Die zwischen Parametern und Argumenten einer Funktion willkürlich gezogene Grenze ist demungeachtet von eminent praktischer Wichtigkeit, in Anbetracht, dass es in der Regel nicht zweckmässig erscheint, einen Ausdruck in seiner Abhängigkeit von *allen* in denselben eingehenden allgemeinen oder literalen Gebietsymbolen *zugleich* zu untersuchen. Zumeist erscheint es nur angezeigt oder geboten, dies in Bezug auf eine gewisse Gruppe der den Ausdruck formal zusammensetzenden Elemente auf einmal zu thun, und diesen als den „Argumenten" der Funktion die übrigen Elemente als ihre Parameter gegenüberzustellen.

Alle hier eingeführten Benennungen sind dem Mathematiker — in ihrer nicht durchaus gleichlautenden, aber doch analogen Anwendung auf das Gebiet der *Zahlen* — längst geläufig. Die mathematische Erklärung der „Funktion" setzt allerdings das Vorhandensein eines „analytischen" oder Formelausdrucks für dieselbe *nicht* voraus, sondern stützt sich lediglich auf die *eindeutige Zuordnung* der Funktionswerte zu den Argumentwerten (resp. -wertsystemen); doch lässt sie wenigstens die analytische Darstellung der Funktionen durch dergleichen Ausdrücke mit zu, und findet auf dem Gebiet der letztern ihre hauptsächlichsten Anwendungen.

Ausserhalb der mathematischen Terminologie wird von „Funktionen" sowol als von „Argumenten" in einem gänzlich davon unabhängigen Sinne gesprochen: Man spricht von der Funktion, im Sinne von Lebensverrichtung, vom Funktioniren, irgend eines Organes des Pflanzen- oder Tierkörpers, auch von dem Funktioniren einer Maschine, überhaupt von der Funktion, der Wirksamkeit irgend eines Mittels zu einem Zwecke. Und ferner pflegt ein Beweisgrund auch als Argument, die Beweisführung, namentlich wenn sie eine rhetorische ist, als Argumentiren oder Argumentation bezeichnet zu werden. Diese Benennungen haben, wie gesagt, gar nichts mit den obigen, an die wir uns hier halten, zu schaffen. Die verschiedenen Anwendungssphären dieser Homonyme liegen aber auch so weit auseinander, dass der vorhandene Doppelsinn nicht sehr verfänglich erscheint.

Ersetzt man in einem als Funktion $f(x)$ betrachteten Ausdrucke das Argument x *durchweg*, wo immer es sich in dem Ausdrucke vorfindet, durch ein spezielles Gebiet a, also namentlich auch x_1 durchweg durch a_1, so wird der durch diese Substitution sich ergebende Ausdruck mit $f(a)$ bezeichnet.

Insbesondre erhält man demnach $f(1)$, indem man x durch 1 und demgemäss x_1 durch 0 durchweg in $f(x)$ ersetzt — wobei man die durch die Theoreme 21), 22) und eventuell 30) angezeigten Vereinfachungen oder Reduktionen des Ausdrucks eintreten lassen kann. Ebenso resultirt $f(0)$ aus $f(x)$, indem man 0 für x und 1 für x_1 einsetzt.

Obige Bemerkung gilt auch, wenn a einen zusammengesetzten Ausdruck bezeichnet, und ist hienach, sobald $f(x)$ gegeben ist, auch die Bedeutung von $f(bc)$, $f(a+b)$, etc. ohne weiteres klar.

Analog entsteht $f(a, b)$ aus $f(x, y)$, indem man a für x und b für y (somit auch a_1 für x_1 und b_1 für y_1) in letzterm Ausdruck substituirt. Und so weiter.

Wird ein die Gebietsymbole $x, y, \ldots$ enthaltender Ausdruck als Funktion von diesen Argumenten mit $f(x, y, \ldots)$ bezeichnet, so verfügt man damit über eine zweite Darstellung desselben und diese wird, gegenüber dem *„aktuellen"* Ausdruck der Funktion in Gestalt des ursprünglichen Ausdruckes, bezeichnet als die *„symbolische"* Darstellung derselben. Eine Funktion wird darnach „symbolisch" dargestellt, indem man hinter einen „Funktionsbuchstaben" f oder $\varphi, \psi, \chi, F, \Phi, \Psi, X, \ldots$ in eine Klammer und durch Kommata getrennt die Namen der Argumente in unabänderlich festzuhaltender Reihenfolge schreibt.

Der Funktionsbuchstabe ist ein „Operationssymbol", aber nicht ein Gebiets- oder Klassensymbol, und darf mit einem solchen durchaus nicht verwechselt werden. Sähe man z. B. bei $f(a+b)$ das f für ein Gebiet an, so würde diesem Ausdruck eine ganz andere als die vorhin erläuterte Bedeutung zukommen, derselbe würde nämlich dann für das Produkt $f \cdot (a+b) = f \cdot a + f \cdot b$ gehalten werden müssen. Es empfiehlt sich also zum Funktionsbuchstaben einen solchen zu wählen, der nicht schon anderweitig als Gebietsymbol vorkommt.

Dass ein Buchstabe als Funktionsbuchstabe gelten solle ist jedoch in der Regel schon ohne ausdrückliche Vereinbarung ersichtlich. Sagen wir z. B. $f(x)$, oder auch $f(0)$, $f(1)$ und dergleichen, so gibt sich das eingeklammerte Symbol schon dadurch als ein Argument oder Argumentwert — mithin das davorstehende als Funktionsbuchstabe — zu erkennen, dass es mit einer Klammer umschlossen ist, die ohne solche Absicht als eine „überflüssige" zu verwerfen wäre (vergl. Anhang 2). Und sagen wir $f(x, y, \ldots)$ so zeigen auch die Symbole trennenden Kommata deren Bestimmung, Argumente zu repräsentiren, an.

Haben wir nun etwa eine Funktion $f(x, y, z)$, so wird der Ausdruck $f(y, z, x)$ nicht wieder eben diese, sondern diejenige Funktion vorstellen, deren Ausdruck aus dem gegebenen hervorgeht, indem man x durch y, daneben y durch z und z durch x durchweg ersetzt. Ebenso, wenn $f(x, y)$ gegeben ist, bedeütet $f(y, x)$ das Ergebniss einer Vertauschung von x und y miteinander im gegebenen Ausdrucke, u. s. w.

Leicht erhellen nunmehr die *Vorteile*, welche durch die symbolische Darstellung der Funktionen erzielbar sind und im Hinblick auf welche eben solche Darstellung in die Wissenschaft eingeführt wurde.

Bei allen Untersuchungen von irgend allgemeinem Charakter ist es eine Sache von erster Wichtigkeit, zu wissen, in welcher Weise sich die Bedeutung eines Ausdruckes richtet nach den Bedeutungen der ihn zusammensetzenden Terme von allgemeiner Natur. Will man diese Abhängigkeit erforschen, so muss man den letzteren als Argumenten andere und andere Bedeutungen unterlegen, Werte beilegen, man muss dieselben sich ändern lassen oder sie variiren, um sodann die zugehörigen Werte in's Auge zu fassen, welche unser Ausdruck dabei annimmt.

Die „Einsetzung“ oder „*Substitution*“ eines speziellen Wertes für ein bestimmtes Buchstabensymbol, oder auch eines Wertsystemes für eine ganze Gruppe von solchen, wird darum eine der am häufigsten geforderten Verrichtungen in der Wissenschaft sein. Und unter Umständen, wenn etwa alle Werte einer bestimmten Klasse von Werten der Reihe nach für ein Symbol eingesetzt werden sollten, kann der ermüdende Prozess dadurch abgekürzt, vereinfacht werden, dass man statt dessen auf einmal einen allgemeinen Ausdruck für dieses Symbol substituirt, welcher die Werte jener Klasse, und nur diese, sämtlich umfasst, dass man anstatt der Einzelwerte selbst einsetzt den Ausdruck der ganzen Klasse von Werten. So wird es oft erforderlich auch einen zuweilen recht komplizirten Ausdruck für ein Buchstabensymbol zu substituiren, sogar nicht selten gleichzeitig ein ganzes System von Ausdrücken für ein System von Argumenten.

Die Operation der Einsetzung läuft im wesentlichen auf ein Kopiren, Abschreiben, Reproduziren des gegebenen Ausdruckes hinaus, wobei man nur dessen eingedenk bleiben muss, sobald man beim Abschreiben auf eines der zu ersetzenden Symbole stösst, dass man dasselbe nicht unverändert kopirt, sondern den eben dafür einzusetzenden Ausdruck nimmt, denselben — nötigenfalls in eine Klammer eingeschlossen — hinsetzt, um darnach in dem solchergestalt modifizirten Abschreibeverfahren wieder fortzufahren. An der Schultafel kann der Prozess durch Auslöschen der zu ersetzenden Symbole mit dem Kreideschwamme und Einschreiben der einzusetzenden Werte in die leeren Räume verdeutlicht werden; jedenfalls ist unerlässlich, dass der Anfänger in der Ausführung solch elementaren Prozesses sich eine gewisse Übung erwerbe.

Es kann nun der aktuelle Funktionsausdruck ein durch ein anderes zu ersetzendes Symbol hundert mal, ja unbegrenzt, „unendlich“ oft enthalten, wie das Beispiel zeigen mag:

$$f(x) = a + x \langle b + x_1 [a + x \{b + x_1 (a + x \langle \cdots\cdot \rangle)\}]\rangle$$

— in welchem der Ausdruck freilich in den einfacheren $f(x) = a + xb$ auch zusammengezogen werden könnte, während derartige Vereinfachungen vielleicht nicht immer ausführbar erscheinen. Da wäre es nun äusserst ermüdend, resp. gar nicht vollständig durchführbar, das Argument x durch einen komplizirten Ausdruck — sagen wir

$$(ab_1 + a_1 b)(cd + c_1 d_1)$$

— durchweg in Wirklichkeit zu ersetzen.

Die symbolische Funktionsdarstellung *erspart* uns aber die Nötigung

zu dieser Arbeit, führt dieselbe zurück auf die *ein*malige Ersetzung des x an der Stelle, wo es als Argument aufgeführt war, durch den Ausdruck, welcher dafür einzusetzen ist. So wird in unserm Beispiele schon

$$f\{(ab_1 + a_1 b)(cd + c_1 d_1)\}$$

das Ergebniss der verlangten Operation vorstellen, und für die Zwecke allgemeiner Überlegungen genügt es zumeist, die Operation solchergestalt nur „angedeutet“ zu lassen.

So liefert uns die symbolische Funktionsdarstellung allemal einen übersichtlichen und ausdrucksvollen schon durch sich selbst verständlichen Namen für jeden Funktionswert, welcher zu einem gegebenen Argumentwert oder Wertsysteme gehört. —

Ein weiterer Vorteil, den uns diese Funktionsbezeichnung gewährt, ist aber der, dass wir durch sie auch in den Stand gesetzt werden, Eigenschaften, welche *allen* Funktionen zukommen, desgleichen Sätze, welche etwa nur für gewisse Klassen von Funktionen gelten, in der Zeichensprache des Kalkuls konzisest mittelst Formeln darzustellen.

Dieser Vorteil ist für das Studium der Ausdrücke und Funktionen ein ähnlicher und von der gleichen Tragweite, wie der, den der Gebrauch von Buchstaben als *allgemeinen* Symbolen für Gebiete oder Klassen beim Studium der letzteren gewährt. Die Funktionsbuchstaben können auch verwendet werden zur Darstellung von *allgemeinen* Funktionen.

Nunmehr zur Illustration des Gesagten einige **Beispiele** und **Übungen**.

Bedeutet $f(x) = a + a_1 x$, worin dem Obigen entsprechend a einen Parameter vorstellen soll, also die Symbole a und a_1 von unveränderter Bedeutung bleiben, wenn man auch dem x irgendwelche verschiedene Bedeutungen unterlegt, sodass die Gebiete a und a_1 als „unabhängig von x“ zu bezeichnen, so ist $f(0) = a$ und $f(1) = 1$. Somit ist die Funktion sicher mit x veränderlich, wofern nur unter a nicht gerade das Gebiet 1 verstanden wird; sie nimmt ja dann für verschiedene Werte von x mitunter selbst verschiedene Werte an. Weiter ist auch $f(a) = a$, mithin hier zufällig: $f(a) = f(0)$. Dagegen ist wieder $f(a_1) = 1$, somit hier $f(a_1) = f(1)$. Endlich wird $f(b) = a + a_1 b = a + b$ — cf. Th. 33_+) Zusatz, und konnten wir auch allgemein den ursprünglichen Ausdruck vereinfachen zu $f(x) = a + x$. —

Für $f(x) = a + bx$ ist ähnlich:

$$f(0) = a = f(a) = f(b_1), \qquad f(1) = a + b = f(b) = f(a_1),$$
$$f(c) = a + bc, \qquad f(c_1) = a + bc_1, \quad \text{etc. —}$$

Für $$f(x) = (a + x)(b + x_1)$$

wird

$$f(0) = a, \quad f(1) = b, \quad f(a) = ab = f(b_1), \quad f(b) = a + b = f(a_1),$$

also wieder, im Allgemeinen, $f(x)$ veränderlich bei veränderlichem x, wirklich „abhängig" von x. Natürlich darf man bei einer speziellen Funktion $f(x)$ die ursprüngliche Abmachung, Konvention, durch welche die Bedeutung dieses Zeichens erklärt wurde, nicht aus dem Auge verlieren. Würde z. B. jemand hier irrtümlich die Gleichung $f(b) = a + b$ als die Erklärung, Definition dieser Funktion f, als Funktion eines Argumentes, das (statt x) den Namen b führte, ansehen, so würde er erhalten:

$$f(a_1) = a + a_1 = 1, \quad \text{anstatt, wie vorhin:} \quad f(a_1) = a + b.$$

Dasjenige was ich aus einem Ausdruck $f(x)$ erhalte, wenn ich für x erst b, hernach für b durchweg a_1 in denselben einsetze, müsste nur dann notwendig als das gleiche erscheinen, wie wenn für x sogleich a_1 in dem Ausdruck eingesetzt worden wäre, wenn dieser b nicht neben x enthielte. —

Versteht man hingegen unter $f(x)$ den Ausdruck:

$$f(x) = a(x + b_1) + b(a_1 + x_1),$$

so wird

$$f(0) = ab_1 + b = a + b, \quad f(1) = a + a_1 b = a + b,$$
$$f(a) = a + b, \qquad f(b) = a + b,$$

und so weiter; man erhält für $f(x)$ stets den gleichen Wert

$$f(x) = a + b,$$

was für ein Gebiet man auch unter x verstehen möge; die hier vorliegende Funktion ist faktisch unabhängig von x oder konstant.

Analog wäre

$$f(x) = (a + b_1 x)(a_1 x_1 + b) = ab$$

(bei gegebenen a, b) absolut konstant. Man vergleiche § 18, λ), wo bereits der Beweis für diese Behauptungen geleistet worden ist.

Ebenso würde die Funktion:

$$f(x, y) = a(x + y_1) + y(a_1 + x_1) = a + y$$

zu nennen sein: „konstant in Bezug auf x", wogegen sie, sofern nicht gerade $a = 1$ bedeutet, von y abhängig erscheint. —

Die Funktion $f(x, y) = a(x + y + x_1 y_1)$ ist ebenfalls konstant, und zwar stets $f(x, y) = a$.

Dagegen die Funktion: $f(x, y, z) = xz + y_1 z + x_1 yz$ ist nur in Hinsicht auf x und y konstant, indem sie den Wert haben wird:

$$f(x, y, z) = z.$$

Bedeutet: $\quad f(x, y, z) = ayz_1 + bzx_1 + cxy_1,$

so folgt:

$$\begin{array}{lll}
f(0, y, z) = ayz_1 + bz, & f(1, y, z) = ayz_1 + cy_1, & \\
f(x, 0, 0) = cx = f(1, x_1, 1), & f(x, 0, 1) = bx_1 + cx, & f(x, 1, 1) = bx_1, \\
f(0, 0, 0) = 0 = f(1, 1, 1), & f(1, 0, 0) = c, & f(0, 1, 1) = b, \\
\multicolumn{2}{l}{f(a, b, c) = abc_1 + bca_1 + cab_1 = f(a_1, b_1, c_1),} & f(b, c, a) = 0, \\
\multicolumn{3}{l}{f(c, a, b) = ab_1 + bc_1 + ca_1, \; f(a, b_1, c_1) = ab_1 c + bc_1 a_1 + cab = ac + a_1 bc_1,} \\
\multicolumn{3}{l}{f(a_1, b, c) = abc_1 + bca + ca_1 b_1 = ab + a_1 b_1 c, \quad \text{etc.}}
\end{array}$$

Der Leser ermittle auch noch andre Funktionswerte, wie

$$f(x_1 1, 0), \quad f(x, 1, x), \quad f(x, x_1, 0), \quad f(d, d, d), \quad \text{etc.}$$

44_+) Theorem. *Allgemein ist:*

$$f(x) = f(1) \cdot x + f(0) \cdot x_1.$$

Beweis. In § 17, Zusatz 2 zu Th. 36) haben wir gesehen, dass (und wie) sämtliche im aktuellen Ausdruck von $f(x)$ etwa „angedeuteten" *Negationen* sich werden „*ausführen*" lassen, sodass schliesslich der Ausdruck nur noch durch Addition und Multiplikation (ohne Negation) aus lauter Gebietssymbolen aufgebaut erscheint.

Von einem Ausdruck solcher Art haben wir aber in § 13, Zusatz 1 zu Th. 28) ferner gesehen, dass (und auf welche Weise) derselbe immer in seine „letzten Aggreganten" *zerfällt* werden kann, also dass derselbe als eine Summe, ein (eventuell auch nur *ein*gliedriges) Polynom erscheint von lauter monomischen Gliedern, die nur (eventuell auch *ein*faktorige) Produkte sind von lauter „einfachen" Gebietssymbolen — irgendwie herausgegriffen aus der Gruppe der in den Ausdruck ursprünglich eingehenden literalen Gebiete und deren Negationen —, dagegen keine Summen mehr als Faktoren aufweisen und ohne jegliche Klammern darum sich anschreiben lassen.

Nachdem in diesem Stadium unser Ausdruck angelangt ist, kann man nun kraft des Kommutationsgesetzes $12_\times$) in einem jeden der erwähnten Monome sämtliche Faktoren, die x sind, desgleichen sämtliche Faktoren x_1, zusammenrücken lassen und ihr Produkt nach dem Tautologiegesetze $14_\times$) je durch einen einzigen Faktor x, resp. x_1 ersetzen [wobei implicite auch das Assoziationsgesetz $13_\times$) nebst Th. $16_\times$) in Wirkung tritt].

Diejenigen Glieder des Aggregates, welche x und x_1 zugleich enthalten, kommen dabei nach Th. $30_\times$), $22_\times$) und 21_+) in Wegfall.

Der Ausdruck erscheint hienach als „*linear*" in Bezug auf x und x_1, insofern er diese Symbole nicht mehr mit sich selber oder miteinander, sondern nur noch mit Parametern multiplizirt zeigen wird. Und zwar hat er, wenn man noch die in Bezug auf x und x_1 „gleichnamigen" Glieder zusammenzieht, sie nach Th. $27_\times$) „vereinigt", nämlich x_1 bei all den Gliedern, welche x_1 zum Faktor haben, als gemeinsamen Faktor „ausscheidet", und ebenso x bei den mit x behafteten Gliedern — nachdem man kraft des Kommutationsgesetzes 12_+) sie hat zusammenrücken lassen — notwendig die Form:

$$f(x) = Ax + Bx_1 + C,$$

wo die „Koeffizienten" A, B, C die Symbole x und x_1 nicht mehr als Operationsglieder enthalten, (sondern höchstens sich darstellen werden als Summen von Produkten *aus lauter Parametern* oder eventuell auch Negationen solcher).

Jedenfalls nämlich kann man doch die Summe derjenigen Glieder, welche weder mit x noch mit x_1 behaftet waren, nunmehr C nennen und mit A resp. B das Gebiet bezeichnen, in welches — nach Ausführung der geschilderten Operationen — das x resp. x_1 multiplizirt erscheinen wird — vorausgesetzt natürlich, dass die Symbole A, B, C nicht bereits anderweitig als Namen vergeben waren, nämlich nicht selbst schon als Parameter im aktuellen Funktionsausdruck $f(x)$ vorgekommen sind, in welchem Falle denn andere Buchstaben zur Darstellung unsrer Koeffizienten genommen werden müssten.

Hienach lässt also jede Funktion von x im identischen Kalkul sich als eine lineare Funktion von x darstellen.

Dieselbe wäre „homogen" zu nennen in dem Falle, wo etwa das „Absolutglied" C sich $= 0$ herausstellte, wo man es dann fortlassen und einfacher: $f(x) = Ax + Bx_1$ schreiben könnte.

Aber auch wenn C nicht verschwindet, kann man unsern Ausdruck vollends homogen machen — sei es durch überschiebendes Multipliziren der vorstehenden Gleichung mit der Gleichung

$$1 = x + x_1$$

— sei es, noch besser, indem man blos das Absolutglied mit dem Faktor 1, der $= x + x_1$ ist, versieht, somit C durch

$$C \cdot 1 = C(x + x_1) = Cx + Cx_1$$

ersetzt.

Hierdurch wird in der That:

$$f(x) = (A + C)x + (B + C)x_1.$$

Der Ausdruck nimmt also schliesslich die „lineare homogene" Form an (indem wir $A + C$ kürzer a und $B + C$ ebenso b nennen):

$$f(x) = ax + bx_1,$$

in welcher a und b von x (und x_1) unabhängig sind.

Im identischen Kalkul lässt hienach jede Funktion sogar *als eine homogene lineare sich hinstellen* (mit konstanten Koeffizienten).

Diesem Umstand hauptsächlich hat es der identische Kalkul zu verdanken, dass er so erheblich viel leichter zu beherrschen und zu handhaben ist, als die numerisch rechnende Mathematik für deren Ausdrücke und Funktionen eine so einfache typische Grundform nicht angebbar ist.

Die geschilderten Umformungen fanden nun aber sämtlich statt nach allgemein geltenden Theoremen oder Gesetzen des identischen Kalkuls, sodass die Gleichheit zwischen dem ursprünglichen Ausdruck $f(x)$ und dem so gewonnenen $ax + bx_1$ identisch bestehen muss für ganz beliebige, für alle erdenklichen Bedeutungen sämtlicher vorkommenden Buchstaben oder Gebietsymbole — wie denn schon für alle Zwischenstufen der Rechnung die Gleichung zwischen dem Ausdruck $f(x)$, und dessen successiven Transformationen nach dem Distributionsgesetze etc., stetsfort den Charakter einer allgemeinen Formel behielt.

Diese letzte Formel bleibt demnach auch richtig, falls man x durch 1 ersetzt, wobei $x_1 = 0$ zu setzen ist; desgleichen fährt sie fort gültig zu sein für $x = 0$, $x_1 = 1$. Indem man sie für diese speziellen Fälle in Anspruch nimmt, erkennt man aber dass:

$$f(1) = a, \qquad f(0) = b$$

ist und nach Einsetzung dieser Werte von a und b in jene letzte Formel wird unser Theorem bewiesen erscheinen.

Die Darstellung einer Funktion $f(x)$ nach dem Schema des Th. 44_+) wird die *„Entwickelung"* (development) dieser Funktion nach der Variabeln x genannt.

Durch solches Entwickeln wird die Funktion „linear" und „homogen" gemacht in Bezug auf x und x_1.

x und x_1 heissen die *„Konstituenten"* der Entwickelung, im Gegensatz zu den *„Koeffizienten"* $f(1)$ und $f(0)$ derselben.

Das Produkt der Konstituenten ist 0, ihre Summe ist 1, nach Th. 30), wogegen die Koeffizienten irgendwelche von einander unabhängig beliebige Werte haben mögen, wie schon die Annahme

$$f(x) = ax + bx_1$$

erkennen lässt.

Nach Boole[4] p. 72 und 73 Fussnote ist das Theorem 44_+) das Analogon des Taylor'schen Satzes in der Funktionenlehre der arithmetischen Analysis.

Die (in der Taylor'schen bekanntlich enthaltene) Mac-Laurin'sche Reihe:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots$$

geht in der That in unser Th. 44_+) über, sobald man annimmt, dass die Zahl x der Formel des Tautologiegesetzes $14_\times$):

$$xx = x \quad \text{oder} \quad x - xx = 0,$$

das heisst der Gleichung:

$$x(1 - x) = 0$$

genüge. Diese quadratische Gleichung hat aber im Gebiet der Zahlen nur die beiden Wurzeln 0 und 1, und wird demnach unter x dann eine dieser beiden Zahlen zu verstehen sein.

Für $x^2 = x$ ist aber auch $x^2 \cdot x = x \cdot x$ oder $x^3 = x^2$, somit auch $x^3 = x$, dann weiter $x^3 \cdot x = x \cdot x$ oder $x^4 = x$, etc., und vereinfacht darnach die obige Reihe sich zu:

$$f(x) = f(0) + x\left\{\frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \cdots\right\};$$

insbesondere gibt dies, für $x = 1$ in Anspruch genommen:

$$f(1) = f(0) + \left\{\frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \cdots\right\}$$

und wenn man aus diesen beiden Gleichungen die in der geschwungenen Klammer $\{\ \}$ stehende Reihe eliminirt, indem man ihren Wert aus der zweiten Gleichung entnimmt und in die erste einsetzt, so kommt:

$$f(x) = f(0) + x\{f(1) - f(0)\}$$

oder, anders geordnet:

$$f(x) = f(1) \cdot x + f(0) \cdot (1 - x).$$

Dies ist nun das Th. 44_+) selbst, in Anbetracht, dass wir beim Studium der inversen Operationen des identischen Kalkuls (§ 23) sehen werden, dass in der That $1 - x = x_1$ bedeutet.

Wenn also die (Mac-Laurin'sche) Reihenentwickelung einer Funktion $f(x)$ für die Werte 0 und 1 von x zulässig ist, so fällt sie mit unserm Theorem zusammen. —

Bemerkt sei noch, dass man die Gleichung $xx = x$ in der Arithmetik auch zusammenziehen könnte in $x(x - 1) = 0$, was im identischen Kalkul nicht angängig wäre, cf. § 23.

Wir wollen nun die verschiedenen Phasen der beim Beweise des Theorems 44) auszuführen gewesenen Operationen, die vorstehend abstrakt geschildert sind, durch einige konkrete Beispiele erläutern.

Natürlich bleibt es unbenommen, mit dem schematischen Verfahren auch noch anderweitige Vereinfachungen, die sich unterwegs anbringen lassen, zu verbinden.

Exempel. Sei $f(x) = [\{(ax + bx_1)_1 c + dx\}_1 ex_1]_1$.
Dann gibt die Ausführung der vorgeschriebenen Negationen:

$$f(x) = \{(ax + bx_1)_1 c + dx\} + e_1 + x = (a_1 + x_1)(b_1 + x)c + e_1 + x$$

indem der Term dx von dem x absorbirt wurde.

Durch Ausmultipliziren folgt hieraus:

$$f(x) = a_1 b_1 c + a_1 cx + b_1 cx_1 + e_1 + x = a_1 b_1 c + e_1 + b_1 cx_1 + x$$

wobei wieder zu Anfang der zweite Term in den letzten einging. Ferner kann man aber in der Summe $b_1 cx_1 + x$ nach Th. 33_+) Zusatz den Faktor x_1 unterdrücken und darnach wird auch in unserm

$$f(x) = a_1 b_1 c + e_1 + b_1 c + x$$

der erste Term vom vorletzten aufgesogen und bleibt:

$$f(x) = b_1 c + e_1 + x$$

was — am besten wieder nach dem soeben citirten Satze — homogen gemacht sein wird:

$$f(x) = x + (b_1 c + e_1)x_1.$$

In der That aber ist hier mit leichtester Mühe schon aus dem ursprünglichen Ausdrucke zu entnehmen, dass:

$$f(1) = [(a_1 c + d)_1 e \cdot 0]_1 = 0_1 = 1, \quad f(0) = [(b_1 c)_1 e]_1 = b_1 c + e_1$$

ist, womit also die Koeffizienten von x und x_1 richtig angegeben erscheinen.

Exempel. Bedeutet

$$f(x) = (ax + bx_1 + c)(dx + ex_1)gx,$$

so sind diesmal keine Negationen auszuführen. Durch einfaches Ausmultipliziren, wenn man sich unterwegs nicht die geringste Vereinfachung gestattet, ergäbe sich:

$$f(x) = adgxxx + aegxx_1x + bdgx_1xx + begx_1x_1x + cdgxx + cegx_1x.$$

Nach Th. 30_+) fallen nun aber die Terme alle fort, welche x_1 neben x zeigen. Bei den übrigen ist nach Th. $14_\times$) xx sowie xxx durch x allein zu ersetzen und ergibt sich schliesslich durch Vereinigung dieser (bezüglich x) gleichnamigen Terme $adgx + cdgx$ das Resultat:

$$f(x) = (a + c)dgx$$

und dieses wird durch das Th. 44) bestätigt, beziehungsweise noch rascher gewonnen, indem schon aus dem ursprünglichen Ausdrucke direkt sich ergibt:

$$f(1) = (a + c)dg, \quad f(0) = (b + c)e \cdot 0 = 0.$$

Exempel. Man entwickle, ohne Benutzung des Satzes, nach x die Funktion:

$$f(x) = (ax_1 + bx)(dx + ex_1)_1(gx + h)(k + lx_1)\{(mx)_1(nx_1)_1\}_1$$

und kontrollire dadurch den Satz.

