:

$$x = (b + c)\beta_1\gamma_1 + ua_1c_1(\alpha + \gamma);$$

oder in Form einer Doppelsubsumtion beides vereinigt:

$$(b + c)\beta_1\gamma_1 \subseteq x \subseteq a_1c_1 + \alpha + \gamma,$$

oder auch:

$$(a + c)\alpha_1\gamma_1 \subseteq x_1 \subseteq b_1c_1 + \beta + \gamma.$$

19. **Aufgabe.** Eliminire und berechne x aus der Gleichung:

$$ax + bx_1 + c = \alpha x + \beta x_1 + \gamma.$$

Auflösung. Rechts auf 0 gebracht und homogen gemacht lautet die Gleichung:

$$\{(a + c)\alpha_1\gamma_1 + a_1c_1(\alpha + \gamma)\}\,x + \{(b + c)\beta_1\gamma_1 + b_1c_1(\beta + \gamma)\}\,x_1 = 0,$$

woraus die Resultante folgt:

$$(ab + c)\alpha_1\beta_1\gamma_1 + (ab_1\alpha_1\beta + a_1b\alpha\beta_1)c_1\gamma_1 + a_1b_1c_1(\alpha\beta + \gamma) = 0$$

und die Auflösung:

$$x = \{(b + c)\beta_1\gamma_1 + b_1c_1(\beta + \gamma)\} + u(a + c + \alpha_1\gamma_1)\,(a_1c_1 + \alpha + \gamma)$$

oder:

$$(b + c)\beta_1\gamma_1 + b_1c_1(\beta + \gamma) \subseteq x \subseteq (a + c)\,(\alpha + \gamma) + a_1c_1\alpha_1\gamma_1.$$

20. **Aufgabe.** Die Gleichung $b = xa + ya_1$ nach x und y aufzulösen.

Auflösung. Rechts auf 0 gebracht lautet die Gleichung:

$$a(b_1x + bx_1) + a_1(b_1y + by_1) = 0.$$

Der erste Term, gleich 0 gesetzt, ist die Resultante der Elimination von y, ebenso der zweite, gleich 0 gesetzt, die Resultante der Elimination von x. Da Elimination beider Unbekannten auf die Identität $0 = 0$ führt, so braucht zwischen a und b keinerlei Relation zu bestehen; vielmehr können diese beiden Gebiete völlig nach Belieben angenommen werden. Auflösung der ersten Resultante nach x, und der letztern nach y, gibt endlich:

$$x = ab + u(a_1 + b) = ab + u(a_1 + ab) = ab + ua_1,$$
$$y = a_1b + v(a + b) = a_1b + v(a + a_1b) = a_1b + va,$$

für willkürliche u, v. In der That stimmt die Probe:

$$b = (ab + ua_1)a + (a_1b + va)a_1,$$

und ist damit, wenn man nur noch die Namen a, b durch x, y ersetzt, die Formel des Th. 42) systematisch aufgefunden.

21. **Studie.** Soll es mindestens *einen* Wert von x geben, für welchen die Gleichung besteht:

$$ax + bx_1 = 0,$$

so — haben wir gesehen — muss $ab = 0$ sein. Welche Relation aber die Koeffizienten a, b erfüllen müssen, wenn die Gleichung für *jeden* Wert von x Geltung haben soll, ist auch nicht schwer zu sehen. Dieselbe lautet:

$$a + b = 0,$$

d. h. die *Koeffizienten* müssen dann beide schon *einzeln gleich* 0 sein. Insbesondre muss nämlich alsdann die Gleichung auch für $x = 1$, sowie für $x = 0$, gelten, was als notwendig zu erfüllende Bedingung $a = 0$ nebst $b = 0$ liefert, und das genügt auch, um die Gleichung zu einer allgemein geltenden Formel zu machen.

Analog musste bekanntlich $abcd = 0$ sein, wenn es ein Wertepaar von x und y, oder auch deren mehrere, geben soll, für welches die Gleichung:

$$axy + bxy_1 + cx_1y + dx_1y_1 = 0$$

richtig wird. Soll diese Gleichung aber für *jedes* Wertepaar x, y, soll sie *allgemein* gelten, so ist:

$$a + b + c + d = 0$$

dafür die notwendige und hinreichende Bedingung; wieder müssen dann also alle Koeffizienten für sich verschwinden, je den Wert 0 haben.

Behufs Nachweises bilde man aus 1, 1, 0, 0 alle erdenklichen Wertepaare (1,1; 1,0; 0,1; 0,0) und setze sie für x und y — oder auch: man erteile nur dem y die Werte 1 resp. 0 und verwerte für die stehen bleibende Gleichung in x, die dann noch für jedes x wird gelten müssen, das Ergebniss der vorhergehenden Überlegung.

Analog für noch mehr Variable.

22. Aufgabe.

Die Gleichung:

$$auv + buv_1 + cu_1v + du_1v_1 = abcd + w(a + b + c + d)$$

ist, wie wir in § 19 unter Th. 48) Zusatz gesehen haben für irgend ein w erfüllbar durch gewisse Wertepaare u, v und für irgend ein Wertepaar u, v erfüllbar durch gewisse w.

Es soll die Bedingung (Relation zwischen a, b, c, d) dafür aufgesucht werden, dass diese Gleichung auch für ein irgendwie angenommenes Wertepaar v, w bestehen (d. h. durch ein u erfüllt, nach u aufgelöst werden) könne, resp. für ein beliebiges Wertepaar u, w (erfüllbar sei durch ein v).

Auflösung. Man eliminire zunächst v aus der rechts auf 0 gebrachten Gleichung. Als Resultante stellt sich nach einiger Rechnung heraus:

$$a_1b_1(c + d)uw + ab(c_1 + d_1)uw_1 + (a + b)c_1d_1u_1w + (a_1 + b_1)cdu_1w_1 = 0$$

und da dieselbe nun für jedes irgendwie gedachte Wertepaar u, w Geltung haben soll, so muss — cf. vorige Studie — sein:

$$a_1b_1(c + d) + ab(c_1 + d_1) + (a + b)c_1d_1 + (a_1 + b_1)cd = 0,$$

das heisst:

$$a + b = c + d \quad \text{nebst} \quad ab = cd.$$

Die Resultante der Elimination des u ergibt sich analog, bequemer aber, indem man vorstehend u mit v und zugleich b mit c vertauscht. Zu deren allgemeiner Geltung in v, w würde sonach erforderlich sein, dass:

$$a + c = b + d \quad \text{und} \quad ac = bd$$

ist. Die vereinigte Gleichung der beiden Ergebnisse, m. a. W. das System der Forderungen:

$$a + b = c + d, \quad a + c = b + d, \quad ac = bd, \quad ab = cd,$$

welches auf $a = d$, $b = c$ hinausläuft (Aufgabe, dies nachzuweisen),

stellt die Bedingung dafür vor, dass von den drei Symbolen u, v, w *irgend zweie* ganz beliebig angenommen werden können, ohne dass der Bestand der ersten Gleichung gefährdet wird. —

23. Aufgabe (Boole[4] p. 144).

Die Ringelwürmer (Anneliden) sind weichleibige Tiere und entweder nakt oder in einer Röhre eingeschlossen. Auch besteht die Ordnung der Ringelwürmer aus allen wirbellosen Tieren, welche rotes in einem doppelten Gefässsystem zirkulirendes Blut haben.

Bedeutet a = Anneliden, s = weichleibige Tiere (softbodied animals) n = nakt, t = in einer Röhre (tube) eingeschlossen, i = wirbellos (invertebrate), r = rotes in etc. zirkulirendes Blut habend, so werden:

$$a \Subset s(n + t), \quad a = ir, \quad \text{nebst} \quad nt = 0$$

(was als selbstverständlich eingeschlossen) die gegebenen Propositionen sein.

Gesetzt wir wünschen nun zu erfahren, in welcher Weise die Klasse $st = w$ der weichleibigen in einer Röhre eingeschlossenen Tiere sich zusammensetzt aus den Klassen r, n, i der rotblütigen, der nakten und der wirbellosen Tiere.

So werden wir zuerst aus der vereinigten Gleichung der Prämissen:

$$a(s_1 + n_1t_1) + a(i_1 + r_1) + a_1ir + nt = 0$$

das a eliminiren. Die Resultante ist:

$$nt + (s_1 + n_1t_1)ir = 0.$$

Und diese Gleichung werden wir mit der hinzugekommenen:

$$w_1st + w(s_1 + t_1) = 0$$

vereinigen. [Die Elimination des a konnte hier *vor* dieser Vereinigung erfolgen, weil a in der hinzutretenden Gleichung $w = st$ nicht vorkommt.] Aus der vereinigten Gleichung ist alsdann s und t zu eliminiren. Die Resultante der Elimination zunächst des s lautet:

$$nt + n_1t_1ir + wt_1 + w_1tir = 0,$$

sodann die auch von t:

$$(n + w_1ir)(w + n_1ir) = 0,$$

oder:

$$nw + n_1irw_1 = 0.$$

Und diese Gleichung ist nun wiederum nach w als Unbekannter aufzulösen. Es wird:

$$st = w = n_1(ir + u),$$

worin u eine unbestimmte Klasse bedeutet; d. h. Die Klasse der in eine Röhre eingeschlossenen weichleibigen Tiere besteht aus den nicht nakten wirbellosen rotblütigen Tieren nebst einem unbestimmten Reste von nichtnakten Tieren. Das Resultat befindet sich, wie man leicht nachweisen wird, in Übereinstimmung mit dem von Boole in der weitläufigeren Fassung

$$w = n_1\{ir + u(ir_1 + i_1)\}$$

dargestellten Ergebnisse.

Benennte man auch st_1, s_1t und s_1t_1 je mit einem eigenen Buchstaben (gleichwie vorhin st mit w) und brächte das gleiche Verfahren gemäss dem Th. 50_+) Zusatz — in Anwendung, so würde sich in Einklang mit Boole ergeben:

$$st_1 = nir + u(i_1 + r_1), \quad s_1t = un_1(i_1 + r_1), \quad s_1t_1 = u(i_1 + r_1)$$

(wobei nur u jedesmal wieder von neuem eine unbestimmte Klasse vorzustellen hätte) welche Resultate zu deuten wir dem Leser überlassen.

24. Aufgabe (Venn[1] p. 310).
Gegeben $yz = a$, $zx = b$; es soll $c = xy$ durch a und b ausgedrückt werden.

Auflösung. Aus der vereinigten Gleichung der beiden ersten Prämissen:

$$a_1yz + a(y_1 + z_1) + b_1xz + b(x_1 + z_1) = 0$$

eliminire man zuerst z, welches ja in der dritten Prämisse nicht vorkommt. Aus der Resultante:

$$a \quad + bx_1 + (a_1y + b_1x)(a + b) = 0$$

und der dritten Prämisse bilde man sodann die vereinigte Gleichung:

$$ay_1 + bx_1 + a_1by + ab_1x + c_1xy + c(x_1 + y_1) = 0$$

um aus ihr noch x und y zu eliminiren, schliesslich c zu berechnen.

Die vorstehende Gleichung wird die volle Resultante der Elimination des z aus dem System der drei Prämissen, resp. aus deren vereinigter Gleichung, uns vorstellen, weil die Terme, die von vornherein vom Eliminanden frei sind, immer unverändert in die Resultante übergehen. Elimination von y gibt:

$$bx_1 + ab_1x + cx_1 + (a_1b + c_1x)(a + c) = 0,$$

oder:

$$a_1bc + a(b_1 + c_1)x + (b + c)x_1 = 0$$

und hieraus die von x:

$$a_1bc + a(bc_1 + b_1c) = 0,$$

oder

$$(ab_1 + a_1b)c + abc_1 = 0.$$

Da die Elimination von c hieraus auf $0 = 0$ führt, so braucht zwischen a und b keinerlei Relation zu bestehen und konnten diese Klassen von vornherein beliebig angenommen werden, so lange x und y unbestimmt gelassen wurden. Nunmehr berechnet sich:

$$c = ab + ua_1b_1,$$

oder

$$ab \mathrel{\underline{\in}} c \mathrel{\underline{\in}} ab + a_1b_1,$$

was zu finden war.

Anmerkung. Um x und y auf einmal zu eliminiren, wäre freilich ein einfacheres Verfahren das gewesen, dass man in das überschiebend gebildete Produkt der beiden ersten Gleichungen $zxy = ab$ den Wert von $xy\ (= c)$ aus der dritten Prämisse einsetzte. Aus dem Ergebniss $cz = ab$ schliesslich z eliminirend erhält man aber blos: $abc_1 = 0$, woraus zu erkennen ist, dass jenes Ergebniss nicht die volle Resultante gewesen. — In andern Fällen mag ein Kunstgriff schneller als das systematische Verfahren zuweilen auch zur vollen Resultante führen, doch ist das letztere, selbst wenn es weitläufiger, vorzuziehen, eben weil es uns über jene Frage nicht im Ungewissen lässt.

Wäre $d = xy_1 + x_1y$ zu suchen gewesen, so hätte sich ergeben:

$$abd + (ab_1 + a_1b)d_1 = 0,$$

also:

$$d = ab_1 + a_1b + ua_1b_1.$$

Für $e = x_1y_1$ ebenso: $\quad (a + b)e = 0, \quad e = ua_1b_1$.

Für $f = xy_1$ desgleichen: $af + a_1bf_1 = 0, \quad f = a_1(b + u)$.

Und dergleichen mehr — wobei natürlich die Symbole u der verschiedenen Lösungen beliebige aber nicht von einander unabhängige Bedeutungen haben. —

25. Aufgabe. Unter Elimination von x die Funktion $t = \varphi(x)$ auszudrücken durch die Koeffizienten der Gleichung $f(x) = 0$.

Auflösung. Sei entwickelt:

$$f(x) = 0 = ax + bx_1, \qquad \varphi(x) = t = \alpha x + \beta x_1,$$

wo also

$$a = f(1), \quad b = f(0), \quad \alpha = \varphi(1), \quad \beta = \varphi(0)$$

gegebene Parameter vorstellen werden, so haben wir die letzte Gleichung rechts auf 0 zu bringen:

$$t\varphi_1(x) + t_1\varphi(x) = 0,$$

aus ihr und der andern die vereinigte Gleichung zu bilden:

$$f(x) + t\varphi_1(x) + t_1\varphi(x) = 0,$$

also entwickelt:

$$(ax + bx_1)(t + t_1) + t(\alpha_1x + \beta_1x_1) + t_1(\alpha x + \beta x_1) = 0,$$

sodann x zu eliminiren, und die Resultante:

$$\{a(t + t_1) + \alpha_1t + \alpha t_1\}\ \{b(t + t_1) + \beta_1t + \beta t_1\} = 0,$$

oder

$$(a + \alpha_1)(b + \beta_1)t + (a + \alpha)(b + \beta)t_1 = 0$$

nach der Unbekannten t aufzulösen, nicht ohne dieselbe zuvor auch eliminirt zu haben. Da

$$(a + \alpha_1)(b + \beta_1)(a + \alpha)(b + \beta) = (a + \alpha_1\alpha)(b + \beta_1\beta) = ab$$

ist, haben wir als Resultante nur die alte Valenzbedingung:

$$ab = 0\,,$$

welche auch schon aus der Gleichung $f(x) = 0$ zu ersehen war, und sodann:

$$t = (a + \alpha)(b + \beta) + u(a_1\alpha + b_1\beta)$$

als die gesuchte Darstellung.

t ist demnach gelegen zwischen

$$a\beta + b\alpha + \alpha\beta \quad \text{und} \quad a\beta + b\alpha + a_1\alpha + b_1\beta$$

(in welcher Summe der Term $\alpha\beta$ einging — vergl. § 18, Th. ι).

26. Aufgabe. Analog unter Elimination von x, y durch die Koeffizienten der Gleichung:

$$f(x, y) = 0$$

die Funktion $t = \varphi(x, y)$ auszudrücken.

Auflösung. Entwickelt sei

$$f(x, y) = axy + bxy_1 + cx_1y + dx_1y_1 = 0,$$
$$\varphi(x, y) = \alpha xy + \beta xy_1 + \gamma x_1y + \delta x_1y_1 = t,$$

so hat man wie vorhin zu verfahren: die letzte Gleichung rechts auf 0 gebracht mit der vorigen zu vereinigen, dann x, y herauszuwerfen und die Resultante nach t aufzulösen. Sie lautet:

$$(a + \alpha_1)(b + \beta_1)(c + \gamma_1)(d + \delta_1)t + (a + \alpha)(b + \beta)(c + \gamma)(d + \delta)t_1 = 0,$$

gibt bei Elimination von t die alte Valenzbedingung:

$$abcd = 0$$

und aufgelöst:

$$t = (a + \alpha)(b + \beta)(c + \gamma)(d + \delta) + u(a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1\delta),$$

worin u unbestimmt bleibt. —

Ähnlich lässt sich die Lösung bei beliebig vielen Eliminanden $x, y, z, \ldots$ hinsetzen.

27. Aufgabe (Miss Ladd[1] p. 58..61).

Die Werktage der Woche sollen kurz mit

Mo., Di., Mi., Do., Fr., Sa.

bezeichnet werden.

Sechs Kindern a, b, c, d, e, f wird zugemutet*), dass sie folgende Vorschriften befolgen.

1⁰) Am Mo. und Di. dürfen nie viere (oder mehr) zusammen ausgehen

*) Die armen Kinder! — wird man freilich sagen.

2⁰) Am Do., Fr. und Sa. dürfen niemals dreie (oder mehr) daheim bleiben.

3⁰) Am Di., Mi. und Sa. müssen, wenn b und c beisammen sind, auch a, b, e und f beisammen bleiben.

4⁰) Am Mo. und Sa. darf b nicht ausgehen, wofern nicht d zuhause bleibt oder c, e und f zuhause bleiben.

b und f beschliessen zuerst, was sie thun wollen, und c trifft seine Entscheidung vor a, d oder e.

Zu ermitteln ist *erstens*, wann c ausgehen muss, *zweitens*, wann es daheim bleiben muss, mithin drittens auch, wann es verfahren kann nach seinem Gefallen.

Auflösung. Man lasse a auch bedeuten die Klasse der Fälle oder Zeiten, in welchen das Kind a *ausgeht*, sonach a_1 die Klasse der Fälle oder Zeiten, in welchen das Kind a *daheim verweilt* und so weiter. Ebenso lasse man Mo. bedeuten die Klasse der Fälle, in welchen „es Montag ist", d. h. die Klasse der auf einen Montag fallenden Zeiten, u. s. w.

Alsdann fordern die beiden ersten Vorschriften, dass sei:

$$1^0)\ (\mathrm{Mo} + \mathrm{Di})(abcd + abce + abcf + abde + abdf + abef + acde + {}$$
$$+ acdf + acef + adef + bcde + bcdf + bcef + bdef + cdef) = 0,$$

$$2^0)\ (\mathrm{Do} + \mathrm{Fr} + \mathrm{Sa})(a_1b_1c_1 + a_1b_1d_1 + a_1b_1e_1 + a_1b_1f_1 + a_1c_1d_1 + a_1c_1e_1 + {}$$
$$+ a_1c_1f_1 + a_1d_1e_1 + a_1d_1f_1 + a_1e_1f_1 + b_1c_1d_1 + b_1c_1e_1 + b_1c_1f_1 + b_1d_1e_1 + {}$$
$$+ b_1d_1f_1 + b_1e_1f_1 + c_1d_1e_1 + c_1d_1f_1 + c_1e_1f_1 + d_1e_1f_1) = 0.$$

In der That soll die Klasse der Fälle, wo es Mo. (oder Di.) ist und zugleich die Kinder a, b, c, d zusammen ausgehn, eine leere sein, was durch $(\mathrm{Mo} + \mathrm{Di}) \cdot abcd = 0$ auszudrücken; etc.; ebenso soll die Klasse der Zeiten eine leere sein, wo es Do. (oder Fr. oder Sa.) ist und die Kinder a, b, c zusammen daheim bleiben, was durch $(\mathrm{Do} + \mathrm{Fr} + \mathrm{Sa})\ a_1b_1c_1 = 0$ sich ausdrücken wird, etc. Dass an den betreffenden Tagen nicht mehr als viere ausgehen, bezüglich nicht mehr als dreie daheim bleiben sollen, braucht nicht besonders formulirt zu werden, indem die aus dieser Formulirung zu unserm Ansatz hinzutretenden Terme ohnehin von den bereits angesetzten absorbirt werden müssten, wie $abcde$ von $abcd$, wie $a_1b_1c_1d_1$ von $a_1b_1c_1$, etc.

Ferner ist zu bemerken, dass im Sinne der Aufgabenstellerin die sämtlichen Kinder etwa in einer und derselben Pension untergebracht zu denken sind, sodass diejenigen, die daheim bleiben, dann auch „beisammen" bleiben, und diejenigen, welche ausgehen, dies ebenfalls „zusammen" thun.

Die dritte Prämisse schliesst für gewisse Tage die Fälle aus, in welchen b und c beide aus oder beide daheim sind, falls nicht (oder „ausgenommen", wenn) zugleich a, b, e und f beisammen bleiben. D. h. sie fordert:

$$(\mathrm{Di} + \mathrm{Mi} + \mathrm{Sa})(bc + b_1c_1)(abef + a_1b_1e_1f_1)_1 = 0.$$

Die Negation im letzten Faktor kann nach meinem Th. 46) als diejenige einer nach b entwickelte Funktion ausgeführt werden, wodurch derselbe wird:

$$b(a_1 + e_1 + f_1) + b_1(a + e + f)$$

und dies nach Th. 45) mit dem ebendarnach schon entwickelten vorhergehenden Faktor multiplizirt, verschafft unsrer Prämisse die Form:

3⁰) $(\mathrm{Di} + \mathrm{Mi} + \mathrm{Sa})(a_1bc + bce_1 + bcf_1 + ab_1c_1 + b_1c_1e + b_1c_1f) = 0.$

Die letzte Prämisse ist in Formeln:

$$(\mathrm{Mo} + \mathrm{Sa})b(d_1 + c_1e_1f_1)_1 = 0$$

oder

$$(\mathrm{Mo} + \mathrm{Sa})bd(c + e + f) = 0.$$

Multiplizirt man hier mit dem ersten Faktor aus und berücksichtigt, dass nach der zweiten Prämisse: $\mathrm{Sa} \cdot c_1e_1f_1 = 0$ ist, so kann man mit Rücksicht auf:

$$c + e + f + c_1e_1f_1 = 1$$

im zweiten Teil vereinfachen:

$$\mathrm{Sa} \cdot (c + e + f) = \mathrm{Sa} \cdot (c + e + f + c_1e_1f_1) = \mathrm{Sa} \cdot 1 = \mathrm{Sa},$$

sodass

4⁰) $$\mathrm{Mo} \cdot bd(c + e + f) + \mathrm{Sa} \cdot bd = 0$$

der Ausdruck der vierten Prämisse wird (wie auch direkt einzusehen, da das Daheimbleiben $c_1e_1f_1$ am Sa. schon ausgeschlossen ist).

Zunächst ist erforderlich, a, d und e zu eliminiren [vergl. den Nachsatz unter Prämisse 4⁰) im Text der Aufgabe].

Der Teil der Prämissen, welcher schon frei von diesen ist, lautet:

2′) $$(\mathrm{Do} + \mathrm{Fr} + \mathrm{Sa})b_1c_1f_1 = 0,$$

3′) $$(\mathrm{Di} + \mathrm{Mi} + \mathrm{Sa})(bcf_1 + b_1c_1f) = 0,$$

wobei 1⁰) und 4⁰) keinen Term beisteuern. Die Summe der linken Seiten von 2′) und 3′) ist jedenfalls ein erster Bestandteil in dem Polynom der gesuchten Resultante.

Miss Ladd entnimmt nun weitere Bestandteile als Eliminationsergebnisse aus den einzelnen Paaren von Prämissengleichungen, wobei sie indess einige Paare — wie (1) mit (4), etc. — übergeht.

Da nach § 22 S. 470 dies immer insofern bedenklich ist, als man riskirt, nicht die *volle* Resultante zu bekommen, eliminiren wir lieber systematisch aus der „vereinigten" Gleichung der vier Prämissen (zu welcher man dieselben im Geiste leicht zusammenzieht) — wenn auch mit mehr Schreiberei — erst a, dann d, dann e (wenn man will, unter Beiseitelassung der vorstehend schon hervorgehobnen Terme, welche sich ja unverändert erhalten müssen — oder, weil es unbequem, auf sie besonders achten zu müssen, lieber unter Mitanführung derselben).

Die Resultante der Elimination von a enthält, gleich 0 gesetzt die Summe aller der Glieder aus den vier Prämissen, welche weder a noch a_1 zum Faktor haben:

$$\begin{aligned}0 = {} & (\mathrm{Mo} + \mathrm{Di})(bcde + bcdf + bcef + bdef + cdef) + \\ & + (\mathrm{Do} + \mathrm{Fr} + \mathrm{Sa})(b_1c_1d_1 + b_1c_1e_1 + b_1c_1f_1 + b_1d_1e_1 + b_1d_1f_1 + b_1e_1f_1 + c_1d_1e_1 + \\ & \qquad + c_1d_1f_1 + c_1e_1f_1 + d_1e_1f_1) + \\ & + (\mathrm{Di} + \mathrm{Mi} + \mathrm{Sa})(bce_1 + bcf_1 + b_1c_1e + b_1c_1f) + \mathrm{Mo} \cdot bd(c+e+f) + \mathrm{Sa} \cdot bd +\end{aligned}$$

plus dem Produkte aus der Summe der Koeffizienten von a in die Summe der Koeffizienten von a_1, nämlich:

$$\begin{aligned}& + [(\mathrm{Mo} + \mathrm{Di})(bcd + bce + bcf + bde + bdf + bef + cde + cdf + cef + def) + \\ & + (\mathrm{Di} + \mathrm{Mi} + \mathrm{Sa})b_1c_1] \,.\, [(\mathrm{Do} + \mathrm{Fr} + \mathrm{Sa})(b_1c_1 + b_1d_1 + b_1e_1 + b_1f_1 + c_1d_1 + \\ & \qquad + c_1e_1 + c_1f_1 + d_1e_1 + d_1f_1 + e_1f_1) + (\mathrm{Di} + \mathrm{Mi} + \mathrm{Sa})bc].\end{aligned}$$

Letzteres ist zunächst auszumultipliziren. Nennte man es kurz

$$[A + B][C + D] = AC + AD + BC + BD,$$

so verschwindet nicht nur BD, sondern, *weil das Produkt je zweier verschiedenen Wochentage* 0 *ist* auch AC, und aus demselben Grunde vereinfachen die stehen bleibenden Glieder $AD + BC$ sich zu:

$$\mathrm{Di} \cdot (bcd + bce + bcf) + \mathrm{Sa} \cdot b_1c_1$$

mit Rücksicht auf das Absorptionsgesetz.