Ausführung der Negationen gibt:

$$f(x) = (ax_1 + bx)(d_1 + x_1)(e_1 + x)(gx + h)(k + lx_1)(mx + nx_1).$$

Das Ausmultipliziren ohne jegliche Vereinfachung würde hier 64 Glieder geben. Lassen wir aber sogleich diejenigen fort, in welchen x und x_1 zusammentreffen, und multipliziren die Faktoren zunächst paarweise, den ersten mit dem letzten, etc. schreiben auch gleiche Faktoren nie wiederholt an, so entsteht:

$$f(x) = (anx_1 + bmx)(d_1e_1 + e_1x_1 + d_1x)(gkx + hk + hlx_1).$$

Der Term d_1e_1 (mit $x + x_1$ multiplizirt) wird hier von den beiden folgenden absorbirt, und kommt:

$$f(x) = (ane_1x_1 + bmd_1x)(hlx_1 + gkx + hk) =$$
$$= ane_1hlx_1 + ane_1hkx_1 + bmd_1gkx + bmd_1hkx,$$

also:

$$f(x) = bd_1(g + h)kmx + ae_1h(k + l)nx_1.$$

Mit viel geringerer Mühe erhält man aber dieses Resultat augenblicklich nach dem Th. 44_+), indem sich:

$$f(1) = bd_1(g + h)km, \qquad f(0) = ae_1h(k + l)n$$

schon aus dem ursprünglichen Ausdruck von $f(x)$ — bequemer allerdings nach ausgeführten Negationen — unmittelbar ergibt.

Übungsexempel. Man entwickele

$$f(x) = a(x + b_1) + b(a_1 + x_1),$$

so ergibt sich rein mechanisch, was wir früher § 18, λ) mittelst Kunstgriffen fanden: $f(x) = (a + b)(x + x_1) = a + b$.

Übungsaufgabe. Durch Entwickelung *nach* a zu zeigen, dass:

$$ab(c + d) + (a + b)cd = a(bc + bd + cd) + a_1bcd.$$

Bezeichnet man die linke Seite mit $f(a)$, so ergeben sich in Gestalt von $f(1)$ und $f(0)$ die rechts angeführten Koeffizienten von a und a_1.

Entwickelt man eine Funktion von der Form

$$f(x) = ax + bx_1$$

gemäss dem Th. 44) nach x, so erzeugt sich allemal der gleiche Ausdruck wieder, indem

$$f(1) = a, \qquad f(0) = b$$

sich erweist, d. h.: *Eine bezüglich eines Symbols homogene lineare Funktion ist immer schon nach diesem „entwickelt“.*

Durch das Th. 44_+) erscheint das Th. 42_+) von neuem bewiesen für alle Gebiete $y = f(x)$, die eines analytischen Ausdruckes im identischen Kalkul fähig sind, und erhält letzteres für diese dadurch einen präziseren Inhalt. —

Zusatz 1 zu Th. 44_+) (Boole).

Der Satz lässt von einer Funktion *eines* Argumentes sich leicht ausdehnen auf eine Funktion von zwei, drei, und beliebig vielen Argumenten.

Auch jede solche Funktion kann *nach* (allen) *ihren Argumenten* (zugleich) *„entwickelt“* werden nach den Schemata:

$$f(x, y) = f(1, 1)xy + f(1, 0)xy_1 + f(0, 1)x_1y + f(0, 0)x_1y_1,$$

$$f(x, y, z) =$$
$$= f(1, 1, 1)xyz + f(1, 1, 0)xyz_1 + f(1, 0, 1)xy_1z + f(1, 0, 0)xy_1z_1 +$$
$$+ f(0, 1, 1)x_1yz + f(0, 1, 0)x_1yz_1 + f(0, 0, 1)x_1y_1z + f(0, 0, 0)x_1y_1z_1,$$

und so weiter, und kann man für das Bildungsgesetz der Entwickelung mit Boole folgende Regel aufstellen.

Um die Entwickelung einer Funktion $f(x, y, \ldots)$ von beliebig vielen Argumenten nach ebendiesen zu erhalten, ersetze man in dem Ausdruck der Funktion sämtliche Argumente durch 1 und multiplizire das Ergebniss mit dem (geordneten) Produkt dieser Argumente. Dadurch bekommt man das Anfangsglied der gesuchten Entwickelung. In diesem ersetze man den letzten Faktor (des „Konstituenten“ oder Produkts der Argumente) durch seine Negation und zugleich das letzte Argument 1 (im „Koeffizienten“) durch 0, wodurch sich ein zweites Glied der Entwickelung ergibt. In diesen beiden Gliedern ersetze man hierauf den vorletzten Faktor ihres Konstituenten durch seine Negation, zugleich das vorletzte Argument ihres Koeffizienten (welches noch immer 1 geblieben sein wird) *durch 0, und erhält zwei weitere Glieder. In allen vier bisherigen Gliedern ersetze man den drittletzten Faktor durch seine Negation, zugleich das drittletzte Argument im Koeffizienten durch 0, wodurch sich vier weitere Glieder ergeben, und so weiter fort*, bis man jeden, auch den ersten, Konstituentenfaktor durch seine Negation, zugleich auch das erste Argument 1 jedes Koeffizienten durch 0 ersetzt hat.

Wenn im Funktionsausdruck, vielleicht neben einem Argumente, auch dessen Negation vorkommt, so muss diese selbstverständlich in 0 verwandelt werden, wenn man das Argument durch 1 ersetzt, und umgekehrt in 1, wenn man das Argument durch 0 ersetzt im Einklang mit einer schon früher statuirten Bemerkung.

Es wurde beim Formuliren der vorstehenden Regel bereits unterweges angedeutet, dass man den hier als ersten erhaltenen Faktor jedes Gliedes wieder als dessen *„Koeffizienten“*, das Produkt der nachfolgenden (Buchstaben-)Faktoren aber, welche Argumente oder Negationen von solchen sind, als seinen *„Konstituenten“* zu bezeichnen habe.

Behufs Beweises von diesem Zusatze betrachte man den Funktionsausdruck $f(x, y, z, \ldots)$ zuerst lediglich in seiner Abhängigkeit von x. Man entwickele ihn nach diesem einen Argument x gemäss dem Schema 44_+). Die Koeffizienten dieser Entwickelung werden dann nur noch als Funktionen von $y, z, \ldots$, hingegen konstant in Hinsicht auf x erscheinen, indem eben behufs ihrer Gewinnung dieses x durch 1 oder 0 ersetzt werden musste. Hierauf entwickle man jeden dieser Koeffizienten nunmehr nach y, abermals gemäss dem Schema 44_+), setze seinen Wert in den Ausdruck ein und multiplizire aus. Die neuen Koeffizienten werden dann nur noch als Funktionen von $z, \ldots$ dagegen als konstant bezüglich x und y erscheinen; sie können nach z entwickelt eingesetzt werden, und so weiter.

Es wird genügen, den angedeuteten Beweis nur für die Funktion $f(x, y)$ von *zwei* Argumenten wirklich auszuführen, da von diesem besonderen Falle des auszuführenden Beweises der allgemeinere sich nur quantitativ (durch grössere Häufung von Symbolen in den auch häufiger wiederholt zu machenden Ansätzen) unterscheidet. — Dort hat man zunächst:
$$f(x, y) = f(1, y)x + f(0, y)x_1,$$
und dann weiter:
$$f(1, y) = f(1, 1)y + f(1, 0)y_1, \qquad f(0, y) = f(0, 1)y + f(0, 0)y_1.$$

Die Einsetzung dieser Werte in den vorigen Ausdruck gibt nach Ausmultipliziren den zu beweisenden Satz, wie er sich oben angegeben findet. —

Die im obigen Zusatz gegebene Ausdehnung des Th. 44) auf Funktionen von mehr als *einem* Argumente ist zwar theoretisch interessant und wichtig, aber für die Technik des Kalkuls von geringem praktischen Werte, aus dem Grunde, weil man sich bei den vielen zum Teil gleichzeitig geforderten Einsetzungen von Werten 0 und 1 (je für ein Symbol und dessen Negation, oder umgekehrt) allzuleicht versieht, diese zahlreichen Substitutionen auch ermüdend und langweilig sind.

Sollte wirklich die Entwickelung einer gegebenen Funktion nach mehreren Argumenten angezeigt erscheinen, so schlägt man am besten den Weg ein, der uns zum Beweise dieses Zusatzes verholfen hat, d. h. man entwickelt immer nur nach *einem* Argument auf einmal und so nach diesen allen nur successive („fortschreitend", „hintereinander"), wobei man bei jeder Zwischenoperation schon auf möglichste Vereinfachung der Koeffizienten Bedacht nehmen wird.

Wir begnügen uns, hiezu nur ein Exempel zu geben. Sei nach x, y, z zu entwickeln:
$$f(x, y, z) =$$
$$(abxy + a_1b_1)(cd_1xz + c_1dy_1) + (a_1x_1 + b_1y + c_1z + d)(yz + d_1y_1z_1),$$
so entwickelt man am besten zuerst nach y als demjenigen Symbole, welches am häufigsten in dem Ausdrucke vorkommt — sodass durch Einsetzung der Spezialwerte 0, 1 für y oder y_1 die beträchtlichsten Reduktionen des letzteren in Aussicht stehen. Es entsteht:
$$f(x, 1, z) = (ab + a_1b_1)\,cd_1xz + (a_1x_1 + b_1 + c_1 + d)\,z, \quad (= \text{etc.})$$
$$f(x, 0, z) = a_1b_1(cd_1xz + c_1d) + a_1x_1d_1z_1.$$

Und hieraus leiten wir ab, wie wenn wir nach z entwickeln wollten:
$$f(x, 1, 1) = ax + a_1x_1 + b_1 + c_1 + d, \qquad f(x, 1, 0) = 0,$$
$$f(x, 0, 1) = a_1b_1(cd_1x + c_1d), \qquad f(x, 0, 0) = a_1b_1c_1d + a_1d_1x_1,$$
woraus endlich, der Entwickelung nach x entsprechend:
$$f(1,1,1) = a + b_1 + c_1 + d, \qquad f(1,1,0) = 0,$$
$$f(1,0,1) = a_1b_1(cd_1 + c_1d), \qquad f(1,0,0) = a_1b_1c_1d,$$
$$f(0,1,1) = a_1 + b_1 + c_1 + d, \qquad f(0,1,0) = 0,$$
$$f(0,0,1) = a_1b_1c_1d, \qquad f(0,0,0) = a_1(b_1c_1 + d_1).$$
Damit ist denn gefunden:
$$f(x, y, z) = (a + b_1 + c_1 + d)\,xyz + a_1b_1(cd_1 + c_1d)\,xy_1z + a_1b_1c_1d\,xy_1z_1 +$$
$$+ (a_1 + b_1 + c_1 + d)\,x_1yz + a_1b_1c_1d\,x_1y_1z + a_1(b_1c_1 + d_1)\,x_1y_1z_1$$
als die gesuchte Entwickelung.

Das Resultat ist das nämliche, ob man erst nach x entwickelt und dann weiter nach y, oder ob man es erst nach y und dann nach x thut, oder endlich nach beiden zugleich.

Auch stimmt eine Entwickelung nach dem Argumentenpaare x, y und dem Argument z überein mit derjenigen nach dem Argument x und dem Argumentenpaare y, z; sie ist zugleich die Entwickelung nach dem Argumentetripel x, y, z. Man sieht:

Das Entwickeln einer Funktion ist in Hinsicht auf deren Argumente eine kommutative und zugleich assoziative Operation. Reihenfolge und Gruppirung der Argumente, nach denen einzeln oder in Gruppen entwickelt wird, sind dabei nebensächlich; die ganze Anordnung des Entwickelungsprozesses steht in unserm Belieben. Woferne nur allemal ausmultiplizirt wird ist die nach der Gesamtheit der Argumente entwickelte Funktion zugleich entwickelt nach jedem einzelnen dieser Argumente und nach jeder Gruppe von solchen und umgekehrt — abgesehen natürlich von der Anordnung der resultirenden Glieder und der Reihenfolge der zu den Konstituenten derselben zusammentretenden Faktoren, welche Momente ja aber ohne Einfluss auf den Wert des Ergebnisses sind.

Dies alles wird nebenher bei der Durchführung des obigen Beweises ersichtlich und könnte leicht noch näher dargelegt werden. Hinsichtlich z zum Beispiel erscheint. die nach x, y, z entwickelte Funktion in der That *gesondert* in Glieder, welche z selbst und solche, welche z_1 enthalten. Die Glieder von beiderlei Art sind leicht aus dem Gesamtausdruck herauszulesen, wenn sie auch nicht (durchaus) beisammen stehen. Analog bezüglich des y sowie des x. Etc.

Zusatz 2 zu Th. 44_+) (Boole).

Alle Konstituenten der Entwickelung einer Funktion sind zu einander disjunkt, geben nämlich zu irgend zweien multiplizirt das Produkt 0, indem sie sich jedenfalls dadurch von einander unterscheiden müssen, dass mindestens ein Faktor des einen Konstituenten im andern durch seine Negation vertreten erscheint, wonach also das Th. $30_\times$) anwendbar wird.

So ist bei zwei Argumenten in der That:

$$xy \cdot xy_1 = 0, \qquad xy \cdot x_1y = 0, \qquad xy \cdot x_1y_1 = 0,$$
$$xy_1 \cdot x_1y = 0, \qquad xy_1 \cdot x_1y_1 = 0, \qquad x_1y \cdot x_1y_1 = 0.$$

Etc. Es wäre nicht uninteressant, doch etwas umständlich, das allgemeine Zutreffen dieser aus dem Bisherigen schon einleuchtenden Thatsache mittelst zwingender Schlüsse genauer darzulegen.

Ebenso gilt:

Die Summe aller Konstituenten ist stets gleich 1 — eine Aussage, die bei *einem* Argumente mit Th. 30_+), bei zwei Argumenten mit dem Th. 34_+) zusammenfällt (für a, b dort x, y gesagt). Bei dreien haben wir:

$$xyz + xyz_1 + xy_1z + xy_1z_1 + x_1yz + x_1yz_1 + x_1y_1z + x_1y_1z_1 = 1$$

Etc. Jene Konstituenten sind nämlich (allgemein) gerade die Glieder des ausmultiplizirten Produktes — cf. Th. 30_+):

$$1 = (x + x_1)(y + y_1)(z + z_1) \cdots,$$

welches als die Entwickelung der konstanten Funktion 1 nach x, y, $z, \cdots$ anzusehen sein wird.

Hat die Funktion n Argumente, so ist die Anzahl ihrer Konstituenten, somit auch der Glieder ihrer vollständig angeschriebenen Entwickelung gleich der n^{ten} Potenz von 2, gleich 2^n. Diese Anzahl ist also 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\cdots$ bei 1, 2, 3, 4, 5, 6, $\cdots$ Argumenten.

Anmerkung 1 zu Th. 44_+).

Das duale Gegenstück zu diesem Theorem:

$44_\times$) Th. $$f(x) = \{f(0) + x\}\{f(1) + x_1\}$$

möge hier wenigstens einmal Erwähnung finden; erstmalig ist dasselbe von Herrn Peirce ausgesprochen.

Durch Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem vom andern, Th. 44_+) gelieferten, ergibt sich nach ihm die interessante Formel:

$$\{f(0) + x\} \cdot \{f(1) + x_1\} = f(1) \cdot x + f(0) \cdot x_1.$$

Dieselbe würde als „zu sich selbst dual" zu bezeichnen sein, wenn man nur berechtigt wäre die Funktion $f(x)$ sich selber dual entsprechend zu nennen.

Ersetzt man $f(1)$ durch a und $f(0)$ durch b, wo dann a und b als *allgemeine* Gebiete werden aufgefasst werden dürfen, so erhält man jene Formel:

$$(a + x_1)(b + x) = ax + bx_1$$

von Peirce, die wir schon unter $\varkappa$) des § 18 betrachtet haben. —

Gleichwie das Th. 44_+) in eventuell wiederholter Anwendung benutzt werden konnte, um eine Funktion $f(x, y, z, \cdots)$ nach ihren Argumenten in eine Summe zu entwickeln, so kann dies auch mit Th. $44_\times$) geschehen behufs Entwickelung ebendieser Funktion in Gestalt eines Produktes. Diese letztere wird dann das duale Gegenstück der vorigen Entwickelung sein. Z. B. bei zwei Argumenten wird:

$$f(x, y) = \{f(0,0) + x + y\}\{f(0,1) + x + y_1\}\{f(1,0) + x_1 + y\}\{f(1,1) + x_1 + y_1\}.$$

Etc. Jene *erstere* Entwickelung war nach dem mathematischen Sprachgebrauch zu bezeichnen als (ein) *homogen*(er Ausdruck) in Hinsicht jedes einzelnen sowol, als jeder Gruppe, als auch der Gesamtheit der „Argumentsymbole" (falls in diese wir auch die Negationen der Argumente mit einrechnen); sie war nämlich dadurch gekennzeichnet, dass in jedem Gliede immer *gleichviele* der betreffenden Symbole als Faktoren stehen. (Dabei ist jeder Argumentbuchstabe auch vertreten.)

Analog erscheint diese *letztere* Entwickelung in einer eigentümlichen, *der homogenen dual entsprechenden* Form, die sich dadurch kennzeichnet, dass jeder Faktor der Zerfällung immer von genannten Argumentsymbolen gleich viele als Summanden enthält (so zwar, dass in jedem Faktor auch jeder Argumentbuchstabe entweder in Gestalt des Argumentes selbst oder in Gestalt von dessen Negation als Glied vertreten ist, und dies im Ganzen auf jede mögliche Weise).

Lässt man *alle* in einem Ausdruck f überhaupt vorkommenden Buchstabensymbole als „Argumente" gelten, und entwickelt nach diesen gemäss Th. 44_+), so wird man eine Zerlegung jenes Ausdrucks f in seine „*letzten* Aggreganten" erhalten — in dem schon § 13 zu Th. 28) erörterten Sinne, jedoch in der Regel wol mit dem Unterschiede (vom Ergebniss der dort beschriebenen Prozesse), dass jetzt von den nach Th. 30_+) möglichen Zusammenziehungen von Gliedern, und dem Eingehenlassen überflüssiger Faktoren solcher, kein Gebrauch gemacht ist.

Analog kann man auch das Th. $44_\times$) benutzen, um die Zerfällung irgend eines Ausdrucks in seine *„letzten* oder Prim-Faktoren" zu bewerkstelligen.

Anmerkung 2 zu Th. 44). Als Folgerungen fliessen aus diesem Theorem durch beiderseitiges Multipliziren mit x resp. x_1 die Sätze Mc Coll's:

$$xf(x) = xf(1) \quad \text{und} \quad x_1 f(x) = x_1 f(0)$$

und macht derselbe darauf aufmerksam, dass durch Anwendung dieser Schemata manche Rechnungen sich sehr vereinfachen lassen.

Hatten wir z. B. in § 18 unter β_1) auszurechnen: $ab_1(a_1b+a_1c_1+b_1c_1)_1$, so kann dies so geschehen, dass man den Faktor hinter ab_1 als eine Funktion $f(a)$ von a, oder aber als eine solche $F(b)$ von b betrachtet; darnach ergibt sich nach dem ersten resp. zweiten Schema das Ganze gleich

$$ab_1(0+0+b_1c_1)_1 = ab_1(b+c) = ab_1c,$$

resp.

$$ab_1(0+a_1c_1+c_1)_1 = ab_1(c_1)_1 = ab_1c.$$

Und dergleichen mehr.

Sind Ausdrücke, *an* oder *mit* welchen eine Rechnungsoperation des identischen Kalkuls vorzunehmen ist, nach bestimmten resp. den nämlichen Argumenten „entwickelt" — und man vermag ja jeden Ausdruck nach gegebenen Argumenten entwickelt darzustellen — so lassen die Rechnungsregeln ganz ausserordentliche Vereinfachungen zu, von welchen jetzt Kenntniss zu nehmen ist: wir haben mit *entwickelten* Funktionen nun rechnen zu lernen.

Vorbemerkung zu Th. 45_+).

Schon nach dem Distributionsgesetze allein ist die *Summe* von nach $x, y, \cdots$ entwickelten Funktionen [ganz ähnlich, wie in der Arithmetik die von Potenzreihen] zu bilden mittelst *additiver Vereinigung der Koeffizienten aller gleichnamigen Glieder* — wobei wir *„gleichnamig"* jetzt solche Glieder zu nennen haben, welche denselben Konstituenten als Faktor enthalten, sich also höchstens durch ihren Koeffizienten unterscheiden.

So sind z. B. axy_1z und bxy_1z zwei gleichnamige Terme in Hinsicht auf die Argumente x, y, z.

In der That haben wir ohne weiteres:

$$(ax+bx_1)+(a'x+b'x_1) = ax+a'x+bx_1+b'x_1 = (a+a')\,x+(b+b')\,x_1,$$

$$(ax_1+bx)+(cx_1+dx)+(ex_1+fx) = (a+c+e)\,x_1+(b+d+f)\,x,$$

$$(axy+bxy_1+cx_1y+dx_1y_1)+(a'xy+b'xy_1+c'x_1y+d'x_1y_1) =$$
$$= (a+a')\,xy+(b+b')\,xy_1+(c+c')\,x_1y+(d+d')\,x_1y_1,$$

und so fort. Die Summe von Funktionen, welche nach gewissen für

sie alle gemeinsamen Argumenten entwickelt sind, wird hienach ebenfalls wieder nach diesen entwickelt erhalten, und bedarf die vorstehende Regel für den auch nur mit den ersten Elementen der Buchstabenrechnung Vertrauten keiner besonderen Betonung; sie versteht sich ohnehin. Aber auch:

45_+) Theorem. *Um das Produkt von Funktionen „auszurechnen", welche nach denselben Argumenten entwickelt* und geordnet *sind, braucht man nur die Koeffizienten der gleichnamigen* resp. gleichstelligen *Glieder miteinander zu multipliziren* und hinter deren Produkte die ihnen gemeinsamen Konstituenten zu setzen. Auf diese Weise erhält man das Produkt wieder nach ebendiesen Argumenten entwickelt.

Man hat so gewissermassen nur eine *Superposition*, ein *Übereinanderschieben* mit den die Entwickelungen darstellenden Polynomen vorzunehmen, dergestalt, dass die ohnehin übereinstimmenden Konstituenten der gleichstelligen Glieder zur Deckung kommen, ihre Koeffizienten aber zu neuen Koeffizienten zusammentreten, indem sie sich multiplikativ verbunden nebeneinanderstellen.

In der That ist:

$$(ax+bx_1)(a'x+b'x_1) = aa'x+bb'x_1,$$

$$(ax_1+bx)(cx_1+dx)(ex_1+fx) = acex_1+bdfx,$$

$$(axy+bxy_1+cx_1y+dx_1y_1)(a'xy+b'xy_1+c'x_1y+d'x_1y_1) =$$
$$= aa'xy+bb'xy_1+cc'x_1y+dd'x_1y_1,$$

etc. Beweis durch (mentales) Ausmultipliziren nach der Multiplikationsregel für Polynome Th. $28_\times$) mit Rücksicht auf den Zusatz 2 zu Th. 44_+):

Indem hier jedes Glied des einen Polynoms oder entwickelten Ausdrucks mit jedem Glied des andern im Geiste zusammengebracht wird, verschwinden alle diejenigen Einzelprodukte, deren Faktoren *verschiedene* Konstituenten enthalten, in Anbetracht, dass ja letztere disjunkt sind — m. a. W. ungleichnamige Glieder aus dem einen und dem andern Polynom entnommen, geben allemal Null zum Produkte. Von Einfluss auf den Wert des Ergebnisses können nur diejenigen Einzelprodukte bleiben, welche gleichnamige Glieder aus dem einen und dem andern Polynom zusammenfassen. In dem Produkt solcher wird aber der in beiden übereinstimmende Konstituent nicht wiederholt als Faktor zu erwähnen, sondern nach dem Tautologiegesetze $14_\times$) nur *ein*mal als Faktor anzuschreiben sein, q. e. d.

Von zweien ist der Satz äusserst leicht auch auf beliebig viele multiplikativ zu verknüpfende Polynome auszudehnen.

Das Theorem ist bereits von Boole gegeben; es bewirkt dass multiplikative Prozesse sich im identischen Kalkul oft ausserordentlich viel bequemer, als in der Arithmetik gestalten.

Zusatz zu Th. 45_+).

Das Theorem ist noch einer naheliegenden Erweiterung fähig, nach welcher überhaupt das Ausmultipliziren von *gleichvielgliedrigen* Aggregaten oft sich vereinfachen wird (auch wenn diese Aggregate *nicht* aus „Entwickelung" nach gewissen Argumenten hervorgegangen). Zur Herstellung des Produktes zweier solchen Aggregate *genügt die multiplikative Verknüpfung ihrer gleichstelligen Glieder*, sobald bekannt ist, dass die Glieder des einen Aggregates *disjunkt* sind mit den *ungleichstelligen* Gliedern des andern — was dann immer auch umgekehrt der Fall sein wird. So muss z. B. sein:

$$(a+b+c)(a'+b'+c') = aa'+bb'+cc',$$

sobald $ab'=0,\ ac'=0,\ ba'=0,\ bc'=0,\ ca'=0,\ cb'=0$ ist. —

46_+) Theorem.

Auch *die Negation einer* nach irgendwelchen Symbolen *entwickelten Funktion wird* nach ebendiesen entwickelt *erhalten, indem man* einfach *die Koeffizienten* des Ausdrucks *negirt*, die Konstituenten aber unverändert lässt; es ist:

$$(ax+bx_1)_1 = a_1x+b_1x_1,$$

$$(axy+bxy_1+cx_1y+dx_1y_1)_1 = a_1xy+b_1xy_1+c_1x_1y+d_1x_1y_1,$$

etc. Beweis 1. Bezeichnet f den Inhalt der Klammer links, das ist eben die zu negirende Funktion, den Neganden, und f' die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung, sonach die *angebliche* Negation von f, so ist blos zu zeigen, dass

$$f'=f_1$$

d. h. die angebliche Negation in der That die wirkliche ist. Auf Grund der Theoreme 30), wonach ja:

$$ff_1=0 \quad \text{und} \quad f+f_1=1$$

sein muss, wird dies aber nach dem Hülfstheorem 29) geleistet sein, sobald wir darthun, dass auch:

$$ff'=0 \quad \text{und} \quad f+f'=1$$

ist. Beides folgt nun in der That durch Ausführung dieser Multiplikation und Addition gemäss Th. 45_+), indem bei f und f' die Produkte der gleichstelligen Koeffizienten a, a_1; b, b_1; etc. durchweg verschwinden, ihre Summen gleich 1 werden — konform den Theoremen 30), wobei zuletzt Zusatz 2 zu Th. 44_+) in Wirksamkeit tritt.

Der vorstehende Beweis lief mehr auf eine Probe der Richtigkeit, eine Verifikation des Satzes hinaus. Der folgende Beweis ist mehr „heuristisch", lässt auch erkennen, auf welchem Wege der Satz leicht zu entdecken war.

Beweis 2. Nach Th. 36) ist — zunächst bei *einem* Argumente:

$$(ax+bx_1)_1 = (ax)_1 (bx_1)_1 = (a_1+x_1)(b_1+x) = xa_1+a_1b_1+b_1x_1 = a_1x+b_1x_1$$

wie nach dem Th. § 18, ι) oder $\varkappa$), oder endlich durch völlige Entwickelung des vorletzten Ausdrucks nach x gemäss Th. 44_+) unter Berücksichtigung des Absorptionsgesetzes einzusehen.

Nachdem so für *ein* Argument der Satz gewonnen ist, lässt er sich für zwei Argumente hieraus ableiten, wie folgt:

$$(axy+bxy_1+cx_1y+dx_1y_1)_1 = \{(ay+by_1)x+(cy+dy_1)x_1\}_1 =$$
$$= (ay+by_1)_1 x+(cy+dy_1)_1 x_1 = (a_1y+b_1y_1)x+(c_1y+d_1y_1)x_1 =$$
$$= a_1xy+b_1xy_1+c_1x_1y+d_1x_1y_1.$$

In derselben Weise fortschreitend wird der Satz für immer ein Argument mehr gewonnen [und allgemein für $n+1$ Argumente auf den vorher erledigten Fall von n Argumenten zurückgeführt].

Das Th. 46_+) gestaltet auch das Negiren der Funktionen zu einer bequemen Operation, sobald solche nur „entwickelt" worden.

Von manchen in meinem Operationskreis[2] gegebenen Sätzen, die ich später durch Herrn Peirce antizipirt, vorweggenommen fand, ist mir wenigstens dieses Theorem geblieben.

Exempel. $(ax+bx_1+c)_1 = (a_1x+b_1x_1)c_1 = a_1c_1x+b_1c_1x_1$.

Exempel. Nach unserm Satze kann nun die Negation von ab_1+a_1b auf drei Arten hergestellt werden. Der Ausdruck ist nämlich entwickelt sowol nach a für sich, als auch nach b allein, als auch nach a und b zusammen. Im Hinblick auf ersteres bekommt man die Koeffizienten b_1 und b zu negiren, während man die Konstituenten a und a_1 stehen zu lassen hat; es entsteht: $(ab_1+a_1b)_1 = ab+a_1b_1$.
In der zweiten Hinsicht muss man die a und a_1 als die Koeffizienten gelten lassen, diese negiren, und b_1, b als Konstituenten unverändert lassen, wodurch a_1b_1+ab somit das gleiche Resultat entsteht.
In der dritten Hinsicht werden in:

$$ab_1+a_1b = 0\cdot ab+1\cdot ab_1+1\cdot a_1b+0\cdot a_1b_1$$

die Koeffizienten 0, 1, 1, 0 zu negiren sein, wodurch sich

$$(ab_1+a_1b)_1 = 1\cdot ab+0\cdot ab_1+0\cdot a_1b+1\cdot a_1b_1$$

also wiederum das alte Resultat ergibt.

Die letzte Betrachtung zeigt, dass *bei der Anwendung des Satzes eine Fehlerquelle verfänglich* ist: *man darf die etwa fehlenden Glieder*

der Entwickelung nicht übersehen, da deren Nullkoeffizienten beim Negiren sich in 1 zu verwandeln haben; m. a. W. man muss die Entwickelung jeweils als eine *vollständige* dargestellt der Anwendung des Satzes zugrunde legen, jeden einzelnen Konstituenten berücksichtigen, wenn er auch, weil in 0 multiplizirt, in dem Ausdruck nicht zu erblicken war.

Thäten wir dies nicht, so erhielten wir ja aus $ab_1 + a_1 b = 1 \cdot ab_1 + 1 \cdot a_1 b$ durch Negiren der Koeffizienten fälschlich $0 \cdot ab_1 + 0 \cdot a_1 b = 0$ als die gesuchte Negation.

Ebenso ist die Klippe zu vermeiden, dass man das Th. $46_\times$) *nicht* etwa *anwende bevor* die (nach den Konstituenten) gleichnamigen Glieder *vereinigt* sind.

So ist z. B. $(a_1 x + ax_1 + b_1 x_1)_1$ nicht $=$

$= ax + a_1 x_1 + bx_1 = ax + (a_1 + b)\, x_1$, sondern $= ax + (a + b_1)_1\, x_1 = ax + a_1 b x_1$.

Im Hinblick auf die letzten Sätze: Th. 45) nebst Vorbemerkung und Th. 46), kann man zusammenfassend sagen, dass jede an oder mit Funktionen auszuführen vorgeschriebene Operation des identischen Kalkuls sich als die gleiche Vorschrift *überträgt auf die Koeffizienten* von deren Entwickelung. —

Noch sei bemerkt, dass die Negation einer Funktion $f(x)$ in Gestalt von $\{f(x)\}_1$ unbequem zu schreiben ist. Um ein handlicheres Zeichen dafür zu erhalten, mag man definiren:

$$f_1(x) = \{f(x)\}_1, \quad \text{und ähnlich} \quad f_1(x, y) = \{f(x, y)\}_1$$

etc. Darnach wird uns auch bedeuten:

$$f_1(0) = \{f(0)\}_1 \quad \text{und} \quad f_1(1) = \{f(1)\}_1. \text{ —}$$

Es ist zu wünschen, dass man im stande sei jeweils rasch die verschiedenen Werte zu übersehen, deren eine gegebene Funktion des identischen Kalkuls „fähig“ ist, welche sie nämlich dadurch zugeteilt erhalten kann, dass man den Argumenten irgendwelche Wertsysteme beilegt.

Um die angeregte Frage über die „Variabilität“ irgend einer Funktion zu beantworten, schicken wir eine kurze Betrachtung voraus über „*Mittel*“ oder „*Zwischenwerte*“.

Definition. Ein Gebiet x ist ein „mittlerer“ Wert oder „*Zwischenwert*“ („Mittel“) *von a und b* zu nennen, es ist zu sagen: „*x liege zwischen a und b*“, wenn

$$a \subseteq x \quad \text{und zugleich} \quad x \subseteq b$$

ist. Da hieraus: $a \subseteq b$ nach Prinzip II folgt, so ist ersichtlich, dass

von einem „*Mittelwerte*“ nur gesprochen werden kann bei solchen zwei Gebieten, zwischen welchen die Beziehung der Einordnung, Subsumtion besteht, von denen das eine im andern enthalten ist. Dies ist stets vorauszusetzen — oder es wird mit behauptet — sobald wir die Redensart gebrauchen.

Sobald $a \subseteq b$ ist gibt es immer Mittelwerte (mindestens *einen* solchen) zwischen a und b; nach Prinzip I und der Voraussetzung ist nämlich $x = a$ sowol als $x = b$ alsdann ein solcher. Es kann darnach irgend ein Gebiet a als ein Mittelwert zwischen ihm und sich selber hingestellt werden — wie bei der durch die Voraussetzung $a \subseteq b$ mit zugelassenen Annahme $b = a$ zu sehen ist.

Wir gehen nun darauf aus, die allgemeine Form der zwischen a und b liegenden Gebiete, falls es solche gibt, zu finden.

Hier haben wir zunächst das kleine

Hülfstheorem zu Th. 47_+). *Wenn x zwischen a und b liegt, so ist stets:*

$$ax_1 + bx = x,$$

und umgekehrt.

Beweis. Ist x zwischen a und b gelegen, so gilt nach der gegebenen Definition und Th. $38_\times$):

$$ax_1 = 0 \quad \text{und} \quad b_1 x = 0.$$

Ersetzen wir darnach in dem Ausdrucke $ax_1 + bx$ das ax_1 durch 0 und dieses durch $b_1 x$, so wird derselbe:

$$ax_1 + bx = b_1 x + bx = (b_1 + b)\, x = 1 \cdot x = x$$

wie einerseits zu zeigen gewesen.

Ist andrerseits $ax_1 + bx = x$, so können wir diese Gleichung mit x_1 beiderseits multiplizieren („durchmultiplizieren“) und erhalten: $ax_1 = 0$ oder $a \subseteq x$ — cf. Th. $38_\times$). Darnach vereinfacht sich aber die Gleichung zu: $bx = x$, was nach Th. $20_\times$) äquivalent ist: $x \subseteq b$. Damit ist also gezeigt dass $a \subseteq x$ und $x \subseteq b$, somit auch $a \subseteq b$ sein muss, d. h. dass in der That x zwischen a und b liegt.

Man könnte dem Satze auch die einfachere Form geben: *Liegt x zwischen a und b, so ist*

$$a + bx = x,$$

in Anbetracht, dass wegen $a \subseteq b$ nach Th. 20_+) $b = a + b$ sein muss. Setzt man in der That diesen Wert für b in den früheren Ausdruck ein, so wird derselbe: $ax_1 + bx = ax_1 + (a + b)\, x = a\,(x_1 + x) + bx = a + bx$.

In dieser vereinfachten Gestalt ist aber der Satz nicht rein umkehrbar, wie in der früheren, vielmehr kann sehr wohl $a + bx = x$ sein, ohne dass doch $a \subseteq x \subseteq b$, ohne dass überhaupt $a \subseteq b$ ist. Bei beliebigem a und b

lässt dies die Annahme $x = a + bw$ erkennen, in welcher auch w ein arbiträres Gebiet vorstellt; denn diese Annahme genügt in der That, wie leicht zu proben, der Forderung $\bar{a} + bx = x$ — und nebenbei gesagt, wie sich mittelst Th. 50_+) zeigen lassen würde, auch auf die allgemeinste Weise.

Der vereinfachte Satz würde nur so sich umkehren lassen: *Wenn* $a + bx = x$ *und zugleich* $a \Subset b$ *ist, so muss* x *zwischen* a *und* b *liegen.* In der That kommt dann die Voraussetzung, wie so eben gezeigt, auf die des früheren (umgekehrten) Satzes: $ax_1 + bx = x$ hinaus.

Nunmehr beantwortet die aufgeworfene Frage der Satz:

47_+) Theorem. *Stellt w ein arbiträres Gebiet vor, so ist:*

$$x = aw_1 + bw$$

die allgemeine Form aller zwischen a und b liegenden Gebiete — sobald überhaupt zwischen a und b Gebiete liegen können, d. h. $a \Subset b$ ist.

Beweis. Ist irgend ein x zwischen a und b gelegen, so sind immer Werte für w angebbar derart, dass unsre Formel gerade dieses x vorstellt. Ein solcher Wert von w ist sicher x selber, indem für $w = x$ in der That $ax_1 + bx = x$ nach dem vorigen Hülfssatze sein wird.

Umgekehrt muss bei beliebig angenommenem w der Ausdruck $aw_1 + bw$ immer zwischen a und b liegen, sobald nur $a \Subset b$ ist.

Da nämlich dann $b = a + b$ ist, so haben wir ähnlich wie oben:

$$aw_1 + bw = aw_1 + (a + b)\,w = a + bw$$

und folgt erstens $a \Subset a + bw$ nach Th. 6_+), und zweitens, wegen $bw \Subset b$ — cf. Th. $6_\times$) — auch $a + bw \Subset a + b$, d. h. $a + bw \Subset b$. Es ist also $a + bw$ oder $aw_1 + bw$ oder x dann zwischen a und b gelegen, q. e. d.

Im Einklang mit der Anschauung wird also der Ausdruck:

$$x = a + wb$$

uns jeden zwischen a und b liegenden Wert vorstellen und nur solche Werte, sobald nämlich von solchen überhaupt zu sprechen, nämlich $a \Subset b$ oder $a + b = b$ ist.

Der *Mindestbetrag* oder „minimale" Wert des x ist der für $w = 0$ sich ergebende Wert a selber, sein *Höchstbetrag* oder „maximaler" Wert der für $w = 1$ sich ergebende Wert b. Und alle dazwischen liegenden Werte überhaupt erhält man, indem man in einer der beiden obigen Gleichungen *w von 0 bis 1 variiren* lässt — das heisst, im identischen Kalkul: indem man w alle denkbaren Gebiete unsrer Mannigfaltigkeit vom gänzlich leeren bis zur vollen Tafelfläche als Bedeutung nach einander annehmen, oder wie man sagt „durchlaufen" lässt.

Der Vorgang dieses Durchlaufens ist hier nicht so einfach, wie in der Arithmetik etwa das Durchlaufen der reellen Zahlen von 0 bis 1, die daselbst ja eine bestimmte Reihenfolge haben.

Zunächst unterscheiden sich nur solche Werte von

$$x = a + wb = a + wa_1b$$

— cf. Th. 33_+) Zusatz — bei denen der Term wa_1b verschieden ausfällt. Es kommt nur auf die ausserhalb a zugleich aber innerhalb b liegenden Gebietsteile von w an, wogegen es gleichgültig ist, wie man die innerhalb a oder ausserhalb b fallenden Teile von w festlegt, welche Punkte von a sowie von b_1 man zu w rechnet oder nicht rechnet.

Wenn w den Wert 0 verlässt, so erhalten wir demnach die nächsten Bedeutungen von x, wenn wir w nur *einen* Punkt des Gebietes a_1b bedeuten lassen, aber *jeden,* einzeln genommen, successive. Hernach werden wir dem w die Bedeutung jedes denkbaren Punktepaares, Punktetripels, Quadrupels etc. von innerhalb des Gebietes a_1b unterzulegen haben. Es folgen Punktmengen aus unendlich vielen diskreten Punkten von a_1b, die sich in der Nähe einer oder mehrerer Stellen unendlich dicht häufen, dann solche, die längs eines Linienstücks überall dicht sind, solche Punktmengen, die ein Linienstück stetig ausfüllen, dieses wieder kombinirt mit allen früheren Punkten, Punktmengen, etc. dasselbe verlängert oder dazu ein zweites genommen, und so weiter, dann folgen Flächengebiete aus a_1b herausgegriffen, dann auch mit früherem kombinirt, etc. Zuletzt die ganze Fläche a_1b ohne irgend ein Punktetripel, ohne ein gewisses Punktepaar, ohne einen einzelnen Punkt dieser Fläche auf jede denkbare Weise gebildet, zu allerletzt diese Fläche a_1b voll genommen — immerfort mit beliebiger Besetzung der ausserhalb a_1b liegenden (dem Gebiete $a + b_1$ angehörigen) Punkte.

Insbesondre fliesst aus Th. 47) jetzt auch das Th. $43_\times$), indem, wenn $a \Subset b$ ist, auch $0 \Subset a \Subset b$, mithin a ein Zwischenwert zwischen 0 und b zu nennen sein wird. Derselbe kann hienach durch $0 + wb$, also wb dargestellt werden, und umgekehrt stellt $a = wb$ stets einen solchen vor.

Nach diesen Vorbetrachtungen wird der Satz verständlich sein:

48_+) Theorem.
Eine Funktion im identischen Kalkul liegt immer zwischen dem Produkte und der Summe der Koeffizienten ihrer Entwickelung, und zwar ist sie fähig, *jeden* zwischen diesen beiden Grenzen liegenden Wert (mit Einschluss ebendieser Grenzen) auch wirklich anzunehmen dadurch, dass man für ihre Argumente geeignete Werte wählt.

Beweis — zunächst für *ein* Argument. Sei

$$f = ax + bx_1,$$

so berechnet sich:

$$f \cdot ab = ab \quad \text{und} \quad (a + b) \cdot f = f,$$

daher ist nach Th. $20_\times$):

$$ab \subseteq f \quad \text{und} \quad f \subseteq a+b,$$

somit f in der That zwischen ab und $a+b$ gelegen.

Ebenso leicht wäre dies auch mittelst $ab+f=f$ und $f+(a+b)=a+b$ zu zeigen gewesen. Desgleichen ganz direkt: Es ist nach $6_\times$) $ax \subseteq a$, $bx_1 \subseteq b$, woraus durch überschiebendes Addiren folgt: $f \subseteq a+b$. Und ferner ist: $f=(a+ab)\,x+(ab+b)\,x_1=xa+ab+bx_1$, sonach kraft 6_+): $ab \subseteq f$.

Daher muss nach Th. 47) nun f sich darstellen lassen in der Form:

$$f = abw_1 + (a+b)\,w.$$

Damit aber diese Gleichung, d. h.

$$ax+bx_1 = ab + w\,(a+b),$$

zu einer richtigen Identität werde, kann man zu jedem gegebenen x ein w angeben, und zu jedem gegebenen w ein x, das sie erfüllt. Für ersteres genügt die Annahme:

$$w = ax + bx_1,$$

für letzteres die Annahme:

$$x = a_1bw_1 + ab_1w,$$

wie man leicht nachrechnet.

In der That ist also f zwischen $a \cdot b$ und $a+b$ auch *jedes* Zwischenwertes fähig, und zwar wird der Ausdruck $ax+bx_1$ einen *gegebenen* Wert f, für den nur

$$ab \subseteq f \subseteq a+b$$

ist, annehmen, indem man

$$x = a_1bf_1 + ab_1f, \quad \text{somit} \quad x_1 = (a+b_1)\,f_1 + (a_1+b)\,f$$

nimmt, da nach dem Hülfstheorem zu 47_+) dann sein wird:

$$abf_1 + (a+b)\,f = f.$$

Beweis für *zwei* Argumente. Sei

$$f = axy + bxy_1 + cx_1y + dx_1y_1,$$

so sieht man, dass

$$abcd \cdot f = abcd \quad \text{und} \quad (a+b+c+d)+f = a+b+c+d$$

ist. Nach Th. 20) haben wir also in der That:

$$abcd \subseteq f \quad \text{und} \quad f \subseteq a+b+c+d,$$

wie dies auch noch auf verschiedene andere Arten wieder nachweisbar wäre.

Der erste Teil des Satzes (soweit er kursiv gedruckt) ist hienach bewiesen, und ist klar, wie man den analogen Beweis auch bei beliebig vielen Argumenten leisten kann.

Nennt man nun:

$$abcd + w\,(a+b+c+d) = \varphi = abcdw_1 + (a+b+c+d)\,w,$$

so gibt es zu jedem Wertepaar x, y ein Gebiet w, welches die Gleichung

$$f = \varphi$$

erfüllt, zu einer identisch richtigen macht. Ein solches ist $w=f$ selber, wie äusserst leicht nachzurechnen.

Umgekehrt gibt es aber auch zu jedem beliebig angenommenen oder gegebenen Werte von w (oder f) ein Wertepaar x, y, welches diese Gleichung erfüllt. Ein solches ist z. B.:

$$x = (a+b)\,c_1d_1w + (a_1+b_1)\,cdw_1, \quad y = (ab_1+c)\,d_1w + (a_1b+c_1)\,dw_1,$$

$$x_1 = (a_1b_1+c+d)w + (ab+c_1+d_1)w_1, \quad y_1 = \{(a_1+b)c_1+d\}w + \{(a+b_1)c+d_1\}w_1,$$

wie die Probe zeigt.

Um die Behauptung mit möglichst wenig Mühe zu verifiziren rechne man nicht etwa erst die Produkte xy, xy_1, x_1y, x_1y_1 für sich aus, sondern sogleich:

$$axy = ax \cdot ay, \quad bxy_1 = bx \cdot by_1, \quad cx_1y = cx_1 \cdot cy, \quad dx_1y_1 = dx_1 \cdot dy_1;$$

man findet auf diese Weise unmittelbar:

$$axy = ab_1c_1d_1w, \quad bxy_1 = bc_1d_1w, \quad cx_1y = cd_1w, \quad dx_1y_1 = dw + abcdw_1,$$

und da nach Th. 33_+) Zusatz — vergl. auch § 18, γ) — sein muss:

$$ab_1c_1d_1 + bc_1d_1 + cd_1 + d = a+b+c+d,$$

so stimmt die Probe.

Die Art zu schildern, wie ich vorstehende Werte von x, y systematisch fand, würde hier noch zu weit führen und sei darüber blos im Allgemeinen auf den § 24 verwiesen.

Da nun nach Th. 47_+) φ jeden denkbaren Wert zwischen $abcd$ und $a+b+c+d$ vorstellt, so ist erkannt, dass auch f jeden solchen Wert wirklich annehmen kann.

Das Entsprechende analog bei drei und mehr Variablen darzuthun, ist nicht ganz einfach (Problem!) und wollen wir auf den *independenten* Beweis des *nicht* kursiv gedruckten Teils des Th. 48_+) für diesen Fall nicht eingehen. —

Man kann jedoch diesen Beweis auch *rekurrirend* führen, nämlich, nachdem er für irgend eine bestimmte Anzahl von Argumenten bereits geleistet ist, darthun, dass er auch für die nächst höhere Anzahl von Argumenten (für *ein* Argument *mehr*) dann gelten muss („Schluss von n auf $n+1$“ oder „Verfahren der vollständigen Induktion“).

Hinreichend wird dies erhellen, wenn wir es für zwei und drei Argumente durchführen.

Ist f der vorige Ausdruck, so kann man, denselben nach y anordnend, schreiben:

$$f = (ax + cx_1)\,y + (bx + dx_1)\,y_1.$$

Nach dem für *ein* Argument (y) bereits bewiesenen Satze muss also

$$abx + cdx_1 \underline{\in} f \underline{\in} (a+b)\,x + (c+d)\,x_1$$

sein, und kann f jeden zwischen diesen *„Grenzen“* oder *„einschliessenden* Werten“ gelegenen Wert auch wirklich annehmen. Nach dem für *ein* Argument (x) bewiesenen Satze ist aber $ab \cdot cd$ der Minimalwert des Subjektes von f, links, und $(a+b)+(c+d)$ der Maximalwert seines Prädikates rechts (bei variablem x). Folglich kann f jeden zwischen $abcd$ und $a+b+c+d$ gelegnen Wert wirklich annehmen, q. e. d.

Sei $s = F(x, y, z)$ irgend eine Funktion von drei Argumenten und mögen a, b, c, d, e, f, g, h die Koeffizienten ihrer geordneten Entwickelung heissen, so ist nach z entwickelt:

$$s = F(x, y, 1)\,z + F(x, y, 0)\,z_1,$$

folglich

$$F(x, y, 1) \cdot F(x, y, 0) \underline{\in} s \underline{\in} F(x, y, 1) + F(x, y, 0),$$

d. h.

$$abxy + cdxy_1 + efx_1y + ghx_1y_1 \underline{\in} s \underline{\in} (a+b)\,xy + (c+d)xy_1 + (e+f)x_1y + (g+h)x_1y_1,$$

mithin s jedes Zwischenwertes zwischen dem Minimalwert $ab \cdot cd \cdot ef \cdot gh$ der linken und dem Maximalwert $(a+b)+(c+d)+(e+f)+(g+h)$ der rechten Seite, also zwischen $abcdefgh$ und $a+b+c+d+e+f+g+h$, fähig.

Man hätte auch zuerst nach x, y anordnen und die für *ein* und *zwei* Argumente schon bewiesenen Sätze in der umgekehrten Folge anwenden können. —

Um hiernach die Bedeutungen, welche einem Ausdruck für irgendwelche Werte einer bestimmten Gruppe von Buchstaben zukommen können, sofort zu überschauen, braucht man nur den Ausdruck nach ebendiesen Buchstaben zu entwickeln und alsdann das Th. 48) anzuwenden.

Zusatz zu Th. 48_+).

Jede Menge von arbiträren Gebietssymbolen, die in einer Funktion im identischen Kalkul *vorkommen, lässt sich stets durch ein einziges arbiträres Gebiet ersetzen.*

Behufs Beweises ist nur zu zeigen, dass man *zwei* arbiträre Gebiete u, v jeweils durch *eines* w vertreten lassen kann (ohne dass dies von Einfluss auf den Variabilitätsbereich des Ausdrucks wäre). Auf diese Weise wird man dann die Anzahl der vorkommenden arbiträren Symbole solange fortgesetzt um eins vermindern können, bis sie gleich eins geworden ist.

Denkt man sich aber den die arbiträren Gebiete u, v enthaltenden Ausdruck f nach diesen entwickelt, so wird er nach Th. 44_+) die („bi-“)lineare homogene Form haben:

$$f = auv + buv_1 + cu_1v + du_1v_1,$$

und alle Werte, deren dieser Ausdruck fähig ist, sowie nur solche, können nach Th. 48_+) auch von dem folgenden Ausdruck angenommen werden:

$$f = abcd + w\,(a+b+c+d)$$

und umgekehrt, sodass dieser letztere für eine offen gelassene Bedeutung des Gebietes w gerade so allgemein ist, wie der vorhergehende für unbestimmte u, v.

Die Gesamtheit der Bedeutungen des erstern fällt zusammen mit der Gesamtheit der Bedeutungen des letzteren Ausdrucks, weshalb es gestattet war, *denselben* Buchstaben f zur Bezeichnung beider zu verwenden.

Exempel 1. Auf diese Weise, wenn immerfort u, v, w ganz willkürliche Gebiete vorstellen, vereinfacht sich der folgende Ausdruck linkerhand zu demjenigen rechterhand in der Gleichung:

$$aduv_1 + bcu_1v + v\,\{ad\,(b+c) + bc\,(a+d)\} = w\,(ad+bc).$$

Es stellt also die linke Seite unter allen Umständen, was immer auch u und v bedeuten mögen, einen Teil des Gebietes $ad+bc$ vor, und zwar jeden gewünschten.

Exempel 2. Es ist ganz allgemein:

$$\{a(u+b_1)+b(u_1+a_1)\}(v+c_1d_1)+\{c(u+d_1)+d(u_1+c_1)\}(v_1+a_1b_1) = a+b+c+d.$$

Die linke Seite ist hier trotz der Unbestimmtheit von u, v ein eindeutiger Ausdruck, sie ist konstant bezüglich u, v, wie man bereits durch die, der Anwendung unsres Zusatzes ohnehin voranzuschickende, *Entwickelung* der linken Seite nach u, v erkennt.

Hier, meinen wir einmal, ist der gemeine Verstand ohne die Technik des Kalkuls nicht ausreichend. Die intuitiv anschauliche Erkenntniss dürfte wol bei vorliegender Aufgabe die Rechnung nicht einholen. Man versuche doch einmal, auch nur für einen konkreten Fall das, was die Gleichung behauptet zu begreifen, indem man etwa

$a =$ Kaufmann, $b =$ Russe, $c =$ Europäer, $d =$ Grundbesitzer, $u =$ gebildet, $v =$ patriotisch

gelten lässt und beginnt, die Bedeutung der linken Seite unsrer Gleichung gemäss der in § 8 und 16 dargelegten Regeln in Worten zu beschreiben!

Man wende nicht ein, dass so komplizirte Ausdrücke nicht vorkommen, blos künstlich ersonnen seien. Solange die Mittel zu ihrer Handhabung und praktisch schon zu ihrer Einkleidung fehlen, solange Methoden und Wege dahin noch nicht einmal eröffnet sind, müssen ja Aufgaben, die solche Ausdrücke involviren könnten, natürlich unzugänglich bleiben. Sofern aber die Philosophie die Ausbildung solch' exakter Methoden verschmähte, müsste sie wol ewig im Phrasentum stecken bleiben, wobei es allerdings unbenommen bliebe, fort und fort in immer neuen Tonarten zu variiren, wie weit man es darin gebracht. Gleichwie vielmehr die reine Mathematik auf dem Zahlengebiete noch immer nicht auf die Höhe gelangt ist, solche Komplikationen zu bewältigen, wie sie die Anwendungen auf selbst verhältnissmässig noch ganz einfache Aufgaben der Physik und Technik ihr zumuten, so werden zweifelsohne auch bei den zu erhoffenden Anwendungen der geläuterten Methoden unsrer Logik auf die Probleme der „wahren Philosophie" (vergl. Descartes — S. 94) die Komplikationen jeder Art nicht ausbleiben.

Exempel 3. Es erweist sich auch nach unserm Zusatze:

$$abuv_1 + (a_1 + b_1)\, u_1 v + u\,(ab_1 + a_1 b) = w$$

als vollkommen unbestimmt oder willkürlich, unbeschränkt jedes Gebiet zu bedeuten fähig, man könnte sagen: geradezu als *„alldeutig"*. —

Die Aufgabe, eine Funktion nach ihren Buchstabensymbolen zu *entwickeln*, deckt sich nicht mit der Anforderung, dieselbe *auf ihren formell einfachsten* Ausdruck zu bringen — wohl aber kann das einschlägige Theorem 44) behufs Lösung der letzteren oft mit Vorteil zugezogen werden.

Während aber jene Aufgabe als eine vollkommen bestimmte sich erwies, so ist solches mit dieser nicht der Fall: es bleibt für eine Funktion zuweilen die Wahl zwischen mehreren gleich einfachen „einfachsten" Ausdrücken. Es genügt dies durch Beispiele zu belegen: so sind — vergl. meinen Operationskreis[2], p. 27, Z. 20 v. o. — die beiden äquivalenten Ausdrücke:

$$a\,(b + c_1) + a_1 b_1 = ab + (a_1 + c_1)\, b_1$$

gleich einfachen Baues und lassen doch sich nicht weiter reduziren; vergleiche auch ein schon in § 18 unter β_1) behandeltes Exempel (wo sich die Methode angegeben findet, die Nichtunterdrückbarkeit eines Operationsgliedes, wo sie vorliegt, nachzuweisen).

Auf diesem Umstande beruht es wol, dass zur Lösung der Aufgabe, einen Ausdruck auf seine einfachstmögliche Form zu bringen, eine unfehlbar zum Ziel führende einheitliche Vorschrift nicht bekannt ist, und eine solche sich auch schwerlich aufstellen liesse: vielmehr wird dabei immer Einiges der Willkür und dem analytischen Geschick des Rechners anheimgestellt bleiben.

Miss Ladd und Mr. McColl empfehlen zu dem genannten Zweck das *doppelte Negiren* des — wie wir unbeschadet der Allgemeinheit annehmen können, schon als ein Aggregat von Monomen — gegebenen Ausdrucks, wobei die erste Negation desselben durch Ausmultipliziren, unter Fortlassung verschwindender oder eingehender Terme, erst wieder in Aggreganten zu entwickeln ist, bevor man abermals negirt. Vergl. auch § 27.

Exempel zu dieser Methode von McColl. Gegeben:

$$x = a + bc + a_1 b_1 d + a_1 c_1 d, \quad \text{also} \quad x_1 = a_1\,(b_1 + c_1)\,(a + b + d_1)\,(a + c + d_1),$$

wo zunächst die beiden Terme a als unverträglich mit dem Faktor a_1 fortzulassen sind. Wir erhalten sonach

$$x_1 = a_1\,(b_1 + c_1)\,(bc + d_1) = a_1\,(b_1 + c_1)\, d_1, \quad \text{und folglich:} \quad x = a + bc + d$$

als den auf seine einfachste Form gebrachten Ausdruck.

Anderes Exempel McColl's. Gegeben:

$$x = ab_1 c_1 + abd + a_1 b_1 d_1 + abd_1 + a_1 b_1 d,$$

also

$$x_1 = (a_1 + b + c)\,(a_1 + b_1 + d_1)\,(a_1 + b_1 + d)\,(a + b + d)\,(a + b + d_1) =$$
$$= \{a_1 + (b + c)\,(b_1 + d_1)\,(b_1 + d)\}\,(a + b) = (a_1 + b_1 c)\,(a + b) = a_1 b + ab_1 c,$$

darnach

$$x = (a + b_1)\,(a_1 + b + c_1) = ab + ac_1 + a_1 b_1 + b_1 c_1.$$

Von diesen vier Gliedern darf nun aber noch das zweite oder aber vierte unterdrückt werden, sodass

$$x = ab + ac_1 + a_1 b_1 = ab + a_1 b_1 + b_1 c_1$$

sich deckt mit dem oben beispielsweise angeführten zweierlei einfachste Darstellungen zulassenden Ausdrucke — vergl. § 18, β_1).

Als ein *bequemeres* Verfahren scheint mir indess die Anwendung von Th. 30_+) und 33_+) Zusatz den Vorzug zu verdienen, wonach man sogleich schliessen kann:

$$x = a\{b_1 c_1 + b\,(d + d_1)\} + a_1 b_1\,(d_1 + d) = a\,(b_1 c_1 + b) + a_1 b_1,$$

d. h. einerseits

$$= a\,(c_1 + b) + a_1 b_1, \quad \text{andrerseits} \quad = ab + (ac_1 + a_1)\, b_1 = ab + (c_1 + a_1)\, b_1.$$

Beim vorigen Exempel wäre zunächst der Faktor a_1 zu unterdrücken gewesen, hernach in $x = a + bc + (b_1 + c_1)\, d$ der Faktor $b_1 + c_1$ als die Negation von bc vorstellend.

Eilfte Vorlesung.