Denkt man dies sich oben hinter das +Zeichen gesetzt, und eliminirt aus der Gleichung d, so erhält man analog weiter:

$$\begin{aligned}0 = {} & (\mathrm{Mo} + \mathrm{Di})bcef + (\mathrm{Do} + \mathrm{Fr} + \mathrm{Sa})(b_1c_1e_1 + b_1c_1f_1 + b_1e_1f_1 + c_1e_1f_1) + \\ & + (\mathrm{Di} + \mathrm{Mi} + \mathrm{Sa})(bce_1 + bcf_1 + b_1c_1e + b_1c_1f) + \mathrm{Di} \cdot (bce + bcf) + \mathrm{Sa} \cdot b_1c_1 + \\ & + [(\mathrm{Mo} + \mathrm{Di})(bce + bcf + bef + cef) + \mathrm{Mo} \cdot b(c + e + f) + \mathrm{Sa} \cdot b + \mathrm{Di} \cdot bc] \cdot \\ & \cdot (\mathrm{Do} + \mathrm{Fr} + \mathrm{Sa})(b_1c_1 + b_1e_1 + b_1f_1 + c_1e_1 + c_1f_1 + e_1f_1),\end{aligned}$$

wo das Produkt der zwei letzten Zeilen sich wieder reduzirt, und zwar zu:

$$\mathrm{Sa} \cdot b(c_1e_1 + c_1f_1 + e_1f_1).$$

Wird, nachdem dies eingesetzt ist, endlich e eliminirt, so kommt:

$$\begin{aligned}0 = {} & (\mathrm{Do}+\mathrm{Fr}+\mathrm{Sa})b_1c_1f_1 + (\mathrm{Di}+\mathrm{Mi}+\mathrm{Sa})(bcf_1 + b_1c_1f) + \mathrm{Di} \cdot bcf + \mathrm{Sa} \cdot b_1c_1 + \mathrm{Sa} \cdot bc_1f_1 + \\ & + [\mathrm{Mo} + \mathrm{Di})bcf + (\mathrm{Di} + \mathrm{Mi} + \mathrm{Sa})b_1c_1 + \mathrm{Di}.\, bc] \cdot \\ & \cdot [(\mathrm{Do} + \mathrm{Fr} + \mathrm{Sa})(b_1c_1 + b_1f_1 + c_1f_1) + (\mathrm{Di} + \mathrm{Mi} + \mathrm{Sa})bc + \mathrm{Sa} \cdot b(c_1 + f_1)]\end{aligned}$$

wo das letzte Produkt sich reduzirt zu:

$$\mathrm{Sa} \cdot b_1c_1 + \mathrm{Di} \cdot bcf + \mathrm{Di} \cdot bc = \mathrm{Di} \cdot bc + \mathrm{Sa} \cdot b_1c_1.$$

Nach den Wochentagen geordnet ist demnach die gesuchte Resultante, wenn wir eingehende Terme sogleich bei den Koeffizienten fortlassen:

$$0 = \mathrm{Di}(bc + b_1c_1f) + \mathrm{Mi}(bcf_1 + b_1c_1f) + (\mathrm{Do} + \mathrm{Fr})b_1c_1f_1 + \mathrm{Sa}(bf_1 + b_1c_1),$$

wo der letzte Koeffizient zusammengezogen ist aus

$$bcf_1 + bc_1f_1 + b_1c_1.$$

Dies gibt, nach c geordnet:

$$0 = \mathrm{Sa}\cdot bf_1 + \{\mathrm{Di}+\mathrm{Mi}\cdot f_1\}\, b\cdot c + \{(\mathrm{Di}+\mathrm{Mi})f + (\mathrm{Do}+\mathrm{Fr})f_1 + \mathrm{Sa}\}\, b_1\cdot c_1,$$

was zerfällt in die Resultante der Elimination auch noch von c:

$$\mathrm{Sa}\cdot bf_1 = 0$$

und in die beiden Subsumtionen:

$$\mathrm{Di}\cdot b + \mathrm{Mi}\cdot bf_1 \Subset c_1, \quad (\mathrm{Di}+\mathrm{Mi})b_1 f + (\mathrm{Do}+\mathrm{Fr})b_1 f_1 + \mathrm{Sa}\cdot b_1 \Subset c.$$

In Beantwortung der gestellten Fragen haben wir demnach das Ergebniss:

Wenn am Di. oder Mi. f ohne b ausgeht, desgleichen, wenn am Do. oder Fr. b und f beide daheim bleiben, endlich, wenn am Sa. b zuhause bleibt, so muss c ausgehen.

Wenn am Di. b ausgeht, sowie wenn am Mi. b ohne f ausgeht, dann muss c zuhause bleiben.

In jedem andern Falle kann c nach Belieben verfahren. Wie es aber auch verfahren möge, so wird am Sa. b nicht ohne f ausgehen dürfen.

Die vorstehende ist wol die komplizirteste von den Aufgaben des Denkrechnens, die bis jetzt überhaupt gestellt und gelöst worden sind.

28. **Aufgabe.** McColl, Math. Questions, Vol. 33, p. 22 .. 24, auch gelöst von C. J. Monro.

Ähnlich wie in der 11. Aufgabe mögen nachstehend die Buchstaben gedeutet werden als Klassen der Fälle, in welchen ein gleichnamiges Ereigniss eintritt. Dann soll beobachtet sein, dass:

$$abx \Subset cde, \quad bcy \Subset de, \quad c+d+e_1 \Subset (a_1+b+x)(b_1+c+y), \quad a_1 x = b_1 y.$$

Gesucht, wann ohne Rücksicht auf y das Eintreffen (resp. Eingetroffensein) oder Nichteintreffen des Ereignisses x verbürgt ist.

Auflösung. Elimination von y aus der vereinigten Gleichung der drei letzten Prämissen:

$$bc(d_1+e_1)y + (c+d+e_1)(ab_1x_1 + bc_1y_1) + a_1x(b+y_1) + (a+x_1)b_1y = 0$$

gibt:

$$a_1bx + ab_1(c+d+e_1)x_1 = 0,$$

und dies mit der ersten Prämisse (die y gar nicht enthielt) vereinigt:

$$(a_1+c_1+d_1+e_1)bx + ab_1(c+d+e_1)x_1 = 0.$$

Die Auflösung dieser Resultante nach x, mitnebst deren Konversion (d. h. ihrer Auflösung nach x_1):

$$ab_1(c+d+e_1) \Subset x \Subset acde + b_1, \quad (a_1+c_1+d_1+e_1)b \Subset x_1 \Subset a_1 + b + c_1d_1e$$

lässt die Subjekte von x und x_1 (daneben ungefragt auch ihre Prädikate) erkennen — was leicht in Worten zu formuliren.

29. **Aufgabe** (Elizabeth Blackwood, Math. Quest. Vol. 35, 1881, p. 24 u. 25). Bekannt sei, dass jedes von den zusammengesetzten Ereignissen ayz, bzx, cxy von mindestens zweien der Ereignisse d, e, f begleitet (resp. gefolgt) ist und dass jedes von den zusammengesetzten „Nichtvorkommnissen" $d_1y_1z_1$, $e_1z_1x_1$, $f_1x_1y_1$ das Nichteintreffen von mindestens zweien der Ereignisse a, b, c bedingt. Welche Abhängigkeit folgt daraus zwischen dem Eintreffen oder Nichteintreffen der Ereignisse a, b, c, d, e, f ohne Rücksicht auf die x, y, z?

Auflösung (cf. McColl, Grove, und andere).

Die Prämissen sind:

$$ayz + bzx + cxy \Subset ef + fd + de, \quad d_1y_1z_1 + e_1z_1x_1 + f_1x_1y_1 \Subset b_1c_1 + c_1a_1 + a_1b_1.$$

Indem man das Polynom ihrer vereinigten Gleichung nach x, y, z entwickelte, und das Produkt der Koeffizienten $= 0$ setzte, ergäbe sich unschwer die gesuchte Resultante als: $abcd_1e_1f_1 = 0$.

Da dieses systematische Verfahren immerhin einige Schreiberei erforderte, wollen wir die Aufgabe durch einen Kunstgriff lösen, der noch einfacher ist als der von McColl etc. („by mere inspection") angewendete. Wir zerlegen jede der beiden Prämissensubsumtionen, deren Subjekt ja als Trinom erscheint gemäss Def. (3_+) in drei einzelne Subsumtionen, und werfen in einer jeden von diesen den Koeffizienten von links gemäss Peirce's Th. 41) nach rechts; so entsteht:

$$\begin{array}{llll} yz \Subset ef + fd + de + a_1, & & y_1z_1 \Subset b_1c_1 + c_1a_1 + a_1b_1 + d, \\ zx \Subset \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} + b_1, & & z_1x_1 \Subset \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} + e, \\ xy \Subset \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} + c_1, & & x_1y_1 \Subset \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} + f. \end{array}$$

Addiren wir überschiebend jetzt diese sechs Subsumtionen und beachten, dass $y_1z_1 + z_1x_1 + x_1y_1$ gerade die Negation von $yz + zx + xy$ ist, so erhalten wir:

$$1 \Subset a_1 + b_1 + c_1 + d + e + f,$$

oder:

$$abc \Subset d + e + f,$$

was zu finden gewesen.

30. **Aufgabe** (Macfarlane, Math. Questions, Vol. 44, p. 48 .. 50). Aus den mit Worten gegebenen Data:

$$ax + b_1y = c, \quad dx_1(e+y) = f$$

sollen die Klassen x, y als Unbekannte durch die übrigen ausgedrückt werden.

Die **Auflösung** soll hier mit allen Zwischenrechnungen gegeben werden. Aus der vereinigten Gleichung der Data:

$$(ax + b_1y)c_1 + (a_1 + x_1)(b + y_1)c + df_1x_1(e+y) + (d_1 + x + e_1y_1)f = 0$$

heben wir die Koeffizienten von y und y_1 hervor, und bilden ihr Produkt:

$$\{b_1c_1 + df_1x_1\}\ \{(a_1 + x_1)c + e_1f\} = b_1c_1e_1f + cdf_1x_1.$$

Aus diesen und den stehen geblieben Gliedern (welche weder y noch y_1 zum Faktor haben), heben wir die Koeffizienten von x und von x_1 hervor, um deren Produkt zu bilden:

$$(ac_1 + f)\ (bc + def_1 + cdf_1) = ac_1def_1 + bcf.$$

Letzteres, mit den bezüglich x und y konstanten Termen des vorigen Ergebnisses sowol als der vereinigten Gleichung vereinigt und gleich 0 gesetzt, ist die Resultante der Elimination von x nebst y, oder die zwischen den bekannten Klassen notwendig geltende Relation:

$$ac_1def_1 + a_1bc + bcf + b_1c_1e_1f + d_1f = 0,$$

welche leicht als

$$ade \Subset c + f, \quad bc \Subset a, \quad bcf = 0, \quad f \Subset (b + c + e)\,d$$

in Worten zu deuten ist. Um x zu finden, braucht man nur mehr die Gleichung mit der rechten Seite 0 aufzulösen, in welcher x und x_1 bezüglich die Faktoren des zuletzt ausmultiplizirten Produktes zu Koeffizienten haben. Da $bcf = 0$ ist, vereinfacht der Koeffizient von x_1 sich noch zu $(bc + cd + de)f_1$, und ist hienach die Auflösung:

$$(bc + cd + de)f_1 \Subset x \Subset (a_1 + c)f_1.$$

Ebenso heben wir noch aus der vereinigten Gleichung die Koeffizienten von x und x_1 hervor; das Produkt derselben ist:

$$(ac_1 + f)\ \{c(b + y_1) + df_1(e + y)\} = ac_1def_1 + bcf + cfy_1 + ac_1df_1y,$$

wovon eigentlich nur die beiden letzten Glieder auszurechnen gewesen. Diese zusammengezogen mit den nur y oder y_1 aber nicht x oder x_1 zum Faktor habenden Gliedern der vereinigten Gleichung geben die nach y aufzulösende Gleichung:

$$(b_1c_1 + ac_1df_1)y + (a_1c + e_1f + cf)y_1 = 0,$$

deren Auflösung ist:

$$a_1c + cf + fe_1 \Subset y \Subset c + b(a_1 + d_1 + f).$$

Zur Darstellung dieser letzteren (in der Zeichensprache) nimmt Herr Macfarlane den Raum von sieben Druckzeilen in Anspruch, zur Darstellung der Auflösung nach x deren viere, und habe ich nicht versucht, seine Resultate zu kontroliren, da der hervorgehobene Kontrast wol genugsam erkennen lässt, dass sein Verfahren weit entfernt sein muss, zu den zweckmässigsten zu gehören.

31. Studie. Um dem Leser, welchem Boole's grundlegendes Werk[4] vielleicht schwer zugänglich ist, eine Idee zu geben, in welcher Weise dort Probleme rechnerisch behandelt werden, wollen wir schliesslich ein paar Aufgaben dieses Autor's noch in seiner Manier lösen, obwol wir, wie schon angedeutet, dasjenige, was diese Manier von den neueren Behandlungsweisen unterscheidet, auf Grund der unverkennbaren Vorzüge dieser letzteren für endgültig abgethan halten, ihm nur historisches Interesse noch zuerkennend.

Vor allem sei die fundamentale Aufgabe behandelt, die Gleichung

$$ax + bx_1 = 0$$

nach x aufzulösen. Zu dem Ende muss im Einklange mit den Ergebnissen unsres § 23 zunächst $1 - x$ für x_1 geschrieben, die Gleichung also mit Boole[4] p. 155 in der Form angesetzt werden:

$$ax + b(1 - x) = 0.$$

Diese aufzulösen verfährt Boole wie bei den *arithmetischen* Gleichungen ersten Grades, bildend:

$$x(a - b) = -b, \quad x = \frac{b}{b - a},$$

und dieses Ergebniss wird von Boole nun als $f(a, b)$ betrachtet und in Gestalt von:

$$f(a, b) = f(1, 1)ab + f(1, 0)ab_1 + f(0, 1)a_1b + f(0, 0)a_1b_1$$

gemäss Th. 44_+) nach a und b „entwickelt". So ergibt sich ihm:

$$x = \frac{1}{1 - 1}ab + \frac{0}{0 - 1}ab_1 + \frac{1}{1 - 0}a_1b + \frac{0}{0 - 0}a_1b_1 =$$

$$= \frac{1}{0}ab + 0 \cdot ab_1 + 1 \cdot a_1b + \frac{0}{0}a_1b_1,$$

wobei ich davon absehe, dass auch für a_1, b_1 in der Regel nur $1 - a$, $1 - b$ von ihm geschrieben wird.

Da $\frac{1}{0}$ ein Unsinn wäre, falls es wirklich vorkäme, so muss es herausfallen, d. h. in einen verschwindenden Konstituenten, in 0 multiplizirt sein. Dies gibt die Valenzbedingung für x oder Auflösbarkeitsbedingung für die gegebne Gleichung, nämlich:

$$ab = 0$$

(d. i. unsre Resultante der Elimination des x), und da $\frac{0}{0} = u$ jeden erdenklichen Wert vorstellt, unbestimmt oder willkürlich bleibt, so haben wir:

$$x = a_1b + ua_1b_1$$

in Übereinstimmung mit unserm rein logisch gerechtfertigten Ergebnisse ν) des § 21.

Man sieht indess, dass hier Zwischenoperationen ausgeführt wurden, die einer logischen Deutung unfähig bleiben, wie z. B. nicht nur die Bildung des im identischen Kalkul jedes Sinnes ermangelnden Nenners $0 - 1$, sondern namentlich auch schon der Ansatz einer Differenz $b - a$, während a gar nicht in b enthalten!

Andere Aufgabe. In [4] p. 95 . . 97 verlangt **Boole**, dass die Gleichung: $x = y(z + w)$ nach der Unbekannten y aufgelöst werde, wobei ihm bedeutet: x = verantwortliche Wesen, y = vernunftbegabte Wesen, z = Diejenigen, die Freiheit des Handelns haben, w = Solche, welche ihrer Freiheit sich freiwillig begeben haben.

Und er verfährt analog wie vorhin folgendermassen. Die arithmetische Lösung des Problems:

$$y = \frac{x}{z + w}$$

wird, als Funktion von x, z, w betrachtet, entwickelt nach dem Schema:

$$f(x, z, w) = f(1, 1, 1)xzw + f(1, 1, 0)xzw_1 + \cdots + f(0, 0, 0)x_1z_1w_1.$$

Es entsteht, wenn wir die drei sofort herausfallenden Terme noch in Klammer mit anführen:

$$y = \frac{1}{2}xzw + 1 \cdot xzw_1 + 1 \cdot xz_1w + \frac{1}{0}xz_1w_1 +$$
$$+ \left(\frac{0}{2}x_1zw + \frac{0}{1}x_1zw_1 + \frac{0}{1}x_1z_1w\right) + \frac{0}{0}x_1z_1w_1,$$

und folgt hieraus erstens, dass die Konstituenten der beiden deutungsunfähigen Koeffizienten $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{0}$ verschwinden müssen, also

$$x(zw + z_1w_1) = 0$$

sein muss, und zweitens, dass

$$y = x(zw_1 + z_1w) + ux_1z_1w_1$$

gefunden ist, was dann leicht mit Worten zu interpretiren.

Instruktiv ist die Vergleichung dieses Ergebnisses mit dem nach unsrer Theorie sich ergebenden. Die Aufgabe fällt, wenn man $z + w$ mit *einem* Buchstaben bezeichnet, unter das Schema der in Aufgabe 13, ε) des gegenwärtigen Paragraphen schon gelösten (wobei die dort x genannte Unbekannte nur y heisst, wogegen $a = z + w$, $b = x$ hier als gegeben zu denken — vergl. auch § 23) und haben wir zuverlässig als Resultante:

$$xz_1w_1 = 0$$

sowie als Auflösung:

$$y = x + uz_1w_1 \quad \text{oder:} \quad x \Subset y \Subset x + z_1w_1.$$

Nach Th. 33_+) Zusatz kann statt des Terms uz_1w_1 allerdings auch $ux_1z_1w_1$ gesetzt werden. Gleichwol deckt sich aber unser Ergebniss *nicht* mit dem Boole'schen, und die Abweichung erklärt sich aus dem Umstande, dass bei Boole die Summe $z + w$ als eine „reduzirte" verstanden wird, deren Glieder z und w als disjunkte das Produkt:

$$zw = 0$$

geben — bei uns jedoch im Allgemeinen nicht. Ziehen wir diese Gleichung als eine nach den Daten des Problemes selbstverständlich geltende

zu unsern Prämissen hinzu, so — aber erst dann — erweist sich (leicht) die völlige Übereinstimmung der beiderseitigen Ergebnisse.

Indem bei Boole sogar $x + x = 2x$, etc. gilt, so treten überhaupt, wie vorstehend, bei seinem Verfahren in den Gliedern des Resultates oft Zahlenfaktoren, wie $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, etc. als Koeffizienten auf, die er schliesslich als belanglose, nicht interpretable, über Bord wirft, die Konstituenten, mit denen sie behaftet erscheinen, gleich 0 setzend.

Ähnlich mag endlich zur Vergleichung herangezogen werden eine von den zahlreichen Aufgaben, die **Boole** knüpft an **Senior's** Definition von „wealth" (wörtlich des Reichtums, genauer wol dem volkswirtschaftlichen Begriffe des „Gutes" entsprechend). Prämisse ist:

$$w = st(p + r),$$

wo w = Gut, s = Dinge, die nur in begrenztem Vorrat verfügbar (limited in supply), t = übertragbar (transferable), p = Genuss verschaffend (productive of pleasure) und r = Leid vorbeugend (preventive of pain) bedeutet. Cf. [4] p. 106, sq.

Verlangt ist ein Ausdruck für w *ohne* Rücksicht auf r.

Wir würden systematisch aus der Gleichung:

$$w_1st(p + r) + w(s_1 + t_1 + p_1r_1) = 0$$

erst r eliminiren, die Resultante: $w_1stp + w(s_1 + t_1) = 0$ sodann nach w auflösen und finden:

$$w = st(p + u) \quad \text{oder} \quad stp \Subset w \Subset st$$

— ein Ergebniss, das aber hier schon unmittelbar zu gewinnen war, indem man den Namen r des Eliminanden durch den u einer unbestimmten Klasse ersetzte!

Boole hingegen, welcher natürlich die Prämisse, da p und r sich gegenseitig nicht ausschliessen, in der Form ansetzen muss:

$$w = st(p + rp_1)$$

operirt, p_1 durch $1 - p$ ersetzend, wie folgt. Er schreibt die Gleichung:

$$w - st(p + r - rp) = 0,$$

bemerkt, dass das Polynom derselben für $r = 1$ in $w - st$ und für $r = 0$ in $w - stp$ übergeht, mithin

$$(w - st)(w - stp) = 0$$

die Resultante der Elimination von r ist. Ausmultiplizirt gibt dies (wegen $ww = w$, etc.) eine Gleichung:

$$w - wstp - wst + stp = 0$$

aus der sich:

$$w = \frac{stp}{st + stp - 1}$$

nach den Regeln der Arithmetik berechnet. [Statt dessen konnte aber auch jenes Polynom erst nach w entwickelt werden in der Gestalt:

$$(1 - st)(1 - stp)w + stp(1 - w) = 0,$$

woraus dann:

$$w = \frac{stp}{stp - (1 - st)(1 - stp)}$$

sich berechnete.] Beidemal ergibt sich durch die mühsame „Entwickelung" der rechten Seite als einer Funktion $f(s, t, p)$ übereinstimmend:

$$w = stp + \frac{0}{0}\,st(1 - p),$$

als ein auch unmittelbar einleuchtendes Ergebniss: Die wirtschaftlichen Güter bestehen aus allen übertragbaren Genussmitteln von begrenztem Vorrat und einem unbestimmten Reste (indefinite remainder) von nur in begrenzter Menge zur Verfügung stehenden übertragbaren Dingen, die keine Genussmittel sind.

Der Leser hat vielleicht den Eindruck, dass Boole's Verfahren sich — in Praxi wenigstens — doch ziemlich stark von meiner Modifikation desselben unterscheidet. —

Vierzehnte Vorlesung.

§ 26. Besprechung noch andrer Methoden zur Lösung der bisherigem Kalkul zugänglichen Probleme.

Das primitivste oder Ausmusterungsverfahren von Jevons. Lotze's Kritik, und Venn's graphische Modifikation des Verfahrens.

Es handelte sich im bisherigen stets um Probleme, deren Data ausdrückbar sind durch Subsumtionen (oder Gleichungen*)) zwischen Klassen oder Funktionen des identischen Kalkuls von solchen, und deren Lösung dann ebenfalls wieder durch Aussagen von dieser Form darstellbar ist. Es kam dabei darauf an, gewisse Klassen aus den Daten des Problems zu eliminiren, andere aus denselben in dem in § 21, ο) erläuterten Sinne zu berechnen, d. h. ihre Subjekte und Prädikate aufzufinden, welche vermittelst der übrigen Klassen sich beschreiben lassen.

Ehe wir mit nächster Vorlesung in Band 2 diesen Kreis unsrer Aufgaben erweitern, wollen wir noch ein Weilchen bei den bisherigen verweilen um uns über die verschiedenen Methoden zu orientiren, welche zur Bewältigung dieser Aufgaben vorgeschlagen worden sind und zur Verfügung stehen.

Als solche zählt Herr Peirce in seiner grundlegenden Arbeit[5] in chronologischer Folge auf: die Methoden von Boole, Jevons, Schröder, McColl, denen er alsdann noch eine fünfte selbst hinzufügt. Wir werden sehen, dass diese nur auf dreie „wesentlich" hinauslaufen, von denen die von mir modifizirte Boole'sche Methode im bisherigen schon dargelegt und ausschliesslich angewendet worden ist. Durch diese ihm zuteil gewordene Modifikation erscheint das ursprüngliche Verfahren Boole's nunmehr als vollständig antiquirt (superseded) und dürfte künftig niemand mehr je auf dasselbe zurückgreifen. In seiner abgeänderten Gestalt jedoch wird dasselbe, denke ich, wol fort-

*) Diese besonders zu erwähnen könnte unterbleiben, da nach Def. (1) eine Gleichung äquivalent ist einem Paar von Subsumtionen.

leben, obwol ihm neuerdings durch **McColl** und **Peirce** ein ebenbürtiges Verfahren an die Seite gestellt ist. —

Das Verfahren von **Jevons** ist zwar ein kunstloses — wenn man will, das nächstliegende oder ursprünglichste — doch verdient es immerhin als eine besondere Methode (die zweite von oberwähnten dreien) hingestellt zu werden.

Im wesentlichen besteht dasselbe kurz gesagt darin: *dass man für die sämtlichen Klassen, von denen im Problem die Rede ist, alle Möglichkeiten hinschreibt, welche in Bezug auf das Vorkommen oder Nichtvorkommen einer jeden in Verbindung mit den andern denkbar sind, von diesen denkbaren Kombinationen alsdann alle diejenigen ausstreicht, welche durch die Data des Problemes als unzulässige ausgeschlossen werden, und aus den stehen bleibenden endlich herauszulesen sucht die Antwort auf die Fragen, die das Problem aufwirft.*

Von **Jevons**[1] p. 44 sq. zuerst 1864 auseinandergesetzt, ist, wie Herr **Venn**[1] p. 351 bemerkt, derselbe Gedanke schon früher, 1811, auch von **Semler**[1] p. 48 angedeutet.

Der erste der drei im **Jevons**'schen „*Ausmusterungs*verfahren" geforderten Prozesse deckt sich mit der „*Entwickelung*" im Sinne des Th. 44_+) *der identischen* 1 — welche die ganze Mannigfaltigkeit vorstellt der Individuen oder Objekte auf die das Problem Bezug nimmt — nach den im Probleme vorkommenden Klassensymbolen als Argumenten. Die Glieder und Konstituenten dieser Entwickelung sind eben jene „Kombinationen", die alle hinsichtlich dieser Klassen denkbaren Möglichkeiten repräsentiren. Anstatt dieselben mittelst Pluszeichen unter sich zu verknüpfen und die so gebildete Summe ausdrücklich gleich 1 zu setzen, wird man gewöhnlich vorziehen, gedachte Kombinationen bequemer nur einfach untereinander zu schreiben.

Man beginnt demgemäss damit, als erste Kombination hinzuschreiben: das Produkt sämtlicher vorkommenden Klassensymbole (indem man, wo etwa eine Klasse nebst ihrer Negation in den Data des Problems erwähnt sein sollte, sich für eine von beiden, etwa für die affirmativ ausgedrückte entscheidet). In dieser ersten Kombination ersetzt man das letzte Symbol durch seine Negation und erhält die zweite Kombination; in beiden bisherigen Kombinationen ersetzt man das vorletzte Symbol durch seine Negation und erhält zwei weitere Kombinationen. Man fährt so fort in allen bisherigen Kombinationen immer ein früheres Symbol durch seine Negation zu ersetzen, bis dieses auch für das erste Symbol geschehen ist, so werden sämtliche Kombinationen angesetzt sein.

Die Zahl der letzteren ist 2^n, wenn n die Anzahl der vorkommenden Symbole gewesen — vergl. S. 418 — und jede dieser 2^n Kombinationen ist ein Produkt von n Faktoren, wobei als Faktor ein jeder von den im

Problem zu verwenden gewesenen Buchstaben entweder unnegirt als solcher steht oder aber durch seine Negation vertreten ist.

Um beispielsweise die 7. Aufgabe des § 25 nach **Jevons**' Methode zu behandeln, würde schon der Ansatz von $2^7 = 128$ Kombinationen (welche je aus sieben Symbolen sich zusammensetzen) erforderlich sein. Man wird sich schwerlich dazu verstehen, für $n > 6$ die Operationen noch praktisch durchzuführen.

In dieser mit wachsender Zahl n so rasch zunehmenden Weitläufigkeit der Prozesse liegt eine erste und grosse Schwäche der Methode.

Behufs Ausführung des zweiten von der Methode geforderten Prozesses muss man eine jede der angesetzten Kombinationen im Geiste zusammenhalten oder vergleichen sowol mit der linken Seite, dem Subjekte, als eventuell mit der rechten Seite, dem Prädikate einer jeden in Form einer Subsumtion gegeben gedachten Prämisse des Problemes. Man muss ja zusehen ob die Kombination mit der Prämisse *verträglich* ist, oder *nicht*, um — im letztern Falle — die Kombination *auszustreichen*. Dieses geht genauer dargelegt in folgender Weise vor sich.

Beide Seiten der Prämisse mögen wir als Aggregate von Monomen uns dargestellt denken, sodass

$$S + S' + \cdots \subseteq P + P' + P'' + \cdots$$

die Form unsrer Prämisse ist, wo die Glieder $S, S', \ldots P, \ldots$ selbst Produkte sein werden von höchstens n Symbolen (in der Regel weniger), hervorgehoben aus der Gruppe der überhaupt im Problem vorkommenden (n) Klassensymbole $a, b, c, \ldots$ und ihrer (n) Negationen $a_1, b_1, c_1, \ldots$

Man hat sich nun zu erinnern, dass nach § 8, $\varkappa$) die Pluszeichen der Subsumtion links, im Subjekte, mit „*und*", rechts, im Prädikate aber mit „*oder*" in Worte zu übersetzen sind, mithin die Prämisse fordert, dass wo die in S vereinigte Faktorenkombination vorliegt, *sowol, als auch* wo die in S' vereinigte vorliegt, etc. da auch vorliegen muss *entweder* die in P *oder* die in P', *oder* die in P'', etc. vereinigt erscheinende Kombination von Faktoren.

In Bezug auf die mit dieser Prämisse zu vergleichende Kombination (aus der Menge der 2^n angesetzten) — K möge sie für den Augenblick heissen — können nun verschiedene Fälle vorliegen.

Entweder sie ist — nach Th. $6_\times$) oder Prinzip I — einem der Subjekte $S, S', \ldots$ (eventuell auch gleichzeitig deren mehreren) eingeordnet, d. h. die sämtlichen Faktoren, aus denen sich eins dieser Subjekte zusammensetzt, treten auch als Faktoren in K auf, oder nicht.

Im letztern Falle treffen schon die Voraussetzungen der Prämisse für unsere Kombination K nicht zu, die Prämisse berührt die Kombination gar nicht, geht sie nichts an, sagt überhaupt nichts in Bezug auf dieselbe aus. Die Kombination kann als mit der Prämisse *verträglich*, doch zu ihr *indifferent*, neutral, bezeichnet werden.*)

Im ersteren Falle fordert die Prämisse, dass die Kombination K nun auch mindestens einem der Prädikate $P, P', P'', \ldots$ eingeordnet sei, d. h. dass sie auch dessen Faktoren sämtlich in sich aufweise. (Sie muss deshalb mit letzteren der Reihe nach im Geiste zusammengehalten werden.)

Ist es der Fall, so erfüllt die Kombination K unsre Prämisse, sie ist nicht nur mit ihr *verträglich*, sondern sogar *konform* mit ihr gebildet, *in „Übereinstimmung“* mit derselben.