§ 20. **Spezielle und allgemeine, synthetische und analytische Propositionen: Relationen und Formeln.**

Schon von alters her werden in der Logik Urteile auch als „*Propositionen*“ bezeichnet, namentlich, wenn sie als Glieder eines Theorems oder einer Beweisführung, Argumentation, auftreten. Wir werden uns dieses Namens auch hier, jedoch in einem ganz bestimmten noch näher zu erläuternden Sinne, bedienen.

Die kategorischen Urteile, mit deren Ausdruck in der Zeichensprache des Kalkuls wir uns *bisher* beschäftigten, erwiesen sich — in § 2 — in der Regel als Subsumtionen, zum Teil auch als Gleichungen, und so wird uns der Name „*Proposition*“ *zunächst* herhalten als ein gemeinsamer Name für diese beiden Arten von Behauptungen, als ein kürzeres Wort für „*Subsumtion oder auch Gleichung*“ — einerlei ob solche in der Wortsprache oder ob sie in der Zeichensprache des Kalkuls ausgedrückt erscheint, immerhin vorzugsweise im Hinblick auf letztere Darstellungsmöglichkeit.

Späterhin werden wir aber den Begriff der „Proposition“ noch weiter fassen. Zu den erwähnten beiden Arten von Aussagen werden nämlich noch andere kommen, welche wie Unterordnungen, Überordnungen, Ungleichungen und anderes mehr, sich ebenfalls in unserer Zeichensprache formelartig darstellen.

Alle Beziehungen, welche denkbar sind zwischen Gebieten unsrer Mannigfaltigkeit, desgleichen also auch zwischen Klassen überhaupt sowie Begriffsumfängen insbesondere, soweit es dabei ankommt auf Vorhandensein oder Nichtvorhandensein gemeinsamer Elemente oder Individuen der unter sich verglichenen Gebiete oder Klassen — sagen wir kurz: alle „Umfangsbeziehungen“, sollen, in Worten oder Zeichen statuirt, später schlechtweg *Propositionen* genannt werden. Ihre möglichen Arten zählen wir in § 34..39 vollständig auf.

Als Vorbereitung für die wichtigen Untersuchungen zu denen wir im nächsten Paragraphen schreiten, müssen wir nun die Aufmerksamkeit des Lesers richten auf einige Unterscheidungen, welche sich bei

Betrachtung der Propositionen aufdrängen. Wir müssen uns — unter gewissen Gesichtspunkten — mit einer *Einteilung der Propositionen* beschäftigen. Was wir aber in diesem Betreff demnächst zu sagen haben im Hinblick auf die Subsumtionen und Gleichungen (denen eine Einführung in die Theorie bis jetzt allein zuteil geworden), wird es späterhin ein Leichtes sein auch auf die übrigen Arten von Aussagen zu übertragen, die unter den erweiterten Begriff der „Proposition“ noch fallen werden.

Zunächst zerfallen die Propositionen in *spezielle* und *allgemeine*.

„*Speziell*“ nennen wir eine Proposition, wenn sie als Subjekt und Prädikat, als linke und rechte Seite der Gleichung, überhaupt als Beziehungsglieder“ (der „Umfangsbeziehung“) sowie als Operationsglieder der diese etwa darstellenden Funktionen lediglich vollkommen bestimmte oder eindeutige Gebietsymbole, bestimmte wohldefinirte Klassen enthält — „eindeutig“ in der „abgeleiteten“ Mannigfaltigkeit oder Mn. der Gebiete, der Klassen — kurz: wenn sie nur von speziellen Gebieten oder Klassen handelt.

„*Allgemein*“, genauer: „von unbestimmtem oder allgemeinem Charakter“ nennen wir eine Proposition, wenn obiges *nicht* der Fall ist, wenn also auch Gebietsymbole in ihr vorkommen — sei es als Beziehungsglieder, sei es als Operationsglieder der drei identischen Spezies im Ausdrucke derselben — die von noch nicht völlig bestimmter, vielmehr von teilweise oder völlig unbestimmter, eventuell allgemeiner Bedeutung in der Mannigfaltigkeit der Gebiete resp. Klassen sind.

Beispielsweise sind $0 = 0$, $0 \Subset 1$, $0 \cdot 1 = 0$, etc. desgleichen $a \Subset b$, *falls* a und b etwa die in Fig. 1 dargestellten Kreisflächen bedeuten, lauter spezielle Propositionen; ebenso würden *dann* $0 \Subset a$, $b \Subset 1$, $ab \Subset a$ solche exemplifiziren, nicht minder wie $a = ab$, und andere.

Auch die Urteile: „Die Neger sind von schwarzer Hautfarbe“ sowie „Alle schwarzen Krähen sind schwarz“, obwol in der logischen Terminologie als generelle, ja universale (zu deutsch „allgemeine“) *Urteile* zu bezeichnen, sind doch in unserm Sinne nur als *spezielle* Propositionen hinzustellen, und dürfen sie nicht etwa „allgemeine“ *Propositionen* genannt werden.

Man nimmt hier wieder einmal die Gefahren eines Doppelsinnes als naheliegende wahr, und fühlt die Unabweislichkeit einer genaueren Verständigung. Ich muss mich den Sprachreinigern zum Trotze hier gegen die Verdeutschung des Wortes „universal“ erklären, weil ich das Wort „allgemein“ hierselbst in wesentlich abweichendem Sinne — dem lateinischen „generalis“ näher kommend — zu gebrauchen mich genötigt sehe.

Das Subjekt „Neger“ war, als ein Gattungsname, ein vieldeutiger Term in der ursprünglichen, d. i. der Mannigfaltigkeit der *individuellen* (der mittelst Eigennamen darzustellenden) Objekte des Denkens. Es erscheint aber als ein eindeutiger Term in der abgeleiteten, der Mannigfaltigkeit der *Klassen*, indem es unter den Klassen eine ganz bestimmte, individuelle Klasse vorstellt.

Als allgemeine Propositionen würden $a = ab$, sowie $a \Subset b$, $ab \Subset a$, etc. hinzustellen sein, wenn entweder a, oder b, oder beide Symbole unbestimmte Gebiete oder Klassen vorstellen sollten, wenn die Bedeutung dieser Symbole ganz oder teilweise offen gelassen wäre. Ebenso, wenn a *irgend ein* Gebiet vorstellt (desgleichen, wenn es ein beliebiges in einem bestimmten b enthaltenes Gebiet vorstellte), muss die Proposition $a \Subset 1$ als eine „allgemeine“ bezeichnet werden. Etc.

Auf dem Felde der Arithmetik entsprechen unsern „speziellen“ Propositionen die „*numerischen*“ Gleichungen, welche nur mittelst Ziffern dargestellte individuelle Zahlen („numerische“ oder „ziffrige“, „digital numbers“) enthalten, oder in denen wenigstens, falls Buchstaben in ihnen auftreten sollten, diese, wie $\pi = 3{,}14159\cdots$, $e = 2{,}71828\cdots$, $i = \sqrt{-1}$, schon eine konventionell feststehende Zahlenbedeutung haben. Unsern „allgemeinen“ Propositionen dagegen entsprechen die „*literalen*“ oder Buchstaben-Gleichungen, welche auch Buchstaben als „unbestimmte“ oder „allgemeine“ Zahlzeichen enthalten, Buchstaben, denen es uns noch freisteht verschiedene Zahlenwerte als Bedeutung unterzulegen.

Solch leicht erkennbares äusserliches Unterscheidungsmerkmal, wie das Auftreten oder Nichtauftreten von Buchstaben in der Arithmetik es bildete, können wir jedoch im identischen Kalkul der Unterscheidung beider Klassen von Propositionen nicht zugrunde legen, weil wir hier auch die speziellen Gebiete oder Klassen stets mit Buchstaben darzustellen pflegen und darzustellen genötigt sind — die beiden Gebiete 0 und 1 ganz allein ausgenommen. Was dort (in der Arithmetik bei i, π, e) als Ausnahme mitanzuführen war, bildet hier (im identischen Kalkul) die Regel!

Spezielle Propositionen erfreuen sich jeweils eines völlig bestimmten Sinnes, und darum ist eine spezielle Proposition immer entweder eine *richtige* oder eine *falsche*.

Die oben angeführten waren Exempel von richtigen speziellen Propositionen. Dagegen würden $1 \Subset 0$, $0 = 1$, und bei der durch Figur 1 erklärten Bedeutung von a und b die Subsumtion $b \Subset a$, die Gleichung $ab = b$, etc. eine falsche spezielle Proposition exemplifiziren; ebenso die verbalen Urteile: „Die Mohren sind weiss“ sowie „Einige schwarze Krähen sind nicht-schwarz“, und andere mehr.

Die (in unserm Sinne) „allgemeinen“ Propositionen können *nicht* so, wie die der vorigen Abteilung, die speziellen, ohne weiteres in richtige und falsche eingeteilt werden, weil sie keinen völlig feststehenden Sinn besitzen. Die Beantwortung der Frage, ob sie als richtig oder falsch erscheinen, wird vielmehr häufig davon abhängen, *welche* Bedeutungen, Werte oder Wertsysteme man den in ihnen vorkommenden Buchstabensymbolen, für welche eine völlig bestimmte Bedeutung eben noch nicht ausgemacht ist (und die darum als „*unbestimmte*“ oder „*variabele*“ eventuell als „*allgemeine*“ Symbole hingestellt werden mögen) beigelegt denkt.

Wohl aber tritt auch hier bei einer Umschau ein grosser Gegensatz zutage:

Wir bemerken — schon unter den bisherigen — solche Propositionen, die richtig werden, *welche* Bedeutungen, Werte oder Wertsysteme man auch den in ihnen vorkommenden variablen Elementen beilegen mag, und solche, bei denen dies nicht der Fall ist.

Erstere nennen wir „*analytische*“ Propositionen, die letzteren „*synthetische*“.

Hierbei befinden wir uns in vollkommener Analogie mit dem Verfahren der numerisch rechnenden Mathematik, die ihre Buchstabengleichungen in analytische und synthetische einteilt.

Beispiele von „analytischen“ Propositionen sind die Subsumtionen resp. Gleichungen:

$$a \Subset a,\quad 0 \Subset a,\quad a \Subset 1,\quad ab \Subset a,\quad a \Subset a+b,\quad a+ab=a,$$
$$aa_1 = 0,\quad a+a_1 = 1,\quad a(b+c) = ab+ac,\quad \text{etc.}$$

Überhaupt jede in den bisherigen Sätzen, d. i. Axiomen („Prinzipien“) und Theoremen, als allgemeingültig hingestellte und eventuell bewiesene Subsumtion oder Gleichung wird als eine „analytische“ Proposition zu bezeichnen sein.

Analytische Propositionen, in unsrer Zeichensprache dargestellt, heissen mit einem Worte auch „*Formeln*“ im strengen Sinn dieses Wortes.

Der Sprachgebrauch mit seinen Inkonsequenzen verwendet freilich manchmal auch das Wort „Formel“ als synonym mit (Buchstaben-)*Ausdruck* (expressio, compound term), doch ist diese Verwendung die weitaus seltenere, hat meist einen rhetorischen Beigeschmack und ist eigentlich als inkorrekt zu qualifiziren — so wenigstens für die Mathematik; ich habe nichts dagegen, wenn der Chemiker nicht nur von der Formel für einen chemischen Vorgang, sondern auch von der „Formel“ einer Substanz als einer chemischen Verbindung spricht.

In der Mathematik ist die Formel jeweils eine Gleichung (eventuell auch Ungleichung) also eine wirkliche *Behauptung*, nicht aber blos ein Ausdruck, Term oder *Name* für eine Zahl, und analog soll es auch im identischen Kalkul gehalten werden.

Das charakteristische Merkmal der Formel schlechtweg ist demnach in ihrer Allgemeingültigkeit, ist darin zu erblicken, dass sie „erfüllt“ ist, gilt, welche Wertsysteme (aus der zugrunde gelegten Mannigfaltigkeit) man auch den in ihr vorkommenden Buchstabensymbolen unterlegt.

Niemals, freilich, kann *hier* solche Allgemeingültigkeit empirisch nachgewiesen werden, indem man etwa alle erdenklichen Werte und Wertsysteme durchprobirte, dieselben für unsre Buchstabensymbole einsetzend und das Einsetzungsergebniss auf seine Richtigkeit als spezielle Proposition in jedem Falle prüfend. Vielmehr steht uns, wenn wir eine allgemeine Proposition für eine Formel ausgeben, nur die Berufung auf das Gefühl der Evidenz zugebote, mit der wir sei es ihr Schema selbst, sei es dasjenige der Voraussetzungen aus denen sie abgeleitet wurde, sowie der Schlüsse die von da zu ihr hinführten, als denknotwendige erkennen.

Alle übrigen bisher vorgekommenen Propositionen (zunächst sofern die in ihnen auftretenden Buchstaben nicht durchweg ganz spezielle Bedeutungen hatten) sind Exempel von „synthetischen" Propositionen. So namentlich die in unsern Theoremen angeführten Subsumtionen oder Gleichungen, welche als Voraussetzungen oder Bedingungen, desgleichen diejenigen welche dann als Behauptung in dem Theorem hingestellt wurden. Ebenso, wenn zwei Propositionen als einander äquivalent hingestellt wurden, wo dann die eine von der andern und diese von jener bedingt wird, waren es allemal synthetische Propositionen.

Ein einfachstes Beispiel einer synthetischen Proposition ist insbesondere die Subsumtion $a ⋹ b$. Diese gilt ja nicht als allgemeine Formel für beliebige Wertepaare oder Bedeutungen von a und b. Es gibt Fälle (illustrirt durch Fig. 1) in welchen sie richtig, andere (illustrirt z. B. durch Fig. 7..11) in welchen sie falsch ist. Ebenso die Gleichung $ab = a$, etc.

Wenn Prinzip II aussagte, unter den Voraussetzungen $a ⋹ b$ und $b ⋹ c$ gelte die Behauptung $a ⋹ c$, oder wenn Th. 37) aussagte, die beiden Subsumtionen $a ⋹ b$ und $b_1 ⋹ a_1$ seien äquivalent, so waren alle diese Subsumtionen synthetische.

Um eine allgemeine Proposition als eine synthetische nachzuweisen, genügt es schon, ein einziges Wertsystem ausfindig zu machen, anzugeben, welches, für die Buchstaben in sie eingesetzt, eine falsche spezielle Proposition liefert.

So kann $a + b ⋹ a$ nur eine synthetische Proposition sein, sowol wenn a und b unbestimmte Gebiete vorstellen, als auch, wenn eines derselben, z. B. b als ein spezieller Kreis gegeben sein sollte. Man braucht nämlich dem a nur die Bedeutung eines ausserhalb b liegenden Kreises beizulegen, um durch die Anschauung zu erkennen, dass alsdann sie falsch wird.

Von den synthetischen Propositionen kann man sagen, dass sie eine *Beziehung* zwischen den in sie eingehenden Gebieten ausdrücken oder etabliren, man kann sie mit einem Wort auch *„Relationen"* (im engeren Sinne) nennen.

So drückt die letztbetrachtete $a + b ⋹ a$, wie leicht zu sehen, die Beziehung zwischen den Gebieten a und b aus, dass b in a enthalten ist, was kürzer auch $b ⋹ a$ sagen würde. Die analytische Proposition oder Formel $ab ⋹ a$ dagegen drückt *keine* Beziehung *zwischen a und b selbst*

aus (wenngleich sie allerdings die Beziehung der Einordnung *von ab in a* ausspricht und mit Recht behauptet); diese lässt sich nicht als eine „Relation" zwischen a und b hinstellen, da ihr alle Gebiete a und b schon so wie so genügen.

Auch die *richtigen speziellen* Propositionen werden „analytische" genannt, wenn sie durch Einsetzung spezieller Werte aus einer Formel, einer analytischen Proposition von allgemeiner Gültigkeit hervorgehen, wenn sie m. a. W. nur eine Formel exemplifiziren, partikulare Anwendungen, Paradigmata einer solchen, mithin von denknotwendigem Schema sind. Und andernfalles werden wir auch jene wieder „synthetisch" nennen; desgleichen mögen die *falschen speziellen* Propositionen mit zu den „synthetischen" gezählt werden.

Darnach ist z. B. jene Aussage: „Die schwarzen Pferde sind schwarz" zwar eine spezielle, gleichwol aber eine analytische Proposition zu nennen. Sie geht nämlich aus dem Th. $6_\times$) $ab ⋹ a$ hervor, wenn man $a =$ schwarz und $b =$ Pferd bedeuten lässt, und gilt wie dieses mit Denknotwendigkeit. Die Aussage gibt uns auch keinerlei Belehrung über diese Klassen a und b, da sie *in unserer Disziplin* auch nicht einmal die Existenz des Subjektes, nämlich schwarzer Pferde unterstellt oder fordert. Ebenso bei: „Der weisse Schnee ist weiss", „Die runden Quadrate sind rund".

Dagegen das Urteil: „Die Mohren sind schwarz" ist eine synthetische spezielle Proposition (und zwar eine richtige); es belehrt über die Hautfarbe der Mohren, und hat zum Schema: $a ⋹ b$, welches, wie erkannt nicht von allgemeiner und denknotwendiger Geltung ist. Definirten wir freilich die „Mohren" als „Menschen von schwarzer Hautfarbe" und setzten diesen Ausdruck für das Subjekt in unser Urteil ein, so würde dasselbe sich nunmehr als ein analytisches (dem obigen ähnlich) darstellen. Solange aber solche Einsetzung nicht geschehen, ist aus dem Urteil selbst seine Selbstverständlichkeit nicht zu erkennen und muss dasselbe immerfort synthetisch genannt werden, um so mehr, als der Begriff der „Mohren" schon anderweitig bekannt und auch durch andere Merkmale als das der schwarzen Hautfarbe definirt sein könnte.

Hienach zerfallen denn *alle* Propositionen wie einerseits in spezielle und allgemeine, so andrerseits in synthetische und analytische, sodass hieraus durch Kombination sich vier Unterklassen ergeben, als da sind die *synthetischen speziellen*, die *synthetischen allgemeinen*, die *analytischen speziellen* und die *analytischen allgemeinen* Propositionen.

Kennzeichen der *„analytischen"* Proposition ist somit die aus ihr selbst ersichtliche *„Selbstverständlichkeit"* derselben, ihre *denknotwendige Geltung* — einerlei, ob sie von allgemeinerem Charakter ist, oder von speziellem, nämlich aus allgemeingültigem Schema durch Einsetzen spezieller Werte für dessen Buchstabensymbole hervorgegangen.

Kennzeichen der *„synthetischen"* Propositionen ist, dass sie solcher *aus ihnen selbst erkennbarer denknotwendiger Geltung ermangeln.*

Den analytischen und den synthetischen Propositionen fällt eine gänzlich verschiedene Rolle in der Wissenschaft zu.

Erstere sind in Bezug auf die Gebiete oder Klassen, über welche sie etwas auszusagen *scheinen*, im Grunde vollkommen *„nichtssagend"*, sie liefern über diese selbst keinerlei Information. Dagegen stellen sie uns, wenn sie von allgemeinem Charakter, wenn sie Formeln sind, *Gesetze des Denkens* dar (und bringen, im Fall sie spezieller Natur, solche zur Anwendung); sie bringen uns Sätze, Theoreme der formalen Logik zum Ausdruck und zum Bewusstsein.

Indem sie als solche eventuell die Gleichheit, Identität zwischen allgemeinen Ausdrücken konstatiren, ermächtigen sie uns, jeden Ausdruck von der Form der linken Seite der Gleichung, wo immer es uns vorteilhaft erscheint, zu ersetzen durch einen andern, nach dem Schema ihrer rechten Seite konstruirten Ausdruck, oder auch umgekehrt (vergl. S. 283). Sie drücken so *fakultativ* anzuwendende *Rechenvorschriften* aus, *garantiren* uns gewisse *Freiheiten in der Umformung von Ausdrücken*, von welchen wir — geschickt, oder zur Unzeit — Gebrauch machen mögen in der Absicht, die Beschreibung von Klassen zu vereinfachen und an Zeichenaufwand, Ausdruckskapital und geistiger Arbeit Ersparnisse zu erzielen, überhaupt um irgendwelche Probleme zu lösen.

Und auch wenn unsere Formeln blos als Subsumtionen erscheinen, gewährleisten sie uns die Erlaubniss, gewisse Substitutionen, falls es uns passend erscheint, vorzunehmen, insbesondre den terminus minor derselben, wo er anderwärts als Prädikat auftritt, durch den major, ihren major, wo immer er als Subjekt auftritt durch ihren minor zu ersetzen; vergl. S. 173. Auch sie statuiren also Lizenzen für die *Umformung*, Transformation — zum wenigsten von Aussagen.

Wenn dann später durch den „Aussagenkalkul" auch solche Theoreme, welche gewisse Behauptungen von bestimmten Voraussetzungen abhängig hinstellen, in der Zeichensprache durch einen einzigen Ansatz, durch *eine* „Formel" darstellbar gemacht werden, so wird sich das zuletzt Gesagte auch auf den so erweiterten Begriff der Proposition und Formel übertragen. Es regeln diese *Formeln* den Übergang von einer Aussagenform zu andern; sie geben uns *allgemeine Schemata für denknotwendiges Folgern, deduktives Schliessen.*

Soviel über die Rolle, welche den analytischen Propositionen, und namentlich den Formeln zufällt, die, soferne sie in Worten dargestellt sind, auch „analytische Urteile" von der Philosophie genannt werden oder als „apriorische Wahrheiten" bezeichnet werden mögen. Vergl. ζ) unsrer Einleitung.

Ich kann mich bei dieser Gelegenheit eines Seitenblicks auf die „Wahrheiten der Mathematik" nicht entschlagen. Soferne diese *Zahlen* betreffen — einerlei ob ganze oder irrationale oder andere — so ist es erst in neuerer Zeit durch die scharfsinnigen Arbeiten namentlich von Hermann Grassmann und den Herrn Weierstrass, Georg Cantor und Dedekind ausser allen Zweifel gestellt worden, dass diese Wahrheiten durchaus nur den Charakter von *„analytischen"* haben (vergl. hiezu unsern § 51), dass mithin Kant's Frage: wie sind synthetische Urteile a priori möglich? wol eine gegenstandslose ist.

Dagegen erscheinen die Axiome der *Geometrie* als *„synthetische"* Propositionen, die eine denknotwendige Geltung nicht zu beanspruchen vermögen und in dieser Hinsicht auf einer Linie stehen mit den Axiomen oder Prinzipien der Mechanik, mit den Theorieen und Hypothesen aller übrigen Teile der Physik oder Naturlehre. Dermalen bildet dies allerdings noch eine, selbst unter den Mathematikern nicht völlig zum Austrag gebrachte Streitfrage. Für den Verfasser kann indess kein Zweifel bestehen, wohin der Sieg sich (vollends) neigen muss, und erscheint mir die Geometrie von hause aus als der erste Teil der Physik, als ursprünglich nur ein Zweig der induktiven und Naturwissenschaften, als solcher zunächst im Gegensatze stehend zur *reinen* Mathematik im engsten Sinne des Wortes, die als streng deduktive Disziplin nur Arithmetik*) und Logik zu umfassen hätte und für Denjenigen, der mit Dedekind die Arithmetik als einen Zweig der Logik ansieht, mit letzterer geradezu zusammenfiele.

Sofern nicht ihre Axiome als in der Natur des physikalischen Raumes begründete einst noch in Zweifel gezogen und modifizirt werden müssen, hat aber die Geometrie, gefolgt von der Geomechanik etc., ihr induktives Anfangsstadium längst schon verlassen und ist, einen rein mathematischen Charakter annehmend, in das deduktive Stadium übergetreten (vgl. S. 42). Sie mag, gleichwie die theoretische Mechanik, aber nicht ohne diese, zur (reinen) Mathematik (im weiteren Sinne) nunmehr gerechnet werden. —

Die *synthetischen* Propositionen, oder Relationen, geben eine Information über die Klassen oder Gebiete, von denen sie handeln; sie dienen also in erster Linie dazu, wirklich *etwas* auszusagen und die Mitteilungsbedürfnisse der Sprache zu befriedigen.

Sofern sie von speziellem Charakter sind, wird diese Information, wie erwähnt, entweder richtig oder unrichtig sein. In diesen Fällen haben alle Klassen, von denen in der Proposition die Rede ist, ihre Definition, Erklärung bereits anderweitig, vorher, oder wenigstens ausserhalb der Proposition, gefunden; die Proposition sagt nur über lauter *„bestimmte"* oder *„bekannte"* Klassen etwas aus.

Anders, wenn die Proposition von allgemeinem Charakter ist, wo sie auch *unbestimmte* Klassen oder deren Symbole enthält.

*) Ich gebrauche das Wort „Arithmetik" hier immer in seiner vollsten Bedeutung, als die Zahlentheorie Algebra, Analysis, Funktionenlehre etc. mitumfassend: als die gesamte Lehre von den Zahlen und ihren Funktionen.

Hier sind dann zweierlei Fälle zu unterscheiden.

Es kann sein, dass es gar keine speziellen Werte *gibt*, dass Gebiete oder Klassen gar nicht denkbar sind, welche, für jene unbestimmten Symbole in die Proposition eingesetzt, dieselbe „erfüllten", nämlich aus ihr eine richtige spezielle Proposition hervorgehn lassen würden.

Von solcher Art wären z. B. die Propositionen:

$$aa_1 = 1, \quad \text{sowie} \quad x + x_1 = 0.$$

Da nach Th. 30) für jede Klasse a, für jedes Gebiet x, doch $aa_1 = 0$, und $x + x_1 = 1$ sein muss, so würden diese Relationen auf die Forderung hinauslaufen, dass $1 = 0$ sein solle.

Dies würde nur zutreffen, wenn die Mannigfaltigkeit, auf die unsre Untersuchungen sich beziehen, von vornherein eine leere wäre, und dass solches auszuschliessen sei, haben wir bereits als ein diesen Untersuchungen zugrunde zu legendes Postulat hingestellt. Für uns wird also eine Gleichung:

$$1 = 0$$

als eine unbedingt zu verwerfende gelten, wir können sie geradezu als den Typus der *„Absurdität"* hinstellen.

Wer sie zugäbe würde auf jegliche Unterscheidung innerhalb der Mn. Verzicht leisten, wie wir schon S. 245 ausgeführt haben. Dem wäre alles „egal"; buchstäblich gälte für Den: „Es ist Alles nichts".

In solchem Falle nennen wir die synthetische Proposition eine *„absurde"*.

Insofern sie zu gelten beanspruchte — und dies zu thun ist doch der Endzweck jeder Aussage oder Behauptung — würde die Proposition uns zumuten unter ihren Symbolen uns Gebiete zu denken, die gar nicht denkbar sind. Sie stellte damit an uns eine unerfüllbare Forderung. Auf jedem Felde ist es leicht, Forderungen aufzustellen, welche zu erfüllen unmöglich ist, und so auch auf dem Felde der Logik, auch im identischen Kalkul.

Zuweilen wird auch die Forderung selbst, z. B. die Gleichung

$$x + x_1 = 0,$$

eine *„unmögliche"* genannt; jedoch geschieht dies dann nicht in der suppositio nominalis, indem es ja leicht ist, dieselbe trotz allen Widersinnes behauptend auszusprechen, sondern in der suppositio realis: die Gleichung in Hinsicht dessen, was sie behauptet, als eine erfüllte oder geltende, ist unmöglich.

Eine synthetische Proposition wird demnach auch „absurd" zu nennen sein, wenn sie mit Denknotwendigkeit — nach den Regeln des Kalkuls — auf die Gleichung $1 = 0$ hinausläuft.

Dass aber auch umgekehrt auf diese Gleichung jede im obigen Sinne absurde Proposition hinauslaufen muss, jede nämlich, die durch kein Wertsystem ihrer unbestimmten Symbole erfüllbar ist, werden wir im Aussagenkalkul sehen.

Der vorige Kontext lässt dann nebenher die Thatsache deutlich werden, dass sobald einmal *ein* Unsinn zugegeben wird, dann auch *jeder* Unsinn mittelst zwingender Schlüsse sich ableiten oder beweisen lässt — sofern wir nämlich als Schema solchen Unsinnes die Behauptung nehmen, dass zwei beliebig herausgegriffene verschiedene Dinge einerlei seien. Gelangten wir vom ersteren zu $0 = 1$, so liess sich auch von da zu $a = b$ fortschreiten.

Ist die allgemeine synthetische Proposition *nicht* absurd, so gibt es Werte oder Wertsysteme, deren Einsetzung in die Proposition (für die in ihr vorkommenden nicht schon anderweitig bestimmten Gebietsymbole) die Wirkung hat, dass eine richtige spezielle Proposition entsteht. Von solchen, die allgemeine in eine richtige spezielle Proposition „verwandelnden" Wert(system)en sagt man, dass sie die Proposition *„erfüllen"*, derselben *„genügen"*, sie *„bewahrheiten"*.

Man nennt sie auch *„Wurzeln"*, beziehungsweise ein „System von Wurzeln", dieser Proposition (Gleichung oder Subsumtion etc.) — entsprechend dem bei synthetischen Gleichungen in der Mathematik geltenden Sprachgebrauche.

Sobald die Proposition aber Geltung beansprucht, stellt sie uns vor die Aufgabe, uns unter ihren Buchstabensymbolen solche Gebiete oder Klassen vorzustellen, welche sie "erfüllen", m. a. W., diese Symbole eben nur bedeuten zu lassen: ein System von „Wurzeln" der Proposition. Und um dies für jedermann zu ermöglichen, müssen solche Wurzeln mit Hülfe der in der Proposition etwa sonst noch vorkommenden bestimmten oder *„gegebenen"* Gebiete, ihrer sogenannten „Parameter", beschrieben, durch diese übrigen Gebiete ausgedrückt, *„berechnet"* werden.

Die Ausführung dieses Geschäftes heisst das *„Auflösen"* der Proposition nach den als ihre „Wurzeln" zu bestimmenden Gebieten als *„Unbekannten"*. Damit sie als solche sogleich erkennbar seien, werden diese erst zu bestimmenden unbekannten Gebiete mit Vorliebe durch die Buchstaben $x, y, z, \ldots$ dargestellt, im Gegensatz zu den mit den ersten Buchstaben des Alphabets zu bezeichnenden Parametern.

Und zwar erhält man eine „besondere" oder *„partikulare"* Lösung der Proposition, wenn die Angabe von Wurzeln nur auf *eine* Weise er-folgt, wenn nur *ein* System von Wurzeln (nach anderer, etwas weiterer Auffassung, wenn nur nicht jedes solche) ermittelt worden, während die *allgemeine* Lösung vorliegt, sobald alle möglichen existirenden Wurzeln(systeme) ermittelt sind, sich dargestellt finden.

Beides fällt zusammen, es liegt schon die „allgemeine Lösung" vor, und wird der Ausdruck „partikulare Lösung" dann besser ausser Kurs gesetzt, falls überhaupt nur *ein* System von Wurzeln existirt, falls also die Unbekannten sich durch die Proposition eindeutig bestimmt erweisen.

Um dies sogleich durch ein einfaches Exempel zu illustriren, so haben wir nach Th. 43) als Auflösung der Subsumtion $x \mathrel{\underline{\in}} b$ nach der Unbekannten x den Ansatz: $x = wb$, in welchem w ein willkürliches Gebiet vorstellt, und zwar gibt bei solcher Deutung von w dieser Ausdruck alle erdenklichen Lösungen, er stellt die allgemeine Lösung vor. Wurzel ist hier jedes zwischen 0 und b liegende Gebiet x. Als partikulare Lösungen oder spezielle Wurzeln ergeben sich z. B. durch die Annahmen $w = 0$ und $w = 1$ die Werte $x = 0$ und $x = b$ (hier Minimal- resp. Maximalwert der Wurzeln). Werden mehrere solche Wurzelwerte in einundderselben Untersuchung in Betracht gezogen, so pflegt man sie auch als $x_1, x_2, \ldots$ unterscheidend zu bezeichnen. Alle Wurzeln fallen hier in *eine* $x = 0$ zusammen, und ist die Lösung eine eindeutig bestimmte, wenn von vornherein $b = 0$ bedeutete.

Dual entsprechend hat man analog $x = a + w$ als die allgemeine Lösung der Subsumtion $a \mathrel{\underline{\in}} x$, mit dem Minimalwerte $x_1 = a$ und dem Maximalwerte $x_2 = 1$, wobei für $a = 1$ wieder nur *eine* Wurzel $x = 1$ existiren wird.

Wir ersehen hieraus, wie die allgemeine synthetische Proposition fähig ist und wie ihr die Mission zufällt, gewisse Gebiete oder auch ganze Klassen von Gebieten (oder von Klassen, und Systemen solcher) — gewissen Anforderungen oder Bedingungen entsprechend — zu „*bestimmen*", dieselben aus der Mannigfaltigkeit der überhaupt denkbaren Gebiete (resp. Klassen und Gebietsysteme) auszeichnend *hervorzuheben*.

Die analytische Proposition vermag nicht, solchem Zwecke dienstbar zu sein; wird z. B. verlangt, dass $xy \mathrel{\underline{\in}} x$ sei, so dürfen wir unter x und y uns noch jedes beliebige Paar von Gebieten vorstellen.

Es tritt darnach die Aufgabe an uns heran, uns nunmehr mit dem Problem der *Auflösung von* (synthetischen allgemeinen) *Propositionen* zu beschäftigen, welche Aufgabe wir im nächsten Paragraphen *in einer für den bisherigen Propositionsbegriff erschöpfenden Weise* erledigen werden.

Zum Schlusse geben wir noch rekapitulirend eine Übersicht über die vorstehend nötig gewordenen Unterscheidungen. Die Einteilung der Propositionen, zu der wir uns veranlasst gesehen, veranschaulicht das Schema:

<table>
<tr><td colspan="6" align="center">Proposition</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">spezielle</td><td colspan="3" align="center">allgemeine</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">wahre</td><td rowspan="2">falsche, zugleich synthetische, Proposition</td><td colspan="2" align="center">synthetische</td><td rowspan="2">analytische, unbedingt wahre Proposition (Formel)</td></tr>
<tr><td>synthetische (Relation, Information)</td><td>analytische nichtssagend</td><td>absurde, unmögliche, unbedingt falsche Proposition</td><td>auflösbare, nur bedingt wahre oder falsche Prop. (Relation)</td></tr>
</table>

Bedeutet $p =$ Proposition, $b =$ speziell (erinnernd an besondere prop., aber nicht im Sinne von partikular), $g =$ allgemein (erinnernd an generalis aber nicht im Sinne von universal),

$\alpha =$ analytisch, $\sigma =$ synthetisch (Relation),
$v =$ wahr (prop. vera), $f =$ falsch (prop. falsa),
$a =$ absurd, $s =$ auflösbar (prop. solubilis),

so bestehen die Gleichungen resp. Subsumtionen:

$$p = b + g, \quad bg = 0, \quad p = \sigma + \alpha, \quad \sigma\alpha = 0,$$
$$vf = 0, \quad b \mathrel{\underline{\in}} v + f \mathrel{\underline{\in}} p, \quad g\sigma = a + s,$$
$$as = 0, \quad \alpha \mathrel{\underline{\in}} v, \quad a \mathrel{\underline{\in}} f, \quad f \mathrel{\underline{\in}} \sigma.$$

Sonach ist:

$$g \mathrel{\underline{\in}} \sigma + \alpha \quad \text{oder} \quad g = g\sigma + g\alpha,$$

ebenso

$$bv \mathrel{\underline{\in}} \sigma + \alpha \quad \text{oder} \quad bv = bv\sigma + bv\alpha,$$
$$\sigma = bv\sigma + bf + a + s, \quad \alpha = bv\alpha + g\alpha,$$

dazu

$$f = bf + g\alpha, \quad v = bv + g\alpha$$

indem hier nämlich auch

$$sv = sf = 0$$

zu gelten hat.

Nach dem Sprachgebrauch kann eine Relation, wenn sie irrtümlich als eine Formel hingestellt worden, auch als eine „falsche Formel" qualifizirt werden. In logischer Hinsicht ist dies aber nicht korrekt, denn solche „falsche Formel" oder „*vermeintliche* Formel" ist überhaupt keine „Formel"; niemals ist ein Teil von $\sigma \mathrel{\underline{\in}} g\alpha$. Man wird darum die Formeln auch nicht in richtige und falsche einteilen dürfen — so wenig wie etwa die lateinischen Deklinationen! Eine falsche Proposition dagegen ist wirklich eine Proposition, Aussage und Behauptung gewesen.

Auf die spezielle falsche Proposition

$$0 = 1$$

laufen übrigens wie schon angedeutet auch die „absurden" wesentlich hinaus und werden wir zwischen beiden späterhin keinen Unterschied machen. —

§ 21. Das Auflösungsproblem bei simultanen Gleichungen und Subsumtionen. Das Eliminationsproblem bei solchen.

Um das Einfachste und Wichtigste vorweg zu erledigen, stellen wir an die Spitze den Satz:

49$_+$) Theorem. *Die Gleichung*

$$ax + bx_1 = 0$$

ist äquivalent einer jeden der beiden Doppelsubsumtionen:

$$b \Subset x \Subset a_1 \quad \textit{resp.} \quad a \Subset x_1 \Subset b_1,$$

d. h. ausführlicher gesprochen, dem Paare von Subsumtionen:

$$b \Subset x, \quad x \Subset a_1 \quad \textit{resp.} \quad a \Subset x_1, \quad x_1 \Subset b_1$$

mit welchem nebenher dem Prinzip II gemäss gegeben ist:

$$b \Subset a_1 \quad \textit{sowie} \quad a \Subset b_1.$$

Allemal ist also die Unbekannte *zwischen dem Koeffizienten ihrer Negation und der Negation ihres Koeffizienten gelegen.*

Beweis. Nach Th. 24$_+$) zerfällt die gegebene Gleichung ohne Einbusse an Inhalt in die beiden

$$ax = 0 \quad \text{und} \quad bx_1 = 0;$$

die letztere von diesen ist aber nach Th. 38$_\times$) äquivalent der Subsumtion $b \Subset x$ und die erste äquivalent der $x \Subset a_1$, und damit ist die erste Doppelsubsumtion $b \Subset x \Subset a_1$ nicht nur bewiesen, sondern auch als mit der gegebnen Gleichung äquivalent erkannt.

Das Th. 38$_\times$) lässt aber auf vorstehende zwei Gleichungen sich auch noch auf eine zweite Weise anwenden: indem man links, statt des einen, den andern Faktor isolirt; so ergeben sich auch direkt die beiden Subsumtionen $a \Subset x_1$, $x_1 \Subset b_1$ des andern Paares, welche zu einfacherer Schreibung sich in die zweite Doppelsubsumtion $a \Subset x_1 \Subset b_1$ zusammenziehen lassen.

Überdies folgen aber auch die beiden Subsumtionen des zweiten Paares durch „Konversion mittelst Kontraposition" nach Th. 37) — unter Berücksichtigung von Th. 31) — aus denen des ersten, und ebenso also auch die eine Doppelsubsumtion aus der andern.

Endlich kann man, nachdem die erste Doppelsubsumtion wie vorstehend bewiesen, als der Gleichung

$$ax + bx_1 = 0$$

äquivalent nachgewiesen ist, die zweite auch durch blosse Buchstaben-

vertauschung aus dem damit gewonnenen Satze ableiten. Vertauschung von x mit x_1 und zugleich von a mit b führt nämlich die Gleichung

$$ax + bx_1 = 0$$

nur in sich selbst über und ist darum gleichwie in dieser Prämisse, so auch in deren Konklusionen *gestattet.*

Wir werden im Verlauf der weiteren Untersuchungen erkennen, dass das Th. 49$_+$) die im Titel des Paragraphen genannten beiden Probleme schon vollständig löst, dass wir nämlich berechtigt sind, das erste Subsumtionenpaar als die *„Auflösung"* der Gleichung

$$ax + bx_1 = 0$$

nach der Unbekannten x hinzustellen, und ebenso das zweite Subsumtionenpaar als deren „Auflösung" nach der Unbekannten x_1 (der Negation der vorigen). Und ferner wird die nebenher mit diesen Subsumtionenpaaren gegebene Relation $a \Subset b_1$, oder, was damit nach Th. 37) äquivalent sein muss: $b \Subset a_1$, oder endlich nach Th. 38$_\times$) in symmetrischer Fassung angeschrieben:

$$ab = 0,$$

als die *„Resultante"* der Elimination von x (nebst x_1) aus der Gleichung $ax + bx_1 = 0$ zu bezeichnen sein.

Auflösung nebst Resultante fasst die Doppelsubsumtion übersichtlichst zusammen.

Um alles dies zu erkennen, müssen wir uns aber jetzt in einige Betrachtungen von nicht mehr ganz so einfacher Natur vertiefen; wir müssen namentlich noch mit einer andern Form der „Auflösung" Bekanntschaft machen, welche demjenigen, was man in der Mathematik unter der Auflösung, „Wurzel" einer Gleichung versteht, näher kommt, und, wenn sie auch nicht so bequem, wie die (angeblich) im obigen Theoreme dargestellte, mit Worten zu interpretiren sein wird, doch für die Zwecke der Rechnung gewisse Vorzüge beansprucht.

Als mit einer — wie man später übersehen wird — im Grunde nur neuen Fassung des vorigen Theorems müssen wir uns auch mit dem folgenden Theoreme befreunden.

50$_+$) Theorem. *Die Gleichung*

$$ax + bx_1 = 0$$

ist äquivalent dem Gleichungenpaare:

$$ab = 0 \quad \textit{und} \quad x = bu_1 + a_1 u,$$

worin u ein unbestimmtes Gebiet vorstellt.

Der Beweis besteht aus mehreren Teilen.

Im ersten Teile gilt es zunächst zu zeigen, dass $ab = 0$ aus der vorausgesetzten Gleichung folgt. Dies findet sich bereits oben auf eine erste Weise bewiesen. Ich will dafür aber noch einen zweiten Beweis geben:

α) Gilt für gewisse Werte von a, b, x die erste Gleichung, so kann man dieselbe beiderseits einmal mit a, ein andermal mit b multipliziren und die so sich ergebenden Gleichungen überschiebend addiren. Dadurch erhält man:

$$ax + abx_1 + abx + bx_1 = 0.$$

Aber die beiden äussersten Glieder linkerhand geben nach der Voraussetzung (zusammen) null. Deshalb vereinfacht sich unser Ergebniss zu:

$$ab(x_1 + x) = 0, \quad \text{oder} \quad ab = 0,$$

womit gezeigt ist, dass die zweite Gleichung aus der ersten folgt.

Sollte nun also diese zweite Gleichung $ab = 0$ — wir mögen sie etwas vorgreifend schon die *„Resultante“* nennen — von den Koeffizienten a und b der ersten *nicht* erfüllt sein, so kann auch die erste unmöglich gelten, sie kann dann durch keinen Wert von x erfüllt werden — denn, wenn sie für ein gewisses x richtig wäre, so müsste, wie gezeigt, auch die zweite Gleichung gelten, entgegen der soeben gemachten Annahme.

β) Nehmen wir sonach die Gleichung $ab = 0$ als erfüllt an, so muss ferner — was auch immer für ein Gebiet unter u verstanden werden möge — der durch die dritte Gleichung gegebene Ausdruck $bu_1 + a_1u$, für x in die erste Gleichung eingesetzt, dieselbe erfüllen, d. h. jedes durch die dritte Gleichung dargestellte Gebiet x ist dann eine richtige *„Wurzel“* unsrer ersten Gleichung. Denn *die Probe stimmt:* ist

$$x = bu_1 + a_1u,$$

so folgt

$$x_1 = b_1u_1 + au$$

nach Th. 46_+) und 31), und die erstere Gleichung mit a, die letztere mit b durchmultiplizirt liefert beim Addiren:

$$ax + bx_1 = abu_1 + abu = ab(u_1 + u) = ab \cdot 1 = ab = 0$$

wie behauptet worden.

Man sieht jedoch, dass die Probe für das Erfülltsein der Gleichung durch die angebliche Lösung nur insofern stimmt, als die Resultante eben erfüllt ist, denn durch die Einsetzung verwandelte sich die Gleichung zunächst in jene Resultante.

Ohne Rücksicht auf das Erfülltsein oder Nichterfülltsein dieser letzteren könnte man daher mit Herrn Voigt definiren:

„Lösung“ (oder „Wurzel“) einer Gleichung nennen wir einen Ausdruck, welcher, für die Unbekannte in die Gleichung eingesetzt, dieselbe auf ihre Resultante reduzirt (genauer: auf die Resultante der Elimination jener Unbekannten aus ihr).

γ) Umgekehrt lässt aber auch jedes die (erste) Gleichung

$$ax + bx_1 = 0$$

erfüllende x sich durch den Ausdruck $bu_1 + a_1u$ darstellen, indem es z. B. genügt, unter u sich x selbst vorzustellen, um die Gleichung

$$x = bu_1 + a_1u$$

zu einer analytischen oder richtigen Identität zu machen.

Alsdann wird auch u_1 durch x_1 zu ersetzen sein. Nach der Annahme ist aber, wie unter Th. 49_+) bereits erwähnt, auch schon für sich: $ax = 0$ und $bx_1 = 0$; sonach folgt, wenn für bx_1 erst 0, für 0 dann ax geschrieben wird (mit ähnlichem Kunstgriff, wie S. 425):

$$bu_1 + a_1u = bx_1 + a_1x = 0 + a_1x = ax + a_1x = (a + a_1)x = 1 \cdot x = x,$$

was zu zeigen war und auch nach Th. 49_+) mittelst Buchstabenvertauschung auf das Hülfstheorem zu Th. 47_+) hätte zurückgeführt werden können.

Wir sind hienach berechtigt den Ausdruck, welchen die dritte Gleichung

$$x = bu_1 + a_1u$$

für die Unbekannte liefert (oder auch diese Gleichung selber) als *„die allgemeine Lösung“* der Gleichung hinzustellen.

Hiermit ist dargethan, dass wenn die erste Gleichung gilt, dann auch die zweite gelten muss (vergl. α) und die dritte wenigstens für ein gewisses u (vergl. γ), woneben unter β) gezeigt ist, dass wenn die zweite Gleichung nebst der dritten (für irgend ein u) gilt, dann auch die erste Gleichung gelten muss.

D. h. das ganze Theorem ist bewiesen, und mag man merken: Die Gleichung ist stets äquivalent ihrer allgemeinen Lösung *nebst* der Resultante.

Jener Satz ist das Haupttheorem der bisherigen Theorie. Er lehrt (noch unmittelbarer wie der vorige) bezüglich irgend einer Unbekannten x die im Titel dieses Paragraphen angedeuteten Probleme lösen. Bei der Wichtigkeit desselben müssen wir noch einige Zeit bei seiner Betrachtung verweilen.

In früher geschilderter Weise lässt nämlich jedes System von gleichzeitig geltenden oder zu erfüllenden Gleichungen (oder nach Belieben auch Subsumtionen) sich zusammenziehen *in* und ersetzen *durch* eine einzige Gleichung mit der rechten Seite 0, die „vereinigte Gleichung" des Systemes.

Kam in dem Systeme neben irgend welchen andern Gebietsymbolen ein Gebiet x vor, so wird die linke Seite der vereinigten Gleichung eine „Funktion" von x sein (und auch wenn jenes *nicht* der Fall war, würde sogar sie als Funktion von x sich doch ansehen lassen). Diese Funktion lässt sich nach Th. 44_+) durch x und x_1 linear und homogen darstellen in der Form $ax + bx_1$, sodass die erste Gleichung in unserm Theoreme die Stelle vertritt des allgemeinsten Systemes von simultanen Gleichungen und eventuell Subsumtionen, in welchen neben vielleicht noch andern eine Unbekannte x vorkommt.

Eine „Unbekannte" mögen wir das Gebiet x nennen auch dann, wenn es bekannt sein sollte, indem man doch immer die Frage aufwerfen kann, welche Werte sich dem x noch beilegen lassen würden, ohne dass die Propositionen des Systems zu gelten aufhören, indem man, m. a. W. die Forderung stellen kann, die vereinigte Gleichung, somit auch jenes System simultaner Propositionen nach x *„aufzulösen"*, und zwar sie *vollständig* aufzulösen, mithin sämtliche „Wurzeln" derselben anzugeben. Durch den einen vielleicht schon bekannten Wert von x ist jene Frage doch im Allgemeinen noch nicht von vornherein erledigt.

Die Auflösung einer Gleichung oder eines Systems setzt die Vorfrage nach deren Auflösbarkeit als erledigt voraus. Der Vernünftige wird ja nichts Unmögliches unternehmen.

Unter α) ist aber dargethan, dass in Bezug auf die Auflösung der vereinigten Gleichung $ax + bx_1 = 0$ nach x diese Frage bald zu bejahen, bald zu verneinen ist:

δ) *Die Gleichung ist auflösbar*, es gibt Werte, welche für x eingesetzt, dieselbe erfüllen, d. h. sie besitzt Wurzeln *immer dann, wenn* zwischen den Koeffizienten derselben die Relation $ab = 0$ besteht, d. h. wenn *ihre Koeffizienten disjunkt sind; aber auch nur dann.*

Denn wenn diese zweite Gleichung unsres Theorems nicht erfüllt ist, haben wir gesehen, kann auch die erste Gleichung für keinen Wert von x bestehen, sie hat dann überhaupt keine Wurzeln und ist dieselbe, sowie das ihr äquivalente System von Propositionen in diesem Falle „unauflösbar" und „absurd" zu nennen. Unter den Propositionen des Systems werden dann sich entweder solche finden, die für sich allein schon „absurd" und durch kein x erfüllbar sind, oder die Pro-

positionen sind wenigstens *„unvereinbar"*, *„inkonsistent"*, sie vertragen sich nicht miteinander.

Die Forderung, die vereinigte Gleichung aufzulösen, überhaupt, sie für irgend eine Bedeutung des Symboles x als gültig anzuerkennen, bleibt es hier unmöglich, zu erfüllen.

Die Gleichung $ab = 0$ erscheint hienach als das *Kennzeichen für die Auflösbarkeit* der Gleichung $ax + bx_1 = 0$ nach der Unbekannten x.

Nicht auflösbar war beispielsweise die Gleichung $1 \cdot x + 1 \cdot x_1 = 0$; sie selbst sowol als ihre „Resultante" lief auf die *absurde* Forderung $1 = 0$ hinaus; der Ansatz einer solchen Gleichung $x + x_1 = 0$ ist ganz und gar *unzulässig.*

Nicht nur ist $ab = 0$ *eine* unerlässliche, *notwendige* Bedingung sondern auch *die hinreichende* Bedingung für diese Auflösbarkeit.

Ist sie nämlich erfüllt, so gibt die dritte Gleichung unsres Theorems: $x = bu_1 + a_1u$ für jede Bedeutung des u eine richtige Wurzel und für ein von 0 bis 1 (im Klassenkalkul von „nichts" bis „alles") variirendes u die sämtlichen Wurzeln der ersten Gleichung an.

Diese hat hienach, falls sie auflösbar ist, im Allgemeinen *unendlich viele* (eine unbegrenzte Anzahl oder Menge von) *Wurzeln;* ihre Lösung nach x ist (unendlich-) *vieldeutig.* Geleistet wird die verlangte Auflösung der ersten Gleichung dann also durch die dritte Gleichung des Theorems, und zwar ausschliesslich und vollständig, indem dieselbe für x einen allgemeinen Ausdruck angibt, welcher sämtliche Wurzeln der erstern und nur solche umfasst.

Als die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Unbekannte x überhaupt einen Wert oder Werte habe, könnte man die Gleichung $ab = 0$ füglich auch die *„Wertigkeits"*- oder *„Valenzbedingung"* für x nennen. Nur wenn sie erfüllt war, konnte es ein die Gleichung $ax + bx_1 = 0$ erfüllendes Gebiet x geben, war x eines Wertes fähig, und wenn sie erfüllt ist, musste es auch ein solches (eventuell mehrere solche) Gebiete geben, denn im letzteren Falle erwies sich jedes durch den Ausdruck $bu_1 + a_1u$ dargestellte Gebiet als eines von der verlangten Eigenschaft.

ε) In Anbetracht, dass diese Gleichung $ab = 0$ den Namen x der Unbekannten überhaupt nicht enthält, kann man sie aber, wie schon eingangs angedeutet, auch noch unter einen andern Gesichtspunkt bringen: man kann sie bezeichnen als *„Resultante der Elimination* des x aus der ersten Gleichung $ax + bx_1 = 0$" unsres Theorems.

So oft nämlich eine Gleichung oder überhaupt ein System von Propositionen gegeben ist, in welchen eine Gruppe $x, y, \ldots$ von Symbolen eventuell vorkommt („eventuell", d. h. nicht notwendig durchaus, vielleicht sogar überhaupt nicht), und man leitet daraus durch logische Schlüsse solche (eventuell neue) Propositionen ab, welche jene Symbole $x, y, \ldots$ *nicht* enthalten, in welchen deren Name gar nicht vorkommt, so nennt man diese letztern Propositionen (sowol sie einzeln, als auch das System derselben) *„ein Ergebniss der Elimination von x, $y, \ldots$ aus* jenem gegebenen Propositionensysteme". Man sagt: man habe die Symbole $x, y, \ldots$ aus dem Systeme *herausgeworfen* oder *„eliminirt"*.

Es gibt hienach im Allgemeinen *mehrere* Eliminationsergebnisse für das nämliche Propositionensystem und in Bezug auf die nämlichen Symbole $x, y, \ldots$ als zu eliminirende Gebiete oder *„Eliminanden"*.

In unserm Falle würde z. B. auch $abc = 0$ ein solches sein, was immer c bedeuten mag.

Doch ist zu bemerken, dass man diejenigen von den durch die Elimination gewonnenen Propositionen, welche etwa sich als „analytische" Propositionen herausstellen sollten, fallen lässt, und sie endgültig, definitiv dem Eliminationsergebnisse nicht zuzuzählen pflegt aus dem Grunde, weil man sonst immer eine unbegrenzte Menge von „nichtssagenden" Propositionen mit in's Auge zu fassen hätte. So dürften beispielsweise die analytischen Propositionen $0 \mathrel{\substack{\subset\\=}} a$, $b \mathrel{\substack{\subset\\=}} 1$, $ab \mathrel{\substack{\subset\\=}} a$, $(ab)_1 = a_1 + b_1$, etc. unserem Eliminationsergebniss $ab = 0$ nicht zugezählt werden, obwol auch sie sich als Aussagen über a, b darstellen, die x nicht enthalten. M. a. W.:

Gleichwie bei dem als *„Basis" der Elimination* dienenden Systeme von gegebenen Propositionen diese nur in Betracht kommen, sofern sie Relationen darstellen, dagegen beiseite zu lassen sein werden, sobald sie etwa analytische Propositionen sein sollten, so fallen auch als Eliminationsergebnisse nur Relationen in's Gewicht.

Es ist nun eine gelegentlich sehr wichtige Frage, welche Relationen etwa, *unabhängig* von den Werten der Symbole $x, y, \ldots$ *zwischen den übrigen* im gegebenen Propositionensysteme vorkommenden Gebietsymbolen bestehen werden, sobald dieses System gilt, m. a. W. welche Relationen diese übrigen Symbole erfüllen, zu einander eingehen müssen, damit das Propositionensystem überhaupt bestehen könne — für irgend ein Wertsystem der Eliminanden.

Ein solches Eliminationsergebniss, durch welches diese Frage *„vollständig"* beantwortet wird (in sogleich noch näher präzisirtem Sinne), heisst *„das volle Eliminationsergebniss"* oder schlechtweg *„das* Eliminationsresultat", und sofern es nicht als ein System von Rela-

tionen sich darstellt, vielmehr in eine einzige Relation zusammengezogen ist, auch *„die Resultante der Elimination"*. Dass die Anwendung des bestimmten Artikels hiebei gerechtfertigt ist, wird demnächst erhellen.

Es bezeichne B kurz das als Basis der Elimination von $x, y, \ldots$ gegebene System von Propositionen (und zwar Relationen), ebenso bezeichne R ein Eliminationsergebniss. Dasselbe wird hienach ein System von Relationen sein (oder auch eine einzige Relation), das aus B folgt, jedoch die in B (vielleicht) vorkommenden Symbole x, $y, \ldots$ nicht enthält; R kann nur andere, in B ebenfalls vorkommende Symbole, wie $a, b, \ldots$ enthalten (nebst vielleicht noch ganz neuen Symbolen, die auch in B nicht vorgekommen waren, wie es zum Beispiel unbestimmte Parameter sein würden).

Nach der beabsichtigten Erklärung ist R dann „ein volles Eliminationsergebniss" zu nennen, wenn, sobald R erfüllt ist, es sicher mindestens *ein* Wertsystem von $x, y, \ldots$ gibt, für welches auch B erfüllt sein muss.

Ist nun auch R' „ein volles Eliminationsergebniss" in diesem Sinne, so erkennt man leicht, dass die beiden Ergebnisse R und R' logisch äquivalent sind, dass sie einander gegenseitig bedingen müssen: wann R erfüllt ist, wird auch R' erfüllt sein und ebenso folgt umgekehrt aus der Geltung von R' auch die von R; der Fall, dass zwar eines von den beiden Ergebnissen, aber nicht das andere, erfüllt ist, kann nicht vorkommen.

Denn wäre zum Beispiel R erfüllt, während R' *nicht* erfüllt ist, so gäbe es aus dem erstern Grunde ein Wertsystem der $x, y, \ldots$ für welches auch B erfüllt ist. Da für dieses nun also B gilt, so muss auch R' gelten, indem laut Voraussetzung R' als ein Eliminationsergebniss aus B *folgte*. Das Erfülltsein von R' widerspräche also der soeben gemachten Annahme seines Nichterfülltseins, welche hienach unzulässig war, zu verwerfen ist. Etc.

Wir sind darum berechtigt, R' eine blosse Umschreibung von R zu nennen; zu sagen R und R' seien wesentlich *dasselbe* Eliminationsergebniss — vielleicht nur in verschiedenen Formen oder Ausdrucksweisen. Wir dürfen R (sowie auch R') als *„das* Resultat der Elimination" schlechthin bezeichnen.

In dem besonderen Falle, wo das Propositionensystem B die Eliminanden $x, y, \ldots$ gar nicht enthalten sollte, wo von vornherein kein einziger von diesen in ihm vorkäme, ist leicht zu sehen, dass B selber das Resultat der Elimination von $x, y, \ldots$ aus ihm sein muss; es fällt dann mit R zusammen und ist *seine eigene Eliminationsresultante.* Denn erstens ist es „ein“ Eliminationsergebniss, weil es $x, y, \ldots$ nicht mehr (genauer: ohnehin nicht) enthält und doch „aus B folgt“, nämlich seine Geltung mit der von B gegeben ist (Wenn B gilt, so gilt B — vergl. Prinzip I im Aussagenkalkul); und zweitens ist es das *volle* Ergebniss, indem, sobald es erfüllt ist, sonach B gilt, es auch Wertsysteme von $x, y, \ldots$ geben muss, „für welche B gilt“, dann nämlich B ohnehin gelten muss, welche Wertsysteme man auch immer unter $x, y, \ldots$ verstehen mag. — Es versteht sich, dass in solchem Grenzfalle von Eliminiren nur in uneigentlichem Sinne zu sprechen ist, sofern man Jemanden, der gar nicht da ist, auch nicht hinauswerfen kann.