Ist es nicht der Fall, so *widerspricht* die Kombination K der Prämisse, wird von ihr als unzulässig hingestellt, ausgeschlossen, verboten, und muss ausgestrichen werden.

Um dies zur Stelle durch ein ganz einfaches Beispiel zu erläutern, so möge die Prämisse heissen: $ab_1 \mathrel{=\!\!\!\!\in} c_1$, d. h. die a, welche nicht b sind, sind auch nicht c (oder: wo die Merkmale von a vorliegen und Merkmale von b fehlen, da fehlen auch solche von c). Wie verhalten sich dann die drei Kombinationen: $a_1b_1cd_1$, ab_1c_1d und ab_1cd_1? Nun: die erste ist indifferent zu der Prämisse, als den Faktor ab_1 nicht in sich aufweisend; die zweite ist im Einklange mit der Prämisse, fällt unter dieselbe, da sie neben ab_1 auch c_1 aufweist; die dritte aber widerspricht der Prämisse, indem sie zwar ab_1, aber nicht c_1, vielmehr statt dessen c in sich als Faktor aufweist, dieselbe wäre demnach zu streichen, wogegen die beiden andern Kombinationen stehen bleiben können als von dieser Prämisse erlaubte (d. h. nicht verbotene) sofern sie nicht von andern Prämissen noch aufgehoben werden.

Ehe wir zur Besprechung des dritten und letzten Prozesses der Jevons'schen Methode übergehen, mögen die beiden vorigen an jenem Boole'schen Problem, der 1. Aufgabe des § 25 erprobt werden.

Citirenshalber legen wir uns die Prämissen $\alpha), \beta), \gamma)$ des Problems in folgender Fassung auseinander:

$\alpha)$ $\quad a_1c_1$ bedingt bd_1e oder b_1de;

$\beta)$ $\quad ade_1$ bedingt bc oder b_1c_1;

*) Ich bemerke, dass ich in meiner Darstellung mehrfach, und wie ich glaube verbessernd oder ergänzend, von Jevons abweiche, dessen Benennungen als excluded, included und contradictory „subject“ mir unter anderm nicht ganz glücklich gewählt erscheinen.

$$\gamma)\begin{cases}\gamma')\begin{Bmatrix}\gamma_1')\ abe_1\\ \gamma_2')\ ab_1e\\ \gamma_3')\ abe\end{Bmatrix}\ \text{bedingt}\ \begin{cases}cd_1\ \text{oder}\\ c_1d;\end{cases}\\[2ex] \gamma'')\begin{Bmatrix}\gamma_1'')\ cd_1\\ \gamma_2'')\ c_1d\end{Bmatrix}\ \text{bedingt}\ \begin{cases}abe_1\ \text{oder}\\ ab_1e\ \text{oder}\\ abe\end{cases}\end{cases}$$

— indem wir auch den Ausdruck $a(b+e) = a(be_1 + b_1e + be)$ nach den drei in ihm vorkommenden Symbolen entwickelten (was strenge genommen nicht nötig: man könnte auch mit $ab + ae$ schon die Überlegungen anstellen). —

Da fünf Symbole a, b, c, d, e in Frage kommen, so haben wir $2^5 = 32$ Kombinationen durchzugehen, die wir nachstehend geordnet und numerirt untereinander stellen.

Die *links* notirten Chiffren $\alpha), \beta), \gamma)$ von Prämissen erklären die danebenstehende Kombination als mit diesen übereinstimmende, als eventuell zulässig, die *rechts* notirten als ihnen widersprechende *unzulässige*, dergestalt, dass wo Erlaubniss (im vorerwähnten Sinne) und Verbot zusammentreffen, das Verbot zu gelten hat. Die Kombinationen, bei denen keine Prämissenchiffre angemerkt ist, sind die zu allen Prämissen indifferenten.

Kombinationen.

1)		$abcde - \gamma_3')$	17)		a_1bcde
2)	$\beta)$	$abcde_1 - \gamma_1')$	18)		a_1bcde_1
3)	$\gamma_3')\ \gamma_1'')$	$abcd_1e$	19)		$a_1bcd_1e - \gamma_1'')$
4)	$\gamma_1')\ \gamma_1'')$	$abcd_1e_1$	20)		$a_1bcd_1e_1 - \gamma_1'')$
5)	$\gamma_3')\ \gamma_2'')$	abc_1de	21)		$a_1bc_1de - \alpha)\ \gamma_2'')$
6)	$\gamma_1')\ \gamma_2'')$	$abc_1de_1 - \beta)$	22)		$a_1bc_1de_1 - \alpha)\ \gamma_2'')$
7)		$abc_1d_1e - \gamma_3')$	23)	$\alpha)$	$a_1bc_1d_1e$
8)		$abc_1d_1e_1 - \gamma_1')$	24)		$a_1bc_1d_1e_1 - \alpha)$
9)		$ab_1cde - \gamma_2')$	25)		a_1b_1cde
10)		$ab_1cde_1 - \beta)$	26)		$a_1b_1cde_1$
11)	$\gamma_2')\ \gamma_1'')$	ab_1cd_1e	27)		$a_1b_1cd_1e - \gamma_1'')$
12)		$ab_1cd_1e_1 - \gamma_1'')$	28)		$a_1b_1cd_1e_1 - \gamma_1'')$
13)	$\gamma_2')\ \gamma_2'')$	ab_1c_1de	29)	$\alpha)$	$a_1b_1c_1de - \gamma_2'')$
14)	$\beta)$	$ab_1c_1de_1 - \gamma_2'')$	30)		$a_1b_1c_1de_1 - \alpha)\ \gamma_2'')$
15)		$ab_1c_1d_1e - \gamma_2')$	31)		$a_1b_1c_1d_1e - \alpha)$
16)		$ab_1c_1d_1e_1$	32)		$a_1b_1c_1d_1e_1 - \alpha)$

Die rechts glossirten Kombinationen sind ausgestrichen zu denken. Man bemerkt, dass einige von den Fällen: 21, 22, und 30), sich zweimal in den Prämissen verboten finden. Natürlich, nachdem sie ein erstes mal als solche erkannt und gestrichen worden, war es ein Luxus, uns davon zu überzeugen, dass sie nochmals daselbst ausgeschlossen werden, und seitens welcher Prämissen; man durfte sie von da beim Durchgehen der letztern überspringen.

Die rechts unglossirten Kombinationen oder Fälle sind die zulässigen. Es sind die elfe mit den beigefügten Nummern, die wir uns übersichtlich nochmals herausschreiben in eine

Tabelle:

3) $abcd_1e$
4) $abcd_1e_1$
5) abc_1de_1
11) ab_1cd_1e
13) ab_1c_1de
16) $ab_1c_1d_1e_1$
17) a_1bcde
18) a_1bcde_1
23) $a_1bc_1d_1e$
25) a_1b_1cde
26) $a_1b_1cde_1$.

Der oben gegebenen Andeutung zufolge muss nun diese Tabelle uns vertreten eine Gleichung, in welcher die Summe der elf in ihr zusammengestellten Kombinationen gleich 1 gesetzt wird. Wurde sie doch aus der vollständigen Entwickelung der 1 erhalten, indem man alle diejenigen (einundzwanzig) Glieder oder Konstituenten fortliess, welche kraft der Prämissen verschwinden!

Aus dem Anblick der Tabelle kann man ohne weiteres entnehmen, dass — worauf wir unter der 1. Aufgabe schon aufmerksam machten — die Kombination ade_1 überhaupt nicht vorkommt, dass hier $ade_1 = 0$ sein muss. Es ist das jener von Boole sicherlich nicht beabsichtigte vielmehr bei der Formulirung seiner Aufgabe wol übersehene Umstand, zufolge dessen seine Prämisse β) einen vexatorischen Charakter bekam. Ausser auf die in § 25 angedeutete Weise würde sich dies auch noch vermeiden lassen, indem man der Prämisse β) anstatt der angegebenen positiven die negative Fassung gäbe „dass in Abwesenheit von E die Merkmale A und D zusammen niemals mit B ohne C sowie mit C ohne B sich vorfinden“ — was einfach auf den Ausschluss der Elementarfälle oder Kombinationen 6) und 10) hinausliefe.

Wir kommen nun zu den letzten im Jevons'schen Verfahren geforderten Prozessen welche dahin zielen, dass aus den stehen gebliebenen Kombinationen herausgelesen werde die Antwort auf die im Probleme aufgeworfenen Fragen, betreffend entweder die Resultante der Elimination eines Symbols, oder auch die Auflösung der Data nach einer Unbekannten.

Die Behandlung, welche Jevons diesen letzten Teilen seiner Methode angedeihen lässt, ist entschieden der schwächste Punkt in seiner Darstellung, weshalb ich mich auch nicht mehr an diese halte. Ist es doch keineswegs unsre Absicht, eine Geschichte aller irgend gemachten verfehlten oder unzulänglichen Versuche zu schreiben — ansonst das tausendfache Volumen dieses Buches nicht ausreichen würde!

Nach den anderwärts — vergl. § 21 unter η) rechts vom Mittelstriche — gegebenen Andeutungen ist es nun aber ein Leichtes, auch das Eliminationsproblem noch glatt zu lösen:

Die *Elimination* eines Symbols ist darnach einfach zu leisten, indem man aus der Tabelle der stehen gebliebenen Kombinationen den Eliminanden (nebst seiner Negation, wo immer er als Faktor steht, und er tritt eben nur als solcher auf) unterdrückt, weglöscht. Eine jede dabei wiederholt als Rückstand bleibende Kombination aber wird man natürlich — cf. Tautologiegesetz 14_+) — nur *ein*mal beibehalten, das zweite mal fortlassen.

So liefert nun die im obigen Problem geforderte Elimination von e aus unsrer Tabelle die Resultante:

$$1 = abcd_1 + abc_1d + ab_1cd_1 + ab_1c_1d + ab_1c_1d_1 + a_1bcd + a_1bc_1d_1 + a_1b_1cd,$$

wo der erste von den acht Termen rechterhand aus den Kombinationen 3) und 4), der drittletzte aus 17) und 18), der letzte aus 25) und 26) — wenn man will auch schon gemäss Th. 30_+) — zusammengezogen ist.

Zufällig sind die acht Konstituenten in vorstehender Gleichung gerade die Hälfte der $2^4 = 16$, welche die Entwickelung der 1 nach den Symbolen a, b, c, d (ohne e) zusammensetzen. Die übrigen achte treten in der linken Seite der Gleichung ζ) der 1. Aufg. des § 25 auf, wenn man diese vollends (auch nach b) entwickelt. Unser Ergebniss stimmt also überein mit dem dort (viel bequemer) gefundenen.

Eliminirt man aus ihm a auf die angegebene Weise, so ergibt sich weiter nichts, als die Entwickelung der 1 nach den Argumenten b, c, d mit ihren $2^3 = 8$ Gliedern, also eine analytische Identität, durch welche die zweite der im Problem gestellten Fragen sich erledigt.

Eliminirt man b, so folgt:

$$1 = acd_1 + ac_1d + ac_1d_1 + a_1cd + a_1c_1d_1,$$

welche fünf Glieder die dreie in Gleichung ι), l. c. in der That zur vollständigen Entwickelung der 1 nach den Symbolen a, c und d ergänzen — und die vierte Frage des Problems beantworten. —

Das Äquivalent der *Auflösung* nach einer Unbekannten endlich wird nun bei dieser Methode darin zu erblicken sein, dass man aus der Resultante oder Zusammenstellung der stehen gebliebenen Kombinationen diejenigen Kombinationen der übrigen Symbole herauszulesen vermag, welche als Koeffizienten mit dieser Unbekannten selbst, sowie diejenigen welche mit ihrer Negation ausschliesslich verknüpft sind.

So kommt — in Beantwortung der ersten Frage unsres speziellen Problems — die Klasse a *nur* vor in Verbindung mit

$$bcd_1 + bc_1d + b_1cd_1 + b_1c_1d + b_1c_1d_1,$$

und wo eine von diesen fünf Kombinationen vorliegt, da *kann* auch a sich finden; a_1 aber kommt nur mit den dreien

$$bcd + bc_1d_1 + b_1cd$$

verbunden vor; und entweder bei mindestens einer von den fünfen wird a oder bei mindestens einer von den dreien wird a_1 sich auch finden *müssen*, da nicht alle Glieder, deren Summe ja $= 1$ ist, zugleich verschwinden können.

Ebenso kommt — in Beantwortung der dritten Frage — b nur vor in Verbindung mit:

$$acd_1 + ac_1d + a_1cd + a_1c_1d_1$$

und b_1 nur mit: $\quad acd_1 + ac_1d + ac_1d_1 + a_1cd.$ —

Eine schwache Seite des Verfahrens *bleibt* darin bestehen, dass man diese Antworten in einer unübersichtlichen Form, nach allen restirenden Symbolen gleichmässig entwickelt gewinnt, und es nun noch dem analytischen Geschick des Rechners überlassen bleiben muss — resp. der Willkür in Bezug auf die Auswahl unter den verschiedenen Arten, auf welche dazu das Th. 30_+) sich verwenden lässt — die Beschreibung dieser die Antwort enthaltenden (Aggregate von) Klassen weiter zu vereinfachen!

Ich möchte hier mit ein paar Worten auf Bemerkungen von Lotze in seiner „Anmerkung über logischen Calcül“ (Zweite Auflage seiner Logik[1] p. 266 und 267 — das Vorwort datirt vom 6. Sept. 1880) eingehen, da dieselben geeignet erscheinen, eine irrige Ansicht über das Verhältniss der rechnerischen Methoden zu dem Verfahren von Jevons hervorzurufen und zu verbreiten.

In thatsächlicher Hinsicht ist zunächst zu erwähnen: die Schlussbemerkung Boole's bei seinem (als 1. Aufgabe in unserm § 25 behandelten) Probleme „I have not attempted to verify these conclusions“ hatte Lotze, wie er mir schrieb veranlasst, diese Verifikation zu versuchen. Boole's Fassung der Prämisse β), welche eine Kombination ($abcd$) als „beobachtet“ hinstellt, die nach den Konklusionen dann gar nicht vorgekommen sein kann, führte ihn jedoch dabei irre, und wandte er sich nach einem erfolglosen Anlauf dieserhalb brieflich (19. April 1880) an mich, worauf ich am 22. April ein Antwortschreiben abgehen liess, welches nebst dem Hinweis auf Badorff's Wahrnehmung (S. 528) die oben (S. 563 sq.) gegebene Zusammenstellung der glossirten Kombinationen mit den zugehörigen Erläuterungen nahe wörtlich enthielt. Ich hatte dieselbe — ohne noch von irgend welchen Schriften Jevons' damals Kenntniss zu haben, jedoch nach dem Vorgange meines damaligen Kollegen, Herrn Lüroth — schon zuvor entworfen. Nach einem späteren Schreiben muss Lotze meinen Brief auch erhalten haben.

Ich will nun nicht davon reden, dass die Bemerkung Lotze's p. 266, dass der „passendere“ Weg „sich ganz von selbst darbietet“, sowie p. 267, dass Jevons das Verfahren nicht erst entdeckt zu haben brauchte, da es in der Anweisung zu Klassifikationen längst vorgelegen, mit seiner anfänglichen Hülflosigkeit einigermassen kontrastirt. Jedenfalls auch lag für Lotze keine Verpflichtung vor, jener kleinen Beihülfe meinerseits zu erwähnen, welche sich ja blos als Bethätigung einer schon anderweitig bekannten (mir zwar seitdem erst als solche kund gewordnen) „Methode“ von Jevons erwies.

Was ich aber im sachlichen Interesse sagen zu sollen glaube, ist folgendes.

Indem Lotze bei seiner Besprechung des Boole'schen Problems sich darauf beschränkt, lediglich die „Tabelle“ der elf stehen bleibenden Kombinationen (von S. 564) hinzusetzen, und von den übrigen meint, dass sie schon gleich während des „ganz mechanischen“ Verzeichnens derselben zu unterdrücken waren, erweckt er den Anschein, als ob (hier) die rechnerische Behandlung des Problems gegenüber einer solchen nach dem gemeinen Verstande einen ganz übermässigen Arbeitsaufwand erheische, auch einen erheblich grösseren Druckumfang in Anspruch nehme; er verhilft dem kunstlosen Zuwerkegehen gegenüber dem wissenschaftlichen zu einem billigen und unverdienten Triumphe.

Kaum möchte selbst dem Scharfsinn eines Lotze zuzutrauen sein, dass er es praktikabler finde hier schon während des Verzeichnens diejenigen Kombinationen zu unterdrücken, „welche durch die Gesamtheit der gegebenen Bedingungen ausgeschlossen sind“. Jedenfalls aber ist die von Lotze so geschickt verhüllte mühsame Geistesarbeit (der wir in der Absicht, sie in extenso darzulegen, auf S. 563 unter der Überschrift „Kombinationen“ einen doch immer noch unzulänglichen Ausdruck gegeben haben) beim Jevons'schen Verfahren gar nicht zu vermeiden; sie muss durch mentale Vergleichung einer jeden von den 32 Kombinationen je mit fast allen der (14 resp.) 16 Prämissensubjekte und ev. -Prädikate doch wirklich geleistet werden.

Nun pflegt bei einer *Methode* schon eine geringe Arbeitsersparniss sehr wichtig zu sein wegen der unbegrenzten Häufigkeit, mit der sie sich anbringen lässt, und bei einer Vergleichung zwischen verschiedenen Methoden sind selbst geringfügige Unterschiede in dieser Hinsicht nicht zu verachten. Hier aber ist der Unterschied zugunsten der Rechnung für sich schon ein ganz beträchtlicher und Jeder, der die beiderlei Arbeiten durchgemacht, wird mir beipflichten, wenn ich bestreite, dass jener Jevons'sche Weg hier „der *passendere*" gewesen. Er ist es wol überhaupt nie, doch um so weniger, je grösser die Anzahl der in Betracht zu ziehenden Symbole.

Die ganze „Anmerkung über logischen Calcül", auf deren sonstige Auslassungen hier einzugehen ich verzichte, ruft doch in etwas den Ausspruch Melanchthon's zu Sinn: „Den alten Lehrmeistern gefällt nicht die neue Lehre"! —

Ähnliche Bemerkungen, wie in Bezug auf die Jevons'sche Methode, treffen auch hinsichtlich Herrn Hermann Scheffler's Verfahren zu, welches nur eine geringfügige Modifikation der vorigen ist.

Auch er behandelt in [1] auf p. 739 .. 742 das Boole'sche Problem — unsern Prüfstein für die Methoden — und zwar, wie gesagt, wesentlich in Jevons' Weise, indem er nur: erstlich die negirten Fälle als Faktoren unterdrückt, was eine kleine Druckersparniss bildet, dafür die positiv vorhandenen Merkmale zwischen Vertikalstriche einschliessend — so bedeutet ihm $|a|$ die Klasse der Fälle, wo das Merkmal a *allein*, ohne eines der vier übrigen vorliegt (was uns $ab_1c_1d_1e_1$ darstellt), desgleichen $|ab|$ die Klasse der Fälle, wo nur die Merkmale a und b verbunden, jedoch ohne c, d und e, auftreten (was also bislang durch $abc_1d_1e_1$ dargestellt wurde), etc. — und indem er zweitens, anstatt der Gesamtheit 1 aller denkbaren Fälle, die Klassen a, b, c, d, e selber nach den (positiven) Symbolen „entwickelt". Letzteres ist kein Vorteil, indem es ihn nötigt, nach dem Vorbild:

$$a = |a| + |ab| + |ac| + |ad| + |ae| + |abc| + |abd| + |abe| + |acd| + \\ + |ace| + |ade| + |abcd| + |abce| + |abde|^{*)} + |acde| + |abcde|$$

nun $5 \times 16 = 80$ Glieder — statt unsrer 32 — hinzuschreiben und sichtend (ev. streichend) durchzugehen.

Nach den Prämissen — vergl. unsre „Tabelle" auf S. 564 — bleiben z. B. von diesen 16 Gliedern nur die sechs folgenden stehen:

$$a = |a| + |abc| + |ace| + |ade|^{**)} + |abce| + |abde|$$

*) Dieses Glied findet sich bei ihm ausgelassen.

**) Bei Scheffler ist dieses Glied fälschlich durch $|ac|$ vertreten, welches auch in seiner Entwickelung von c gestrichen werden muss; bei d und e fehlt ihm das Glied $|ade|$, sodass von den fünf Entwickelungen, die er gibt, nur die von b richtig ist. Es zeigen wol schon die vielen Fehler, in welche Herr Scheffler verfällt, dass die vermeintlichen Vorzüge seines Verfahrens illusorisch sind; auch spricht es nicht zugunsten des letzteren, ist vielmehr in Hinsicht dessen lehrreich, dass ihm trotz dieser Fehler die Diskrepanz seiner Resultate mit denen von Boole und mir gar nicht auffällt, er vielmehr diese nur einfach bestätigt findet.

und wird der Leser leicht aus dem Anblick jener Tabelle sich die analogen Entwickelungen von b, c, d und e auch in dieser Symbolik herausschreiben. —

Von einigem Interesse sind noch Schlüsse die Herr Scheffler am Schlusse zieht, von der Art der folgenden: dass, wenn nur ein einziges Merkmal erscheint, dieses nur a sein kann, dass wenn überhaupt vier Merkmale zusammen erscheinen, darunter immer b und e sind, etc. Solche Schlüsse zu ziehen die halb arithmetischer Natur sind, scheint nicht direkt in das Ressort unsres Kalkuls zu gehören. Dagegen wird sie der Leser leicht in der Tabelle der 11 zulässigen Fälle bestätigt erblicken oder aus dieser entnehmen.

Herr Scheffler veranschaulicht schliesslich das Boole'sche Problem auch noch durch eine Figur (in der nachher zu besprechenden Manier des Herrn Venn, der ihm darin zuvorgekommen) — die aber unbrauchbar ist, weil sie das ganze Feld 1 nur in 31 anstatt in 32 Felder zerlegt, sonach von allen denkbaren Fällen von vornherein einen unberücksichtigt lässt.

Dass es Herrn Scheffler „nicht ganz klar" geworden, wieso zwischen den Merkmalen b, c, d keine unabhängige Beziehung resultiren soll, während er doch den Fall $|cd|$ nebst $|bcd|$ als einzig zugelassen konstatirt, liegt an der Unzulänglichkeit seiner Bezeichnung. Der Fall $|bcd|$ z. B. weist *nicht* auf eine solche Beziehung hin, indem er ja das Fehlen der Merkmale a und e unweigerlich — nur eben leider nicht „ausdrücklich" — fordert. Die obenerwähnte kleine Druckersparniss war also nicht umsonst zu haben, sondern muss mit dem Zustand des ungedeckten Irrtümern-Ausgesetztseins erkauft werden. —

Herr Venn zieht in seinem mehrerwähnten Werke[1] im Grunde auch die Jevons'sche Methode noch den übrigen vor. Er gibt derselben aber — wenigstens soferne nicht mehr als fünf Klassensymbole beim Problem in Betracht kommen — eine graphisch anschauliche Gestalt, die Beachtung verdient. Er verwendet Diagramme nach Art der Euler'schen, macht aber einen eigentümlichen Gebrauch von der *Schraffirung*. Während in meiner Schrift[2] ich, gleichwie im Bisherigen, mich dieses Veranschaulichungsmittels blos bedient hatte um gewisse (Flächen-)Gebiete vor den übrigen hervorzuheben, legt Herr Venn dem Schraffiren die Bedeutung des Ausstreichens, einer *Tilgung* bei. Durch Schraffiren soll ein im allgemeinen logisch denkbares Gebiet, resp. eine Klasse, als eine nach den Daten des vorliegenden Problemes nicht vorhandene, als eine verschwindende oder leere gekennzeichnet werden.

Ein von ihm gegebenes einfaches Beispiel wird die Sache sogleich klar machen.

Prämissen eines Problems seien: $a \Subset b$ (oder $ab_1 = 0$) und $bc = 0$. So werden die Data nach Euler'scher Weise durch die Figur 21 darzustellen sein, aus welcher auch direkt ersichtlich ist, dass $ac = 0$ sein wird — ein Schluss, der rechnerisch durch Elimination von b aus den Prämissen gezogen werden kann (Bekannter Syllogismus — vergl. „Celarent“ und „Cesare“ in § 42).

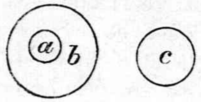

Fig. 21.

Statt dessen veranschaulicht Venn die Data mittelst der Figur 22, in welcher die Gebiete ab_1 (wagrecht) und bc (hier senkrecht) sich ausgestrichen finden. Man erkennt auch hier sogleich, dass ac völlig ausgestrichen ist.

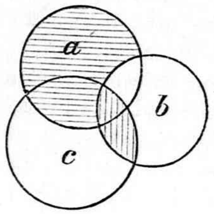

Fig. 22.

Für Probleme, die sich auf zwei, drei, vier oder fünf Klassen a, b, c, d, e beziehen, empfiehlt demgemäss Herr Venn die durch die handlichen Figuren 23, 24, 25 u. 26 dargestellten Schemata, welche etwa durch Überdruck zu vervielfältigen und bei jedem derartigen Problem ganz stereotyp zu verwenden sind. [In den ersten beiden Figuren erblicken wir kongruente Kreise, in der dritten als Gebiete a, b, c, d vier kongruente Ellipsen, in der vierten

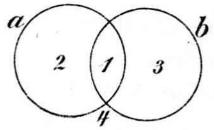

Fig. 23.

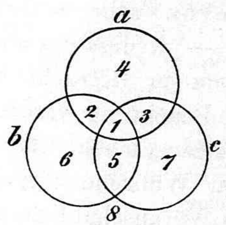

Fig. 24.

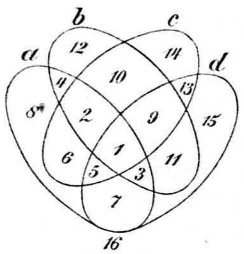

Fig. 25.

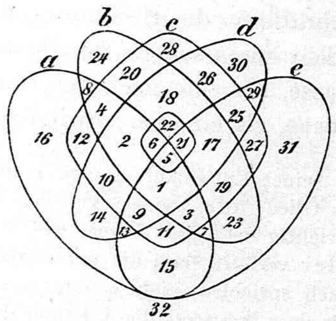

Fig. 26.

aber neben zwei Paar kongruenter Ellipsen a, e und b, d noch eine ringförmige Fläche c in Gestalt einer Raute mit abgerundeten Ecken. Herr Venn verwendet andere Buchstaben.]

Die Figuren zerschneiden je die ganze Ebene, den Konstituenten der Entwickelung von 1 entsprechend richtig in resp. 4, 8, 16 und 32 Felder.

Ich habe diese Felder numerirt so, dass die Nummern angeben die Stellenzahl des betreffenden Konstituenten von

$$1 = ab + ab_1 + a_1b + a_1b_1, \quad \text{resp.}$$

$$1 = abc + abc_1 + ab_1c + ab_1c_1 + a_1bc + a_1bc_1 + a_1b_1c + a_1b_1c_1, \quad \text{resp.}$$

$$1 = abcd + abcd_1 + abc_1d + abc_1d_1 + ab_1cd + ab_1cd_1 + ab_1c_1d + ab_1c_1d_1 +$$
$$+ a_1bcd + a_1bcd_1 + a_1bc_1d + a_1bc_1d_1 + a_1b_1cd + a_1b_1cd_1 + a_1b_1c_1d + a_1b_1c_1d_1,$$

resp. bei der letzten Figur die Nummer der betreffenden Kombination in der Zusammenstellung, gegeben beim letzten nach Jevons' Methode behandelten Problem auf S. 563, welche Kombination jeweils eigentlich selbst, als durch das Feld veranschaulicht, in ebendieses hineinzuschreiben wäre.

Demgemäss veranschaulicht und zugleich damit *löst* Herr Venn das nunmehr wohlbekannte Boole'sche Problem durch die Fig. 27 in welcher blos unterblieben ist, auch das Aussenfeld (32) zu schraffiren, und ausserdem ihm das Versehen zu verbessern war, das Feld 24 der Fig. 26 freigelassen zu haben (vergl. Venn[1] p. 281).

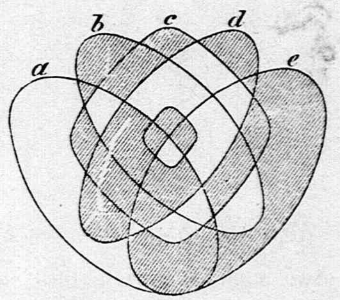

Fig. 27.

Übrigens schliesst es auch einen Fortschritt gegenüber dem ursprünglichen Jevons'schen Verfahren in sich, dass Venn diesen Strich der Felder nicht im Hinblick auf das Kombinationensystem der nach allen Symbolen gleichmässig entwickelten Einheit vollzieht [wie sie beim vorliegenden Problem auf S. 563 angegeben], sondern im Hinblick auf die Glieder der einzeln rechts auf 0 gebrachten Prämissengleichungen, wie sie sich in unsrer vereinigten Gleichung jeweils zusammengestellt finden [so oben bei ε) der 1. Aufg. des § 25]. Gewisse von diesen Gliedern — nämlich die aus weniger Faktoren zusammengesetzten — werden sich dabei als von grösserer Tragweite („scope“) erweisen als die andern, nämlich den Strich ganzer Komplexe von Elementarfeldern auf einmal erheischen.

Zur ferneren Illustration sei auch Venn's graphische Behandlung der 10. Aufgabe des § 25 hergesetzt (Fig. 28), wobei wir die aus dem Gebiet w herausgelesenen Felder horizontal schraffirt, das übrig bleiben sollende Feld durch einen Punkt hervorgehoben und diejenigen vier Felder die darnach verschwinden mussten, vertikal schraffirend ausgestrichen haben, demgemäss das Feld x_1yzw nach beiden Richtungen schraffirend.

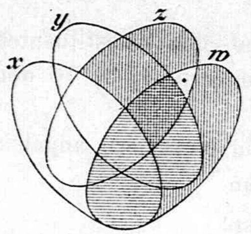

Fig. 28.

Zum Schlusse seien noch ein paar Probleme Venn's angeführt, bei welchem sein Verfahren in der That vielleicht bequemer erscheint als irgend ein rechnerisches.

Die von Jevons[1] p. 64 aufgestellten Data:

$$a = b + c,\quad b = c_1 + d_1,\quad c_1 d_1 = 0,\quad ad = bcd$$

seien zu vereinfachen.

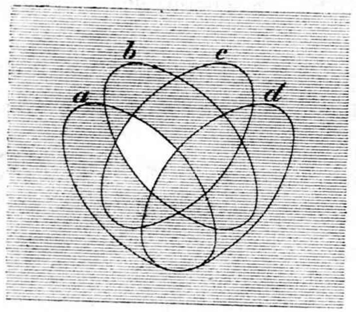

Fig. 29.

Schraffiren („shading out") aller Felder, die durch diese Prämissen als leere hingestellt werden, liefert die Fig. 29, aus welcher sofort ersichtlich, dass

$$a = b = c = 1,\quad d = 0$$

sein muss, indem eben nur das Feld abc noch übrig bleibt.

Rechnerisch würde sich dieses Resultat ebenfalls ergeben, indem man die vereinigte Gleichung:

$$ab_1c_1 + a_1(b + c) + bcd + b_1(c_1 + d_1) + c_1d_1 + (ab_1 + ac_1 + a_1bc)\,d = 0$$

etwa nach a entwickelte, wodurch sich

$$a\,(b_1 + c_1 + d) + a_1 \cdot 1 = 0$$

mit einiger Mühe ergäbe; es muss sonach in der That $a_1 = 0$, das heisst $a = 1$, hernach auch $b_1 + c_1 + d = 0$ sein, etc.

Treffend widerlegt Herr Venn[1] p. 148 Fussnote die Bemerkung von Jevons, l. c. dass die obigen Data zweifellos einander widersprechende („contradictory") seien, auf die wir in Anhang 6 zurückkommen müssen, weil die ihr zugrunde liegende falsche Anschauung Jevons vielfach zur Aufstellung ungeeigneter Ergebnisse geführt hat.

Ähnlich kommt Venn[5] p. 15 von den Daten aus:

$$y \Subset xz_1 + zx_1,\quad wy \Subset xz + x_1z_1,\quad xy \Subset w + z,\quad yz \Subset x + w$$

zur Anlegung der Figur 30, aus welcher auf den ersten Blick einleuchtet, dass

$$y = 0$$

der ganze logische Gehalt (import) des Prämissensystems sein muss.

In der That erhalten wir dieses Ergebniss auch als dessen „vereinigte Gleichung", welche hiernach zusammenfallen wird mit der Resultante der Elimination von x, z oder w — einzeln, oder in einer Partie, oder insgesamt — aus dem Prämissensysteme.

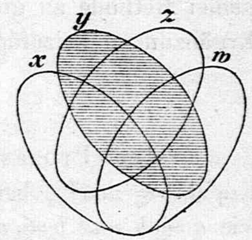

Fig. 30.

Vergl. auch Math. Quest. vol. 34 p. 51, wo dieselbe Aufgabe mit vertauschtem x und y gestellt und — umständlicher — von McColl gelöst ist. Dagegen löst sie auf die vorstehende Weise Herr R. Harley, ibid. p. 74.

§ 27. Methoden von McColl und Peirce.

Die Methode, welche Herr Peirce in seiner grundlegenden Arbeit[5] p. 37 .. 42 als fünfte — meiner Auffassung nach: dritte — den übrigen hinzufügt, ist äusserst beachtenswert und genial, wenn auch seine Darstellung derselben einzelnes zu wünschen lässt.

Ich möchte das Verhältniss dieser Methode zur modifizirten Boole'schen vorweg im Bilde charakterisiren. Bei dieser wurden die verschiedenen Knäuel der Prämissen oder Data des Problems erst fest zu einem einzigen Knoten geschürzt (der vereinigten Gleichung) und dieser dann durchhauen (bei der Elimination).

Beim Peirce'schen Verfahren aber werden jene Knäuel in ihre dünnsten Fäden auseinandergelegt und die erforderlichen einzeln zerschnitten (oder auch neu nach Bedarf verknüpft) — wogegen die Jevons'sche Methode sogleich ein Häcksel aus dem Ganzen machte! Ich denke zu zeigen, dass durch eine geringfügige Abänderung der Peirce'schen Tendenz unter Beibehaltung seiner Schlussweisen, indem man nämlich jene Knäuel immer nur so weit auseinandernimmt, als erforderlich, um den Eliminanden resp. die Unbekannte frei zu bekommen, dasjenige Verfahren entsteht, welches für gewöhnlich den Vorzug verdienen dürfte — wobei sich das Verfahren aber dem McColl'schen genähert haben, nicht mehr allzuweit von demselben verschieden sein wird.

Wenn Herr Peirce von seiner Methode sagt, dass sie „perhaps is simpler and certainly is more natural than any of the others", so muss ich ihm in Bezug auf die grössere Natürlichkeit Recht geben, obwol es beim ersten Blick auf die sechs „Prozesse“ aus denen sie sich zusammensetzt, durchaus nicht so scheint. Die (nur eventuell) grössere Einfachheit wird erst erreicht bei der angedeuteten Abänderung die ich vorschlage.

Ich will zuerst versuchen, eine möglichst getreue Darstellung seiner Methode zu geben, was ich indess nicht thun kann, ohne einige Ergänzungen beizufügen und gelegentliche Kritik zu üben.

Methode von Peirce.

Erster Prozess. Man drücke alle Prämissen mittelst der Kopula $⋹$ aus*), beachtend, dass nach Def. (1) $a = b$ dasselbe sagt wie $a ⋹ b$ und $b ⋹ a$. Die Prämissen werden sich darnach als ein System von lauter *Subsumtionen* darstellen.

Zweiter Prozess. Man „entwickele“ jedes *Subjekt* in Form einer *Summe* gemäss Th. $44_+)$ und dual entsprechend jedes *Prädikat* in Form eines *Produkts* gemäss Th. $44_\times)$ nach den in ihm vorkommenden Buchstabensymbolen — indem man etwa im Einklang mit den im § 19 auseinandergesetzten Methoden links das Schema:

$$f(x) = f(1)\,x + f(0)\,x_1, \quad \text{rechts das} \quad f(x) = \{f(0) + x\}\{f(1) + x_1\}$$

bezüglich jeden Buchstabens wiederholt in Anwendung bringt.

Als das „leichteste“ Verfahren stellt Peirce hier ein gewisses hin, auf das ich erst in der Anmerkung nachher eingehen will.

Ich muss aber bemerken, dass eine vollständige „Entwickelung“ schon im Sinne der Peirce'schen Methode gar nicht erforderlich ist. Es ist

*) Hier muss ich zuerst bemerken, dass Peirce bei seinem ersten und dritten Prozesse auch das Beziehungszeichen $\not⋹$ der „Subsumtionenverneinung“ in den Kreis seiner Betrachtungen zieht, mithin auch verneinte Subsumtionen als unter den Prämissen vorkommend mit zuzulassen scheint. Die Möglichkeit solchen Vorkommens verliert er aber beim Schildern der übrigen Prozesse vollständig aus den Augen, unterlässt namentlich zu sagen, was mit den entstehenden Alternativen von negirten Subsumtionen nach seiner Absicht anzufangen wäre, wie denn nun aus ihnen unter sich und in Verbindung mit den positiven Subsumtionen die Eliminationen zu vollziehen wären u. s. w.

Abgesehen davon, dass wir bei solcher Erweiterung des Kreises zugelassener Prämissen das Verfahren erst unter dem Aussagenkalkul berücksichtigen und besprechen könnten, muss dies aber schon darum unterbleiben, weil ein solches überhaupt nicht vorliegt, die Methode nach dieser Richtung nicht ausgebildet, unfertig, ja auf wenige ganz rudimentäre Andeutungen beschränkt erscheint.

Ich muss zudem bezweifeln, dass sie sich durch irgend naheliegende Modifikationen den sechs Prozessen entsprechend ergänzen liesse. Cf. § 46, 10. und 11. Aufgabe.

völlig ausreichend, wenn man nur die Subjekte in „letzte Aggreganten“, die Prädikate in „letzte Faktoren“ im Sinne des § 13 zerlegt, jene also ausmultiplizirend je als Summe von monomischen Produkten einfacher Symbole darstellt, diese aber gemäss dem dualen Gegenstück $27_+)$ des Distributionsgesetzes jeweils in ein Produkt von Summen einfacher Symbole verwandelt.

Während z. B. nach Peirce ein Prädikat $x + yz$ in

$$(x + y + z)(x + y + z_1)(x + y_1 + z)$$

dual „entwickelt“ werden sollte, genügt bereits dessen Zerlegung in $(x + y)(x + z)$. Und analog wird auch allgemein das letzterwähnte Verfahren seiner grösseren Einfachheit halber den Vorzug verdienen.

Nach Ausführung des zweiten Prozesses werden also als Subjekte nur Summen von Produkten, als Prädikate nur Produkte von Summen aus einfachen Symbolen auftreten — und das genügt.

Dritter Prozess. Gemäss den Schemata der Def. (3), wonach eine Subsumtion der Form

$$b + c + d + \cdots ⋹ a \qquad\Big|\qquad a ⋹ bcd\cdots$$

äquivalent ist dem Systeme von Subsumtionen:

$$\begin{array}{l} b ⋹ a \\ c ⋹ a \\ d ⋹ a \\ \ldots \end{array} \text{ oder } \left.\begin{array}{l} b \\ c \\ d \\ \vdots \end{array}\right\} ⋹ a \qquad\Bigg|\qquad \begin{array}{l} a ⋹ b \\ a ⋹ c \\ a ⋹ d \\ \ldots \end{array} \text{ oder } a ⋹ \left\{\begin{array}{l} b \\ c \\ d \\ \vdots \end{array}\right.$$

— wie ich bequemer dafür schreiben will — löse man alle „zusammengesetzten“ Subsumtionen in die damit äquivalenten Systeme von simultanen einfacheren Subsumtionen auf.

Es wird darnach irgend eine Prämisse, welche nach dem bisherigen die Form besitzen muss

$$s + s' + s'' + \cdots ⋹ pp'p''p'''\cdots$$

in der Gestalt anzuschreiben sein:

$$\left.\begin{array}{l} s \\ s' \\ s'' \\ \vdots \end{array}\right\} ⋹ \left\{\begin{array}{l} p \\ p' \\ p'' \\ p''' \\ \vdots \end{array}\right.$$

womit gesagt sein soll, dass $s ⋹ p$, $s ⋹ p'$, $s ⋹ p''$, $s ⋹ p'''$, .., $s' ⋹ p$, $s' ⋹ p'$, $s' ⋹ p''$, $s' ⋹ p'''$, .., $s'' ⋹ p$, etc. sei.

In praxi — meint Peirce — werden diese Operationen schon beim Niederschreiben der Prämissen sich vollziehen lassen.

Da die Glieder $s, s', \ldots$ der in letzte Summanden zerlegten Subjekte ihrerseits monomische Produkte waren,	Da die Faktoren $p, p', \ldots$ der in letzte Faktoren zerlegten Prädikate ihrerseits Summen aus einfachen Symbolen waren,

so werden nach Vollzug unsres dritten Prozesses gerade umgekehrt wie früher

die Subjekte nur Produkte	die Prädikate nur Summen

sein, aber jetzt *aus lauter einfachen Symbolen*, nämlich den Argumenten (Variablen, Koeffizienten, Parametern, Eliminanden, Unbekannten, oder wie man sie nennen mag) und ihren Negationen — wofern sie nicht selbst schon einfache Symbole sind.

Vierter Prozess. Dieser soll nunmehr die *Elimination* eines Symbols bewerkstelligen. Wir nennen den Eliminanden x. Dann müssen nach Peirce *auf jede mögliche Weise* zusammengehalten werden eine Subsumtion des vorliegenden Systems, welche x im Subjekt oder aber x_1 im Prädikat enthält, mit einer solchen, welche umgekehrt x im Prädikat oder aber x_1 im Subjekt enthält.

Sollte beides zugleich der Fall sein bei einer Prämissensubsumtion, so fällt der Eliminand schon von selbst heraus, oder man kann das eine weglassen, den einen Term x resp. x_1 unterdrücken — gleichviel welchen.
Wenn nämlich x und x_1 zusammen im Subjekte vorkämen, so wäre dieses (als das Produkt der einfachen Symbole) kraft Th. $30_\times$) gleich 0, wenn sie zusammen im Prädikate vorkämen, so wäre letzteres (als die Summe dieser und vielleicht noch anderer Terme) nach Th. 30_+) gleich 1. Diese Fälle werden gar nicht in Betracht kommen, weil man Subjekte und Prädikate doch immer nur möglichst „ausgerechnet" ansetzt.

Kommt aber x im Subjekt *und zugleich* x_1 im Prädikate vor, oder umgekehrt, so kann dies nach bisherigem nur in der Form:

$$ax \Subset b + x_1 \quad \text{resp.} \quad cx_1 \Subset d + x$$

eintreten, und wird gemäss Th. 41) solcher Ansatz zu

$$ax \Subset b \quad \text{oder} \quad a \Subset b + x_1 \quad \text{resp.} \quad cx_1 \Subset d \quad \text{oder} \quad c \Subset d + x$$

— nach Belieben — sich sofort vereinfachen lassen.

Nach der vorausgehenden Bemerkung wird *jene* Subsumtion von der Form sein:

$$\alpha) \qquad ax \Subset b \quad \text{oder aber} \quad a \Subset b + x_1$$

und *diese* von der Form:

$$\beta) \qquad c \Subset d + x \quad \text{oder aber} \quad cx_1 \Subset d$$

wobei nach dem Th. 41) des § 17 die nebeneinanderstehenden Subsumtionen ja äquivalent sein müssen.

Resultante der Elimination von x aus den beiden Subsumtionen des Paares, welches aus den Zeilen α) und β) je eine Subsumtion enthält, ist nun die Subsumtion:

$$\gamma) \qquad ac \Subset b + d.$$

Beweis. Die vereinigte Gleichung von α) und β) würde in der That (in der von mir bevorzugten Schreibweise) lauten:

$$ab_1x + cd_1x_1 = 0,$$

somit als Resultante liefern: $ab_1cd_1 = 0$, was nach Th. $38_\times$) mit der Subsumtion γ) äquivalent ist.

Die Regel für solche Einzelelimination lautet also: *Man multiplizire die Subjekte und addire die Prädikate der zusammengehaltenen Subsumtionen unter Weglassung des Eliminanden.*

Von den so gewonnenen Resultanten müssen die nicht analytisch erfüllten (diejenigen, welche „Relationen" sind) vollständig registrirt werden, sofern sie nicht in bereits registrirten mitenthalten sind. Zusammen mit denjenigen Subsumtionen, in welchen der Eliminand gar nicht vorkam, werden sie in Gestalt eines Propositionensystems die volle Resultante darstellen.

Es ist *nicht* erforderlich, eine Subsumtion der Form α) mit einer andern von ebendieser Form α) behufs Elimination des x zusammenzuhalten, und ebensowenig braucht man x aus irgend zwei Subsumtionen der Form β) apart zu eliminiren, weil in solchen Fällen die Resultanten stets auf die Identität $0 = 0$ hinauslaufen müssen.

In der That würde bei zwei Subsumtionen der Form α):

$$ax \Subset b \quad \text{und} \quad cx \Subset d \quad (\text{oder } c \Subset d + x_1)$$

die vereinigte Gleichung lauten: $(ab_1 + cd_1)x + 0 \cdot x_1 = 0$, sonach bei Elimination des x nur fordern, dass $(ab_1 + cd_1) \cdot 0 = 0$ sei, was von selbst der Fall ist. Und ähnlich verhält es sich bei irgend zwei Subsumtionen der Form β), wie:

$$a \Subset b + x \quad \text{und} \quad c \Subset d + x \quad (\text{oder } cx_1 \Subset d),$$

welche vereinigt $0 \cdot x + (ab_1 + cd_1)x_1 = 0$ geben. Im übrigen müsste, dass hier die Gesamtheit der Einzelresultanten die volle Resultante darstellt, doch eigentlich noch bewiesen werden!

Fünfter Prozess. Derselbe bezweckt (in Verbindung mit dem nächstfolgenden und letzten Prozesse) das Äquivalent dessen zu leisten, was wir seinerzeit als die *Auflösung* des Propositionensystems *nach einer Unbekannten* (x) bezeichneten. Nach § 21, o) kommt diese hinaus auf die Ermittelung erstens eines (x nicht als Operationsglied enthaltenden) Prädikates, zu welchem x Subjekt ist, und zweitens eines (ebenfalls von x freien) Subjektes, zu welchem x Prädikat ist.

Im fünften Prozess werden zunächst alle Subjekte, sowie alle Prädikate von x (unter den im Prämissensystem vorkommenden Symbolen oder Termen) aus den vorliegenden Subsumtionen einzeln herausgelesen; im sechsten werden sie hernach zu einem einzigen Subjekte resp. Prädikate zusammengefasst.

Nachdem vorstehend *hingebracht* war, *dass alle Subjekte höchstens Produkte, alle Prädikate aber höchstens Summen sind* (wofern sie nämlich überhaupt noch als zusammengesetzte, nicht schon als einfache Symbole erscheinen), *können wir* nach Belieben gemäss Th. 41) *jedes Operationsglied aus dem Subjekte in's Prädikat bringen, oder umgekehrt*, indem wir dasselbe erstens in seine Negation verwandeln, zugleich aber auch zweitens die Art seiner Verknüpfung (mit den andern Symbolen) dualistisch abändern, nämlich diese aus einer Addition in eine Multiplikation oder umgekehrt verwandeln — vergl. den Wortlaut jenes Theoremes, nach welchem ja:

$$a \mathrel{\underline{\in}} b + x_1 \quad \text{mit} \quad ax \mathrel{\underline{\in}} b \quad \text{und} \quad ax_1 \mathrel{\underline{\in}} b \quad \text{mit} \quad a \mathrel{\underline{\in}} b + x$$

gleichbedeutend ist.

Keineswegs dürfte dagegen

$$a + x_1 \mathrel{\underline{\in}} b \quad \text{in} \quad a \mathrel{\underline{\in}} bx \quad \text{oder auch} \quad a \mathrel{\underline{\in}} bx_1 \quad \text{in} \quad a + x \mathrel{\underline{\in}} b$$

(oder umgekehrt) verwandelt werden, wie man, die Subsumtionen rechts auf 0 bringend leicht erkennt, wo sie besagen:

$$(a + x_1)\, b_1 = 0, \quad a\,(b_1 + x_1) = 0 \text{ resp. } a\,(b_1 + x) = 0, \quad (a + x)\, b_1 = 0$$

und augenscheinlich einander durchaus nicht decken. Mit Subsumtionen von vorstehender Form können wir es aber hier nicht mehr zu thun bekommen, da, wenn solche vorkamen, sie nach dem dritten Prozess zerlegt sein mussten.

Wo es etwa erforderlich wird, ein Symbol auf die andre Seite der Subsumtion „hinüberzuschaffen" (zu „transponiren"), welches auf der einen Seite isolirt steht, so lässt es die Einheit zurück, falls es Subjekt war, die Null falls es Prädikat gewesen. Schematisch: soll in einer Subsumtion $a \mathrel{\underline{\in}} b$ das a hinübergeschafft werden, so sagt man: $1 \cdot a \mathrel{\underline{\in}} b$ und folgert nach der Regel: $1 \mathrel{\underline{\in}} a_1 + b$; sollte aber das b herübergeschafft werden, so denkt man sich die gegebene Subsumtion in der Gestalt angeschrieben: $a \mathrel{\underline{\in}} b + 0$, und folgert regelrecht: $a \cdot b_1 \mathrel{\underline{\in}} 0$. —

Demnach kann stets die Negation x_1 der Unbekannten, wo sie irgend vorkommt, in Gestalt von x transponirt werden, wodurch erzielt wird, dass das vorliegende Subsumtionensystem nur mehr x selbst, aber nicht mehr x_1 enthält. Und weiter können diejenigen Operationsglieder, mit welchen nun x noch verknüpft erscheint, ebenfalls auf die andere Seite geschafft werden, sodass in jeder einzelnen Subsumtion (in der die Unbekannte überhaupt vorkommt) diese jetzt endlich *isolirt* erscheinen wird, und zwar entweder als das Subjekt, oder als das Prädikat derselben. Die regelrechte Ausführung dieser Operationen macht den fünften Prozess aus.

Sechster Prozess. Man vereinige schliesslich die gewonnenen Subsumtionen, welche die Unbekannte x zum Prädikate haben in eine einzige Subsumtion mit ebendiesem Prädikate x, indem man die Summe ihrer Subjekte bildet, ebenso diejenigen Subsumtionen, welche gemeinsam die Unbekannte x zum Subjekte haben in eine einzige Subsumtion mit ebendiesem Subjekte x und dem Produkt ihrer Prädikate als Prädikat — auf Grund der jetzt im umgekehrten Sinne, wie beim dritten Prozess, anzuwendenden Schemata der Def. (3).

Hiermit wird man schliesslich die Doppelsubsumtion (mit x als dem Mittelterme) erhalten, welche die „Berechnung" der Unbekannten leistet und das Problem löst.

Zur Illustration dieser Methode wollen wir mit Peirce das als 1. Aufgabe in § 25 von uns gelöste Problem von Boole nochmals behandeln, dessen Data waren:

$$a_1 c_1 \mathrel{\underline{\in}} (bd_1 + b_1 d)e, \quad ade_1 \mathrel{\underline{\in}} bc + b_1 c_1, \quad a(b + e) = cd_1 + c_1 d,$$

und bei welchem verlangt wird, erstens diejenigen Aussagen über a zu finden in welchen nur noch von b, c, d die Rede ist (which „involve" only b, c, d), zweitens anzugeben welche Relation zwischen b, c, d allein besteht, drittens zu finden, was von (und mit) b in Bezug auf a, c, d ausgesagt werden kann und viertens zu ermitteln, welche Relation zwischen a, c und d besteht.

Auflösung gemäss Peirce. Durch die ersten drei im Kopf ausgeführten Prozesse lösen wir die drei Prämissen bezüglich auf in die nachfolgend zusammengestellten Subsumtionen:

$$a_1 c_1 = \left\{\begin{matrix} b + d \\ b_1 + d_1, \\ e \end{matrix}\right. \quad ade_1 \mathrel{\underline{\in}} \left\{\begin{matrix} b + c_1 & ab \\ , & \\ b_1 + c & ae \end{matrix}\right\} \mathrel{\underline{\in}} \left\{\begin{matrix} c + d & & cd_1 \\ & \text{nebst} & \\ c_1 + d_1 & & c_1 d \end{matrix}\right\} \mathrel{\underline{\in}} \left\{\begin{matrix} a \\ \\ b + e. \end{matrix}\right.$$

Es war hiebei blos zu berücksichtigen, dass

$$bd_1 + b_1 d = (b + d)(b_1 + d_1), \qquad bc + b_1 c_1 = (b + c_1)(b_1 + c),$$

ähnlich $cd_1 + c_1 d = (c + d)(c_1 + d_1)$ und endlich $a(b + e) = ab + ae$ ist.

Zuerst müssen wir e eliminiren, „von welchem wir nichts wissen wollen", von welchem abgesehen werden soll.

Zum System der Resultanten gehören erstens diejenigen unter den obigen Subsumtionen, welche e überhaupt nicht enthalten; diese sind:

$$\delta)\qquad a_1c_1 \mathrel{\underline{\in}} \begin{cases} b+d \\ b_1+d_1 \end{cases},\quad ab \mathrel{\underline{\in}} \begin{cases} c+d \\ c_1+d_1 \end{cases} \text{ und } \left.\begin{matrix} cd_1 \\ c_1d \end{matrix}\right\} \mathrel{\underline{\in}} a.$$

Zweitens tragen dazu bei die Resultanten der Elimination des e aus je einer Subsumtion der Gruppe:

$$a_1e_1 \mathrel{\underline{\in}} e,\quad ade_1 \mathrel{\underline{\in}} \begin{cases} b+c_1 \\ b_1+c \end{cases},\quad \left.\begin{matrix} cd_1 \\ c_1d \end{matrix}\right\} \mathrel{\underline{\in}} b+e$$

mit je einer solchen der Gruppe:

$$ae \mathrel{\underline{\in}} \begin{cases} c+d \\ c_1+d_1 \end{cases}$$

und nur diese, **weil in den Subsumtionen jener Gruppe wesentlich e im Prädikat (oder, was auf dasselbe hinausläuft, e_1 im Subjekt), in den Subsumtionen dieser Gruppe aber e im Subjekte auftritt.**

Nach der Regel des vierten Prozesses gebildet sind nun unsre Resultanten sämtlich hingeschrieben folgende:

$$(0=)\, a_1c_1a \mathrel{\underline{\in}} \begin{cases} 1+c+d(=1) \\ 1+c_1+d_1=1 \end{cases},$$

$$ada \mathrel{\underline{\in}} \begin{cases} b+c_1+c+d=1 \\ b+c_1+c_1+d_1=b+c_1+d_1 \\ b_1+c+c+d=b_1+c+d \\ b_1+c+c_1+d_1=1 \end{cases},\quad \left.\begin{matrix} acd_1 \\ ac_1d \end{matrix}\right\} \mathrel{\underline{\in}} \begin{cases} b+c+d \\ b+c_1+d_1 \end{cases}$$

wovon aber nur diese eine:

$$\varepsilon)\qquad ad \mathrel{\underline{\in}} b+c_1+d_1$$

wirklich zu notiren gewesen, die andern — nämlich: $0 \mathrel{\underline{\in}} 1$, $ad \mathrel{\underline{\in}} 1$, $ad \mathrel{\underline{\in}} b_1+c+d$, etc. bis $ac_1d \mathrel{\underline{\in}} b+c_1+d_1$ — als selbstverständlich schon mittelst „Kopfrechnung" erkannt und sofort hätten weggelassen werden können.

Die zuletzt gefundne Einzelresultante ε) kann nun auch noch, indem man d_1 der Regel des Th. 41) gemäss nach links wirft, vereinfacht werden zu:

$$ad \mathrel{\underline{\in}} b+c_1.$$

Und ferner geht die zweite von den Subsumtionen δ): $a_1c_1 \mathrel{\underline{\in}} b_1+d_1$ augenscheinlich in der letzten $c_1d \mathrel{\underline{\in}} a$ auf, wie man in Peirce's Manier am schnellsten sehen wird, indem man erstere mittelst Umstellung zweier Terme umwandelt in $c_1d \mathrel{\underline{\in}} b_1+a$, was aus $c_1d \mathrel{\underline{\in}} a$ und Tb. 6_+) doch a fortiori schon folgt.

Es wird darnach jene fortzulassen sein.

Die Gesamtresultante der Elimination des e, zunächst durch das System der koexistirenden Subsumtionen δ) und ε) vollständig dargestellt erscheinend, zieht sich demnach zusammen zu:

$$\zeta)\qquad a_1c_1 \mathrel{\underline{\in}} b+d,\quad ab \mathrel{\underline{\in}} \begin{cases} c+d \\ c_1+d_1 \end{cases},\quad \left.\begin{matrix} cd_1 \\ c_1d \end{matrix}\right\} \mathrel{\underline{\in}} a,\quad ad \mathrel{\underline{\in}} b+c_1.$$

Dieses System von sechs Subsumtionen bildet nunmehr die Prämissen zu allen weiter verlangten Schlussfolgerungen.