Aber auch wenn B von vornherein die Eliminanden $x, y, \ldots$ oder wenigstens einige derselben enthielt, kann es doch mit der Eliminationsresultante R logisch äquivalent sein — und dies bildet noch eine zweite Art von besondern Fällen bemerkenswerten Charakters.

Trifft solches zu, sodass also nicht nur R aus B folgt, sobald B nur für irgend ein Wertsystem der $x, y, \ldots$ erfüllt ist, schlechthin gilt, sondern auch, wenn R gilt, B unbedingt gelten muss, mithin gelten muss *für jedes beliebige* Wertsystem der Eliminanden $x, y, \ldots$, so sagt man, dass letztere *„von selbst aus B herausfallen“*. Dann kann ja in der That B durch R ganz und gar ersetzt werden. —

Ist die volle Resultante zu einer Gleichung (Basis) nur eine analytische, Formel oder Identität, wie $0 = 0$, so wird man nach dem unter ε) Bemerkten auch sagen dürfen: die Gleichung liefere, oder habe, *keine* Resultante.

Zu allen diesen vorerst theoretisch als möglich erkannten Vorkommnissen wird uns die Praxis Beispiele liefern.

Durch die *Elimination* entlastet sich der Geist, indem er auf seine Kenntnisse in Hinsicht der Eliminanden zeitweilig verzichtet, dieselben fallen lässt, von ihnen absieht, abstrahirt, jeweils von solchen Erkenntnisselementen, welche für die Verfolgung bestimmter Erkenntnisszwecke unwesentlich, belanglos erscheinen und deren Beibehaltung also ihn hiebei nur als ein Ballast zu beschweren vermöchte.

ζ) Kehren wir nach diesen allgemeinen, nämlich auf jedes System von Propositionen, Aussagen und jede Gruppe von Symbolen anwendbaren (in gleicher Weise auch auf die Relationen der numerischen Mathematik übertragbaren) Betrachtungen, durch welche der Begriff des Eliminationsresultates festgelegt ist, zurück zu unserm Theorem 50_+).

Hier wird in der That die Gleichung $ab = 0$ nun als die volle

Resultante der Elimination von x aus der Gleichung $ax + bx_1 = 0$ zu bezeichnen sein, sintemal, wenn jene erfüllt ist, es nach β) auch immer Werte von x gibt welche diese erfüllen.

Die erste Gleichung des Theorems exemplifizirt das B, die zweite das R der obigen allgemeinen Betrachtungen.

Sollte die vereinigte Gleichung das x gar nicht enthalten, so wird sie, wenn wir a ihre linke Seite nennen, die Form $a = 0$ haben. Nach Früherem können wir ihr Polynom gleichwol nach x „entwickeln“, wodurch sie wird:

$$ax + ax_1 = 0,$$

und wenn wir jetzt x wieder regelrecht eliminiren, so ergibt sich $aa = 0$ oder $a = 0$ als die Resultante — somit in der That wiederum die ursprüngliche Gleichung in Bestätigung des oben Gesagten.

Ungeachtet der durchgängigen Übereinstimmung der Begriffe von „Elimination“, „Resultante“, „Wurzeln“ und „Auflösung“ in Bezug auf Gleichungen des arithmetischen, wie auf Propositionen des identischen Kalkuls gestaltet sich die Anwendung dieser Begriffe in beiden Disziplinen doch sehr verschieden!

In der Arithmetik erweist sich das Eliminationsproblem sowol als das Auflösungsproblem in bestimmter Weise *abhängig von der Anzahl* der zur Verfügung stehenden („von einander unabhängigen“) Gleichungen in ihrem Verhältniss zur Anzahl der zu eliminirenden, beziehungsweise als Unbekannte zu berechnenden Zahlgrössen. Im identischen Kalkul, in Bezug auf Gebiete, ist dieses, wie sich zeigte, *durchaus nicht der Fall.*

In der Arithmetik kann man aus *einer* Gleichung überhaupt nichts eliminiren — sofern die Resultante wieder eine Gleichung werden soll. [Allerdings liesse sich z. B. im Gebiet der positiven Zahlen eine Ungleichung, wie $a > b$, auch als die Resultante der Elimination des x aus der Gleichung $a = b + x$ hinstellen.]

Man ist nicht im stande, aus einer (synthetischen) Gleichung eine andre abzuleiten, welche eine oder mehrere Buchstabenzahlen, die in der erstern vorkamen, nicht mehr enthält, wofern diese nicht nach den Regeln der Arithmetik von selbst aus ihr herausfallen.

Damit Elimination möglich sei, dürfen erstens die gegebenen Gleichungen einander nicht widersprechen und muss zweitens die Anzahl der „unabhängigen“ Gleichungen (d. h. solcher von welchen keine aus den übrigen folgt), um eins grösser sein als die Anzahl der Eliminanden.

Um eine Grösse zu eliminiren sind also in der Arithmetik mindestens zwei Gleichungen erforderlich, für n Grössen mindestens $n + 1$ Gleichungen.

Im identischen Kalkul kann schon aus *einer* Gleichung jedes beliebige Gebietsymbol eliminirt werden, und gleichwie eines, so auch mehrere nacheinander oder auch a tempo, auf einmal (eine Aufgabe die wir noch zu betrachten haben werden). *Hier ist das Eliminationsproblem ganz allgemein lösbar.* Aus jeder beliebigen Menge von Propositionen lässt sich eine beliebige Gruppe von Symbolen jederzeit eliminiren. Nur wird die Resultante nicht immer eine Relation sein, sondern manchmal nur eine analytische Proposition, eine Identität.

Soll in der Arithmetik ein System von Gleichungen nach einem System von Unbekannten auflösbar sein, so darf die Anzahl der unabhängigen Gleichungen nicht grösser sein, als die Anzahl der Unbekannten und dürfen auch keine den andern widersprechende Gleichungen mit vorliegen.

Im identischen Kalkul darf sie beliebig gross sein.

Eine Ähnlichkeit zwischen beiden Disziplinen erblicken wir aber darin, dass hier wie dort das Auflösungsproblem nicht unbedingt, nicht in allen Fällen lösbar ist.

In der Arithmetik erscheinen durch die Gleichungen die Unbekannten nicht völlig bestimmt, sie bleiben teilweise willkürlich, die Auflösungen sind vieldeutige, jedenfalls dann, wenn (Auflösbarkeit vorausgesetzt) die Anzahl der Gleichungen kleiner ist, wie die der Unbekannten.

Im identischen Kalkul ist die Auflösung in der Regel eine mehrdeutige, auch schon bei einer Gleichung ersten Grades mit *einer* Unbekannten, und mit andern Problemen als mit *einer* Gleichung *ersten Grades* können wir hier zunächst überhaupt nicht zu thun haben.

η) Um für die Anwendungen das Th. 50_+) sich einzuprägen, merke man (einerseits):

Die Resultante der Elimination eines Symbols, *einer Unbekannten x, aus einer* rechts auf 0 gebrachten links nach dieser entwickelten *Gleichung ergibt sich, indem man das Produkt der Koeffizienten* von dieser Unbekannten und ihrer Negation *gleich* 0 *setzt.*

Man kann aber — auf zwei Arten — der Gleichung eine solche Form geben, dass *die Elimination sich schon vollzieht, indem man einfach den Eliminanden und seine Negation ausstreicht, unterdrückt.*

Einmal nämlich trifft dies zu, wenn man die linke Seite der Gleichung als Produkt schreibt, sie in ihre „letzten Faktoren“ zerlegt. So wird sie:

$$(a + x_1)(b + x) = 0$$

und unterdrückt man hier die zweiten Glieder der Binome, so ergibt sich in der That die Resultante:

$$ab = 0.$$

Ebenso trifft es zu, wenn man, *die linke Seite wie früher entwickelt lassend, die Gleichung rechts auf* 1 *bringt* — vergl. Th. 32).

Für $ax + bx_1 = 0$ haben wir dann zu sagen:

$$a_1x + b_1x_1 = 1$$

und wird durch Löschen von x und x_1 hier in der That entstehen:

$$a_1 + b_1 = 1,$$

eine Gleichung die mit der Resultante $ab = 0$ nach Th. 32 und 36) äquivalent ist.

Stellte man aber, während die Gleichung rechts auf 1 gebracht ist, zugleich auch die linke Seite als Produkt dar, schriebe man also:

$$(a_1 + x_1)(b_1 + x) = 1,$$

so träfe die letzte Regel nicht mehr zu, ebensowenig, wie es bei der ursprünglichen Form der Gleichung

$$ax + bx_1 = 0$$

der Fall war — indem ja nach derselben fälschlich $a_1b_1 = 1$, resp. $a + b = 0$ entstehen würde. —

Ein bequemeres Eliminationsverfahren als das Fortlassen, *Auslöschen*, die Tilgung der Eliminanden ist nun überhaupt nicht denkbar.*)

Es ist deshalb bei Eliminationsaufgaben mitunter vorteilhaft zu operiren mit rechts auf 1 (anstatt auf 0) gebrachten Gleichungen (indem man links Aggregate, nach wie vor, Produkten vorzieht). Besonders wird dies — auch noch aus einem andern Grunde: der Interpretation halber — im Aussagenkalkul sich empfehlen.

ϑ) Lautet

$$f(x) = 0$$

eine nach x aufzulösende Gleichung, so entsteht durch Entwickelung des Polynoms derselben nach x gemäss Th. 44_+):

$$f(1) \cdot x + f(0) \cdot x_1 = 0$$

und ist daher:

$$f(0) \cdot f(1) = 0$$

die Resultante der Elimination von x und zugleich die Bedingung für die Auflösbarkeit der Gleichung nach x und für ihre mögliche Geltung.

Die Auflösung selbst würde heissen:

$$x = f(0) \cdot u_1 + f_1(1) \cdot u.$$

ι) Von praktischem Nutzen ist noch diese Bemerkung. Wir setzten beim Eliminiren bisher das Polynom der Gleichung als bezüglich des Eliminanden x (durch Entwickelung nach demselben) *homogen* gemacht voraus. Von dieser Voraussetzung ist es vorteilhaft, sich unabhängig zu machen. Ist nämlich:

$$ax + bx_1 + c = 0$$

die Gleichung, aus welcher x zu eliminiren ist, wo die linke Seite als nicht homogene lineare Funktion jetzt ein Absolutglied c enthält, so würde diese Gleichung, homogen gemacht, lauten:

$$(a + c)x + (b + c)x_1 = 0$$

und gäbe nach der Regel:

*) Die Bemerkung ist wol, unter Leitung von Mr. Peirce, zuerst von Miss Ladd gemacht und von Mr. Mitchell noch weiter ausgedehnt worden.

$$(a + c)(b + c) = 0$$

als die Resultante. Diese vereinfacht sich aber zu:

$$ab + c = 0 \quad \text{oder} \quad c + ab = 0.$$

Daher kann man merken: *Das Absolutglied* (Aggregat der Glieder welche x und x_1 nicht zum Faktor haben) *geht jeweils unverändert in die Resultante über;* es braucht demselben nur noch das Produkt *der* Koeffizienten hinzugefügt zu werden, mit welchen x und x_1 ursprünglich behaftet sind.

$\varkappa$) Ist nun bei einer Gleichung $ax + bx_1 = 0$ die Bedingung für ihre Zulässigkeit oder Auflösbarkeit, die Valenzbedingung für x oder Resultante seiner Elimination, erfüllt, so handelt es sich auch noch darum, den allgemeinsten Ausdruck für die Unbekannte oder Wurzel x der Gleichung jederzeit richtig herstellen zu können. Es ist zu dem Ende nicht praktisch, etwa nur die Formel

$$x = bu_1 + a_1 u$$

auswendig zu lernen, schon weil in einer solchen die für die Unbekannte (x), die Koeffizienten (a, b) und den Parameter (u) zugrunde gelegte Bezeichnung sehr häufig kollidirt, in Konflikt gerät, nicht stimmt mit denjenigen Bezeichnungen welche *gegeben* sind in den Problemen auf die der Satz angewendet, für welche er verwertet werden soll. Es empfiehlt sich deshalb, dass man die durch die Formel der Auflösung (allerdings am kürzesten) ausgedrückte Regel sich obendrein in Worten einpräge, und merke man darum (andrerseits):

Um nach einer Unbekannten eine Gleichung aufzulösen, nachdem dieselbe rechts auf 0 gebracht, links nach der Unbekannten entwickelt und als auflösbar erkannt ist, *setze man die Unbekannte gleich der Negation ihres Koeffizienten multiplizirt mit einem unbestimmten Gebiete, plus dem Koeffizienten ihrer Negation mal der Negation dieses Gebietes.*

Für die Gleichung

$$ax + bx_1 = 0, \quad \text{wo} \quad ab = 0$$

ist, hat man also die Wurzeln x, neben welchen auch deren Negation angegeben werden mag:

$$\varkappa) \qquad x = a_1 u + bu_1, \qquad x_1 = au + b_1 u_1,$$

worin man wegen der Willkürlichkeit von u natürlich auch u und u_1 hätte vertauschen können.

λ) Die Auflösungen lassen sich nun aber auch noch in folgenden Formen schreiben:

$$\lambda) \qquad x = b + a_1 u = a_1(b + u), \qquad x_1 = b_1(a + u_1) = a + b_1 u_1,$$

welche dadurch bemerkenswert sind, dass sie ein Operationsglied weniger enthalten, mithin einfacher erscheinen.

Um zunächst diese beiden neuen Formen für x *aufeinander* zurückzuführen, bemerke man, dass wegen $ab = 0$ hier

$$b = 1 \cdot b = (a + a_1)b = ab + a_1 b = 0 + a_1 b = a_1 b,$$

oder auch rückwärts: $a_1 b = b$ sein muss; und ähnlich auch, dass $ab_1 = a$.

Mit der vorhergehenden nach u homogenen Form $\varkappa$) bringt man sodann die Darstellung λ), z. B. $x = b + a_1 u$ in Zusammenhang, indem man rechts nach u entwickelt, wodurch sich ergibt:

$$x = b(u + u_1) + a_1 u = bu_1 + (b + a_1)u.$$

Nach Th. 33_+) Zusatz ist aber jetzt $b + a_1 = a_1 + ab = a_1 + 0 = a_1$ — wie denn überhaupt wegen $a \mathrel{=\!\!\!\in} b_1$ oder $b \mathrel{=\!\!\!\in} a_1$ hier:

$$ab_1 = a, \qquad a_1 b = b, \qquad a_1 + b = a_1, \qquad a + b_1 = b_1$$

schon nach Anm. 2 zu Th. 43) folgt — und erhalten wir die frühere Form

$$x = bu_1 + a_1 u$$

aus der letzten durch Einsetzung jenes Wertes a_1 für $b + a_1$. Umgekehrt erhält man aus dieser jene, indem man a_1 durch das wegen $ab = 0$ ihm gleiche $a_1 + b$ ersetzt und darnach die Glieder mit b zusammenzieht, d. h. die eben vollzogene Umformung nun rückwärts ausführt.

μ) Nach *allen* in ihr vorkommenden Symbolen rechterhand entwickelt lautet unsre Lösung:

$$\mu) \quad \begin{cases} x = (ab + a_1 b)u_1 + (a_1 b + a_1 b_1)u = a_1 bu_1 + (a_1 b + a_1 b_1)u, \\ x_1 = (ab_1 + a_1 b_1)u_1 + (ab + ab_1)u = (ab_1 + a_1 b_1)u_1 + ab_1 u, \end{cases}$$

wie sich aus $\varkappa$) leicht nach Th. 44_+) ergibt, am bequemsten aber direkt, indem man in $\varkappa$) den einen (mit b nicht behafteten) Term mit $b + b_1$ den andern (von a noch freien) Term mit $a + a_1$ multiplizirt. Die Ausdrücke μ) könnten hinwiederum auch in:

$$\nu) \quad \begin{cases} x = a_1 b + a_1 b_1 u = a_1(b + ub_1), \\ x_1 = ab_1 + a_1 b_1 u_1 = b_1(a + u_1 a_1) \end{cases}$$

zusammengezogen werden, wobei sie nach a, b noch entwickelt blieben.

ξ) Einen *heuristischen* Beweis, eine *„Herleitung"*, der die Auflösung leistenden Formel λ) — somit auch $\varkappa$) — habe ich in meinem Operationskreis[2] gegeben wie folgt.

Soll $ax + bx_1 = 0$ sein, während die Bedingung $ab = 0$ für den Bestand und die Auflösbarkeit dieser Gleichung erfüllt ist, so muss, wie schon unter 49_+) erwähnt, für sich:

$$ax = 0 \quad \text{und} \quad bx_1 = 0$$

sein. Der ersten Forderung genügt man nach Th. 43) Zusatz auf die allgemeinste Weise, indem man $x = va_1$ setzt, wo v ein unbestimmtes Gebiet bedeutet. Darnach folgt dann

$$x_1 = v_1 + a, \qquad bx_1 = bv_1 + ab = bv_1 + 0 = bv_1$$

und um nun auch noch die zweite Forderung zu erfüllen, braucht man nur mehr v_1 so zu bestimmen, dass $bv_1 = 0$ ist. Darnach folgt in gleicher Weise:

$$v_1 = wb_1, \qquad v = w_1 + b,$$

wo w_1 ebenso, wie ursprünglich w, ein unbestimmtes Gebiet vorstellt. Hiermit ist gefunden:

$$x = (w_1 + b)a_1$$

und dies ist die eine der unter λ) für die Lösung angegebenen Formen, wenn man noch den Namen w_1 des unbestimmt bleibenden Gebietes durch den Namen u ersetzt. Für dieses $x = a_1(u + b)$ stimmt nun, wie schon (indirekt) erkannt (und auch wieder direkt leicht nachweisbar wäre) die Probe: es erfüllt die aufzulösende Gleichung bei beliebigem u.

Das Ergebniss muss darnach die vollständige Auflösung darstellen. Denn jede Wurzel x der Gleichung muss wie erkannt diese Form haben, und jedes x von dieser Form ist eine Wurzel der Gleichung.

Übrigens ist zu bemerken, dass unser Th. 50_+) obwol in den vorliegenden Gestalten erst von mir ausgesprochen, hergeleitet und bewiesen, im Grunde doch nichts anderes ist, als das Haupttheorem im Boole'schen Werke[4], nur gereinigt von allen arithmetischen Beimengungen und von der spezielleren Boole'schen mitausgedehnt über die allgemeinere Jevons'sche Addition, demgemäss auch nicht unerheblich vereinfacht.

Im Gegensatz zu noch andern eventuell zu besprechenden Methoden zur Bewältigung des Auflösungs- und Eliminationsproblemes werde ich daher die auseinandergesetzte (nach einem auch schon von andern Seiten vorliegenden Vorgange) „die von mir modifizirte Boole'sche Methode" nennen („Boole's method, as modified by Schröder"). Bezüglich dessen unmodifizirter Methode vergleiche § 25, Ende.

o) Beabsichtigen wir Anwendungen des Theorems 50_+) im *Klassenkalkul*, so muss noch näher erwogen werden, *wie daselbst der unbestimmte Parameter u zu interpretiren,* wie also die Formel der Auflösung:

$$x = bu_1 + a_1 u \qquad \text{oder} \qquad x = b + ua_1$$

in der Wortsprache darzustellen sein wird.

Jene Formel unmittelbar in diese zu übertragen, gemäss den in § 8 und 16 erörterten Regeln, erscheint misslich, in Anbetracht, dass u allemal einen unbestimmten Bruchteil: „nichts, oder einiges (etwas), oder das ganze (alles)" von der mit ihm multiplizirten Klasse heraus-

schneiden wird. Ein Ausdruck wie: „was b und nicht etwas Gewisses oder auch nicht a aber gleichzeitig jenes Gewisse ist" entbehrt doch wol der wünschenswerten Durchsichtigkeit. Auch passen Subsumtionen sich bequemer der Wortsprache an, als wie Gleichungen.

Dem Mangel wird leichtlich abgeholfen, indem man auf die Form 49_+) des Theorems 50_+) zurückgeht.

Jenes Theorem statuirte, dass die Gleichung

$$ax + bx_1 = 0$$

auch äquivalent ist dem Paare der Subsumtionen:

$$b \mathrel{\underline{\in}} x \quad \textit{und} \quad x \mathrel{\underline{\in}} a_1,$$

oder — noch einfacher geschrieben — der Doppelsubsumtion:

$$b \mathrel{\underline{\in}} x \mathrel{\underline{\in}} a_1.$$

Demnach *werden die beiden zusammengültigen Aussagen:*

„Alle b sind x, und kein x ist a"

mit Worten die „Auflösung" der Gleichung $ax + bx_1 = 0$ *nach der Unbekannten x leisten.*

In der That erscheint in diesen Aussagen die Unbekannte x *auf der einen Seite,* als Prädikat resp. Subjekt einer Subsumtion, *isolirt,* während auf deren andrer Seite nur bekannte Terme, gegebene Klassen stehen — und dieses muss als das Charakteristikum der „Auflösung" für die Wortsprache angesehen werden.

Auch wenn wir eine *Gleichung* für die Wurzel haben — wir mögen sie für den Augenblick kurz mittelst $x = c$ darstellen — könnte dieselbe ja mit Worten nur in Gestalt der beiden Subsumtionen $c \mathrel{\underline{\in}} x$ und $x \mathrel{\underline{\in}} c$ — vergl. Def. (1) der Gleichheit — ausgedrückt werden, welche wesentlich von dem eben beschriebenen Charakter sind. [Diese würden sich auch wieder in eine Doppelsubsumtion $c \mathrel{\underline{\in}} x \mathrel{\underline{\in}} c$, oder auch $x \mathrel{\underline{\in}} c \mathrel{\underline{\in}} x$, zusammenziehen lassen.]

Allerdings wäre hier die „andre" Seite, das aus den bekannten Klassen zusammengesetzte Subjekt oder Prädikat der Subsumtionen, *beidemal das nämliche: c,* was vorhin nicht der Fall war. Es wird sich aber im Hinblick auf den obigen Satz 49_+) oder o) empfehlen, bei dem Begriff der „verbalen Auflösung" von dieser Anforderung Umgang zu nehmen, ja den Begriff der „Auflösung" überhaupt eben dadurch zu erweitern.

Zu demselben Ergebnisse kann man auch von den Formeln $\varkappa$) oder λ) aus, d. h. auf dem Umwege über diese Darstellungen der Wurzeln, vermittelst des Theorems 48) gelangen.

Darnach in der That muss $x = bu_1 + a_1 u$ zwischen dem Produkte und der Summe seiner Koeffizienten liegen, und sich in Gestalt von:

π)
$$x = a_1 b + w(a_1 + b)$$
auch darstellen lassen — vergl. Th. 47), zweite Form; m. a. W. die Gleichung ist äquivalent dem Subsumtionenpaare:
$$a_1 b \mathrel{\underline{\in}} x, \qquad x \mathrel{\underline{\in}} a_1 + b.$$
Wegen $ab = 0$ haben wir aber, wie bereits gezeigt:
$$a_1 b = b \quad \text{und} \quad a_1 + b = a_1,$$
also wieder
$$b \mathrel{\underline{\in}} x \mathrel{\underline{\in}} a_1, \quad \text{q. e. d.}$$

Ebenso sieht man dem Ausdruck $x = b + ua_1$ augenblicklich an, dass er zwischen b und $b + a_1$ irgendwie gelegen, welches letztere sich aber da, wo $ab = 0$ ist, in a_1 selbst zusammenzieht.*)

ϱ) Es erübrigt, dass wir uns noch vollends über die „Determination" des Auflösungsproblems orientiren, vor allem, dass wir uns über die Frage klar werden, wann die Gleichung nur *eine* Wurzel besitzt, wann dagegen mehrere; in welchen Fällen sie gar keine Wurzel hat, wurde bereits festgestellt.

Wenn ein Gebiet x durch eine gegebene Gleichung
$$ax + bx_1 = 0$$
ausschliesslich bestimmt ist, wenn an x keine andern Anforderungen gestellt werden, als dass es eben diese Gleichung erfülle, m. a. W. wenn x geradezu definirt erscheint als die Wurzel dieser Gleichung, dann bleibt in unsrer Formel für die Auflösung:
$$x = a_1 u + bu_1,$$
das unbestimmte Gebiet u vollkommen beliebig oder *arbiträr*.

Die Wurzel x ist dann in der Regel nicht *ein* Gebiet, sondern — kann man sagen — eine ganze *Klasse* von Gebieten, die sich eben aus unsrer Formel ergeben, indem man dem u alle möglichen Bedeutungen (in der Mannigfaltigkeit der Gebiete) beilegt.

σ) Je nachdem die Werte der gegebenen Koeffizienten a, b beschaffen sind, kann indess auch der Fall eintreten, dass alle Werte dieser Klasse zusammenfallen, sich auf einen einzigen reduziren.

*) In den Formen $b \mathrel{\underline{\in}} x \mathrel{\underline{\in}} a_1 + b$ habe ich in meinem Operationskreis [2] die Lösung bei den Boole'schen Problemen jeweils mit Worten gedeutet, jedoch dieses Schema selbst als eine „auf die Interpretation bezügliche Bemerkung" — vergl. p. 24 — dort nicht mitgeteilt, da ich mich in jener Schrift immer nur der Gleichheitszeichen bediente. Ich wüsste demnach kaum zu sagen, wem nun das Th. 49_+) eigentlich zuzuschreiben wäre. Von spätern Schriftstellern kommt ihm McColl am nächsten, indem er nach seiner in § 27 dargelegten Methode die Lösung in Gestalt der beiden Subsumtionen: $b \mathrel{\underline{\in}} x$, $a \mathrel{\underline{\in}} x_1$ gewinnen müsste. —

Sicher tritt dies, weil nach Th. 49_+) x zwischen b und a_1 gelegen, ein, wenn
$$b = a_1, \quad \text{somit auch} \quad a = b_1,$$
ist, oder, da diese Bedingung, rechts auf 0 gebracht, als
$$ab + a_1 b_1 = 0$$
sich darstellt, wenn nicht nur die Auflösbarkeitsbedingung $ab = 0$, sondern auch daneben noch die Bedingung $a_1 b_1 = 0$ erfüllt ist.

Wir haben in diesem Falle:
$$x = a_1 b = b = b + a_1 = a_1$$
als die einzige Wurzel der aufzulösenden Gleichung, deren verschiedene Ausdrucksformen der Leser mit Rücksicht auf die angeführten Relationen, soweit es nicht bereits geschehen, leicht auf einander zurückführen wird. In der That fällt dann aus allen Formeln für die Wurzel x das unbestimmte Gebiet u von selbst heraus, wie auch direkt bei einer jeden von ihnen — am leichtesten bei ν) — zu sehen ist.

Jene Bedingung $b = a_1$ ist aber nicht nur hinreichend für das Zusammenfallen sämmtlicher Wurzeln, sondern auch notwendig für dieses. Soll nämlich $x = bu_1 + a_1 u$ unabhängig sein von u, so muss es insbesondre für $u = 0$ auch denselben Wert annehmen wie für $u = 1$, d. h. es muss $b = a_1$, sonach da ab ohnehin $= 0$ ist, auch $a_1 b_1 = 0$ sein. Also:

*Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung eine und nur eine Wurzel habe ist: dass die Koeffizienten Negationen von einander seien.**)

Ihre Wurzel ist dann eindeutig bestimmt, die Unbekannte nämlich gleich dem Koeffizienten ihrer Negation (oder der Negation ihres Koeffizienten) in der Gleichung.

Für diesen Fall kommt in der That die Gleichung
$$ax + a_1 x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad b_1 x + bx_1 = 0$$
nach Th. 39) auch direkt auf $x = a_1 = b$ hinaus. —

In jedem andern Falle ist die Wurzel durch die Gleichung nicht vollkommen bestimmt, vielmehr die Auflösung (unendlich) vieldeutig („unendlich" nur in dem Falle nicht, wo die Klasse, das Gebiet $a_1 b$ aus einer begrenzten Menge von Individuen, Punkten bestünde).

τ) Wir erwähnten bereits, wann u arbiträr bleiben wird.

*) Man könnte auch sagen: $a_1 b_1 = 0$ ist die Bedingung dafür, dass *nicht mehr als eine* Wurzel, sowie $ab = 0$ die Bedingung dafür, dass *nicht weniger als eine* (dass nicht gar keine) Wurzel existire.

Sobald hingegen ausser der Gleichung $ax + bx_1 = 0$ über x noch anderweitige Information vorliegt, so wird die Variabilität von u gewissen Einschränkungen unterliegen.

Erledigen wir noch die Frage, *welche Werte dem u zugeteilt werden dürfen, wenn x* einen bekannten Wert hat oder *einen gegebenen Wert erhalten soll*, der jedoch immerhin der Gleichung $ax + bx_1 = 0$ genügt.

Die Antwort ergibt sich, indem man unter letzterer Voraussetzung die Gleichung $bu_1 + a_1 u = x$ nach der Unbekannten u auflöst. Zu dem Ende hat man diese Gleichung rechts auf 0 zu bringen — cf. Th. 39) und 46): $$x(b_1 u_1 + au) + x_1(bu_1 + a_1 u) = 0,$$
links nach u zu ordnen:
$$(ax + a_1 x_1)u + (b_1 x + bx_1)u_1 = 0$$
und nunmehr das Th. 50) selbst anzuwenden.

Als Resultante der Elimination des u ergibt sich:
$$(ax + a_1 x_1)(b_1 x + bx_1) = ab_1 x + a_1 bx_1 = 0,$$
und ist diese wegen der vorausgesetzten Relationen $ax = 0$ und $bx_1 = 0$ von selbst erfüllt. Darnach berechnet sich:
$$u = (b_1 x + bx_1)v_1 + (a_1 x + ax_1)v, \quad u_1 = (bx + b_1 x_1)v_1 + (ax + a_1 x_1)v,$$
wo nun v ein arbiträres Gebiet bleibt.