Die zweite, dritte und sechste von diesen gibt die Prädikate von a an; dieselben sind:

$$b_1+c+d,\quad b_1+c_1+d_1 \quad\text{und}\quad b+c_1+d_1.$$

Es muss a eingeordnet sein ihrem Produkte:

$$a \mathrel{\underline{\in}} (b+c_1+d_1)(b_1+c+d)(b_1+c_1+d_1)$$

oder ausmultiplizirt:

$$a \mathrel{\underline{\in}} b_1(c_1+d_1)+cd_1+c_1d = b_1c_1d_1+cd_1+c_1d.$$

Um zu finden, ob irgend eine Relation zwischen b, c und d besteht, suchen wir auch die Subjekte von a zusammen. Diese sind aus der ersten, vierten und fünften Subsumtiou ζ) zu entnehmen in Gestalt von: $b_1c_1d_1$, cd_1 und c_1d; es muss also ihre Summe dem a eingeordnet sein:

$$b_1c_1d_1+cd_1+c_1d \mathrel{\underline{\in}} a.$$

Augenscheinlich resultirt durch Elimination des a aus den beiden letzten Subsumtionen, welche hier schon durch den Schluss Barbara nach Prinzip II erfolgen wird, weiter nichts als eine analytische, „leere", das Prinzip I der Identität exemplifizirende Formel (an „empty" proposition), sodass zwischen b, c und d keine unabhängige Beziehung zu bestehen braucht.

Um die Prädikate von b zu finden, kombiniren wir die zweite und dritte Subsumtion ζ) und erhalten (analog, wie bei a des genaueren angegeben wurde):

$$b \mathrel{\underline{\in}} (a_1+c+d)(a_1+c_1+d_1) \quad\text{oder}\quad b \mathrel{\underline{\in}} a_1+cd_1+c_1d$$

als drittes der verlangten Ergebnisse.

Durch Sammlung der Subjekte von b geht aus der ersten und der letzten Subsumtion ζ) hervor:

$$a_1c_1d_1+acd \mathrel{\underline{\in}} b.$$

Durch Elimination von b aus diesem und dem vorigen Ergebnisse gemäss Prinzip II geht dann hervor:

$$acd+a_1c_1d_1 \mathrel{\underline{\in}} a_1+cd_1+c_1d,$$

oder vereinfacht: $acd=0$, was mit der vierten und fünften Subsumtion gibt:

$$cd_1+c_1d \mathrel{\underline{\in}} a \mathrel{\underline{\in}} c_1+d_1$$

in Beantwortung der letzten von den gestellten Fragen. —

Anmerkung. Unter dem zweiten Prozesse empfiehlt Peirce, um einen Ausdruck in seine letzten

Summanden	*Faktoren*

„entwickelnd" zu zerlegen, falls er nämlich von vornherein ein

Produkt (von Summen)	eine *Summe* (von Produkten)

gewesen, das folgende Verfahren. Man bilde

jedes denkbare Produkt	jede Summe

aus allen in dem Ausdruck vorkommenden Buchstabensymbolen und deren Negationen, sodass darin jeder Buchstabe nur *ein*mal (negirt oder aber unnegirt) vertreten ist.

Gemäss der fundamentalen Formel des Th. 6):

$$ab \Subset b \Subset b + c$$

untersuche man, ob

das gebildete Produkt ein Subjekt ist von jedem Faktor	die Summe ein Prädikat ist von jedem Gliede

des gegebenen Ausdruckes. Trifft dies zu, so ist es, resp. sie ein

letzter Summand	Primfaktor

ebendieses Ausdruckes, andernfalls nicht.

Man fahre in dieser Weise fort, bis so viele letzte Summanden resp. Faktoren gefunden sind, als der Ausdruck besitzen muss.

Um diese Zahl zu finden (unter obenerwähnter Voraussetzung, die ja schon nach § 14 sich immer vorgängig erfüllen lassen würde), gibt Peirce ohne Herleitung den arithmetischen Ausdruck an:

$$2^m + n - mp - p,$$

wo m die Gesamtanzahl der verschiedenen Buchstabensymbole bedeutet, die im Ausdruck vorkommen, falls ein Symbol und seine Negation nicht als verschieden angesehen werden, wo ferner n die Gesamtzahl der im Ausdruck als Operationsglieder überhaupt auftretenden Symbole vorstellt, mögen diese verschieden sein oder nicht (nach Berücksichtigung übrigens der Tautologie- und Absorptionsgesetze behufs einfachstmöglicher Schreibung des Ausdrucks), endlich p die Anzahl der

Faktoren	Glieder

des Ausdrucks ist (mit dem gleichen Vorbehalte wie soeben, ohne welchen sonst ja die Zahlen n und p beliebig hoch angesetzt werden könnten).

Es sei hienach z. B. der Ausdruck $x + yz$ „dual zu entwickeln" [„dual", das soll heissen: in die Form eines Produktes, gemäss Th. $44_\times$) — sintemal die „Entwickelung" schlechtweg, in unsrer Terminologie sich stets bezieht auf die Zerlegung in eine Summe gemäss Th. 44_+)]. Nach Peirce ist zu bemerken, dass hier $m = 3$, $n = 3$, $p = 2$ ist, womit sich die Anzahl der gesuchten Faktoren (arithmetisch) berechnet zu

$$2^3 + 3 - 3 \times 2 - 2 = 8 + 3 - 6 - 2 = 3.$$

Man sollte nun alle acht Ausdrücke, welche durch additive Vereinigung dreier von den sechs Symbolen x, y, z, x_1, y_1, z_1 mit verschiedenen Buchstaben gebildet werden können eigentlich durchprobiren in folgender Weise. Da

$$x \Subset x + y + z \quad \text{und} \quad yz \Subset x + y + z,$$

so ist $x + y + z$ ein Faktor unseres Ausdrucks $x + yz$. Um die Probe mit $x + y + z_1$ zu machen, haben wir zu bemerken, dass:

$$x \Subset x + y + z_1 \quad \text{und} \quad yz \Subset x + y + z_1$$

ist, sodass dies ebenfalls einer von den gesuchten Faktoren sein musste. Das nämliche stellt sich heraus, wenn wir mit $x + y_1 + z$ den Versuch machen, womit also (hier zufällig bei den drei ersten Versuchen) die gesuchten Faktoren schon vollzählig gefunden sind. Dagegen würde z. B. mit $x + y_1 + z_1$ der Versuch fehlgeschlagen haben, indem zwar $x \Subset x + y_1 + z_1$ aber *nicht* $yz \Subset x + y_1 + z_1$ sein müsste, und bezüglich $x_1 + y_1 + z_1$ liesse sich weder einsehen, dass x, noch dass yz demselben eingeordnet sein müsste. Etc.

Sollte ebenso beispielsweise der Ausdruck:

$$(a + b + c)(a + b_1 + c_1)(a_1 + b + c)$$

— diesmal in die Form einer Summe, also schlechtweg — „entwickelt" werden, so wäre $m = 3$, $n = 9$, $p = 3$, sodass

$$2^3 + 9 - 3 \times 3 - 3 = 5$$

die a priori bestimmte Anzahl der zu gewärtigenden Entwickelungsglieder ist. Von den acht Konstituenten der Entwickelung (von 1) nach a, b, c sind daher nur dreie hier ausgeschlossen, und zwar sind es diese:

$$a_1b_1c_1, \quad a_1bc, \quad ab_1c_1,$$

welche allein nicht in allen drei Faktoren, nämlich in den gerade darüberstehenden nicht, sich enthalten erweisen. Der Ausdruck ist sonach:

$$= abc + abc_1 + ab_1c + a_1bc_1 + a_1b_1c. —$$

Die Vorausbestimmung der Anzahl Glieder resp. Faktoren der gesuchten Entwickelung erscheint mir zwar verdienstlich, das ganze Verfahren auch in der That nicht schwierig, jedoch (im allgemeinen) als zu umständlich und ermüdend gegenüber denjenigen Verfahrungsweisen, vor welchen ihm Peirce den Vorzug zuerkennen will, und die schon im § 13 auseinandergesetzt wurden.

Ich würde bei Aufgaben der letzterwähnten Art judiziöses Ausmultipliziren vorziehen, wo noch Faktoren fehlen dieselben in Gestalt von $1, = x + x_1$, hinzufügend, wiederholten Ansatz eines Gliedes aber vermeidend. So haben wir, in dem Beispiel, durch Vereinigung des ersten mit dem dritten Faktor sogleich:

$$(b + c)(a + b_1 + c_1) = a(bc + bc_1 + b_1c) + a_1(bc_1 + b_1c)$$

— etwa bei $(b_1 + c_1)$ den Faktor a_1 gemäss Th. 33_+) Zusatz beifügend, und $b + c$ beim Multipliziren mit a vollends entwickelnd gemäss Th. 33_+) selbst.

Bei den Aufgaben der vorigen Art aber scheint mir das Schema des Th. $27_\times$) am bequemsten verwendet zu werden, wonach in obigem Beispiel zuerst $x + yz$ in $(x + y)(x + z)$ übergeht, sodann weil $x + y$ den Buchstaben z, $x + z$ aber den y noch nicht, wie es erforderlich wäre, enthält, weiter:

$$x + y = x + y + zz_1 = (x + y + z)(x + y + z_1)$$

und analog $\quad x + z = x + z + yy_1 = (x + y + z)\,(x + y_1 + z)$
genommen, im Produkte:

$$x + yz = (x + y + z)\,(x + y + z_1)\,(x + y_1 + z)$$

aber der erste Faktor rechts nur *ein*mal angesetzt wird. Um den Gedankengang darzulegen musste ich dies alles niederschreiben; man kann jedoch das Ergebniss leicht gleich aus dem Kopfe hinsetzen.

Zum Glücke aber brauchen wir, wie oben betont, uns bei den Problemen hiermit überhaupt nicht zu plagen. Gleichwol aber schien mir Peirce's Manier im „Entwickeln" der Funktionen es wert zu sein, der Aufmerksamkeit des Lesers unterbreitet zu werden, sollte sie auch blos dazu dienen, die Mannigfaltigkeit und Fülle der Weisen, auf welche in unsrer Disziplin zuwerke gegangen werden kann, auf's neue zu illustriren.

Ich will nun diejenige Modifikation der Peirce'schen Methode auseinandersetzen, welche mir, wie eingangs angedeutet, als die allernatürlichste und einfachste zugleich erscheint.

Wie der Leser wol bereits herausgefühlt hat, besteht der Vorzug der Natürlichkeit gegenüber der Boole'schen Methode bei der Peirceschen darin, dass sie — nicht wie jene mit *Gleichungen* — sondern vielmehr mit *Subsumtionen* operirt, sonach mit Subjekten und Prädikaten zu thun hat, die den Urteilsfunktionen im gewöhnlichen Denken sich durchaus anpassen. Die Prämissen brauchten nicht mehr rechterhand auf 0 gebracht, auch nicht mehr zu einer einzigen Aussage vereinigt zu werden — Operationen, deren erstere zuweilen mühsam auszuführen ist, deren letztere, so leicht sie ist, ein schwülstiges (cumbrous) Ergebniss aufweisen kann. Bei Peirce's Verfahren mussten indess dafür andere Weitläufigkeiten in Kauf genommen werden, die wir nun vermeiden wollen unter Beibehaltung der Vorzüge.

Aus irgend einem System von in Form von Subsumtionen angeschriebenen Prämissen ein Symbol x zu eliminiren, desgleichen dasselbe (im mehrerwähnten Sinne) zu „berechnen" ist unsre Aufgabe.

Mit der „Berechnung" ist bekanntlich allemal die Elimination der Unbekannten zu verbinden, die uns die Auflösbarkeitsbedingung liefert; desgleichen geht schon nach § 21 und wie weiterhin zu sehen mit der Elimination auch die Auflösung oder Berechnung von selber Hand in Hand. Sollte also etwa ein Symbol zu eliminiren und *ein anderes* zu berechnen verlangt sein, so wende man nacheinander in Hinsicht auf jedes der beiden für sich das Verfahren an, welches wir nun bezüglich des einen x beschreiben werden. Ebenso, wenn mehrere Unbekannten zu eliminiren daneben irgend welche zu berechnen sind, wird man (wie schon früher erwähnt) die Eliminanden immer einzeln successive (in irgend einer Reihenfolge) beseitigen, weil dabei mit jedem Schritte schon eine erhebliche Vereinfachung des fernerhin die Prämissen zu vertreten habenden Propositionen-

systems erzielt wird — wogegen, wenn man die Operationen behufs simultaner Elimination an das ursprüngliche Prämissensystem anküpfen wollte, man dieses Vorteils verlustig gehen würde. Wir werden es demnach in der That immer nur mit *einem* Symbol, als Eliminanden oder Unbekannte, auf einmal zu thun bekommen, und brauchen nur darauf Bedacht zu nehmen, wie wir uns in Bezug auf dieses (somit auch jedes) am besten aus der Schlinge ziehen.

In jeder Prämissensubsumtion (welche x überhaupt enthält) *entwickele man* die linke Seite, *das Subjekt*, falls x in demselben vorkommt, *nach* x *in Form einer Summe* gemäss Th. 44_{+}) die rechte Seite oder *das Prädikat*, falls x in ihm vorkommt, *in Form eines Produktes* gemäss Th. $44_{\times}$). Darnach lässt sich:

$$ax + bx_1 \mathrel{\underline{\in}} (\alpha + x_1)\,(\beta + x)$$

als die allgemeine Form einer jeden x enthaltenden Prämisse hinstellen, wobei nur, wenn x auf einer Seite von selbst herausfällt oder fehlte, dasselbe nicht extra eingeführt zu werden braucht, vielmehr dann in Gestalt von

$$ax + bx_1 \mathrel{\underline{\in}} \gamma \quad \text{resp.} \quad c \mathrel{\underline{\in}} (\alpha + x_1)\,(\beta + x)$$

mit der betreffenden Prämisse weiter zu operiren ist. Es brauchen auch etwa ausfallende Glieder, wie $0 \cdot x$ oder $0 \cdot x_1$ oder Faktoren, wie $1 + x$ oder $1 + x_1$, durchaus nicht angesetzt zu werden, vielmehr kommen in solchen Fällen auch die beim allgemeinen Schema anzuführenden Operationen, soweit sie sich auf jene zu beziehen hätten, einfach in Wegfall.

Man löse jetzt die betreffende Subsumtion gemäss Definition (3) *auf in die einfacheren Subsumtionen:*

$$\left.\begin{matrix} ax \\ bx_1 \end{matrix}\right\} \mathrel{\underline{\in}} \left\{\begin{matrix} \alpha + x_1 \\ \beta + x \end{matrix}\right. \quad \text{resp.} \quad \left.\begin{matrix} ax \\ bx_1 \end{matrix}\right\} \mathrel{\underline{\in}} \gamma, \quad \text{resp.} \quad c \mathrel{\underline{\in}} \left\{\begin{matrix} \alpha + x_1 \\ \beta + x \end{matrix}\right.$$

wobei wieder, falls ein Term fehlte, derselbe auch vorstehend nicht vertreten sein wird.

Das allgemeine Schema repräsentirt nur zwei (nicht vier) Subsumtionen, nämlich die beim Lesen einer jeden Zeile sich ergebenden: $ax \mathrel{\underline{\in}} \alpha + x_1$, $bx_1 \mathrel{\underline{\in}} \beta + x$, da die über's Kreuz durch das Subsumtionszeichen verbundenen Terme nur analytische Identitäten $ax \mathrel{\underline{\in}} \beta + x$, $bx_1 \mathrel{\underline{\in}} \alpha + x_1$ liefern.

Nach der Regel von Peirce's Theorem 41) *werfe man das Operationsglied* x_1 *jetzt* (als x) *auf die andere Seite*, was beim allgemeinen Schema auf eine Unterdrückung des Terms x_1 hinausläuft, und für sämtliche angeführten Fälle gibt:

$$\begin{matrix} ax \mathrel{\underline{\in}} \alpha \\ b \mathrel{\underline{\in}} \beta + x \end{matrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{matrix} ax \mathrel{\underline{\in}} \gamma \\ b \mathrel{\underline{\in}} \gamma + x \end{matrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{matrix} cx \mathrel{\underline{\in}} \alpha \\ c \mathrel{\underline{\in}} \beta + x. \end{matrix}$$

Sodann isolire man x vollends durch Hinüberwerfen des mit ihm verknüpften Operationsgliedes nach derselben Regel, wodurch entsteht:

$b\beta_1 \subseteqq x \subseteqq a_1 + \alpha$, resp. $b\gamma_1 \subseteqq x \subseteqq a_1 + \gamma$ resp. $c\beta_1 \subseteqq x \subseteqq c_1 + \alpha$.

Hierdurch ist dann die Prämisse verwandelt in eine *Doppelsubsumtion* mit dem Mittelgliede x und einem davon freien Subjekte sowol als Prädikate. Dieselbe ist m. a. W. für sich schon „aufgelöst“ nach x; zugleich erscheint x eliminirt, sobald man es beim Lesen der Doppelsubsumtion gemäss Prinzip II überspringt. In der That wird beim allgemeinen Schema $b\beta_1 \subseteqq a_1 + \alpha$ die Resultante der Elimination des x vorstellen.

Wenn von dem allgemeinen Schema einzelne Terme fehlten, so kann es sich ereignen, dass man statt einer Doppelsubsumtion nur eine einfache Subsumtion erhält von der Form

$$d \subseteqq x \quad \text{oder aber} \quad x \subseteqq \delta.$$

Diese ist jedoch leicht zu einer Doppelsubsumtion zu ergänzen in Gestalt von:

$$d \subseteqq x \subseteqq 1 \quad \text{resp.} \quad 0 \subseteqq x \subseteqq \delta$$

und ist ersichtlich, dass alsdann durch die Elimination des x aus der Einzelprämisse nur eine Identität: $d \subseteqq 1$ resp. $0 \subseteqq \delta$ resultiren würde, die bei Aufstellung der Gesamtresultante nicht weiter berücksichtigt zu werden braucht (weil 0 links Summand, 1 rechts Faktor würde — wie sogleich zu sehen).

Um nunmehr das ganze System von Prämissen nach der Unbekannten x aufzulösen, nachdem die x enthaltenden sämtlich zu solchen Doppelsubsumtionen umgeformt sind, *braucht man nur die Subjekte dieser letzteren additiv zu einem einzigen Subjekte, ihre Prädikate multiplikativ zu einem einzigen Prädikate von x zu vereinigen.* Man wird dadurch eine Doppelsubsumtion mit dem Mittelgliede x und davon unabhängigen extremen Gliedern erhalten, welche nach Def. (3) äquivalent sein muss dem System jener Doppelsubsumtionen, welche also zusammen mit der Gruppe der x von vornherein nicht enthaltenden Prämissen das ursprüngliche Prämissensystem vollständig vertritt. Die volle Resultante der Elimination des x besteht aus dem System der Prämissen eben dieser letztern Gruppe in Verbindung mit der aus der „vereinigten“ Doppelsubsumtion durch Überspringen des x gemäss Pr. II sich ergebenden Resultante, welche die Summe der Subjekte des x einordnet dem Produkt seiner Prädikate. —

Um dies an dem klassischen Problem von Boole, 1 Aufg. des § 25, zu erläutern, so schreiben wir behufs Elimination von e die erste Prämisse in der Gestalt an:

$$a_1 c_1 \subseteqq \begin{cases} b d_1 + b_1 d \\ e \end{cases}, \quad \text{die zweite als:} \quad ad(bc_1 + b_1 c) \subseteqq e,$$

indem wir eine Doppelumstellung an ihrem früheren Ansatz vornehmen, nämlich den Faktor e_1 von links als Summanden e nach rechts warfen, sodann den Summanden $bc + b_1 c_1$ negirt als Faktor $bc_1 + b_1 c$ von rechts nach links — oder beides a tempo.

Die dritte Prämisse, welche Gleichung war, lösen wir als vorwärtige und rückwärtige Subsumtion bezüglich auf zu:

$$ab \subseteqq cd_1 + c_1 d \quad \text{resp.} \quad cd_1 + c_1 d \subseteqq a$$
$$e \subseteqq cd_1 + c_1 d + a_1 \qquad b_1(cd_1 + c_1 d) \subseteqq e.$$

Die Resultante der Elimination des e besteht aus dem System der drei von den vorstehenden Subsumtionen, welche e gar nicht enthalten, zusammen mit derjenigen, welche die Summe der drei Subjekte von e subsumirt unter das eine Prädikat desselben. Letztre lautet:

$$a_1 c_1 + ad(bc_1 + b_1 c) + b_1(cd_1 + c_1 d) \subseteqq cd_1 + c_1 d + a_1.$$

Hiermit ist diese Elimination bereits vollzogen. Bei keiner allgemeinen Methode wird man sich aber der Anforderung entziehen können, die systematisch von ihr gelieferten Rechnungsergebnisse jeweils nach Möglichkeit — mit Rücksicht auf die besonderen Verhältnisse des gerade vorliegenden Falles — zu vereinfachen, *zu reduziren!* Das letzte vereinfacht sich zu:

$$ab_1 cd = 0 \quad \text{oder} \quad acd \subseteqq b,$$

wie man augenblicklich erkennt, wenn man das Glied a_1 von rechts als Faktor a und ebenso das Glied $cd_1 + c_1 d$ von rechts als Faktor $cd + c_1 d_1$ nach links wirft.

Der Übersicht wegen reproduziren wir die (bereits da stehende) Gesamtresultante, zugleich die Elimination von a vorbereitend; sie besteht aus dem Systeme:

$$(bd + b_1 d_1)c_1 \subseteqq a, \quad a \subseteqq b_1 + cd_1 + c_1 d, \quad cd_1 + c_1 d \subseteqq a, \quad a \subseteqq b + c_1 + d_1.$$

Mithin ist ihre Auflösung nach a:

$$(bd + b_1 d_1)c_1 + cd_1 + c_1 d \subseteqq a \subseteqq (b_1 + cd_1 + c_1 d)(b + c_1 + d_1)$$

in welcher Doppelsubsumtion die extremen Glieder sich nach leichter Reduktion als gleich herausstellen, sodass die Elimination von a ergebnisslos bleibt, und

$$a = cd_1 + c_1 d + b_1 c_1 d_1$$

geschrieben werden kann.

Um sodann b zu eliminiren, nehmen wir am besten die letzte als die einfachste Zusammenfassung der nun als Prämissen dienenden Ergebnisse, und zerlegen die Gleichung als vor- und rückwärtige Subsumtion in:

$$a(cd + c_1 d_1) \subseteqq \begin{cases} b_1 \\ c_1 d_1 \end{cases}, \quad \left.\begin{matrix} b_1 c_1 d_1 \\ cd_1 + c_1 d \end{matrix}\right\} \subseteqq a.$$

Die Elimination von b_1 aus der ersten und der in $b_1 \subseteqq a + c + d$ umgeschriebenen dritten von diesen vier Subsumtionen liefert augenscheinlich nur ein identisches Ergebniss, weshalb die Resultante der Elimination von b (somit b_1) blos aus den von b freien Subsumtionen dieser Gruppe besteht, die sich in

$$cd_1 + c_1 d \Subset a \Subset c_1 d_1 + cd_1 + c_1 d \quad \text{oder} \quad c_1 + d_1$$

zusammenziehen. Auch liest man sofort heraus die Auflösung nach b_1:

$$a(cd + c_1 d_1) \Subset b_1 \Subset a + c + d,$$

woraus sich diejenige nach b durch Umstellen der Terme, oder auch beiderseitiges Negiren ergibt zu:

$$a_1 c_1 d_1 \Subset b \Subset a_1 + cd_1 + c_1 d,$$

wo letzteres Prädikat (nur) mit Rücksicht auf die vorhergehende Relation (zwischen a, c, d) auch in $a_1 + c + d$ zusammenziehbar ist (indem man ihm $a_1 cd$ ohnehin, aber auch noch acd, welches 0 ist, zufügen kann).

So gelangten wir also zu den früheren Ergebnissen.

Es möge ferner noch die 7. Aufgabe des § 25 (von Boole) entsprechend behandelt werden. Die Prämissen waren:

$$wg \Subset se, \quad ra \Subset be, \quad se \Subset wg, \quad be \Subset ra$$

und werden im Hinblick auf die beabsichtigte Elimination von e zu schreiben sein:

$$wg \Subset \begin{cases} s \\ e \end{cases}, \quad ra \Subset \begin{cases} b \\ e \end{cases}, \quad e \Subset wg + s_1, \quad e \Subset ra + b_1,$$

oder

$$wg \Subset s, \quad ra \Subset b, \quad \left.\begin{matrix} wg \\ ra \end{matrix}\right\} \Subset e \Subset \begin{cases} wg + s_1 \\ ra + b_1 \end{cases},$$

mithin stellt das System:

$$wg \Subset s, \quad ra \Subset b, \quad wg \Subset ra + b_1, \quad ra \Subset wg + s_1$$

die Resultante der Elimination von e vor.*)

Um die Elimination und Berechnung von g vorzubereiten, schreiben wir letzteres:

$$g \Subset \begin{cases} s + w_1 \\ ra + b_1 + w_1 \end{cases}, \quad ra \Subset b, \quad \begin{matrix} ras \Subset w \\ ras \Subset g \end{matrix},$$

woraus folgt:

$$ras \Subset g \Subset (s + w_1)(ra + b_1 + w_1) \quad \text{oder} \quad w_1 + s(ra + b_1)$$

wie früher — eine Behandlung, die mir derjenigen des § 25 entschieden vorzuziehen scheint.

Ich meine gleichwol, dass das von mir modifizirte Verfahren Boole's durch diese neue Methode keineswegs überflüssig gemacht wird. Nicht nur behält es den einen Vorzug, dass man dabei mehr rein mechanisch — um nicht zu sagen: gedankenloser — zuwerke gehen kann, womit ich mir zum Teil den Umstand erkläre, dass, wie Herr Peirce seinerzeit mir schrieb,

*) Es wird, wie hier, nicht selten vorzuziehen sein, dass man beim Eliminiren die Einzelresultanten unvereinigt lasse.

seine Schüler mein Verfahren dem seinigen vorzuziehen pflegten, sondern auch zum vollen Verständniss der ganzen Disziplin wird dasselbe stets unentbehrlich bleiben. Endlich kann man auch die *an jeder einzelnen* Prämissensubsumtion zu vollziehenden Operationen der Auflösung und Elimination mindestens geradesogut nach jenem Boole'schen Schema ausführen, als nach der vorstehend illustrirten Peirce'schen Methode, wie eine vergleichende Bearbeitung der typischen 18. Aufg. des § 25 nach den beiden Manieren zu erkennen gibt. —

Das Verfahren, welches Herr McColl ganz selbständig, indessen immerhin sehr nachträglich, zur Lösung der Probleme des Boole'schen Kalkuls ersonnen, ist doch nicht ganz so sehr, wie er selbst glaubt, von dem modifizirten Boole'schen verschieden — und muss ich hierin Herrn Venn[1] p. 372 beipflichten (vergl. ebenda). Sofern nur *eine* Prämisse in Betracht kommt — und die Boole'schen Prämissen lassen sich ja stets in eine einzige zusammenziehen — möchte ich dasselbe überhaupt nicht als eine neue Methode, sondern höchstens als eine eigene „Manier" in der Anwendung der Boole'schen Methode gelten lassen.

Ein Fortschritt tritt erst da zutage, wo es sich um Elimination und Auflösung bei *Systemen* Boole'scher Prämissen handelt und ist eben darin zu erblicken: dass McColl *deren vorgängige Vereinigung zu einer einzigen Prämissengleichung entbehrlich macht,* womit er denn Peirce vorgearbeitet und eine neue Behandlungsweise der Probleme angeregt, mitbegründet hat.

Vorwiegend scheinen mir Herrn McColl's Verdienste auf einem andern Felde zu liegen: auf dem der *Anwendungen* — worüber u. a. unser Anhang 7 zu vergleichen ist.

McColl's Verfahren basirt auf den beiden Gleichungen:

$$x f(x) = x f(1) \quad \text{und} \quad x_1 f(x) = x_1 f(0),$$

welche wir schon in § 19 als Anm. 2 zu Th. 44_+) angeführt haben, und die er auch für beliebig viele Argumente zusammenfassend erweitert zu dem Satze:

$$xyz \cdot\cdot u_1 v_1 \cdot\cdot f(x, y, z \cdot\cdot u, v, \cdot\cdot) = xyz \cdot\cdot u_1 v_1 \cdot\cdot f(1, 1, 1, \cdot\cdot, 0, 0, \cdot\cdot).$$

Die Gültigkeit auch dieser Gleichung ist unmittelbar ersichtlich aus der allgemeinen Boole'schen Formel 44_+) für die Entwickelung einer Funktion $f(x, y, z, \cdot\cdot u, v, \cdot\cdot)$ beliebig vieler Argumente nach ebendiesen — in Anbetracht, dass bekanntlich $f(1, 1, 1 \cdot\cdot 0, 0, \cdot\cdot)$ der Koeffizient ist, mit welchem der Konstituent $xyz \cdot\cdot u_1 v_1 \cdot\cdot$ in jener Entwickelung behaftet erscheinen wird, und dass die übrigen Glieder derselben Entwickelung, als mit dem angegebnen disjunkte Konstituenten habend, in diesen multiplizirt verschwinden müssen.

Charakteristisch ist aber die Art, wie McColl zu obiger Gleichung gelangt. Seine Rechnungsweisen sind wesentlich aus dem Aussagenkalkul („calculus of equivalent statements") hervorgewachsen, und könnten eigentlich erst unter diesem ganz ungehindert besprochen werden, weshalb wir auch noch einmal auf sie zurückkommen — § 46 am Schlusse. Bedeuten ihm nun $x, y, z, \cdot\cdot u, v, \cdot\cdot$ verschiedene Aussagen, so wird diesen Symbolen der Wert 1 zukommen, wenn sie wahr und der Wert 0, wenn sie falsch sind (vergl. unten § 28). Wird nun angesetzt das Produkt $xyz\cdot u_1 v_1 \cdot\cdot$, so sind damit die Faktoraussagen als gleichzeitig gültige hingestellt oder angenommen (vergl. § 28), d. h. es ist $x = y = z \cdot\cdot = 1$ und ebenso $u_1 = v_1 = \cdot\cdot = 1$, sonach $u = v = \cdot\cdot = 0$ gesetzt; und deshalb dürfen in der That die genannten Symbole in einer etwa noch dahinter tretenden (d. h. gleichzeitig gemachten) ferneren Aussage $f(x, y, z, \cdot\cdot, u, v, \cdot\cdot)$ durch diese ihre Werte $1, 1, 1, \cdot\cdot 0, 0, \cdot\cdot$ bezüglich ersetzt werden.

Es müsste dies auch gültig bleiben, wenn etwa $f(x, y, \cdot\cdot, u, \cdot\cdot)$ nicht mehr blos einen Funktionsausdruck des identischen Kalkuls in unserm bisherigen Sinne, sondern auch, wenn es irgend ein System von Propositionen vorstellte, in welchem nur als Aussagensymbole die Argumente vorkämen. Gelegentlich macht, um Schlüsse zu ziehen, McColl auch in dieser Weise von dem Satze Gebrauch. Doch lässt von dem wie wir sehen werden *engeren* „Aussagen"kalkul (in welchem nämlich die Symbole lediglich der Werte 0 und 1 fähig sind) der Satz auch auf den *weiteren* „Klassen"kalkul (in welchem sie beliebige Werte haben können) sich nicht ohne weiteres übertragen (cf. § 46, 18. Studie).

Ist nun z. B. eine Subsumtion:

$$\varphi(x) \Subset \psi(x)$$

nach der Unbekannten x aufzulösen, oder auch diese zu eliminiren, so wird gefolgert:

$$\varphi(x)\,\psi_1(x) \Subset 0$$

was dasselbe besagt, wie, dass es $= 0$ sei; und hieraus durch beiderseitiges Multipliziren mit x_1 oder x, unter Anwendung des angeführten Satzes:

$$x_1\varphi(x)\,\psi_1(x) = x_1\varphi(0)\,\psi_1(0) \Subset 0, \quad x\varphi(x)\,\psi_1(x) = x\varphi(1)\,\psi_1(1) \Subset 0,$$

oder, was dasselbe besagt, $= 0$. Nach Th. 38) lassen nun aber diese letzten Subsumtionen sich umschreiben in:

$$\varphi(0)\,\psi_1(0) \Subset x, \qquad \varphi(1)\,\psi_1(1) \Subset x_1$$

oder auch, nach Belieben, in:

$$x_1 \Subset \varphi_1(0) + \psi(0), \qquad x \Subset \varphi_1(1) + \psi(1).$$

Multiplizirt man überschiebend die Subsumtionen der ersten, oder addirt ebenso man die der zweiten Zeile, so ergeben sich mit Rücksicht auf Th. 30) und Th. 5) die Formen, in deren erster McColl die Resultante der *Elimination* von x ansetzt:

$$\varphi(0)\,\varphi(1)\,\psi_1(0)\,\psi_1(1) = 0 \quad \text{resp.} \quad 1 = \varphi_1(1) + \varphi_1(0) + \psi(1) + \psi(0)$$

— oder auch $\Subset$ für $=$ geschrieben.

Ich denke, man erkennt, dass dies nur eine andere Manier ist, zu derselben Resultante zu kommen, zu welcher Boole gelangen würde, indem er die Gleichung $\varphi(x)\,\psi_1(x) = 0$ links nach x entwickelte und das Produkt der Koeffizienten $= 0$ setzte.

Verbände man dagegen diagonal oder über's Kreuz je zwei Subsumtionen aus den beiderlei Zeilen vermittelst des Syllogismus Barbara (oder Prinzips II) um x oder x_1 zu eliminiren, so würde sich diese Resultante auf eine dem Verfahren von Peirce näher kommende Weise ergeben in den Formen:

$$\varphi(0)\,\psi_1(0) \Subset \varphi_1(1) + \psi(1), \qquad \varphi(1)\,\psi_1(1) \Subset \varphi_1(0) + \psi(0).$$

Die beiden Subsumtionen *einer* (der ersten) *Zeile* aber stellen für McColl die *Auflösung* nach der Unbekannten x vor — wofür meines Erachtens wieder diejenigen der Hauptdiagonale den Vorzug verdienen würden, gleichwie dann auch die Subsumtionen der Nebendiagonale die Auflösung nach x_1 am besten darstellen werden. —

Die Art, wie hienach McColl mit *Systemen* von Subsumtionen operirt, erhellt aus folgendem.

Nachdem jede einzelne von den gegebenen Prämissensubsumtionen, wie oben gezeigt in zweie von der Form $\alpha \Subset x$, $\beta \Subset x_1$ aufgelöst, zerfällt ist, können wir als unser Prämissensystem ansehen:

$$\begin{array}{lll} \alpha^1 \Subset x, & \alpha^2 \Subset x, \cdot\cdot, & \alpha^n \Subset x, \\ \beta^1 \Subset x_1, & \beta^2 \Subset x_1, \cdot\cdot & \beta^n \Subset x_1, \end{array}$$

und lassen diese n Paare nach Def. (3_+) sich zusammenziehen in:

$$\alpha^1 + \alpha^2 + \cdots \alpha^n \Subset x,$$
$$\beta^1 + \beta^2 + \cdots \beta^n \Subset x_1,$$

welche beiden Subsumtionen zusammen dessen „Auflösung" nach x vorstellen, wogegen deren überschiebend gebildetes Produkt:

$$(\alpha^1 + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n)(\beta^1 + \beta^2 + \cdots \beta^n) \Subset 0$$

die Resultante der Elimination des x sein wird.

Ein Beweis für die Vollständigkeit dieser Resultante — nämlich der $\alpha\beta = 0$ für die Prämissen $\alpha \Subset x$, $\beta \Subset x_1$ — wäre nach unsern Betrachtungen in § 21 leicht zu erbringen (resp. ist dort selbst implicite bereits erbracht), ist jedoch von McColl nicht gegeben.

Nach vorstehendem Schema behandelt McColl verschiedene Probleme, namentlich von Boole, darunter auch die bekannte 1. Aufgabe des § 25 und diese mittelst zwei (ein halb) Druckseiten Rechnung. Irgendwelche Vorteile in Hinsicht der Druckersparniss, Vermehrung der Übersicht oder Erleichterung der Arbeit gegenüber den schon auseinandergesetzten (und teilweise allerdings der McColl'schen sich nähernden) Behandlungsweisen vermag ich aber nicht dabei wahrzunehmen. —

Wo mehrere Argumente als Eliminanden oder Unbekannte gleichzeitig in Betracht kommen, verfährt übrigens McColl nicht etwa rein nach dem oben geschilderten Schema für eines nach dem andern von diesen. Vielmehr müssen wir, um vollständig sein Zuwerkegehen charakterisirt zu haben und den bis incl. zu unserm § 32 vorgeschrittenen Leser in den Stand zu setzen, die von McColl behandelten Probleme genau in seiner Weise (nach-)rechnen zu können, etwas vorgreifend noch folgendes bemerken.

Sei $F(x, y, z, ..)$ ein Prämissensystem, z. B. ein aussagenrechnerisch angesetztes „Produkt" von Subsumtionen, so wird dasselbe laut Voraussetzung gelten, somit den Wert der 1 des Aussagenkalkuls haben. Irgend ein Konstituent (einer Entwickelung) nach den Argumenten $x, y, z, ..$, z. B. $xy_1z_1..$, wird daher mit diesem Faktor $F(x, y, z..)$, der ja 1 ist, versehen werden dürfen, sodass

$$xy_1z_1\cdots = xy_1z_1\cdots F(x, y, z\cdots).$$

Nach dem im Schlusspassus der S. 589 gegebenen Satze (und mit Rücksicht auf dessen zulässige im Kontext der folgenden Seite schon angedeutete Erweiterung) ist aber die rechte Seite dieser Gleichung $= xy_1z_1\cdots F(1, 0, 0, \cdot\cdot)$ und somit $\Subset F(1, 0, 0, \cdot\cdot)$ kraft Th. $6_\times$). Sonach ergibt sich in der Gestalt:

$$xy_1z_1\cdot\cdot \Subset F(1, 0, 0, \cdot\cdot)$$

ein Prädikat zu dem gedachten Konstituenten, welches sich zunächst wiederum als ein Produkt von Subsumtionen darstellt, worin aber die Argumente nicht mehr vorkommen. Dasselbe wird nun nach den in § 32 gegebnen Schemata, insbesondre dem λ), sich umschreiben lassen in einen von allen Subsumtionszeichen befreiten Ausdruck, der auch als ein solcher des Klassenkalkuls deutungsfähig geworden.

Aus den zu sämtlichen Konstituenten auf diesem Wege gewonnenen Prädikaten leitet hernach McColl durch überschiebendes Addiren sich seine Eliminationsergebnisse ab, die sich so als Prädikationen ergeben für die Konstituenten nach den als Unbekannte zu berechnenden Argumenten. Z. B. aus den Prädikaten zu xy_1z_1 und zu xy_1z fliesst so ein Prädikat zu xy_1, aus diesem und einem ähnlich gewonnenen Prädikate zu xy ergibt sich ein Prädikat zu x (welches durch Kontraposition schliesslich in ein Subjekt zu x_1 verwandelt wird). Etc.

Dass dieses Zuwerkegehen nicht eben vorteilhaft ist, zeigt deutlichst eine Vergleichung der von McColl gegebnen Lösungsarbeit — z. B. bei der 28. Aufgabe des § 25 — mit der — dort — von mir geleisteten. —

Anhänge.

Anhang 1.

Beiläufige Studie über identische Multiplikation und Addition.

(Zu § 6. Überschlagbar.)

Das Verständniss der Betrachtungen wird sehr erleichtert, wenn sich der Leser die geringe Mühe nimmt, sich dieselben mittelst Flächengebieten zu veranschaulichen.

Um einzusehen, *dass es immer gewisse Gebiete c gibt, welche den Forderungen der Def. (5) genügen,* nämlich (S. 205) die Eigenschaft haben, dass *für alle x*, für welche

$$\alpha)\quad x \mathrel{\underline{\in}} a \text{ und zugleich } x \mathrel{\underline{\in}} b \qquad \Big| \qquad a \mathrel{\underline{\in}} x \text{ und zugleich } b \mathrel{\underline{\in}} x$$

ist, auch

$$\beta)\quad x \mathrel{\underline{\in}} c \qquad \Big| \qquad c \mathrel{\underline{\in}} x$$

sein muss, könnte man folgende Überlegung anstellen.

Gesetzt ausser 0 resp. 1 gebe es *kein* x, für das die Beziehungen α) erfüllt sind. Dann genügt bereits der Wert

$$c = 0 \qquad \Big| \qquad c = 1$$

der obigen Forderung, fernerhin also jedes *beliebige* Gebiet c.

Ist diese Annahme aber *nicht* erfüllt, so gibt es ausser 0 resp. 1 mindestens *ein* x — ein solches heisse x^1 — von solcher Beschaffenheit, dass die Bedingungen α) bezüglich erfüllt sind, d. h. dass wir haben:

$$x^1 \mathrel{\underline{\in}} a,\quad x^1 \mathrel{\underline{\in}} b \qquad \Big| \qquad a \mathrel{\underline{\in}} x^1,\quad b \mathrel{\underline{\in}} x^1.$$

Alsdann ist auch für alle solchen x, für welche

$$\beta^1)\quad x \mathrel{\underline{\in}} x^1 \qquad \Big| \qquad x^1 \mathrel{\underline{\in}} x$$

ist, a fortiori die Bedingung α) erfüllt.*)

Wenn nun auch das *Umgekehrte* gilt, dass nämlich für *jedes x*, für

---

*) Es wird nachher $x^1 = x'$ als das gemeinsame Anfangsglied zweier von da divergirenden Wertreihen: $x', x'', x''', \ldots$ und $x^1, x^2, x^3, \ldots$ erscheinen, bei deren letzterer die Exponenten auch nur als Indices aufgefasst werden sollen. Man hat demnach für dieses erste x die Wahl unter den Bezeichnungen x^1 und x.

das die Bedingungen α) zutreffen, auch die Subsumtion β^1) besteht, dann ist in Gestalt von

$$c = x^1$$

bereits ein die Forderungen der Def. (5) erfüllender Wert des c gefunden.

Gilt er diese Umkehrung *nicht*, so gibt es mindestens ein x — ein solches heisse x'' — derart, dass die Voraussetzung α) zutrifft, d. h. dass wir haben:

$$x'' ⋹ a,\quad x'' ⋹ b \qquad\Big|\qquad a ⋹ x'',\quad b ⋹ x''$$

ohne dass doch für dieses x auch β^1) erfüllt wäre, d. h. ohne dass wir hätten:

$$x'' ⋹ x' \qquad\Big|\qquad x' ⋹ x''.$$

In diesem Falle kann nach Def.

(3_+) aus $x^1 ⋹ a$ und $x'' ⋹ a$ | $(3_\times)$ aus $a ⋹ x^1$ und $a ⋹ x''$

gefolgert werden, dass

$$x^1 + x'' ⋹ a \qquad\Big|\qquad a ⋹ x^1 x''$$

sein muss, und analog ergibt sich, dass *zugleich* auch ist:

$$x^1 + x'' ⋹ b \qquad\Big|\qquad b ⋹ x^1 x''.$$

Nennen wir aber

$$x^1 + x'' = x^2 \qquad\Big|\qquad x^1 x'' = x^2,$$

so ist dieses Gebiet x^2 jetzt ein solches, für welches x'' bei jener Umkehrung *keine* Ausnahme mehr bildet, desgleichen, nach wie vor, auch x^1 keine. Wir haben nämlich nach Th.

6_+) $x^1 ⋹ x^1 + x''$, also $x^1 ⋹ x^2$ | $6_\times$) $x^1 x'' ⋹ x^1$, also $x^2 = x^1$

desgleichen:

$$x'' ⋹ x^2 \qquad\Big|\qquad x^2 ⋹ x''$$

Dieses x^2 ist jetzt der den Forderungen unsrer Def. (5) genügende Wert des c selber, es ist:

$$c = x^2,$$

wenn es jetzt überhaupt kein x mehr gibt, welches den Voraussetzungen α) genügte, ohne mit x^2 die Beziehungen einzugehen:

β^2) $\quad x ⋹ x^2 \quad$ | $\quad x^2 ⋹ x.$

Gibt es aber noch solche x, welche sich dem x^2 — will ich kurz sagen — „nicht *fügen*", d. h. für welche zwar die Voraussetzungen α) aber nicht die Subsumtion β^2) erfüllt ist, so kann man ebenso weiter schliessen.

Es sei dann x''' irgend eines derselben; so haben wir:

$$x''' ⋹ a,\quad x''' ⋹ b \qquad\Big|\qquad a ⋹ x''',\quad b ⋹ x'''$$

aber doch nicht

$$x''' ⋹ x^2 \qquad\Big|\qquad x^2 ⋹ x'''.$$

Dann folgt nach Def. (3) aus:

$$x^2 ⋹ a \text{ und } x''' ⋹ a \qquad\Big|\qquad a ⋹ x^2 \text{ und } a ⋹ x'''$$

dass

$$x^2 + x''' ⋹ a \qquad\Big|\qquad a ⋹ x^2 x'''$$

und analog auch:

$$x^2 + x''' ⋹ b \qquad\Big|\qquad b ⋹ x^2 x'''$$

ist. Nennen wir nunmehr

$$x^2 + x''' = x^3 \qquad\Big|\qquad x^2 x''' = x^3,$$

so ist x^3 ein solches Gebiet, welchem sich alle bisherigen x „fügen", sogar das letzte: x''', da wir nach Th. 6) haben:

$$x''' ⋹ x^3 \qquad\Big|\qquad x^3 ⋹ x'''$$

während α) ja ohnehin von diesem x''' erfüllt wird.

Gibt es jetzt kein x mehr, welches α) erfüllt, ohne auch die Subsumtion:

β^3) $\quad x ⋹ x^3 \quad$ | $\quad x^3 ⋹ x$

zu erfüllen, so ist: $c = x^3$ als ein die Anforderungen der Def. (5) erfüllendes c gefunden.

Gibt es aber noch ein x — es heisse x'''' — welches sich bei der Umkehrung dem x^3 „nicht fügt", so kann man, ebenso weiter schliessend, ein:

$$x^3 + x'''' = x^4 \qquad\Big|\qquad x^3 x'''' = x^4$$

konstruiren, für welches sich x'''' samt allen früheren Gebieten x „fügt".

In dieser Weise fortfahrend kann man aus jedem angebbaren sich „nicht fügenden" und dem zuletzt gewonnenen x allemal ein neues x ableiten, bezüglich dessen sich alle bisherigen „fügen"; man kann das sich nicht fügende sozusagen endgültig beseitigen.

Man könnte sich hienach zu dem Schluss berechtigt glauben, es müsse ein c existiren, für das sich jedes x „fügt". In der That sieht man sich vor die Alternative gestellt, entweder diese Existenz zuzugeben, oder unbegrenzt in der angegebenen Weise fortzuschliessen.

Jener Schluss wäre gleichwol *nicht stichhaltig*. Beispielsweise können wir dies aus dem bekannten Paradoxon von Achilles mit der Schildkröte lernen, wo die Alternative vorliegt, entweder zuzugeben, dass jener diese nicht einholen könne, oder aber auf den zehntel, hundertel, tausendtel etc. Schritt, der noch fehlt, ohne Ende fortzuschliessen. Die Abneigung vor letzterem ist kein zwingender Grund, sich für ersteres zu entscheiden. —

Dass es Gebiete c gibt, die den Forderungen der Def. (5) genügen ist stichhaltig ja schon in § 6 bewiesen.

Man könnte es nebenher auch so einsehen. Da nach Th. 6_+) resp. $6_\times$):

$$a ⋹ a + b,\quad b ⋹ a + b \qquad\Big|\qquad ab ⋹ a,\quad ab ⋹ b$$

sein muss, so ist für jedes die Bedingungen α) erfüllende x auch sicher:

$$x ⋹ a + b \qquad\Big|\qquad ab ⋹ x,$$

folglich ist unter anderm auch

$$c = a + b \qquad\Big|\qquad c = ab$$

ein die Forderungen der Def. (5) erfüllendes c. —

Ungeachtet der Analogie mit Def. (5), welche in unsrer Theorie die Def. (4) — vergl. Th. 7) — darbietet, lässt sich an letztere doch eine Studie, welche analog der vorstehenden erschiene, nicht knüpfen. Vielmehr ist man hier augenblicklich mit den Überlegungen fertig:

Dass es c gebe, welche den Forderungen der Def. (4) genügen, nämlich die Eigenschaft haben, dass für alle x, welche der Subsumtion β) genügen, auch die beiden Subsumtionen α) erfüllt seien, ist sofort schon klar, wenn man nur das Gebiet:

$$c = 0 \qquad\Big|\qquad c = 1$$

in's Auge fasst. Nach Th. 5) kann nämlich für dieses c die Subsumtion β), also die

$$x \Subset 0 \qquad\Big|\qquad 1 \Subset x$$

überhaupt nur bestehen. wenn

$$x = 0 \qquad\Big|\qquad x = 1$$

selbst ist, und dieses einzige x, welches β) erfüllt, erfüllt dann auch gemäss Def. (2) die beiden Subsumtionen α).

Das angeführte c ist also bereits ein die Forderungen der Def. (4) schon erfüllendes.

Anhang 2.

Exkurs über Klammern.

(Zu § 10.)

Derselbe ist vorzugsweise bestimmt für nicht mathematischgebildete Leser.

Indessen dürfen doch auch in einer vollständigen Theorie die fundamentalen Auseinandersetzungen über ein so wichtiges Element der Zeichensprache, als welches die Parenthesen sich darstellen, nicht fehlen.

Man versetze sich zunächst auf den Standpunkt zurück, wo eben erst das Th. 13) bewiesen ist, resp. bewiesen werden soll. Dasselbe fordert schon (und erstmalig) die nachstehenden Bemerkungen heraus.

Dass *Klammern* oder *Parenthesen* (brackets) auch im identischen Kalkul vonnöten sind, wird bedingt durch den Umstand, dass man auch in diesem Kalkul oft zu thun, zu operiren, umzuspringen, zu „rechnen" hat mit Gebieten, Klassen oder Aussagen (etc.), die einen *zusammengesetzten*, einen *komplizirten* Namen oder Ausdruck besitzen — einen Namen z. B. von welchem einzelne Bestandteile oder Elemente selbst wieder Gebiete oder Klassen vorstellen mögen, verschieden von dem durch den ganzen Namen vorgestellten Gebiete.

Einfach (simple) — im strengen oder engsten Sinn des Worts — nennen wir einen Namen, Term, wenn er ein Buchstabe ist, wie a oder b, x, α, A, etc., desgleichen, wenn er eine Ziffer, wie 0, 1 (auch ∞). *Zusammengesetzt* (compound) heisst der Name in jedem anderen Falle.

Mag es einfach oder zusammengesetzt sein, so muss an ein Zeichen die Anforderung gestellt werden, dass es im Druck *isolirt* stehe, nämlich von andern Zeichen durch unbedruckte *Zwischenräume, Spazien,* geschieden sei. Zusammengesetzt sollte nun eigentlich ein Zeichen immer dann heissen, wenn an ihm selbst sich noch in dieser Weise *getrennte Teile* erkennen lassen, wogegen es einfach zu nennen wäre, sobald in ihm die Druckerschwärze ein *zusammenhängendes* Flächenbild bedeckt. Es machen jedoch hievon die Buchstaben i, j (und die als Namen hier überhaupt nicht verwendeten Vokale $\ddot{a}$, $\ddot{o}$, $\ddot{u}$) eine Ausnahme. Dass es unverfänglich ist, auch diese noch den einfachen Zeichen beizuzählen, beruht erstlich auf dem Umstand, dass wir einen *über* Buchstaben zu setzenden Punkt oder Tupfen (dot) hier nicht als Operationszeichen verwenden werden, und zweitens auf der nunmehr sogleich im Haupttext folgenden Bemerkung.

Aus einfachen Namen können auch neue, demnach „zusammengesetzte" Namen aufgebaut werden, wobei man jene jedoch *in der Regel* mitsamt den etwa sie verbindenden Knüpfungszeichen *einer bestimmten Zeile entlang* zu setzen und zu lesen hat. Für die meisten Zwecke wird es darum zulässig sein, auch solche Namen als „einfache" (im weiteren Sinne) gelten zu lassen, die nur *auf der Zeile wenigstens* keine getrennten Bestandteile aufweisen.

So darf der als einfacher Name zu behandelnde Buchstabe allenfalls noch mit einem *Accente* oder aber *Suffixum*, unteren *Index*, also überhaupt mit einem (Stellen-) *Zeiger* versehen sein, wie a' (sprich: a strich, oder a prim, englisch: a dash), a'', .. a_0, a_1, a_2, .. a_n (gesprochen: a null, a eins, a zwei, ... a unten n), desgleichen — im identischen Kalkul wenigstens, und dies entgegen der sonstigen mathematischen Gepflogenheit — auch mit einem *Exponenten*, wie a^0, a^1, a^2, .. a^n (spr. a hoch null, etc.) indem hier S. 261 sq. die Exponenten stets nur als „obere Indices" angesehen werden, (das Kapitel über die „Logik der Beziehungen" vielleicht ausgenommen).

Wie schon in B der Einleitung S. 45, erwähnt, wird durch die Zeiger der Vorrat an „einfachen" Namen, die zum Benennen zur Verfügung stehen, der sich sonst auf die Buchstaben der paar Alphabete beschränken würde, fast unbegrenzt vermehrt.

Durch ihre Stellung über oder unter dem Niveau der Zeile aber, sowie durch ihren kleineren Druck in dieser andern Höhenlage, sollen die Zeiger sich als zu dem ihnen unmittelbar links vorangehenden Buchstaben gehörige zu erkennen geben, und ähnliches gilt auch von dem „Negationsstrich".

Der *Negationsstrich* nimmt im identischen Kalkul eine Sonderstellung ein, indem er hier als ein *Operationszeichen* gebraucht werden wird, um die „Verneinung" des mit ihm behafteten Ausdrucks zu fordern, darzustellen. Demgemäss werden wir $a_{,}$ (gelesen: a nicht) eigentlich als einen zusammengesetzten Namen anzusehen haben und können ihn als einfach nur in den (oben charakterisirten) Fällen gelten lassen, wo auch a' z. B. als einfach angesehen werden dürfte, nämlich wo über ihn hinweg *streng auf der Zeile* weiterzulesen ist.

[In der 25. Vorlesung gilt auch der Accent sowie das Suffixum 0 als ein Operationszeichen, indem dort a' steht für das „Bild" von a und a_0 für die „Kette" von a, was dort also zu ähnlichen Bemerkungen in Bezug auf den Accent und das Suffixum 0, wie soeben in Bezug auf den Negationsstrich Veranlassung geben würde.]

Abgesehen von diesem Operationszeichen, mit welchem bereits an *einem* einzigen Symbole (dem es rechts unten anzufügen) operirt werden kann, verwenden wir als „Operationszeichen" fast nur noch Knüpfungszeichen, und zwar solche, welche mindestens zwei Symbole auf der Zeile verbinden. Wesentlich kommen sogar nur zweierlei solche Knüpfungszeichen: plus und mal, für uns in Betracht, als + und · (oder ×), und nur

vorübergehend, in § 24, treten zu diesen noch Subtraktions- und Divisionszeichen hinzu, unter letztern der Bruchstrich, der zwei Symbole in vertikaler Richtung verbindet.

Ausser durch Operationszeichen, werden aber Ausdrücke auch noch durch *„Beziehungszeichen"* zu Aussagen verbunden, wie $=$, $\neq\!\!\!\in$, $\neq$ etc. die sämtlich nur auf der Zeile zwischen sie zu treten haben.

Ein *Wort*, sofern es nicht blos aus *einem* Buchstaben besteht, sowie eine Verbindung von Worten zu einer Beschreibung oder zu einer Aussage, würde als ein „zusammengesetzter" Name oder Ausdruck hinzustellen sein.

Solche führen wir aber nicht in die Rechnung ein, da sie sich für die Bezeichnungszwecke der exakten Logik als zu umständlich erweisen.

Unser Hauptbestreben bleibt ja darauf gerichtet, eine *Ökonomie der Zeichen* zu verwirklichen und zwar, da an die Zeichen auch die Gedanken geknüpft sind, damit auf möglichste *Ersparniss an Gedankenarbeit* hinzuwirken.

Wenn darum — etwa in einer Textaufgabe — eine Klasse mit Worten gekennzeichnet ist, und es angezeigt erscheint, dieselbe der „Rechnung" zu unterwerfen, sie in Subsumtionen, Gleichungen, Formeln oder auch Ausdrücke eingehen zu lassen, überhaupt sie zum Gegenstande anhaltender Überlegungen zu machen, so werden wir wie gesagt dieselbe jeweils möglichst einfach uns darstellen, demgemäss also von vornherein einen Buchstaben, einen *„einfachen"* Namen für sie einführen.

Muss ja doch bei den an ein Objekt geknüpften Untersuchungen — vollends beim Rechnen mit demselben — sein Name erfahrungsmässig in häufiger Wiederholung gedacht und ausgesprochen werden, und verursacht (S. 44) ein umständlicher Name, ein unbequemes Zeichen, doch allemal, so oft es nur gebraucht werden muss, einen höchst ärgerlichen Aufenthalt!

Hauptsächlich auf diesem Umstand, dass sie die Wiederholung meistens langwieriger Namen ersparen durch den Hinweis auf ihre einmal vollendete Aussprache, beruht — nebenbei bekanntlich — der grosse Wert der Pronomina demonstrativa für die Wortsprache.

Solcher nun bedürfen wir im Kalkul nicht (können sie da auch nicht brauchen!) und sichern uns den gleichen Vorteil in noch höherem Maasse, indem wir für den verwickelten Namen einen Buchstaben einführen, denselben dann in jedem Bedarfsfalle wiederholend.