Machen wir mit diesen Ausdrücken die Probe der Auflösung, von der nicht ganz leicht zu sehen ist, dass sie wirklich stimmt.

Zunächst ist zu bemerken, dass man durch Tilgung der Terme ax und bx_1 schon die aufzulösende Gleichung hätte vereinfachen können zu:
$$a_1 x_1 u + b_1 x u_1 = 0,$$
und dass ebenso bei u der zweite, bei u_1 der dritte von den vier Termen in Klammer wegfällt.

Indem man diese vereinfachte Gleichung gemäss Th. 50) nach der Unbekannten u auflöste, ergäben sich für u und u_1 die noch einfacheren Ausdrücke:

v) $$u = b_1 x v_1 + (a + x)v, \quad u_1 = (b + x_1)v_1 + a_1 x_1 v$$
welche auch aus den vorigen durch einen Kunstgriff ableitbar, indem man z. B. oben bei u in der zweiten Klammer den Term ax, der ja 0 ist, zufügt und Th. 33_+) anwendet.

Nun wird:
$$a_1 u + bu_1 = a_1 b_1 x v_1 + a_1 x v + bv_1 + a_1 b x_1 v,$$
von welchem Ausdruck wir einzusehen haben, dass er (bei beliebigem v) gleich x sein muss.

Wegen $bx_1 = 0$ fällt zunächst der letzte Term fort, und für den vorletzten können wir ebendeshalb schreiben:
$$bv_1 = bv_1(x + x_1) = bv_1 x + v_1 bx_1 = bv_1 x + 0 = bv_1 x.$$
Alsdann tritt x als gemeinsamer Faktor heraus, und sein Koeffizient wird:
$$(a_1 b_1 + b)v_1 + a_1 v = (a_1 + b)v_1 + a_1 v = (a_1 + ab)v_1 + a_1 v = a_1 v_1 + a_1 v = a_1,$$
da ja $ab = 0$ ist.

Hiemit ist denn gefunden:
$$a_1 u + bu_1 = a_1 x,$$
und bleibt nun blos noch in Betracht zu ziehen, dass wegen $ax = 0$ in der That:
$$a_1 x = a_1 x + a x = (a_1 + a)x = 1 \cdot x = x$$
sein muss.

Die Probe mit den Ausdrücken v) stimmte also für jede Bedeutung von v.

Der Parameter u der Auflösung $x = a_1 u + bu_1$ unsrer Gleichung $ax + bx_1 = 0$ *ist* hienach *bei gegebenem x* im Allgemeinen *weder vollkommen beliebig noch vollkommen bestimmt.* Vielmehr ist aus den Darstellungen v) für denselben zu ersehen, dass er zwischen $b_1 x$ und $a + x$ liegen muss, in Formeln, dass:

φ) $$b_1 x \Subset u \Subset a + x$$
und dazwischen kann er auch jeden Wert zugeteilt erhalten, wie man durch Anwendung des Th. 47) auf die Funktion, welche u hier von v ist, erkennt.

χ) *Völlig beliebig* könnte bei gegebnem x der Parameter u nur werden, wenn $b_1 x = 0$ und $a + x = 1$ wäre. Bilden wir aber aus diesen Relationen und der vorausgesetzten $ax + bx_1 = 0$ die vereinigte Gleichung, so erhalten wir:
$$(a + b_1)x + (a_1 + b)x_1 = 0,$$
woraus durch Elimination von x entsteht:
$$(a + b_1)(a_1 + b) \quad \text{oder} \quad ab + a_1 b_1 = 0,$$
d. h. $a = b_1$, sowie $b = a_1$, womit wir auf den schon unter σ) behandelten Fall verwiesen werden, in welchem die Wurzel x vollkommen bestimmt war.

ψ) *Völlig bestimmt* könnte dieser Parameter u nur sein, wenn
$$b_1 x = a + x, \quad \text{d. h.} \quad a_1 x_1 \cdot b_1 x + (a + x)(b + x_1) = 0,$$
oder $ax_1 + bx = 0$ noch wäre, im Ganzen also, d. h. im Verein mit der ursprünglichen Gleichung, wenn:
$$ax + bx_1 + ax_1 + bx = 0,$$
oder
$$(a + b)(x_1 + x) = a + b = 0,$$
mithin sowol $a = 0$, als $b = 0$ wäre.

In diesem Falle würde durch die aufzulösende Gleichung:

$$0 \cdot x + 0 \cdot x_1 = 0$$

offenbar x vollkommen unbestimmt gelassen, und müsste in der That $u = x$ selbst genommen werden, falls hier die Formel

$$x = bu_1 + a_1 u = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u$$

noch die Auflösung darstellen sollte.

Augenscheinlich ist jedoch dieser Fall nur ein Grenzfall von sehr speziellem Charakter und untergeordneter Wichtigkeit, der wol kaum besonders gemerkt zu werden braucht.

ω) *Jedenfalls ist*, wie aus φ) nochmals und schon aus γ) ersichtlich, *die Annahme* $u = x$ *selber* für den unbestimmten Parameter *genügend, um einen gegebenen Partikularwert* x *aus dem allgemeinen Ausdruck der Wurzeln hervorgehen zu lassen.*

§ 22. Fortsetzung, auch für mehrere Unbekannte.

Nachdem vorstehend das Auflösungs- sowie das Eliminationsproblem für *eine* Unbekannte erledigt ist (insoweit als gegebene Propositionen nur Subsumtionen und Gleichungen in Betracht kommen), fassen wir den Fall in's Auge, wo *mehrere* Unbekannte vorliegen.

Diese werden, wenn sie in einem Propositionensysteme vorkamen, in der Regel auch in dessen vereinigter Gleichung auftreten. Wenn nicht — so fallen sie aus dem System von selbst heraus, da mit diesem ja die vereinigte Gleichung logisch äquivalent ist. Wird diese stehen bleibende Gleichung sich als „falsch" herausstellen, so war das ganze Auflösungsproblem unmöglich; andernfalles aber bleiben die herausfallenden Unbekannten vollkommen *unbestimmt*, und, sofern nicht noch anderweitige Bestimmungen für sie hinzutreten, *willkürlich*. Es bleibt dann nur noch die Frage nach den Wertsystemen der nicht herausfallenden Unbekannten zu beantworten.

Seien $x, y, z, \ldots$ die in der vereinigten Gleichung auftretenden Unbekannten. So wird die linke Seite derselben sich nach jeder einzelnen von diesen, sowie nach allen zusammen entwickeln lassen.

Man kann nach der (vollständigen) Resultante der Elimination irgend einer von ihnen, oder einer Gruppe derselben, oder auch von allen miteinander fragen.

Hier gilt nun der Satz:

Zusatz 1 zu Th. 50). *Die Resultante der Elimination sämtlicher Unbekannten wird erhalten, indem man das Produkt der Koeffizienten des nach denselben entwickelten Polynoms der Gleichung gleich* 0 *setzt.* [Ausdehnung von η) des § 21.]

Wir **beweisen** den Satz zunächst für irgend zwei Unbekannte x, y. Nach diesen entwickelt hat die Gleichung die Form:

$$\alpha) \qquad axy + bxy_1 + cx_1 y + dx_1 y_1 = 0,$$

oder nach x geordnet:

$$\beta) \qquad (ay + by_1)x + (cy + dy_1)x_1 = 0,$$

desgleichen nach y geordnet:

$$\gamma) \qquad (ax + cx_1)y + (bx + dx_1)y_1 = 0,$$

wobei die Koeffizienten a, b, c, d nun noch die übrigen Unbekannten $z, \ldots$ als Argumente enthalten können.

Eliminirt man x allein, so kommt nach schon bekannter Regel:

$$\beta') \qquad (ay + by_1)(cy + dy_1) = 0 \quad \text{oder} \quad acy + bdy_1 = 0,$$

und wenn hieraus jetzt y eliminirt wird:

$$acbd = 0.$$

Eliminirte man aber zuerst y, so käme

$$\gamma') \qquad (ax + cx_1)(bx + dx_1) = 0 \quad \text{oder} \quad abx + cdx_1 = 0$$

woraus durch Elimination von x entsteht:

$$abcd = 0$$

— das ist wesentlich dasselbe wie vorhin.

δ) *Es ist* also zunächst *gleichgültig, ob man erst* x*, dann* y*, oder ob man erst* y*, dann* x *eliminirt.*

Die gefundene Relation $abcd = 0$ muss nun aber auch die volle Resultante bei Elimination des Paars von Gebieten x, y sein. Denn wenn sie erfüllt ist, so gibt es jedenfalls (mindestens) ein Gebiet x, welches die vorhergehende Gleichung erfüllt — vergl. δ) des § 21). Weil diese aber die Resultante der Elimination von y aus der ersten Gleichung vorstellte und somit (für das gedachte x) erfüllt ist, so gibt es (zu diesem) nun auch ein y, welches die erste Gleichung erfüllt. Sonach gibt es, sobald die Relation $abcd = 0$ erfüllt ist, sicherlich ein Wertepaar von x, y, für welches die ursprüngliche Gleichung richtig wird, d. h. diese Relation ist die (volle) Resultante der Elimination von x und y zugleich.

In dieser Weise kann man weiter schliessen. Bezüglich dreier Unbekannten x, y, z entwickelt hat die Gleichung die Form:

$$axyz + bxyz_1 + cxy_1z + dxy_1z_1 + ex_1yz + fx_1yz_1 + gx_1y_1z + hx_1y_1z_1 = 0$$

und gibt die Elimination von z:

$$(axy + cxy_1 + ex_1y + gx_1y_1)(bxy + dxy_1 + fx_1y + hx_1y) = 0,$$

oder:

$$abxy + cdxy_1 + efx_1y + ghx_1y_1 = 0.$$

Hieraus aber folgt durch Eliminiren von y nebst x nach der vorstehend schon bewiesenen Regel sogleich:

$$abcdefgh = 0,$$

und dasselbe würde (nur mit umgestellten Faktoren) sich auch ergeben haben, hätte man zuerst x nebst y, hernach z eliminirt.

Man schliesst nun, wie vorhin, dass diese Relation die volle Resultante der Elimination von x, y, z sein muss. Denn ist sie erfüllt, so gibt es mindestens *ein* Wertepaar von x, y, für das die vorhergehende Gleichung und zu diesem dann auch einen z-Wert, zusammen also ein Wertetripel von x, y, z, für welches die erste Gleichung erfüllt ist.

Man könnte auch zuerst z und y auf einmal eliminiren; so ergäbe sich:

$$(ax + ex_1)(bx + fx_1)(cx + gx_1)(dx + hx_1) = 0$$

oder

$$abcdx + efghx_1 = 0,$$

woraus dann durch Elimination des x wiederum dieselbe Resultante folgte — desgleichen, falls man etwa in umgekehrter Ordnung erst x, hernach y und z miteinander eliminirte.

ε) *Es ist* also *auch gleichgültig, ob man die Gruppe x, y und ausserdem z, oder ob man x für sich, und die Gruppe y, z auf einmal eliminirt.*

Man sieht: *das Eliminiren von Symbolen ist in Bezug auf diese* — nach δ) — *eine kommutative und* — nach ε) — *auch eine assoziative Operation.*

Wollte man vollkommen gründlich sein, so hätte man auf dieselbe alle in Anhang 3 über die Multiplikation angestellten Betrachtungen zu übertragen — ähnlich, wie dies auch in Bezug auf das Entwickeln der Fall war — vergl. § 19 Zus. 1 zu Th. 44). Und diese Übertragung unterläge auch nicht der geringsten Schwierigkeit, indem die erwähnten Betrachtungen einfach Geltung behalten, falls man nur unter ab, anstatt ein Produkt, vorübergehend versteht: das Ergebniss einer Elimination von a, b — aus irgend einer bestimmten Eliminationsbasis — resp. der Entwickelung nach a, b von irgend einer bestimmten Funktion.

Aber auch schon darum, weil in unsrer resultirenden Relation keine Unbekannte hinsichtlich ihres Koeffizienten (oder desjenigen ihrer Negation) bevorzugt erscheint (desgleichen keine Gruppe von Unbekannten und Negationen solcher, kein Konstituent der Entwickelung), m. a. W. schon aus der *Symmetrie* dieser Relation (in Bezug auf die den verschiedenen Konstituenten zugeordneten Koeffizienten) ist zu ersehen, dass die *Reihenfolge und Gruppirung*, in welcher die Eliminanden beseitigt werden, dass die ganze *„Anordnung des Eliminationsprozesses“ gleichgültig* sein muss für die zu erwartende Resultante. Genauer:

Zusatz 2 zu Th. 50). *Es ist für das Ergebniss ohne Belang, in welcher Reihenfolge man aus einer Gleichung die verschiedenen Unbekannten, sei es einzeln, sei es in beliebigen Gruppen eliminirt, auch einerlei, in welchen Gruppen, und ob man sie successive oder ob man sämtliche Unbekannte auf einmal eliminirt.*

Da das Entwickeln nach vielen Symbolen zugleich S. 416 eine ermüdende Operation ist, bei welcher leicht auch Versehen mitunterlaufen, so wird man behufs Elimination einer Gruppe von solchen am besten so verfahren, dass man erst eine Unbekannte allein eliminirt, z. B. x. Die Resultante wird nur noch die übrigen Unbekannten y, z, ... enthalten. Aus dieser wird man hernach eine zweite von den Unbekannten eliminiren, z. B. y, aus der so gewonnenen neuen Resultante eine dritte z, und so weiter fortschreitend nach und nach die sämtlichen Unbekannten.

ζ) Auf Grund des Zusatzes 1 zu Th. 50) wäre — in Erweiterung der unter η) des § 21 gemachten Bemerkungen — leicht zu zeigen, dass *wenn die vereinigte Gleichung rechterhand auf* 1 *gebracht ist*, auch hier (bei beliebig vielen Eliminanden) wieder die Resultante erhalten wird, indem man einfach die *Konstituenten* des nach den Eliminanden entwickelten Polynoms der Gleichung (mithin diese Eliminanden selbst samt ihren Negationen) *durchweg auslöscht.*

War z. B. $f(x, y) = 0$ die Gleichung nach zweien von den Unbekannten entwickelt, so wird sie nun

$$f_1(x, y) = 1 \quad \text{oder} \quad a_1xy + b_1xy_1 + c_1x_1y + d_1x_1y_1 = 1,$$

und gibt durch Ausstreichen der Konstituenten:

$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 1,$$

was mit $abcd = 0$ äquivalent ist. Etc.

η) Anmerkung zum Zusatz 2 des Th. 50).

Im Gegensatz zu vorstehendem ist es aber *nicht gleichgültig*, welches Verfahren man beim Eliminiren einschlägt in folgender Hinsicht.

Hat man ein *System* von Propositionen (wir können ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit sagen: Gleichungen, da sich ja auch die Subsumtionen stets als Gleichungen darstellen liessen) — also: Hat man ein System von Gleichungen, so kann man ein Symbol (oder auch eine Gruppe von solchen) aus diesen, indem man sie *getrennt* lässt — mithin aus jeder Gleichung für sich — eliminiren und schliesslich die Resultanten zu einem einzigen Ausspruch zusammenfassen.

Oder man kann auch die Gleichungen des Systems zuerst in eine einzige zusammenziehen und aus dieser „vereinigten" Gleichung alsdann das Symbol (resp. die gedachte Gruppe der Symbole) eliminiren.

Auf letzterem Wege ergab nach unsern Regeln sich die volle Resultante der Elimination.

Auf dem *erstern* Wege jedoch erhält man im Allgemeinen ein *weniger umfassendes* Resultat, zwar wol ein richtiges, aber nicht das volle Eliminationsergebniss — wie dies schon an einfachen Beispielen nachweisbar ist.

Wird z. B. das Symbol x aus den beiden Gleichungen des Systems:

$$ax + bx_1 = 0, \quad cx + dx_1 = 0$$

einzeln eliminirt, so lautet die vereinigte Gleichung der beiden Ergebnisse:

$$ab + cd = 0$$

geradeso, wie sie auch lauten würde, wenn man aus den Gleichungen:

$$ax + bx_1 = 0, \quad cy + dy_1 = 0$$

das Paar x, y eliminirt hätte. [Offenbar kam hiebei nicht zur Geltung, nicht zum Ausdruck, dass die Unbekannte y der zweiten Gleichung *die nämliche* sein sollte, wie die der ersten, dass beide Gleichungen für *denselben* Wert des Eliminanden erfüllt seien.]

Dagegen ist die Resultante der Elimination von x aus der vereinigten Gleichung:

$$(a + c)x + (b + d)x_1 = 0$$

(von jenen) nun:

$$(a + c)(b + d) = ab + ad + bc + cd = 0$$

— sonach umfassender als das vorige Eliminationsergebniss, indem sie, ausser $ab = 0$ und $cd = 0$, auch noch besagt — was daraus allein nicht folgen würde — dass auch $ad = 0$ und $bc = 0$ sein muss!

Behufs Gewinnung des vollen Eliminationsergebnisses muss man also *erst vereinigen, dann eliminiren.*

Gegen diese Vorschrift kann man freilich zuweilen auch ohne Schaden sündigen — im obigen Exempel insbesondre dann, wenn die dabei verlornen Terme von selbst oder analytisch verschwinden, wie dies z. B. eintreten würde, wenn sich ad als von der Form $\alpha\beta_1 \cdot \alpha_1\beta$ und cd als von der Form $\alpha\beta \cdot \alpha_1\beta_1$ oder vielleicht $\gamma\delta \cdot \varepsilon\delta_1$, und dergleichen, herausstellte.

Es haben durch solchen Verstoss einzelne meiner amerikanischen Mitarbeiter auf dem Feld der logischen Algebra bei der Behandlung spezieller Aufgaben einen Vorsprung vor mir gewonnen, indem sie allerhand Weitläufigkeiten des Druckes ersparten und mit einfacherem Formelansatz zum Ziel kamen, als wenn sie nach den von mir empfohlenen Schemata streng systematisch zuwerke gegangen wären. Solchen Vorsprung muss ich aber als einen illegitimen bezeichnen, sofern sich die dabei befolgte Taktik bei andern Gelegenheiten rächen müsste.

Durch die vorstehenden Überlegungen wurde das Eliminationsproblem für eine beliebige Menge von Eliminanden erledigt.

ϑ) Es frägt sich noch, wie das Auflösungsproblem bei einer *Mehrzahl* von Unbekannten sich gestaltet.

Im Gegensatz zur numerisch rechnenden Mathematik muss das Problem der Auflösung eines Propositionensystems nach *mehreren* ebenso wie schon nach *einer* Unbekannten allemal mit der Elimination ebendieser Unbekannten verbunden werden in der Art, dass diese Elimination der eigentlichen Auflösung jeweils vorauszuschicken ist. Und ferner scheint das Auflösen nach mehrern Unbekannten für die Logik nicht die entsprechende Wichtigkeit zu besitzen, wie für die Arithmetik.

Die Unbekannten mögen $x, y, z, \ldots$ heissen. Eliminirt man (aus der vereinigten Gleichung des Problemes) sie sämtlich — z. B. *successive in der umgekehrten Ordnung als wie sie angegeben sind* — so ergibt sich als Resultante eine Gleichung, in der nur noch bekannte Gebiete $0, 1, a, b, c, d, \ldots$ vorkommen werden.

Die Resultante — $R = 0$ möge sie heissen — *kann* eine *analytische* Identität sein, wie es namentlich der Fall sein wird, wenn sie auf die Gleichung $0 = 0$ sich zusammenzieht, während auch umgekehrt, nachdem sie rechts auf 0 gebracht ist, die linke Seite R derselben auf Grund der Regeln des Kalkuls dann ebenfalls identisch 0 sein wird. In diesem Falle wird die Aufgabe der Berechnung von $x, y, z, \ldots$ unbedingt lösbar sein für alle denkbaren Wertsysteme der Parameter oder Symbole $a, b, \ldots$

Oder aber: die Resultante $R = 0$ ist selbst eine *synthetische* Gleichung, eine *Relation.*

Ist dieselbe von den gegebenen Symbolen $a, b, \ldots$ *nicht* erfüllt, indem sich für ihre linke Seite R eben ein gemäss den Voraussetzungen des Problems *von* 0 *verschieden* zu denkender Wert herausstellt (und wie es namentlich vorliegen wird, sobald die Resultante etwa auf die Gleichung $1 = 0$ sich zusammenzieht), so wird unsre Aufgabe unlösbar, unmöglich sein, nicht etwa, weil man alsdann die Werte der Unbekannten nicht sollte zu entdecken vermögen, sondern weil es dann gar keine solchen Werte geben kann, welche die aufzulösende Gleichung erfüllen.

Ist dagegen die resultirende Relation $R = 0$ von den gegebenen Gebieten $a, b, ..$ erfüllt, so ist die Aufgabe lösbar, die Auflösung möglich, und kann man alsdann gleichwie im ersten Falle schreiten zur Ermittelung der „Wurzeln“, d. h. der (aller derjenigen) Wertsysteme, welche für $x, y, z, ..$ eingesetzt die vereinigte Gleichung erfüllen.

ι) Häufig sind auch die Parameter $a, b, c, ...$ nicht speziell gegeben, sondern selbst noch unbestimmte, *als gegeben blos zu denkende* Gebiete; sie werden etwa, da man in der Wissenschaft sogleich möglichst allgemeine Probleme zu lösen bestrebt ist, uns *allgemeine* Gebiete von vornherein vorzustellen haben.

In solchem Falle kann man nach der gleichen Methode, die wir hinsichtlich $x, y, z, ..$ noch auseinanderzusetzen haben, die Parameter $a, b, ...$ zuerst selbst als Unbekannte so bestimmen, dass sie jene Resultante $R = 0$ auf die allgemeinste Weise befriedigen. Alsdann ist in der That auch kein Unterschied mehr vorhanden zwischen gegebenen und gesuchten Gebieten; wir mögen dann sämtliche Buchstabengebiete, welche in die vereinigte Gleichung eingehen, gleichmässig als „Unbekannte“ bezeichnen und erlangen den Vorteil, dass das Auflösungsproblem nun stets lösbar wird, sofern die Gleichung nicht geradezu auf die Absurdität $1 = 0$ hinausläuft.

Denken wir uns nämlich alle Buchstaben eliminirt, bis auf *einen* a, so kann die Resultante nur eine von folgenden vier Formen haben:

$0 \cdot a + 0 \cdot a_1 = 0$, d. h. $0 = 0$, wo a dann unbestimmt bleibt,
$1 \cdot a + 0 \cdot a_1 = 0$, wo dann $a = 0$ sich bestimmt,
$0 \cdot a + 1 \cdot a_1 = 0$, d. h. $a_1 = 0$, wo sich $a = 1$ bestimmt,
$1 \cdot a + 1 \cdot a_1 = 0$, d. h. $1 = 0$, was (für jedes a) unmöglich —

— in Anbetracht, dass ja ausser a keine Buchstaben mehr in der Resultante vorkommen werden, sonach das Polynom der letztern, nach a entwickelt, als Koeffizienten nur 0 oder 1 aufweisen kann.

Im ersten Fall war die Resultante als eine analytische Gleichung erfüllt, hier fiel a mit den übrigen Buchstaben von selbst heraus und bleibt es willkürlich.

Im zweiten und dritten Falle erwies sich a ($= 0$ oder aber 1) als absolut bestimmt; man wird diesen seinen ermittelten Wert in die vereinigte Gleichung einsetzen unter Vereinfachung derselben in der dadurch bedingten Weise, und wird es fortan ausser Betracht lassen um sich nur noch mit der Aufgabe zu beschäftigen diese vereinfachte Gleichung aufzulösen, so als wenn sie die ursprünglich gegebene gewesen wäre; dieselbe enthält dann mindestens einen Buchstaben weniger.

In allen drei Fällen haben wir dann eine Unbekannte weniger, weil auch im ersten a als willkürlich bleibend erkannt, gefunden ist.

Im vierten Falle wird man das Problem als unzulässig verlassen. Da die Resultante aus der vereinigten Gleichung *folgte*, so wird auch diese schon absurd sein, für keinen Wert von a und für kein Wertsystem der Buchstabensymbole — kurzum überhaupt nicht — zu bestehen vermögen.

Liegt dieser vierte Fall nun *nicht* vor, so kann auch bei keiner ferneren Elimination irgend einer Buchstabengruppe die absurde Gleichung $1 = 0$ mehr vorkommen. Denn da diese letztere auch a nicht enthält, so kann sie jedenfalls als „ein Ergebniss der Elimination des a“ auch angesehen werden, und müsste also, entgegen der Annahme, in der *vollen* Resultante der Elimination von a schon enthalten gewesen sein — und eben die volle Resultante hatten wir ja beim Eliminiren jederzeit gebildet.

Wir hätten nunmehr jetzt zur Elimination und Berechnung von $b, c, ..$ zu schreiten in der Weise wie es für $x, y, ..$ des weitern auseinandergesetzt wird.

$\varkappa$) Aus der *vor*letzten Eliminationsresultante $R(x) = 0$, welche beim Einhalten der oben empfohlenen Anordnung des Eliminationsprozesses von den Unbekannten nur noch x enthalten kann, berechne man x gemäss Th. 50_+). Dies ist möglich, weil die Bedingung für ihre Auflösbarkeit ja eben das Erfülltsein der (letzten) Resultante $R = 0$ war. Im Ausdruck für die Wurzel x wird ein willkürlicher Parameter u auftreten.

Für jeden Wert der somit gefundenen Wurzel x wird dann die Gleichung $R(x) = 0$ erfüllt sein, weil die Probe für die Auflösung, wofern sie richtig vollzogen war, doch sicher stimmt.

Diese Gleichung $R(x) = 0$ war aber selbst die Resultante der Elimination von y aus der *dritt*letzten Eliminationsresultante

$$R(x, y) = 0,$$

welche von den Unbekannten ausser x nur noch y enthielt (da die folgenden Unbekannten bereits eliminirt waren). Das Erfülltsein dieser Resultante $R(x) = 0$ ist die Bedingung für die Auflösbarkeit der Gleichung $R(x, y) = 0$ nach der Unbekannten y.

Setzt man in letztere den für die Wurzel x gefundenen Wert für x ein, so enthält sie ausser der Unbekannten y nur noch die bekannten Gebiete $a, b, ..$ nebst dem willkürlichen Parameter u, und ist sicher nach y auflösbar. Ihre Auflösung gemäss Th. 50) liefert uns nun auch diese zweite Wurzel, deren Ausdruck noch einen neuen willkürlichen Parameter v enthalten wird.

Die gefundenen Wertepaare x, y befriedigen jetzt die drittletzte Resultante $R(x, y) = 0$, welches die Bedingung war für die Auflösbarkeit nach z der *viert*letzten Resultante $R(x, y, z) = 0$, die ausser diesen als Argumente angeführten drei Unbekannten keine andern enthält. Nach Einsetzung der gefundenen Wurzelwerte von x, y wird man daher durch Auflösung gemäss Th. 50) jetzt die dritte Wurzel z erhalten deren Ausdruck einen neuen arbiträren Parameter w in sich schliesst.

Und so kann man augenscheinlich fortfahren bis alle Unbekannten gefunden sind, welche dann auch die (zuletzt nach der letzten Unbekannten aufgelöste, das ist die) ursprünglich gegebene vereinigte Gleichung erfüllen werden.

λ) Wir wären hiemit zu Ende, wenn nicht noch eine beim successiven Eliminiren von $\ldots z, y, x$ zuweilen eintretende Möglichkeit zu berücksichtigen wäre, die wir mit Stillschweigen übergangen haben: Es kann bei diesem successiven Eliminiren — eventuell zu verschiedenen Malen — vorkommen, dass beim Eliminiren einer bestimmten Unbekannten *mit dieser zugleich noch mehrere andere,* dass eine ganze Gruppe von solchen auf einmal herausfällt.

Fällt z. B. beim Eliminiren von y auch x zugleich heraus, so wird die der definitiven Resultante $R = 0$ unmittelbar vorangehende *vor*letzte Resultante jetzt nicht $R(x) = 0$ sondern $R(x, y) = 0$ zu nennen sein. Fallen unterweges mit z zugleich schon x und y heraus, so ist die *vor*letzte Resultante von der Form $R(x, y, z) = 0$, etc.

Man kann erstlich solchen Fall beseitigen, indem man — im ersten Beispiel — zwischen die allerletzte $R = 0$ und die vorletzte $R(x, y) = 0$ die Gleichung

$$R \cdot x + R \cdot x_1 = 0$$

als nunmehrige *vor*letzte unter $R(x) = 0$ zu verstehende Resultante einschiebt — eine Gleichung, die sich aus $R = 0$ durch „Entwickelung" der linken Seite nach x ergab.

Im zweiten Beispiel, indem man zwischen $R(x\,y\,z) = 0$ und $R = 0$ als drittletzte und vorletzte Resultante die Gleichungen einschiebt:

$$R \cdot xy + R \cdot xy_1 + R \cdot x_1 y + R \cdot x_1 y_1 = 0$$

als dermaligen Stellvertreter des im Text erwähnten $R(x, y) = 0$ und wieder $R \cdot x + R \cdot x_1 = 0$ als Stellvertreter von $R(x) = 0$ — und so fort.

Zur Erledigung des Falles genügt dann der Hinweis darauf, dass sofern *eine* Unbekannte aus der nach ihr aufzulösenden Gleichung von selbst herausfällt, dieselbe (wie bereits erkannt) unbestimmt bleibt, hier also, wo sie durch die Gleichung allein bestimmt werden sollte, als willkürlich oder arbiträr zu bezeichnen sein wird.

Zweitens erkennt man aber auch ganz direkt, dass wenn beim Eliminiren einer Unbekannten auch die übrigen mit herausfallen, diese alle bis auf *eine* willkürlich bleiben müssen, welche letztere sich durch die übrigen ausdrücken lässt.