Wenn nun bei den anzustellenden Überlegungen unsre einfachen Namen vermittelst der Rechnungs- und Beziehungszeichen des identischen Kalkuls zusammenzusetzen sind zu *„Ausdrücken"*, welche vielleicht selbst wieder zur Bildung noch komplizirterer Ausdrücke oder

Aussagen als deren Operations- oder Beziehungsglieder weiterzuverwenden sein werden, wenn also an solche noch fernere Überlegungen angeknüpft werden müssen, welche ein (eventuell wiederholtes) Herstellen, Ansetzen ihres Namens erfordern —, so würde es nach bisheriger Maxime angezeigt erscheinen, auch für sie wiederum „einfache" oder Buchstaben als Namen neu einzuführen — wo wir dann gänzlich der Klammern entraten könnten.

In der That würde diese Praxis: für jede in Betracht zu ziehende Klasse, für jeden Ausdruck sofort einen einfachen Namen zu schaffen, am besten durchweg eingehalten, wenn nicht ihre strikte Befolgung einen Misstand nach sich zöge, durch die Rücksichtnahme auf welchen die Wirksamkeit jener Maxime wieder eingeschränkt werden muss. Resultiren würde nämlich eine Überladung der Untersuchungen mit einer allzugrossen Menge aparter (wenn auch einfacher) Zeichen, deren Bedeutung, da sie doch wenigstens während gedachter Untersuchungen festgehalten werden muss, im Gedächtnisse zu behalten, demselben eine übergrosse Last aufbürden hiesse.

Aus diesem Grunde verwenden wir zur Bezeichnung von solchen Gebieten oder Klassen, die zu andern bereits einfach benannten in einer einfachen Beziehung stehen, anstatt willkürlich zu erfindender „einfacher", doch oft lieber „zusammengesetzte" Namen, und zwar solche, welche durch die Art ihrer Zusammensetzung stetsfort erkennen lassen, in welcher Beziehung jene gedachten Gebiete zu diesen erwähnten stehen sollen.

Im Ganzen kommt es also darauf an, den goldenen Mittelweg zu gehen zwischen Gebundenheit an bemühend schwerfällige Ausdrucksweisen einerseits und Überlastung des Gedächtnisses andrerseits, m. a. W. darauf: dass man das an sich gerechtfertigte Bestreben nach möglichster Erleichterung und Vereinfachung der Ausdrucksmittel zügeln lasse durch die Rücksicht auf eine nur mässige Inanspruchnahme des Gedächtnisses, namentlich auf Entlastung des mechanischen Gedächtnisses — durch Beizug des judiziösen — vermittelst mässigen Gebrauches von zusammengesetzten und zwar von *rationell* zusammengesetzten Namen.

Sobald nun bei einem zusammengesetzten Ausdruck eine Operation angedeutet, *an* oder *mit* ihm vorgenommen werden soll, wird die Anbringung von Klammern zum unabweislichen Bedürfniss: damit einer Mehrsinnigkeit der Bezeichnungsergebnisse vorgebeugt werde.

Um dies näher darzulegen, wollen wir vorzugsweise die Fälle in's Auge fassen, wo jene Beziehungen darstellbar, wo nämlich zusammen-

gesetzte Ausdrücke herzustellen sind durch die Knüpfungszeichen des identischen Kalkuls.

Sind a, b, c Gebiete oder Klassen, so werden $a \cdot b$, $b \cdot c$, $a + b$, $b + c$, etc. die nächstliegenden Beispiele von neuen, aus den vorliegenden abgeleiteten Gebieten oder Klassen sein, für welche sich uns die angeführten Symbole als „zusammengesetzte" Namen zur Verfügung stellen.

Wenn wir nun z. B. ein Gebiet a zu multipliziren haben mit dem Gebiete $b + c$, so dürfen wir für das sich dadurch ergebende Gebiet nicht ohne weiteres schreiben:

$$a \cdot b + c$$

aus dem Grunde, weil dieser Ausdruck ebensogut gehalten werden könnte für das Ergebniss der Addition eines Gebietes c zu dem Gebiete $a \cdot b$. Und diese beiden Ergebnisse wären doch verschieden, wie schon die Veranschaulichung derselben für das nächste beste Beispiel zeigt; sie dürften also durchaus nicht verwechselt werden. Solcher Verwechselung vorzubeugen ist die Klammer bestimmt.

Das Malzeichen in obigem Ausdruck $a \cdot b + c$ erscheint faktisch nur neben den Bestandteil b des zusammengesetzten Namens $b + c$ gestellt, und niemand vermag dem Ausdruck anzusehen, dass es sich auf diesen ganzen Namen beziehen sollte.

Ebenso bliebe in Hinsicht des Pluszeichens der Zweifel offen, ob es sich auf das ganze Produkt $a \cdot b$ oder nur auf den ihm zunächst stehenden Faktor b desselben beziehen solle.

Solche Unbestimmtheit (hier Zweideutigkeit, Doppelsinnigkeit) zu heben vermögen wir vermittelst der Klammern, und zwar, indem wir als obersten Grundsatz adoptiren:

Sooft an oder mit einem „zusammengesetzten" Ausdruck eine Operation ausgeführt werden soll, welche durch ein an demselben anzubringendes Operationszeichen darzustellen ist — wie z. B. auch durch eine bestimmte Art der Verknüpfung des Ausdruckes mit noch anderen Symbolen — *so muss derselbe eingeklammert werden*, und zwar: damit man erkenne, das Operations- resp. Verknüpfungszeichen beziehe sich auf den ganzen Ausdruck und nicht etwa blos auf den ihm zunächst stehenden Bestandteil desselben.

Hienach erscheinen denn in der That die beiden vorhin noch in der Gefahr einer Verwechselung befindlichen Ausdrücke als $a \cdot (b + c)$ — sprich a mal *Klammer* b plus c, *geschlossen* — und $(a \cdot b) + c$ — spr. Klammer a mal b geschlossen, plus c — nun auch äusserlich gebührend unterschieden, und war es von diesen der erstere $a \cdot (b+c)$, den wir zu bilden vorhatten.

Die Klammer ( ) mag angesehen werden als Überrest einer einfach geschlossenen (unverknoteten) Kurve, welche den zusammengesetzten Namen oder Ausdruck als ihren Inhalt umfassen, einhegen soll und ihn so zu einem Ganzen zusammenschliesst, welches nur als solches zu allem, was ausserhalb befindlich in Beziehung treten kann. So in unserm Beispiele:

$$a \cdot \; b+c$$

Von dieser Ellipse brauchen aber nur die in die Zeile fallenden beiden Teile wirklich ausgezogen oder forterhalten zu werden, weil eben nur dieser entlang der Ausdruck gelesen wird. Zugleich erhellt aus dieser Bemerkung, wie zuweilen auch ein wagrechter Strich oder Haken ⌴ als „*Vinculum*" die Klammer zu ersetzen vermag — so in der Arithmetik der verlängerte Wurzelstrich, sowie der *Bruchstrich*, zum Exempel bei $\frac{b+c}{a}$.

Sich die Befolgung obiger Regel zu erlassen, ein Dispens von derselben, ist nur zulässig auf Grund bewusster Überlegungen (oder durch solche gerechtfertigter Übung), die wir nachher erörtern werden.

Ist der verknüpfte ein einfacher Name wie a oder b', so ist dessen Einklammerung unnötig, indem bei $a \cdot b'$ niemand auf die Meinung verfallen kann, das Malzeichen beziehe sich nur etwa auf die rechte Hälfte des Buchstabens a, und nicht auf diesen ganzen Buchstaben und niemand auch in den Irrtum geraten wird, es beziehe sich au das b ohne seinen Accent. [Sollte freilich einmal — zu irgendwelchem Zwecke — das Produkt $a \cdot b$ accentuirt werden, so müsste es eingeklammert, es müsste dann $(a \cdot b)'$ geschrieben werden.]

Sofern also alle in Betracht gezogenen Gebiete oder Klassen mit einfachen Namen benannt sind, ist das Institut der Klammern überflüssig.

Die „überflüssige" Klammer bildet ein noch für andere Zwecke disponibles Merkzeichen, und mag man z. B. in einer Untersuchung mit (a), (b), etc. ganz andere Dinge wie a, b, $\cdots$ bezeichnen.

Auch in den andern Fällen wird die Klammer entbehrlich, sobald man die erforderliche Menge von einfachen Namen einführt.

Der obige Ausdruck $a \cdot (b+c)$ z. B. kann auch ohne Klammern dargestellt werden in Gestalt von $a \cdot z$, sobald wir $b+c=z$ nennen, und ebenso lässt sich, indem $a \cdot b = x$ genannt wird, ohne jegliche Klammer $x+c$ schreiben für dasjenige was wir oben mit $(a \cdot b)+c$ darstellen mussten.

Um noch ein Beispiel anzuführen, so lässt sich das Assoziationsgesetz der Multiplikation ohne Klammern dahin aussprechen, dass, wenn $a \cdot b = x$ und $b \cdot c = y$ genannt wird, dann $a \cdot y = x \cdot c$ sein müsse.

Die Klammer, indem sie uns die Einführung noch besondrer einfacher Namen erspart, überhebt uns also auch der Nötigung, die Be-

deutung dieser Namen *ausserhalb* des Textes auseinanderzusetzen, sei es in vorgängiger Erklärung, sei es in nachträglicher Anmerkung zu demselben, wo nicht in Form einer Einschaltung; sie gestattet, von dem, was sie zu bedeuten hätten, *im Zusammenhange* des Textes zu reden. Anstatt „z, welches $b+c$ bedeutet" sagen wir sogar bequemer „$(b+c)$".

Fassen wir den Zweck der Klammern noch unter einem andern Gesichtspunkt in's Auge. Sobald in einem Ausdruck *mehrere* Knüpfungszeichen zu erblicken sind, fällt den Klammern die Aufgabe, die Mission zu, die Succession oder *Reihenfolge der* betreffenden *Operationen* zu regeln. Nach der Erklärung, welche unsre Operationen der identischen Multiplikation und Addition gefunden haben, hat es nur einen Sinn, zu verlangen, dass zwei Gebiete (zu einem dritten) verknüpft werden. Es wäre aber sinnlos, etwa zu fordern, dass a, b und c gleichzeitig durch Multiplikation und Addition verknüpft werden sollten. Wenn a tempo a mit b multiplizirt und b mit c summirt werden sollte, was sich ja in der That durch verschiedene Personen ausführen liesse, so würden auch *zwei* Ergebnisse $a \cdot b$ und $b+c$ resultiren. Zu *einem* Ergebnisse durch die *beiden* Rechnungen der Multiplikation und Addition lassen sich die drei Gebiete nur vereinigen, wenn diese Rechnungen *nacheinander, successive, fortschreitend* ausgeführt werden, und da frägt es sich vor allem, in welcher Ordnung oder (Reihen-)Folge.

Wird zuerst b und c summirt, und hernach (mit dem Ergebnisse) a multiplizirt, so entsteht $a \cdot (b+c)$.

Wird dagegen zuerst a mit b multiplizirt, und dann (zu dem Ergebnisse) c addirt, so entsteht $(a \cdot b)+c$.

So wenig man ein Haus bauen und hernach erst die Steine und Balken dazu liefern kann, so wenig kann man an einem Gebiete eine Operation (sei es auch nur andeutungsweise) vollziehen, bevor man (einen Namen für) dies Gebiet selbst hergestellt hat. Ehe man es wenigstens *gedacht*, kann man nichts daran oder damit machen. Auch „die Nürnberger hängen Keinen, sie hätten ihn denn zuvor".

Es ist darnach eine *innerhalb* einer Klammer vorgeschriebene Operation jeweils *vor* derjenigen ausgeführt zu denken, welche an oder mit dem Klammerausdruck selbst vollzogen werden sollte, deren Zeichen also auch nur *ausserhalb* von dessen Klammer zu erblicken sein wird. Man wird in einem jeden Bestandteil des Ausdrucks jeweils leicht die innersten Klammern ausfindig machen, und für die Interpretation sowol als eventuell auch für die „Ausrechnung" von komplizirten Ausdrücken, welche Klammern ev. *in* Klammerausdrücken und wieder in solchen etc. desgleichen vielleicht auch neben solchen eingeschachtelt enthalten, ist also die Regel gerechtfertigt, diese Prozesse *von innen nach aussen* fortschreitend auszuführen. Auf dieser Bemerkung vor allem beruht die für den Anfänger schon nicht ganz leichte Kunst des richtigen Verstehens und Ansetzens von Ausdrücken, eine Kunst in Bezug auf welche, wie bei jeder Kunst, die Übung ein Übriges, vielleicht das meiste, thun muss.

In prinzipieller Hinsicht ist nun aber noch zweierlei zu bemerken.

Erstens ist das Einschachteln von Klammerausdrücken in neue Klammern u. s. w. sowie überhaupt das häufige Anbringen von solchen, immerhin ein lästiger Notbehelf; der erstere Fall sogar nicht selten ein die Übersicht erschwerender Umstand. Man sucht diesen Misstand dadurch zu verringern, dass man da, wo im nämlichen Ausdruck Klammern von einer andern umschlossen werden, für die eingeschlossenen und für die umschliessende verschiedene Klammerhaken mit Vorliebe verwendet, so diejenigen der *runden* $(\cdots)$, der geschwungenen oder *geschweiften* $\{\cdots\}$ und der *eckigen* $[\cdots]$ Klammer.

Zudem aber sucht man überhaupt den Gebrauch der Klammern *möglichst einzuschränken.*

Ein für allemal sei bemerkt, dass man übereingekommen ist, die zusammengesetzten Ausdrücke, welche durch ein logisches *Beziehungszeichen* zu verknüpfen sind, welche also die linke oder rechte *Seite* einer Subsumtion, oder einer Gleichung, einer Ungleichung, etc. bilden sollen, im (Gebiete)Kalkul *niemals einzuklammern.* Also man schreibt z. B.:

$$ab \Subset a + b \quad \text{und nicht:} \quad (ab) \Subset (a + b).$$

Erst im „Aussagenkalkul", wo jene Ausdrücke Aussagen bedeuten, die selbst wieder derartige Beziehungszeichen enthalten mögen, kann solche Einklammerung nötig werden, und würde in der That z. B. $a \Subset b = c$ ganz etwas anderes bedeuten, als $(a \Subset b) = c$ — jenes nämlich kund geben, dass a in b enthalten sei, welches einerlei mit c, dieses aber, dass c die Aussage bedeute (oder ihr äquivalent sei), dass a in b enthalten. Das Nähere wird sich aus dieser Disziplin ergeben.

Der Gebrauch der Klammer ist dort durch die Konvention geregelt, dass, wo nicht eine solche Klammer das Gegenteil vorschreibt, die Zeichen der identischen Operationen stets *vor* den Beziehungszeichen interpretirt werden müssen.

Darnach dürften wir im Gegensatz zum obigen Beispiel in einem Ausdruck des Aussagenkalkuls, wie $a(b \Subset a) + b$, die Klammer jedenfalls nicht weglassen.

Doch kehren wir wieder zum Gebietekalkul zurück.

Ausserdem sich von der Klammer zu dispensiren gelingt zunächst *in der Hälfte der Fälle.*

Wo es nämlich, wie in den angeführten Beispielen lediglich darauf ankommt, vermittelst der Klammer zwei verschiedene Auffassungsmöglichkeiten für einenunddenselben Ausdruck zu unterscheiden genügt es, und ist es folglich erlaubt, die Klammer bei der einen Auffassungsweise konsequent wegzulassen, wofern man nur sie bei der andern konsequent beibehält.

Man ist in der Mathematik übereingekommen, *beim Addiren von Produkten die Klammern* (um diese herum) *wegzulassen**), und diesem Gebrauche wird es zweckmässig sein, sich auch im identischen Kalkul anzuschliessen. Sonach schreiben wir für

$$(a \cdot b) + c \quad \text{hinfort bequemer} \quad a \cdot b + c \quad \text{oder} \quad ab + c.$$

Um so gewissenhafter muss dann aber beim Multipliziren von Summen die Klammer (um letztere herum) beibehalten werden und ist es niemals erlaubt, einen Ausdruck $a(b + c)$ in $ab + c$ abzukürzen.

Beispielsweise kann hienach der Ausdruck $a \cdot b + c \cdot d$ nur mehr als $(ab) + (cd)$, nicht aber als $a(b + c)d$, auch weder als $a(b + cd)$ noch als $(ab + c)d$ verstanden oder gedeutet werden.

So wird ferner — wenn wir hier vorgreifend auch den Negationsstrich mit in den Bereich der Betrachtungen ziehen — bei $a \cdot (b_1) = ab_1$ und $a + (b_1) = a + b_1$ die Klammer sich sparen lassen, wofern sie nur bei Ausdrücken der Form $(a \cdot b)_1$ und $(a + b)_1$ festgehalten wird, und indem wir ersteres thun wird hingebracht, dass nun, den Kommutationsgesetzen 12) entsprechend, das ohnehin nicht missverständliche $b_1 a$ resp. $b_1 + a$ ohne weiteres umgestellt werden darf in ab_1 und $a + b_1$. Sofern nicht eine Klammer es anders vorschreibt, wird also die Negation jeweils *vor* den beiden andern Spezies ausgeführt zu denken sein.

Ebenso mögen wir definiren: $a_1' = (a')_1$, da wo vielleicht $(a_1)'$ noch einen andern Sinn behält. —

Für die Zeichen Π und Σ werden hinsichtlich des Klammergebrauchs in § 30 noch besondere Festsetzungen getroffen.

Ferner aber kann die Klammer auch in beiden Fällen weggelassen, sie kann *durchaus gespart* werden überall da, wo die durch die Klammerstellung von einander unterschiedenen Ausdrücke denknotwendig denselben Wert haben müssen, wo sie nur als verschiedene Namen für das nämliche Gebiet, für ein und dieselbe Klasse erscheinen.

Ein erstes Beispiel liefert uns das Assoziationsgesetz 13) selbst.

Nach diesem — welches wir nur etwa für die Multiplikation in's Auge fassen wollen — ist es für den Wert des Produktes gleichgültig, auf welche Weise man in dem Ausdruck

---

*) Über die allgemeineren Konventionen, von welchen die obige nur einen Sonderfall vertritt, vergleiche mein Lehrbuch [1] p. 217 sqq.

$$a \cdot b \cdot c$$

eine Klammer anbringt. Eine solche *kann* nur entweder die beiden ersten oder aber die beiden letzten der drei als Faktoren angesetzten Symbole — bei Festhaltung von deren Reihenfolge — umschliessen, da a und c durch das mittlere Symbol b getrennt erscheinen, folglich deren Einschliessung ohne b in eine Klammer unthunlich ist. Eine Einklammerung des ganzen Ausdrucks abc ist ja, solange nicht weitere Operationen an ihm vorzunehmen sind, als unnötig zu verwerfen, und ebenso eine Einklammerung der einfachen Symbole a, b oder c selbst bereits ausgeschlossen.

Auf eine der beiden angegebenen Arten aber *muss* die Klammer auch gesetzt gedacht werden, wenn überhaupt dem Ausdruck ein Sinn untergelegt werden soll. Denn wir können auch zwei Multiplikationen nicht gleichzeitig ausführen: eine von beiden — entweder die von a mit b oder die von b mit c — muss den Vortritt haben, m. a. W. ein Produkt ist bis jetzt nur für zwei Faktoren definirt worden; ein Produkt von dreien aber zur Zeit noch unerklärt.

Wir könnten demnach unter $a \cdot b \cdot c$, wenn überhaupt etwas, so nur entweder $(a \cdot b) \cdot c$ oder $a \cdot (b \cdot c)$ verstehen. Welches von beiden wir thun, ist aber, wegen $a(bc) = (ab)c$, also kraft des Assoziationsgesetzes gleichgültig und folglich braucht darüber auch keine Vorschrift gegeben zu werden. Wir schreiben künftig unterschiedslos, bequemer und übersichtlicher für die genannten beiden Ausdrücke den einen

$$abc$$

und sind so naturgemäss zu dem Begriff des *Produktes von drei* (zunächst noch in bestimmter Ordnung gegebenen) *Faktoren* a, b und c gelangt, als welches wir — unter dem Namen abc — zu verstehen haben den kraft des Assoziationsgesetzes übereinstimmenden Wert der Produkte $a(bc)$ und $(ab)c$.

Als eine Art von psychologischem *Postulat*, neu hinzutretend zu den auf die Interpretation bezüglichen und in § 7 schon angeführten Postulaten, kann es allerdings vielleicht hingestellt werden, dass wir uns schliesslich dieses Gebiet abc noch auf eine (anscheinend) dritte Weise, nämlich: als das *den dreien* a, b und c schlechtweg *gemeinsame* Gebiet, im Geist zu erzeugen und vorzustellen vermögen, ohne dabei einen der vorher angedeuteten Bildungsprozesse wiederholen, mit Bewusstsein durchlaufen zu müssen.

Indem wir diese Überlegungen nun analog auch auf beliebig viele Faktoren ausdehnen, schliessen sich hier ebenso naturgemäss an die Betrachtungen des folgenden Anhangs.

Anhang 3.

Ausdehnung von Begriff und Sätzen über Produkt und Summe von zweien auf beliebig viele Terme.

(Zu § 10.)

Ich werde zunächst nur vom Produkte reden. Um den Begriff eines Produktes von beliebig viel — sagen wir n — Faktoren zu gewinnen, bedürfen wir ausser dem speziellen Assoziationsgesetz $13_\times$) und dem speziellen Kommutationsgesetz $12_\times$) noch wesentlich des Satzes $16_\times$), dass Gleiches mit Gleichem multiplizirt Gleiches gibt (so wenigstens im Falle der Anwendung von nie mehr als zwei Faktoren) — wobei, wie in dieser ganzen Disziplin „gleich" ja eigentlich nur Identisches genannt wird. Dieses Th. 16), welches wir im System erst ein wenig später aufzuführen vorzogen, könnte, samt dem dasselbe vorbereitenden Th. 15), auch unmittelbar hinter Th. 13) angereiht werden, und ist für die nachfolgenden Überlegungen vorausgeschickt zu denken.

Diese Überlegungen, welche als ebenso scharfsinnig, wie einfach und fundamental zu bezeichnen sind, rühren wesentlich von Hermann Grassmann her. Von Hermann Hankel und von mir reproduzirt, wobei sie vielleicht noch ein wenig gewonnen haben, sind sie neuerdings auch von O. Stolz in dessen Vorlesungen über allgemeine Arithmetik aufgenommen worden. Es könnte in ihrem Betreff auf dieses letztere Werk sowol wie auf mein Lehrbuch[1] verwiesen werden. Doch will ich, um ein möglichst lückenloses Gebäude hier aufzurichten, das für unsere Disziplin Unentbehrliche davon hier einfügen, und zwar mit der Vereinfachung, welche Herr Stolz[1] der Darstellung noch hat angedeihen lassen.

Was auf die Anordnung (Reihenfolge) und was auf die Zusammenschliessung (mittelst Klammern, Gruppirung) der Faktoren sich bezieht, ist nach Grassmann's Vorgange scharf auseinander zu halten. Wenn wir zunächst von der letzteren, also von der Klammerstellung, handeln wollen, so ist demnach die Reihenfolge der als Faktoren zu verwendenden Symbole von vornherein gegeben zu denken und im Verlauf der Untersuchung unabänderlich festzuhalten.

Es empfiehlt sich, diese Faktoren mit numerirten Buchstaben zu bezeichnen, sie etwa

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\ a_{n-1},\ a_n$$

zu nennen.

Das Th. $13_\times$) zeigte uns, dass die Klammerstellung bei drei Faktoren gleichgültig ist. Dazu gilt der

Satz $13)^{a}$. *Wenn die Klammerstellung bei weniger als n Faktoren irrelevant ist, so muss sie es auch bei n Faktoren sein.*

Beweis. Nach der Voraussetzung ist es bei $3,\ 4,\ \cdots$ bis inclusive $n-1$ Faktoren bereits als für den Wert des Ergebnisses gleichgültig erkannt, in welcher Weise man dieselben vermittelst Klammern so in Gruppen scheidet, dass ein Ausdruck entsteht, welcher durch lauter Multiplikationen von immer nur zwei Faktoren hergestellt ist. Der laut Annahme stets übereinstimmende Wert des Ergebnisses für alle die verschiedenen hierbei noch denkbaren Bildungsweisen des Ausdrucks kann demnach schon *ohne jede Klammer* geschrieben und schlechtweg das „*Produkt*“ der in dem Ausdruck vorkommenden Symbole oder „Faktoren“ (für die bestimmte Reihenfolge in der sie auf der Zeile stehen) genannt werden.

Es ist dann zu zeigen, dass auf Grund der Theoreme $13_\times$) und $16_\times$) dasselbe auch für n Symbole zutreffen muss, wenn diese in bestimmter Reihenfolge angeschrieben und dann irgendwie mittelst „binärer“ Multiplikation (d. i. eben Multiplikation von immer nur zwei Faktoren) zu einem Produkte vereinigt werden.

Nun kann der ganze Ausdruck in zwei Faktoren mittelst Klammern nur auf folgende Arten gespalten werden, für welche wir die zugehörigen Ergebnisse mit den linkerhand eingeführten Namen benennen wollen:

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1\,(a_2\,a_3 \cdots a_n)\\
x_2 &= (a_1\,a_2)\,(a_3 \cdots a_n)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
x_r &= (a_1\,a_2 \cdots a_r)\,(a_{r+1} \cdots a_n)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
x_{n-1} &= (a_1\,a_2 \cdots a_{n-1})\,a_n,
\end{aligned}$$

wo r irgend eine der Indexzahlen von 1 bis $n-1$ bedeuten mag, mithin $1 \leqq r \leqq n-1$ zu denken ist.

Die Bildungsweise für die beiden Hauptfaktoren oder Teilprodukte:

$$a_1\,a_2 \cdots a_r = s_r, \qquad a_{r+1}\,a_{r+2} \cdots a_n = t_r$$

von irgend einem dieser Ausdrücke

$$x_r = s_r\,t_r$$

braucht nach dem Gesagten nicht weiter angedeutet oder mittelst fernerer innerhalb derselben anzubringender Klammern angegeben, vorgeschrieben zu werden, da diese Teilprodukte jedenfalls weniger als n (höchstens $n-1$) Faktoren enthalten, während sogar $s_1 = a_1$ und $t_{n-1} = a_n$ — wie man sich auszudrücken pflegt — „nur aus *einem* Faktor bestehen“, eigentlich nämlich gar nicht Produkte sind.

Zu zeigen ist, dass die obigen $n-1$ Ausdrücke $x_1,\ x_2 \cdots x_{n-1}$ einander gleich sein müssen, und dies wird nach Th. 4) Zusatz geleistet sein, wenn wir darthun, dass allgemein (nämlich für jedes der gedachten r bis zum letzten hin)

$$x_r = x_{r+1}$$

sein muss, womit ja $x_1 = x_2,\ x_2 = x_3,\ \cdots\ x_{n-2} = x_{n-1}$ dann erkannt sein wird.

Nun ist zufolge der den Symbolen t_r und t_{r+1} beigelegten Bedeutung (kraft der bei solchen Teilprodukten beliebig anbringbaren Klammern):

$$t_r = a_{r+1}\,t_{r+1}$$

und kann nach Th. $16_\times$) dies in $x_r = s_r\,t_r$ eingesetzt werden. Darnach wird sich dann x_r aus drei Faktoren zusammensetzen und kraft Th. $13_\times$) sich ergeben:

$$x_r = s_r\,(a_{r+1}\,t_{r+1}) = (s_r\,a_{r+1})\,t_{r+1}.$$

Es ist aber zufolge der den Symbolen s_r und s_{r+1} zukommenden Bedeutung auch (wegen der Unterdrückbarkeit von Klammern in denselben):

$$s_r\,a_{r+1} = s_{r+1}$$

und kann dies wiederum nach $16_\times$) in das letzte Ergebniss eingesetzt werden. Dadurch entsteht:

$$x_r = s_{r+1}\,t_{r+1} = x_{r+1}$$

was zu beweisen war.

Nun war bei drei Faktoren die Klammerstellung ohne Einfluss auf den Wert des Ergebnisses; nach dem eben Bewiesenen muss sie es auch für $3+1$ oder 4 Faktoren sein; ist sie es sonach für viere, so muss sie es auch sein für $4+1$ oder 5 Faktoren und so weiter. Es kann in dieser Weise ohne Ende fort geschlossen werden, und jedenfalls auch so lange, bis man irgend eine vorgedachte Faktorenzahl erreicht hat (*Schluss von* $n-1$ auf n resp. n *auf* $n+1$, oder Bernoulli'scher „*Schluss der vollständigen Induktion*“).

Gilt also nur das *spezielle* Assoziationsgesetz (für drei Faktoren), so gilt auch stets das *allgemeine* Assoziationsgesetz (für beliebig viele Faktoren). Letzteres lautet:

Satz 13)ᵇ („*Allgemeines Assoziationsgesetz*"). *Auch bei irgend einer Anzahl,* bei einer beliebigen Reihe *von multiplikativ zu verknüpfenden Symbolen ist die Klammerstellung für den Wert des Ergebnisses gleichgültig.*

(Definition.) Den für jede denkbare Art der Klammerstellung übereinstimmend erhältlichen Wert des Ergebnisses der Verknüpfung nennt man kurz das *Produkt der sämtlichen,* in ihrer gegebenen Reihenfolge verwendeten, *Symbole* und pflegt man dasselbe dadurch auszudrücken, dass man diese Symbole als „Faktoren" in jener bestimmten Reihenfolge gemeinhin ohne alle Klammern nebeneinander stellt.

Die hier angestellten Betrachtungen sind nicht nur für die identische, wie für die numerische Multiplikation in gleicher Weise gültig, sondern überhaupt für jede Art von *eindeutiger Verknüpfung,* die man sich unter dem vorstehend gebrauchten Namen „Multiplikation" irgend vorstellen mag. Nichts hindert, den Punkt, wo er als Malzeichen in Gedanken zu setzen gewesen, wirklich hinzuschreiben und ihn dabei durch ein beliebiges Knüpfungszeichen $\circ$ (wie Herr Stolz es thut) zu ersetzen. Die an unsre Voraussetzungen angeknüpften Schlussfolgerungen müssen dabei unverändert stichhaltig bleiben, weil sie eben (von der Materie unabhängig) nach allgemeinen Schemata mit Denknotwendigkeit erfolgten. Sofern also für die gedachte Knüpfung nur die Voraussetzungen $13_\times$) und $16_\times$) zutreffen, muss auch das allgemeine Assoziationsgesetz für diese Knüpfung gelten und kann der Begriff der ursprünglich nur „binären" Knüpfung erweitert werden zu demjenigen einer beliebig viele Terme auf einmal (in bestimmter Reihenfolge) verbindenden Knüpfung der nämlichen Art.

Namentlich sind unsre Ergebnisse auch auf die identische gleichwie auf die numerische *Addition* ohne weiteres übertragbar und gilt dies nicht minder von dem hiernächst noch weiter Folgenden. Als Knüpfungszeichen wird hier eben nur das Pluszeichen zu figuriren haben.

Die so ausgedehnten, dergestalt erweitert anzulegenden Betrachtungen gehören sich eigentlich eingefügt in den Rahmen einer *allgemeinen Theorie der Verknüpfung,* welche — passend wol „absolute Algebra" zu nennen — dieselben für die verschiedenen Unterdisziplinen ein für allemal erledigte. Doch sei bemerkt, dass, abgesehen von vereinzelten Bruchstücken, solche Theorie noch nicht geschrieben ist!

Nebenbei gesagt gibt es auch Operationen, die nur assoziativ, nicht kommutativ sind — wie z. B. die Multiplikation der Substitutionen und die der Quaternionen und unzählige andere — sowie auch umgekehrt Operationen sich angeben lassen, welche kommutativ aber nicht assoziativ sind.

Hier indess haben wir nur noch mit der Verbindung beider Eigenschaften der Assoziativität und Kommutativität uns zu beschäftigen.

Auf Grund der bisherigen aus $13_\times$) abgeleiteten Theoreme (und Definition) lässt sich nun der Satz beweisen:

Satz 13)ᶜ. *In einem Produkt von n Faktoren dürfen irgend zwei benachbarte miteinander vertauscht werden.*

Wird: $a_1 a_2 \cdots a_n = x$ genannt, so gilt auch:

$$x = a_2 a_1 a_3 \cdots a_n =$$
$$= a_1 a_2 \cdots a_{r-1} a_{r+1} a_r a_{r+2} \cdots a_{n-1} a_n =$$
$$= a_1 a_2 \cdots a_{n-2} a_n a_{n-1}.$$

Beweis. Da man nach 13)ᵇ Klammern auch beliebig anbringen darf, so können wir schreiben:

$$x = (a_1 a_2 \cdots a_{r-1})(a_r a_{r+1})(a_{r+2} \cdots a_n) =$$
$$= s_{r-1}(a_r a_{r+1})\, t_{r+1}.$$

Nach Th. $12_\times$) ist aber $a_r a_{r+1} = a_{r+1} a_r$, und darnach wird — gemäss $16_\times$):

$$x = s_{r-1}(a_{r+1} a_r)\, t_{r+1} = s_{r-1} a_{r+1} a_r t_{r+1}.$$

Setzt man hierin wieder die Werte von s_{r-1} nebst t_{r+1} ein, und lässt die dabei um diesen ihren zusammengesetzten Namen ursprünglich anzubringenden Klammern kraft 13)ᵇ weg, so ist der mittlere (allgemeine) Teil unsrer Behauptung bewiesen.

Ebenso beweist man die beiden andern Teile, indem für die extremen oder Rand-Fälle ($r = 1$ und $r = n - 1$) sein muss:

$$x = (a_1 a_2)\, t_2 = (a_2 a_1)\, t_2 = a_2 a_1 t_2$$

und

$$x = s_{n-2}(a_{n-1} a_n) = s_{n-2}(a_n a_{n-1}) = s_{n-2} a_n a_{n-1}.$$

q. e. d.

Satz 13)ᵈ. *Ist* aber *Vertauschung benachbarter Faktoren erlaubt, so kann man aus irgend einer gegebenen auch jede gewünschte Anordnung der Faktoren herleiten.*

Man suche unter den Faktoren der gegebenen Anordnung denjenigen heraus, welcher (in der gewünschten Anordnung) an die erste Stelle treten soll. Steht er nicht bereits an dieser, so lasse man ihn durch nötigenfalls fortgesetzte Vertauschung mit dem ihm jeweils unmittelbar vorangehenden Faktor, nach und nach bis an die erste Stelle vorrücken. Sobald er dieselbe inne hat, lasse man ihn an dieser fortan unverändert stehen. Man suche hierauf denjenigen Faktor in der nunmehr als gegeben vorliegenden Anordnung auf, welcher in der verlangten die zweite Stelle einnehmen soll. Hat er diese Stelle nicht schon selber inne, so ist er jedenfalls hinter derselben zu finden, weil vor ihr nach dem Bisherigen bereits ein andrer Faktor steht. Man lasse ihn dann ebenso — in fortgesetztem Platzwechsel mit dem augenblicklich unmittelbar vor ihm stehenden resp. vor ihn getretenen — bis an die zweite Stelle vorrücken, und wenn er sie erreicht, in derselben verharren, und fahre so fort, bis jeder Faktor die ihm zugewiesene Stelle eingenommen hat. Dies muss endlich eintreten weil mit jedem neu vorgenommenen Faktor, die Zahl der noch nicht an ihre Stellen gebrachten immer um 1 abnimmt, und weil die neu, die an den folgenden Stellen, hinzutretenden Erfolge die früher errungenen nicht wieder umstossen.

Soll beispielsweise aus der Anordnung $a_5 a_2 a_4 a_1 a_3$ die Reihenfolge $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ hergestellt werden, so wird der Reihe nach zu bilden sein:

$$a_5 a_2 a_1 a_4 a_3$$
$$a_5 a_1 a_2 a_4 a_3$$
$$a_1 a_5 a_2 a_4 a_3$$
$$a_1 a_2 a_5 a_4 a_3$$
$$a_1 a_2 a_5 a_3 a_4$$
$$a_1 a_2 a_3 a_5 a_4$$
$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$$

Hienach ist erkannt, dass eine (multiplikative) Verknüpfung, welche assoziativ ist gemäss Th. $13_\times$) und ausserdem dem speziellen Kommutationsgesetze $12_\times$) unterworfen, welche somit „bei zwei Faktoren kommutativ" ist, dies auch bei beliebig viel Faktoren sein muss, d. h. es gilt für sie der

Satz 13)[e] *(„Allgemeines Kommutationsgesetz"). Auch bei einem Produkte von beliebig vielen Faktoren ist deren Reihenfolge gleichgültig.*

Legt man von vornherein die Voraussetzungen $12_\times$) und $13_\times$) in ihrer Verbindung mit einander zugrunde, so kann man zu den allgemeinen Ergebnissen 13)[b] und 13)[e] auch noch auf andre Weisen gelangen, über welche am vollständigsten wol mein Lehrbuch[1] Aufschluss gibt.

Hiermit nun sind wir zu dem Abschlusse gelangt, den wir erstrebten.

Ich gestatte mir nur noch eine Bemerkung darüber, was von der ganzen mathematisch so musterhaft strengen Betrachtung in Bezug auf ihre *Stellung zur Logik* zu halten.

Es wurde hier als ein — sollte man meinen — der Logik (im *engsten* Sinne) eigentlich fremdes Element, die *Zahl*, mit in den Kreis der Untersuchungen hereingezogen — allerdings nur die natürliche Zahl oder Anzahl, jedoch — in Gestalt von r und n — auch die allgemeine oder Buchstabenzahl. Dies geschah teils nebensächlich, teils wesentlich. Ersteres insofern wir die Zahlen als Suffixe des Buchstabens a verwendeten: es boten eben $a_1, a_2, .. a_n$ sich als zweckmässige Namen für die (irgendwievielen) n Faktoren dar, und diese Namen sind so gut wie irgendwelche andere. *Letzteres* bei dem „Schlusse von n auf $n+1$" durch welchen allein der Satz 13)[a] bewiesen werden konnte und auf den wir auch schon sub Th. 4) Zusatz hinweisen mussten.

Der rein logischen Rechtfertigung dieses Schlusses (der vollständigen Induktion) in Verbindung mit solchen logischen Grundbetrachtungen, wie sie die Gewinnung des Begriffes der „Anzahl" (der Einheiten einer Menge) vorzubereiten helfen müssen, ist der § 51 im 2. Bande gewidmet. Aus dem gegenseitigen Hinübergreifen der beiden Disziplinen ist aber allerdings zu entnehmen, dass sich die Elemente der *Logik* und diejenigen der *Arithmetik* in Hinkunft wol nicht mehr ganz in der bisher beliebten scharfen Sonderung von einander vorzutragen empfehlen werden (resp. streng und gründlich abhandeln lassen), welche ich für die ersteren hier noch nach Möglichkeit aufrecht zu erhalten mich bestrebt habe. Die elementarsten (nämlich die „Anzahl-") Begriffe der *„quantitativen"* Logik müssen wenigstens bei den *Buchstaben* oder Symbolen schon zur Anwendung kommen dürfen, mittelst deren wir die Überlegungen der *„qualitativen"* Logik formuliren — mögen wir diese jener auch vorangehen lassen. Wie denn auch umgekehrt die Überlegungen der Arithmetik nie entbunden zu werden vermögen von der Befolgung jener denknotwendigen Gesetze, welche die (des Zählens sich noch enthaltende) allgemeine Logik aufstellt. Inzwischen mögen auch noch folgende Erwägungen zur Beachtung empfohlen sein.

Es wurde im Bisherigen von Reihenfolge oder (An-)*Ordnung* und von *Gruppirung* oder Zusammenfassung der Faktoren gehandelt, so gelegentlich früher auch von *Eindeutigkeit* der Operationen. Und sei bemerkt, dass wir hier nicht etwa aus den *„Begriffen"* von „Eindeutigkeit" resp. „Ordnung" und „Gruppirung" (welcher letztere eigentlich hier erstmalig zu gewinnen gewesen) werden abstrakte Folgerungen zu ziehen haben. Wir haben uns dafür vielleicht noch lange nicht weit genug in diese Begriffe und deren Definition vertieft, über die sich jedenfalls noch manches sagen liesse. Vielmehr begnügten wir uns, diese Begriffe hier genetisch einzuführen, sie auf synthetischem Wege an dem Substrat der Faktoren entstehen zu lassen, gewissermassen den Anfänger zu denselben zu erziehen. Es war die Einflechtung dieser Begriffe in den Text für uns nur das Schema, die Formel, unter der wir das in den Sätzen bereits in seinem Wesen Erkannte nachträglich allgemein und mnemonisch zusammenfassten.

Um zu erkennen, dass mit alledem keine fremden Elemente in unsre Disziplin wesentlich hereingezogen sind, braucht man sich nur etwa dasjenige, was wir hier allgemein als durchführbar erkannt haben, in jedem Falle seiner künftigen Anwendung wirklich durchgeführt zu denken. Z. B. solche Umformungen, die wir kraft des allgemeinen Kommutations- und Assoziationsgesetzes an Produkten uns künftighin gestatten werden, mag man jeweils auf die strikte Anwendung der Schemata $12_\times$), $13_\times$) und $16_\times$) zurückführen, wie ich es zum Schlusse noch für ein Beispiel darlegen will. Es möge zum Exempel für die Gleichung:

$$(ab)\cdot(cd) = (ad)\cdot(bc)$$

der Beweis verlangt werden, weil man vielleicht den einen dieser beiden Ausdrücke in den andern zu verwandeln wünscht. Hier kann man unter Anwendung der darüber und darunter angesetzten Schemata wie folgt zum Ziele der gewünschten Umwandlung beweiskräftig gelangen:

$$\underset{A\,B}{(ab)}(cd) \underset{12_\times}{=} \overset{A\,B}{\underset{B\,A}{(ba)}}(cd) \overset{12_\times}{=} \underset{A}{(ba)}\overset{B\,A}{\underset{(BC)}{(dc)}} \underset{13_\times}{=} \overset{(AB)\;C}{\underset{(A\;\;B)\;\;C}{\{(ba)d\}c}} \overset{13_\times}{=} \overset{A\;(BC)}{\underset{A\;\;B}{\{b(ad)\}}}c \underset{12_\times}{=} \overset{(A\;\;B)\;C}{\underset{B\;A}{\{(ad)b\}c}} \overset{13_\times}{=} \overset{A}{(ad)}\overset{(BC)}{(bc)}.$$

In dieser Weise durchweg zu verfahren, hiesse nun freilich, auf den Nutzen unserer allgemeinen Sätze zu verzichten, durch deren Anwendung wir ja ohne weiteres den einen Ausdruck in den andern (mittelst blosser Abänderung der Faktorenfolge) hätten umschreiben können. Allein der Hinblick darauf, dass man Obiges doch überall thun *könnte*, offenbart uns, dass die ganze Theorie doch nur auf den Prinzipien der §§ 4 und 12 wesentlich beruht.

Anhang 4.

Logischer Kalkul mit „Gruppen" — hiernächst von Funktionalgleichungen, mit Algorithmen und Kalkuln.

(Zu § 12.)

Der gegenwärtige Anhang dient einem doppelten Zwecke: einem ausserhalb des Interessenkreises dieses Buches liegenden, und einem in denselben fallenden.

Der erste Zweck ist: die Grundzüge einer eigenen *Zeichensprache* zu entwickeln und systematisch zu erläutern, von der ich in anderweitigen Mitteilungen bereits beiläufigen Gebrauch gemacht habe und — behufs Aufstellung einer *allgemeinen Theorie der Verknüpfung* — einen noch viel umfassenderen Gebrauch zu machen haben werde — einer Zeichensprache, die es mir namentlich durch ihre Einfachheit erst ermöglichen wird, die zahlreichen Ergebnisse meiner Untersuchungen über *Funktionalgleichungen* übersichtlich mitzuteilen und in knappster Form zu begründen.

Dieselbe lehnt sich übrigens an die allgemeine Zeichensprache des identischen Kalkuls auf das innigste an.

Ihr Gebrauch wird auch in Anhang 5, wo sie nicht entbehrt werden kann, illustrirt.

Dem zweiten Zweck soll gegenwärtiger Anhang 4 nicht für sich allein dienstbar sein, sondern in Verbindung mit dem nächstfolgenden, gewissermassen sekundirt von Anhang 5. Er besteht in der Lieferung des schuldig gebliebenen *Beweises* für eine in § 12 unsrer Disziplin aufgestellte, für die Theorie der Erkenntniss wol nicht belanglose Behauptung: dass nämlich ein gewisses Gesetz des folgerichtigen Denkens, die „zweite Subsumtion des Distributionsgesetzes", *nicht* syllogistisch bewiesen werden kann.

Behufs Erreichung dieses Zieles werde ich aus meinen Untersuchungen über Funktionalgleichungen eine kleine aber interessante Episode (ganz elementarer Natur) herauszugreifen und in Anhang 5 vorzuführen haben.

Dieselbe dient zugleich als eine Exemplifikation, sie liefert ein spezielles Substrat für die allgemeinen Betrachtungen des Anhang 4, und zwar ein solches, *über dessen Realität kein Zweifel obwalten kann*, indem ich zu allen in Betracht zu ziehenden Funktionalgleichungen auch Lösungen angebe, welche ohne Vorkenntnisse von jedermann leicht als solche erkannt und verifizirt werden können — so schwierig sie mitunter auch zu entdecken waren. Durch die Existenz von Lösungen wird dargethan, dass jene Funktionalgleichungen wirklich bestehen können und für gewisse Funktionen (für eben diese Lösungen) in der That als allgemeine Formeln gelten.

Von mathematischen Bildungselementen dürfte hierbei kaum mehr als der Begriff der eindeutigen Funktion (wenigstens von zwei Argumentzahlen) vorausgesetzt erscheinen.

Bei den Auseinandersetzungen werde ich wiederholt zwei meiner Abhandlungen zu citiren haben — die erstere lediglich, um für Diejenigen, die sie kennen, den Zusammenhang mit dem Gegenwärtigen herzustellen. Von der zweiten werde ich das zum Verständniss des Ganzen und der beabsichtigten Nutzanwendungen *Unentbehrliche* nachstehend ebenfalls kurzmöglichst zusammenstellen, sodass der Leser, welcher verstehen will, nicht gezwungen sein wird, Einsicht von derselben zu nehmen. Immerhin dürfte aber solche Einsichtnahme hier als wünschenswert zu bezeichnen sein, wenigstens soweit die hier angezogenen einleitenden Paragraphen dieser zweiten Abhandlung in Betracht kommen. Ich werde diese Abhandlungen in Anhang 4 und 5 immer mit (l. c.)[7] und (l. c.)[8] citiren, — siehe unter „Schröder" das Literaturverzeichniss.

Gegenstand der Untersuchung sei eine *Mannigfaltigkeit U* von *Sätzen*, deren jeder für sich betrachtet gelten oder auch nicht gelten kann, im ersten Fall aber auch die Geltung von noch andern Sätzen derselben Mannigfaltigkeit nach sich zieht auf Grund von „Prinzipien" $\mathfrak{P}$, welche selbst der gedachten Mannigfaltigkeit nicht durchaus anzugehören brauchen. Die sämtlichen Sätze der Mannigfaltigkeit seien ferner mit einander und mit den Prinzipien *verträglich*.

Derartige Sätze wären z. B. diese:

„Das Dreieck ABC ist rechtwinklig",

„Die Funktion $f(x, y)$ ist symmetrisch" —

denen wir im Aussagenkalkul als „Gelegenheitsurteilen" wieder begegnen werden. Es kommt ganz darauf an, von welchem Dreieck, von welcher Funktion, die Rede ist — je nachdem werden die angeführten Sätze gelten oder nicht gelten. Die Geltung des ersten Satzes zieht die Geltung einer ganzen Reihe anderer auf das Dreieck ABC bezüglicher Sätze oder Aussagen nach sich, nämlich aller derjenigen, welche Eigenschaften konstatiren, die auf Grund der „Prinzipien" (Axiome) der Euklidischen Geometrie aus der Rechtwinkligkeit folgen. Ebenso zieht die Geltung des zweiten Satzes beispielsweise die Folgerung nach sich, dass die beiden Umkehrungen der Funktion $f(x, y)$ mit einander identisch sind — auf Grund der Voraussetzung, die man hier als zu den „Prinzipien" gehörig ansehen mag, dass die Funktion eine eindeutige Umkehrung überhaupt zulasse.

Nachdem hiermit der allgemeine Charakter des Substrates unsrer Untersuchung hinlänglich gekennzeichnet sein dürfte, empfiehlt es sich, ein spezielles Substrat dieser Art nunmehr hervorzuheben, eine ganz bestimmte Mannigfaltigkeit von Sätzen namhaft zu machen und jeweils *zur Illustration* zu benutzen:

Die „Sätze" der Mannigfaltigkeit seien — analog dem zweiten der vorstehenden Beispiele „$f(x, y) = f(y, x)$" — durch arithmetische *Formeln* darstellbare, nämlich *Funktionalgleichungen.*

Als eine „Formel" hingestellt zu werden verdient eine Funktionalgleichung insofern, als sie *für eine Funktion, die ihr genügt*, den Charakter der *Allgemein*gültigkeit besitzt, nämlich gelten wird *für jedes* erdenkliche *Wertsystem der Argumente*, welches man irgend aus dem Gebiete der Zahlen herausgreifen mag. Keineswegs aber braucht die Funktionalgleichung auch erfüllt zu sein *für jede Funktion*, vielmehr haftet ihr auch ein synthetischer Charakter an insofern als sie dienlich sein kann, gewisse Funktionen (oder Klassen von solchen) als solche, die ihr genügen sollen, zu bestimmen. So bestimmt ja in der That die Funktionalgleichung $f(x, y) = f(y, x)$, wenn sie analytisch („allgemein", für alle Wertepaare x, y) gelten soll, die Funktion f als eine symmetrische; für eine solche aber ist sie dann als eine Formel erfüllt.

Der Name „Formel", den wir hier den Funktionalgleichungen beilegen, rechtfertigt sich ausserdem durch die nachfolgend für sie einzuführende symbolische Schreibweise, in welcher sie einen ähnlichen Anblick darbieten werden, wie die bekannten Formeln der allgemeinen Arithmetik — wie z. B. Kommutations- und Assoziationsgesetz — gelegentlich auch geradezu mit solchen zusammenfallen.

Und zwar mögen unsre Funktionalgleichungen sich nur beziehen auf eine Funktion *zweier* Argumente *nebst ihren beiden Umkehrungen*, die ich nach den (l. c.)[8], § 1 dargelegten Grundsätzen symbolisch als *Produkt*, *Verhältniss* und *Bruch* schreibe und alle drei als *vollkommen eindeutig* voraussetze.

Die dreifache Voraussetzung dieser Eindeutigkeit nebst den, den Gegensatz der drei Grundoperationen (oder die Definition von zweien derselben durch die dritte) zum Ausdruck bringenden sechs „Fundamentalbeziehungen" [die ich sogleich angeben werde — vergl. auch (l. c.)[8], § 2] konstituiren alsdann die „Prinzipien" $\mathfrak{P}$, nach denen Folgerungen zu ziehen sein werden.

Für $f(a, b)$ werde also kürzer blos ab geschrieben, und dies ein „symbolisches Produkt" genannt. Zu jedem beliebigen Wertepaar a und b soll es stets einen und nur einen Wert von $f(a, b)$ oder ab im Gebiete der Zahlen geben. Die Aufsuchung dieses Wertes für gegebene a, b ist eine Operation, die wir demnach als die „erste Grundoperation" (oder „symbolische Multiplikation") bezeichnen werden. Für ein gewisses Wertepaar a, b sei c der Wert von ab, sonach $ab = c$.

Für die im Anhang 5 gegebenen Beispiele wird sich allemal der Wert c in einer die Funktion ab definirenden Tabelle (Funktionstafel — in Gestalt eines symbolischen Einmaleinses) aufschlagen lassen.

Nun kann man aber auch, wenn b und c gegeben sind, nach dem Werte (oder den Werten) von a fragen, die so beschaffen sind, dass ab gerade gleich dem gegebenen c ist, und ebenso, wenn a und c gegeben sind, nach dem oder denjenigen Werten von b, für welche $ab = c$ wäre.

Die Operationen, durch welche wir Antwort auf diese beiden Fragen erlangen, nennen wir die „umgekehrten" oder *„inversen"* Operationen von der als symbolische Multiplikation bezeichneten „direkten" Operation. Wir bezeichnen sie als „symbolische Divisionen" und zwar bezüglich mittelst Doppelpunktes als „symbolische Messung" und mittelst Bruchstrichs als „symbolische Teilung"; sie bilden die beiden andern von den „drei Grundoperationen". Auch sie werden jeweils äusserst leicht an der die Funktion ab erklärenden Funktionstafel auszuführen sein.

Wir nehmen nun ferner an, dass die Antwort auf die gestellten Fragen *stets* (für jedes Wertepaar von a und c, sowie von b und c) und immer nur auf *eine* Weise gegeben werden könne, oder wie man sagt, dass die beiden symbol. Divisionen (gleichwie die Multiplikation) „unbedingt ausführbar" und „nie mehrdeutig" seien. M. a. W. wir erklären, nur mit solchen Funktionen ab uns beschäftigen zu wollen, bei welchen solche Eindeutigkeit der Umkehrungen zutrifft. Sooft dann $ab = a'b$ sein sollte, wird auch $a = a'$ sein müssen; ebenso, wenn $ab = ab'$ ist, wird $b = b'$ folgen.

Dasjenige b, für welches bei gegebnen a, c:

$$ab = c \quad \text{ist, nennen wir} \quad b = c:a$$

und dasjenige a, für welches bei gegebnen b, c:

$$ab = c \quad \text{ist, nennen wir} \quad a = \frac{c}{b}$$

und nach der Voraussetzung wird es immer ein und nur ein solches geben, sodass das symbolische Verhältniss $a:b$ und der symbolische Bruch $\frac{c}{b}$ uns in jedem Falle (für gegebene Operationsglieder desselben) eine ganz bestimmte Zahl vorstellen werden.

Nach diesen Definitionen sind dann

$$ab = c, \qquad b = c:a \quad \text{und} \quad a = \frac{c}{b}$$

drei einander äquivalente Aussagen, und substituirt man den Ausdruck, welchen uns irgend eine dieser Gleichungen für den auf ihrer einen Seite isolirten Buchstaben als einen neuen diesem eben zukommenden Namen zur Verfügung stellt, in die beiden andern Gleichungen, so ergeben sich die sechs Beziehungen:

$$b = (ab):a, \qquad a = \frac{ab}{b}, \qquad a(c:a) = c, \qquad a = \frac{c}{c:a}, \qquad \frac{c}{b}b = c, \qquad b = c:\frac{c}{b}$$

welche für die beiden, je in sie eingehenden Buchstaben den Charakter von allgemein gültigen Formeln haben müssen, da zweie von den drei Buchstaben von vornherein beliebig angenommen werden konnten (wodurch sich erst der dritte bestimmte).

Es wird deshalb gestattet sein, in obigen Beziehungsgleichungen die Buchstaben auch durch irgend welche andere zu ersetzen, und kann man sich für einen solchen Buchstabenwechsel entscheiden, dass in jeder von den Gleichungen nur mehr a und b — und zwar der letztere b auf einer Seite isolirt — vorkommen. Darnach werden sich die sechs „Fundamentalbeziehungen" zu dem übersichtlichen Schema zusammenziehen lassen:

$$\begin{array}{ccccc} & a(b:a) & & \frac{b}{a}a & \\ \frac{a}{a:b} & & b & & a:\frac{a}{b} \\ & \frac{ba}{a} & & (ab):a & \end{array}$$

in welchem die im regelmässigen Sechseck angeordneten Ausdrücke dem im Mittelpunkt stehenden b gleichgesetzt zu denken sind, natürlich aber auch unter sich einander gleich gesetzt werden dürfen.

Endlich seien aber die zu betrachtenden Funktionalgleichungen auch von einer bestimmten Form. Sie seien diejenigen der „Sorte"

$$a, b, c = a, b, c$$

von (l. c.)[8], § 4, d. h. solche Gleichungen, in welchen beiderseits die Ergebnisse der Verknüpfung der nämlichen drei Buchstabenzahlen a, b und c durch irgend welche zwei successive von den drei symbolischen Grundoperationen stehen — wo diesen Buchstaben nun von einander unabhängig beliebige Werte zukommen sollen.*)

Unsre „Mannigfaltigkeit" umfasst darnach 990 (nicht durch Buchstabenvertauschung auf einander zurückführbare und nicht identische) Gleichungen, die man leicht vollständig hinschreiben kann, und deren Gesamtheit ich also U hier zu nennen haben werde. [In Anhang 5 werden nur wenige Gruppen von diesen Gleichungen wirklich in's Auge zu fassen sein.]

Derselben gehören die „Prinzipien" $\mathfrak{P}$ hier überhaupt nicht an.

Die in diesen Funktionalgleichungen auftretenden Argumente oder Operationsglieder a, b, c mussten dabei stets als *allgemeine* Zahlen eines bestimmten, sei es diskreten, sei es kontinuirlichen, begrenzten oder auch unendlichen Zahlengebietes aufgefasst werden. [Wirklich in Betracht kommen werden für uns aber nur Zahlengebiete, die aus einigen wenigen Ziffern bestehen.]

Indem (l. c.)[8], § 9 eine Funktion von mir konstruirt ist, welche

*) D. h. unter c soll jetzt nicht mehr der durch a und b bestimmt gewesene Wert des vorigen Kontextes, sondern ein ganz beliebiger Wert verstanden werden.