Gibt z. B. die Gleichung $R(x\,y\,z) = 0$ beim Eliminiren von z sogleich eine Resultante $R = 0$, die auch x und y nicht mehr enthält, so ist — das Erfülltsein der letzteren vorausgesetzt — die erstere nach z schon *not-*

wendig auflösbar (also: welche Werte auch immer unter y und x verstanden werden mögen; es bleiben somit x und y arbiträr, und lässt sich durch Auflösung der Gleichung $R(x, y, z) = 0$ nach z nunmehr dieses durch die beliebigen x und y ausdrücken).

Wir mögen hienach als

Zusatz 3 zu Th. 50) den Satz registriren: *Auch nach jedem System von Unbekannten kann jedes System von Subsumtionen und Gleichungen bequem aufgelöst werden, sobald* dieselben nur überhaupt zulässig und miteinander verträglich sind, was daran zu erkennen, dass *die Resultante der Elimination dieser Unbekannten erfüllt ist.*

Sobald es nur Wertsysteme der Unbekannten gibt, welche eingesetzt in die Propositionen des Systems dieselben erfüllen, sind solche auch immer leicht vollständig aufzufinden.

Für die allgemeinste Gleichung mit zwei Unbekannten — α) dieses Paragraphen wollen wir die Auflösung nach x, y wirklich ausführen. Dies lässt sich auf zwei Arten bewerkstelligen. Unter Voraussetzung, dass die Resultante der Elimination von x und y:

$$abcd = 0$$

erfüllt sei, kann erst y eliminirt und aus der Resultante γ') das x berechnet werden, hernach aber y aus γ); oder umgekehrt mittelst β') und β). Ersteres gibt:

μ) $$x = c d u_1 + (a_1 + b_1) u, \qquad x_1 = (c_1 + d_1) u_1 + abu$$

und dies in γ) eingesetzt:

$$\{(a + d_1) c u_1 + (b_1 + c) a u\}\, y + \{(b + c_1) d u_1 + (a_1 + d) b u\}\, y_1 = 0$$

woraus sich endlich berechnet:

μ') $$\begin{cases} y = \{(b + c_1) d u_1 + (a_1 + d) b u\}\, v_1 + \{(a_1 d + c_1) u_1 + (b c_1 + a_1) u\}\, v, \\ y_1 = \{(b_1 c + d_1) u_1 + (a d_1 + b_1) u\}\, v_1 + \{(a + d_1) c u_1 + (b_1 + c) a u\}\, v. \end{cases}$$

Letzteres gibt:

ν) $$y = b d v_1 + (a_1 + c_1) v, \qquad y_1 = (b_1 + d_1) v_1 + acv,$$

was in β) eingesetzt liefert:

$$\{(a + d_1) b v_1 + (b + c_1) a v\}\, x + \{(b_1 + c) d v_1 + (a_1 + d) c v\}\, x_1 = 0$$

und aufgelöst:

ν') $$\begin{cases} x = \{(b_1 + c) d v_1 + (a_1 + d) c v\}\, u_1 + \{(a_1 d + b_1) v_1 + (b_1 c + a_1) v\}\, u, \\ x_1 = \{(b c_1 + d_1) v_1 + (a d_1 + c_1) v\}\, u_1 + \{(a + d_1) b v_1 + (b + c_1) a v\}\, u. \end{cases}$$

Die Wurzeln x, y werden hienach durch die Ausdrücke μ, μ') oder nach Belieben auch ν, ν') vollständig oder in allgemeinster Weise dargestellt, wobei u, v jedes denkbare Gebietepaar vorzustellen haben.

Es könnten nebenbei auch die Faktoren u, u_1, v, v_1 zur einen Hälfte unterdrückt werden, nämlich bei x in μ) der u_1, bei x_1 der u, etc.

Man bemerkt die Verschiedenartigkeit und Unsymmetrie, der für die einen und für die andern Wurzeln sich ergebenden Darstellungen je nachdem man die eine oder die andere Reihenfolge bei dem Auflösungsverfahren einhält. Diese Wahrnehmung wird uns noch eigenartige Forschungen in § 24 auszuführen anregen.

ξ) Von grösserer Wichtigkeit als die vorstehend erledigte sind die Aufgaben, bei welchen nicht nach den Werten der verschiedenen Unbekannten $x, y, z, \ldots$ selber, je für sich, sondern sogleich *nach dem Werte einer bestimmten Funktion* $f(x, y, z, \ldots)$ dieser letzteren gefragt wird.

Sind die Unbekannten bereits selber sämtlich ermittelt, so brauchte man ihre Ausdrücke nur in den gegebenen Ausdruck dieser Funktion einzusetzen, um auch diese Aufgabe gelöst zu haben. Das Resultat würde so eine ganze Reihe arbiträrer Parameter $u, v, w, \ldots$ enthalten, die behufs Vereinfachung desselben nun noch gemäss Th. 48) Zusatz durch einen einzigen solchen ersetzt werden müssten.

Dies wäre unbequem; zudem würde den Unbekannten je nach der Reihenfolge, in der man sie beim Auflösen ermittelt, wiederum eine verschiedenartige Behandlung zuteil werden, die einen sozusagen vor den andern bevorzugt erscheinen. Überhaupt aber wäre die angegebene Art, das Problem zu lösen, obwol scheinbar als die am nächsten liegende sich darbietend, doch als ein Umweg zu bezeichnen, in Anbetracht dass eine sehr viel einfachere und in Hinsicht sämtlicher Unbekannten symmetrisch zuwerke gehende Lösungsweise der Aufgabe möglich ist.

Es ist bemerkenswert, dass ohne die Werte der Unbekannten $x, y, z, \ldots$ irgend selbst zu kennen man die Berechnung von $f(x, y, z, \ldots)$ doch unmittelbar zu leisten vermag:

Zusatz 4 zu Th. 50). Mit den einfachen Mitteln des Th. 50) sind wir schon im stande, *wenn ein beliebiges System von simultanen Gleichungen und Subsumtionen gegeben ist, irgend eine verlangte Funktion* $f(x, y, z, \ldots)$ *einer Gruppe von („unbekannten") Gebieten — falls es gewünscht wird: ohne Rücksicht auf die Werte einer zweiten Gruppe* $m, n, p, q, r, \ldots$ — *durch die Symbole einer dritten Gruppe, nämlich alle übrigen* $a, b, c, \ldots$ *auszudrücken*, resp. im identischen Kalkul zu „berechnen".

Man füge einfach dem gegebenen Systeme von Propositionen die neue Gleichung

$$t = f(x, y, z, \ldots)$$

hinzu — indem man eben für die gesuchte Funktion einen einfachen Namen, als welchen wir t gewählt haben, einführt. Man bilde nun erst die vereinigte Gleichung des also vergrösserten Systemes, eliminire aus dieser sowol die Symbole $m, n, p, q, r, \ldots$ der zweiten als auch die $x, y, z, \ldots$ der ersten Gruppe, so wird man eine Resultante erhalten, die ausser dem gesuchten t nur noch die Gebiete $a, b, c, \ldots$ der dritten Gruppe enthält. Und diese nach der Unbekannten t gemäss Th. 50_+) aufgelöst führt zur Erledigung unsrer Aufgabe.

Den vorliegenden Fingerzeig hat schon Boole gegeben.

Exempel siehe in § 25 unter Aufgabe 24, .. 26 und anderwärts.

Hinsichtlich der „Determination" auch dieses Problems, seine eventuelle Unzulässigkeit, Bestimmtheit oder Unbestimmtheit, sind wiederum verschiedene Vorkommnisse möglich, welche sich aber der Leser nach dem Vorangegangenen leicht selber zurecht legen wird, und die zum Teil auch durch die Beispiele illustrirt werden.

Wenn — wie dies wol meist beabsichtigt sein wird — die Symbole $m, n, p, q, r, \ldots$ in dem Ausdruck $f(x, y, z, \ldots)$ nicht vorkommen, so kann man natürlich auch aus der vereinigten Gleichung des noch unvergrösserten Propositionensystems erst einmal die $m, n, p, q, \ldots$ eliminiren und die so gewonnene Resultante dann noch mit der Gleichung $t = f(x, y, z, \ldots)$ oder also

$$t f_1(x, y, z, \ldots) + t_1 f(x, y, z, \ldots) = 0$$

„vereinigen", um jetzt nur mehr $x, y, z, \ldots$ zu eliminiren. Bei dieser Anordnung des Verfahrens wird man alsdann mit weniger komplizirten Relationen zu thun haben, als bei der Anordnung nach dem allgemeineren Schema. —

Man sieht: auf unserm bisherigen Standpunkte, wo wir als „Propositionen" nur erst Subsumtionen und Gleichungen kennen, hat der identische Kalkul den seltenen Vorzug, die allgemeinsten Aufgaben, die innerhalb seines Rahmens überhaupt erdacht werden können, auch wirklich zu lösen.

Dass immerhin auch hier noch etwas zu thun bleibt, dass fernere Fortschritte der Disziplin noch möglich und anzustreben sind, werden wir in § 24 sehen, wo an die Art und Weise der Lösung obiger Aufgaben — z. B. in Hinsicht ihrer „Symmetrie" bezüglich gewisser Symbolgruppen — noch weitere Anforderungen gestellt werden.

Auch in Anhang 6 eröffnen sich Perspektiven auf noch fernere Probleme. Man kann von diesem Anhang grösstenteils schon jetzt — noch besser nach § 24 Kenntniss nehmen. —

Zwölfte Vorlesung.

§ 23. Die inversen Operationen des Kalkuls: identische Subtraktion und Division als Exception und Abstraktion. Die Negation als gemeinsamer Spezialfall beider.

Eine erste Anwendung des Haupttheorems 50) wollen wir — mehr im theoretischen Interesse — machen, um über die zur Addition und Multiplikation entgegengesetzten oder inversen Operationen des Kalkuls Klarheit zu gewinnen.

In jeder Disziplin die überhaupt von Subtraktion und Division handelt, werden diese Operationen definirt als diejenigen, welche eine Aufgabe lösen, die in der Beziehung der *Umkehrung* steht zur Aufgabe der Addition resp. Multiplikation.

Bei den letztern Aufgaben, denjenigen also der beiden direkten Operationen, werden die Summanden resp. Faktoren a, b als gegeben angenommen, und kommt es darauf an, deren Summe resp. Produkt:

α)	$x = a + b$	$x = a \cdot b$

herzustellen, zu bilden — oder, wenn man die in der Arithmetik gebräuchliche, hier nicht mehr ganz passende Ausdrucksweise in unsre Disziplin herübernehmen will: sie zu „berechnen". Eine zu der eben geschilderten „umgekehrte" oder „*inverse*" Aufgabe liegt vor, wenn der bei der vorigen gesucht gewesene Term gegeben ist und einer der beiden vorhin bekannt gewesenen Terme als Unbekannte gesucht wird, während auch der andere nach wie vor als bekannt gilt. Diese Aufgabe tritt also an uns heran, wenn gefragt wird nach demjenigen Terme, welcher mit einem gegebenen additiv resp. multiplikativ verknüpft ein gegebenes Resultat liefert, eine gegebene Summe, resp. ein gegebenes Produkt gibt.

Eine Operation, welche zwei Operationsglieder thetisch verknüpft, lässt im Allgemeinen zweierlei Umkehrungen, zu ihr inverse oder lytische Operationen zu, je nachdem bei bekanntem Knüpfungsergebnisse das eine oder das andere jener Operationsglieder als Unbekannte gesucht wird. Wegen der Kommutativität der identischen Addition

resp. Multiplikation — vergl. Th. 12) — kann man aber den zweiten Term einer Summe resp. Faktor eines Produkts allemal zum ersten machen; es ist darum gleichgültig, ob es das erste oder ob es das zweite Operationsglied war, nach welchem gefragt wurde, und fallen die beiden Umkehrungen der Operation hier jeweils in *eine* zusammen.

Bezeichnen wir abermals die bekannten Terme mit a und b, den gesuchten Term mit x, so wird es sich nun also darum handeln, dasjenige Gebiet, oder diejenigen Gebiete x zu ermitteln, welche die Gleichung erfüllen:

β)	$x + b = a$,	$x \cdot b = a$,

m. a. W. es wird diese Gleichung nach der Unbekannten x aufzulösen sein. Als

„identische *Differenz*": a *minus* b, aus dem „Minuenden" a und dem „Subtrahenden" b	„identischen *Quotienten*": a (geteilt) *durch* b, aus dem Dividenden (Zähler) a und dem Divisor (Nenner) b

werden wir zu definiren haben: die Wurzel der vorstehenden Gleichung β) — falls sie nämlich eine solche besitzt, falls die Gleichung β) überhaupt auflösbar ist nach x.

Die Bedingung hiefür ergibt sich aber nach Th. 50), indem wir die Gleichung zunächst rechterhand auf 0 bringen — nach Th. 39) wird sie:

γ)	$a_1(b + x) + ab_1x_1 = 0$	$a_1bx + a(x_1 + b_1) = 0$

— und indem wir nunmehr die Unbekannte x aus ihr eliminiren. Die Resultante lautet:

δ)	$a_1b = 0$, somit $b \mathrel{\underline{\in}} a$	$ab_1 = 0$ sive $a \mathrel{\underline{\in}} b$.

Und diese Relation drückt die Anforderung aus, welche von den gegebenen Termen (Gebieten, Klassen) a, b erfüllt sein muss, wenn es überhaupt ein Gebiet oder Gebiete x geben soll für welche die aufzulösende Gleichung besteht. Sie ist unerlässliche Bedingung für die mögliche Geltung der Gleichung, die notwendige und hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit derselben und die Existenz einer „Wurzel" (oder von Wurzeln). Identische Subtraktion und Division sind hiernach *keine unbedingt ausführbaren* Operationen; ihre Ausführbarkeit ist vielmehr an die Bedingung δ) geknüpft.

Ist diese Relation *nicht* erfüllt, so kann vernünftigerweise überhaupt nicht von einer Differenz „a minus b" resp. einem Quotienten „a durch b" gesprochen werden; die letzteren bleiben *sinnlose Namen* und in gewisser Hinsicht von demselben Charakter, wie die nächste beste Silbenzusammenstellung.*) Es gibt dann eben nichts, was dem Namen als seine Bedeutung entspricht. (Auch die Null, das „Nichts“ unsrer *ursprünglichen* Mannigfaltigkeit bleibt als solche Bedeutung ausgeschlossen.)

Als Bedingung dafür, dass gedachter Differenz, gedachtem Quotienten eine Bedeutung, ein Wert überhaupt zukomme, mögen wir sie auch die „Valenzbedingung“ für letztere nennen. Diese Bedingung müssen wir, so oft im folgenden von Differenzen oder Quotienten gesprochen wird, jeweils als erfüllt voraussetzen.

Ist jene Wertigkeitsbedingung δ) erfüllt, so vereinfacht die aufzulösende Gleichung sich zu:

$$\varepsilon)\qquad a_1 x + a b_1 x_1 = 0 \qquad\Big|\qquad a_1 b x + a x_1 = 0$$

und kann man nun zur Auflösung derselben nach der Unbekannten x schreiten.

Aus dem allgemeinen Theorem 50), nach dessen Schema die Auflösung stattzufinden hat, wissen wir aber bereits, dass es nicht blos *eine* Wurzel geben wird, sondern unendlich viele (im Allgemeinen von einander verschiedene). Einen Ausdruck, der sämtliche Wurzeln und nur solche liefert, werden wir erhalten, indem wir die gegebenen Terme a, b mit einem willkürlichen Gebiet u in bestimmter Weise verknüpfen.

Diesen Ausdruck wollen wir die „*volldeutige* Differenz“, resp. den „*volldeutigen* Quotienten“ nennen, oder auch den „*Generalwert* der Differenz, des Quotienten“ im Gegensatz zu einem nachher hervorzuhebenden besondern Wert derselben (desselben), den wir als deren „*Prinzipal-* oder *Hauptwert*“ zu bezeichnen Anlass finden und auch die „*eindeutige* Differenz“, den „*eindeutigen* Quotienten“ nennen mögen.

Ich will mir das gewöhnliche Subtraktions- und Divisionszeichen zur Darstellung von letzteren reserviren, und müssen wir dann, um nicht Missverständnisse herauszufordern, für die volldeutigen Ausdrücke unterscheidende Zeichen wählen. Als solche habe ich schon[2] das ein Kolon durchsetzende Minuszeichen für die Subtraktion und ein doppeltes Kolon für die Division angewendet.

Als die allgemeinste Wurzel der Gleichung β) oder ε) erhalten wir nun also:

*) Sagen wir etwa: „Kangerdluksuatsiak-Ikerasaksuat.“ — Ich nahm dabei an, dass der Leser nicht Grönländisch verstehe; denn eigentlich waren dies ein paar grönländische Ortsnamen, ursprünglich besagend: „Ort, wo Leute wohnen“ und dergleichen.

$$\zeta)\qquad x = a \div b \qquad\Big|\qquad x = a :: b,$$

wo die rechte Seite den Ausdruck bedeutet:

$$\eta)\qquad \begin{aligned} a \div b &= a b_1 u_1 + a u = \\ &= a(b_1 + u) = \\ &= a b_1 + u b = a b_1 + u a b, \end{aligned} \qquad\Bigg|\qquad \begin{aligned} a :: b &= a u_1 + (a + b_1) u = \\ &= a + u b_1 = \\ &= a b + u a_1 b_1, \end{aligned}$$

in welchem u ein *willkürliches* Gebiet vorstellt.*)

Natürlich stimmt nun auch die Probe der Auflösung, welche darin besteht, dass man den Ausdruck η) oder ζ) für x in die Gleichung β) einträgt und sich überzeugt, dass dieselbe auf Grund der Voraussetzung δ) erfüllt ist — und zwar für *jede* Bedeutung des u. In der That muss sein:

$$\vartheta)\qquad (a \div b) + b = a \qquad\Big|\qquad (a :: b) b = a,$$

d. h. *jeder Wert*

der Differenz, zu dem Subtrahenden addirt gibt den Minuenden	*des Quotienten, mit dem Divisor multiplizirt liefert den Dividenden.*

Bei dem Nachweise ist schon die Valenzbedingung δ) unentbehrlich, indem man als Wert der linken Seite in ϑ) zunächst erhält:

$$a + b \qquad\Big|\qquad ab$$

was erst auf Grund von δ) sich in a zusammenzieht — vergl. Th. 20). —

In § 21 und 22 gelang es uns, die allgemeinsten Eliminations- und Auflösungsprobleme der bisherigen Theorie schon ohne jegliche Kenntniss von den hier betrachteten inversen Operationen des identischen Kalkuls zu lösen. In dieser Thatsache hauptsächlich ist die Bestätigung zu erblicken für eine früher schon einmal gemachte Andeutung: dass die identische Subtraktion und Division ohne Schaden oder Einbusse aus der ganzen Disziplin des Kalkuls sich ausmerzen lassen. Auch die gegenwärtige Studie hat die Tendenz dies vollends zu erhärten.

Die hier gebrauchten Bezeichnungen sind deshalb auch als provisorische, nur dem augenblicklichen Bedarf zu dienen bestimmte anzusehen, und aus diesem Grunde ist es auch sehr gleichgültig, wie man etwa die volldeutigen Operationszeichen in $a \div b$, $a :: b$ zur Unterscheidung von den eindeutigen in $a - b$, $a : b$ verbatim lesen mag. Da es immerhin misslich erscheint, häufig Zeichen lesen zu müssen ohne einen Fingerzeig darüber und eine bestimmte Gewöhnung, wie dieselben auszusprechen seien, so mag man für jene etwa „voll-minus“ und „voll-durch“ sprechen.

Beachtenswert erscheint noch folgendes. Wir haben vorstehend x er-

*) Die angegebenen verschiednen Ausdrucksformen für die Wurzel sind in § 22 schon implicite aufeinander zurückgeführt. Um die Zurückführung direkt zu leisten, genügen, im Hinblick auf die Valenzbedingung δ), die Theoreme 30_+) und 33_+) Zusatz, oder auch „Entwickelung“ nach a, b', u.

klärt als die allgemeinste Lösung der Gleichung β), als den Generalwert der Wurzel. Dieser ist eigentlich nicht *ein* Wert, sondern stellt gleichwie die Ausdrücke η) eine ganze Gattung oder Klasse von Werten vor, die man erhalten wird, indem man daselbst das u von 0 bis 1 variirt (vergl. S. 426 sq.). Die Gleichungen ζ) bis ϑ) sowie die noch weiterhin folgenden auf volldeutige Differenzen und Quotienten bezüglichen sind darum auch nicht, wie zumeist die früheren, zu deuten als Gleichungen zwischen Gebieten, sondern als solche zwischen Klassen von Gebieten — die allerdings, wie in ϑ) rechts, sich unter Umständen auch in ein einziges Gebiet zusammenziehen mögen. Sie sollen aussagen, dass (nicht etwa jedes einzelne, sondern) die Gesamtheit der Gebiete links einerlei ist mit der Gesamtheit der Gebiete welche rechts vom Gleichheitszeichen dargestellt erscheinen. Die Gleichheitszeichen sind also wirksam nicht in der ursprünglichen, sondern in der aus ihr abgeleiteten Mannigfaltigkeit, in der Mn. der Klassen von Gebieten, und sinken dieselben nur in Ausartungsfällen, wie ϑ), in die erstere Mn. zurück.

Will man jedoch x als ein eindeutiges Gebietsymbol aufgefasst wissen, mithin darunter nur ein spezielles die Gleichung β) erfüllendes Gebiet, eine partikulare Wurzel dieser Gleichung verstehen, so ist es nicht mehr zulässig die Angaben ζ) als Gleichungen beizubehalten. Wie wir schon anderwärts ausgeführt haben, darf das Individuum seiner Gattung nicht etwa *gleich* gesetzt werden. Für ζ) müsste alsdann korrekt geschrieben werden:

$$x ⋹ a \div b \qquad\Big|\qquad x ⋹ a :: b$$

— wobei im Allgemeinen die Unterordnung gilt und Gleichheit nur in den (nachher auch zu betrachtenden) Grenzfällen eintreten *kann*, wo die rechte Seite eindeutig wird, die Gleichung β) nur *eine* Wurzel zulässt, in diesen Fällen aber auch eintreten *muss*.

Auch diese Subsumtionszeichen wären aber als solche der *abgeleiteten* Mannigfaltigkeit zu interpretiren, und nicht als solche der ursprünglichen. Die Subsumtion besagte hier nicht, das Gebiet x sei *als Teil* enthalten in einem rechts angeführten Gebiete, sondern nur, es sei *als Individuum* enthalten in der rechts stehenden Klasse von Gebieten.

Gerade in jenen Grenzfällen aber, wo die Klasse $a \div b$ rechts selbst nur *ein* Gebiet umfasst, müsste das Subsumtionszeichen Missverständnisse nahe legen, indem es Einordnung (als Teil) mitzuzulassen scheint, wo, wie erwähnt, nur Gleichheit gelten kann. Zur Vermeidung solcher (und ähnlicher schon in § 9 unter ψ) charakterisirter Misstände müsste man eigentlich *zweierlei Subsumtionszeichen* verwenden für die *ursprüngliche* und für die *abgeleitete* Mannigfaltigkeit.

Die Nötigung hiezu lässt sich indess vermeiden und sie pflegt glücklich vermieden zu werden, indem man die Lösungen:

$$x = a(b_1 + u) \qquad\Big|\qquad x = a + ub_1$$

auch jetzt wieder als Gleichungen schreibt, dafür aber dem u eine andere Deutung gibt. Statt wie bisher es als ein *willkürliches* Gebiet gelten zu lassen, dem alle erdenklichen Bedeutungen innerhalb der ursprünglichen Mn. mit gleichem Rechte zukommen, braucht man es jetzt nur hinzustellen

als ein *„unbestimmtes“* Gebiet, das vielleicht noch seiner näheren Bestimmung harrt. Man wird es jetzt, wo x eindeutig sein soll, nur „ein gewisses“ Gebiet bedeuten lassen [oder irgend eines von jener sub τ) des § 21 bestimmten Klasse von Gebieten] und dadurch hinbringen, dass beiderseits vom Gleichheitszeichen eindeutige Gebietsymbole stehen zwischen denen die Behauptung der Gleichheit wieder zulässig ist.

Demgemäss werden wir es fortan auch wie bisher vermeiden, mit unsern Betrachtungen über die ursprüngliche Mn. solche zu vermengen, in welchen das Subsumtionszeichen anders als für diese selbst gedeutet werden müsste.

Unter allen Gebieten, welche wir als die Partikularlösungen der Gleichung β) in η) zusammengefasst, der Gebieteklasse also, welche wir als „volldeutige“ Differenz resp. Quotienten daselbst angegeben haben, sind besonders zweie hervorhebenswert, nämlich: die beiden *einschliessenden Gebiete* oder *„Grenzen“*, zwischen welchen (sie selbst mitzugelassen) alle Gebiete der Klasse $a \div b$ resp. $a :: b$ liegen müssen. Aus unsern Formeln η) ergibt sich das eine als das umfassendste Punktgebiet oder die *weiteste* unter den Bedeutungen, welche der Differenz, dem Quotienten von a und b eindeutig untergelegt werden können, bei der Annahme $u = 1$, das andre als die *engste* dieser Bedeutungen für $u = 0$ — wobei indessen nicht zu übersehen ist, dass der Dualismus erfordert, der Annahme $u = 1$ bei der einen die $u = 0$ bei der andern Operation, und umgekehrt, gegenüberzustellen.

Wir erhalten (für $u = 1$ resp. 0) als den

Maximalwert der identischen *Differenz:*	*Minimalwert des* volldeutigen *Quotienten:*
ι) $\quad$ (a minder b) $= a$.	(b in a) $= a$.
Der *höchste unter den Werten der Differenz* ist darnach der *Minuend* selber	Der *niederste* unter den *Quotientenwerten* ist der *Dividend* oder Zähler

und bei dieser Auffassung erscheinen unsre inversen Operationen als völlig *wirkungslos* an dem passiv mit ihnen affizirten Operationsgliede. Es ist demnach müssig, etwa noch nach formalen Gesetzen dieser eindeutigen „Maximalsubtraktion“ und „Minimaldivision“ zu fragen, auch nicht angezeigt, deren Ergebniss für den Hauptwert zu erklären.

Desgleichen verlohnt es nicht, eigene Knüpfungszeichen für diese Operationsweisen einzuführen, weshalb wir uns in ι) mit einem charakteristischen Wortausdruck für die Andeutung ihres Ergebnisses begnügten.

Bei der andern Annahme ($u = 0$ resp. 1) dagegen stellt sich heraus als der

Minimalwert der volldeutigen *Differenz:*

$$\varkappa)\qquad a - b = ab_1$$

Maximalwert des volldeutigen *Quotienten:*

$$a : b = a + b_1 = \frac{a}{b}$$

und indem wir für diese hiermit die gewöhnlichen Subtraktions- und Divisionszeichen einführen, bezeichnen wir sie auch als den eindeutigen oder *Hauptwert*, d. i. als Differenz und Quotient schlechtweg. „Eindeutige“ Subtraktion resp. Division nennen wir die zu ihrer Bildung dienenden Operationen. Auch diese Operationen sind nur „ausführbar“, es haben $a - b$ und $a : b$ nur einen Sinn, wenn die Valenzbedingung δ) erfüllt ist.

Aus den Definitionen η) und $\varkappa$) sind als besondere Fälle hervorzuheben:

$$\lambda)\left\{\begin{array}{l|l}
a \div a = ua, \quad a - a = 0 & a :: a = a + u, \quad a : a = 1 = \frac{a}{a} \\
1 \div 1 = u, \quad 1 - 1 = 0 & 0 :: 0 = u, \quad 0 : 0 = 1 = \frac{0}{0} \\
0 \div 0 = 0 = 0 - 0 & 1 :: 1 = 1 = 1 : 1 = \frac{1}{1} \\
a \div 0 = a = a - 0 & a :: 1 = a = a : 1 = \frac{a}{1} \\
1 \div 0 = 1 = 1 - 0 & 0 :: 1 = 0 = 0 : 1 = \frac{0}{1} \\
1 \div a = a_1 + u, \quad 1 - a = a_1 & 0 :: a = ua_1, \quad 0 : a = a_1 = \frac{0}{a}
\end{array}\right.$$

wo die Valenzbedingung (für die angegebenen Differenzen und Quotienten) jeweils analytisch, von selbst erfüllt ist, weshalb von ihr abgesehen werden kann, den Formeln λ) unbedingte Geltung zukommt. Die Subtraktion einer Klasse von sich selbst sowie von der 1 ist unbedingt ausführbar, etc.

Die Symbole $1 \div 1$ und $0 :: 0$ sind hienach vollkommen unbestimmt oder *„alldeutig“* zu nennen; sie stellen die ganze aus der ursprünglichen Punktmannigfaltigkeit „abgeleitete“ oder ableitbare Mannigfaltigkeit der Gebiete vor, indem uns eben u schlechthin *jedes* Gebiet zu bedeuten hat.

Die letzten Formeln unter λ) aber:

$$\mu)\qquad 1 - a = a_1 = \frac{0}{a} \text{ oder } 0 : a$$

lassen erkennen, *dass die Negation weiter nichts als ein gemeinsamer Spezialfall der* (eindeutigen) *Subtraktion und Division ist:* a negiren heisst, es von 1 abziehen oder es in die 0 hineindividiren.

Mit diesem Spezialfall der beiden inversen Operationen aber kommt,

wie wir gesehen haben, der identische Kalkul — als mit seiner „dritten Spezies“ — schon völlig aus.

Zieht man auch die beiden inversen Operationen mit unter den Gesichtspunkt des Dualismus, so werden natürlich zugleich mit Addition und Multiplikation auch Subtraktion und Division ihre Rollen auszutauschen haben. Alsdann kann man sagen, dass die hiemit gegebene Gleichung:

$$\nu)\qquad 1 - a = \frac{0}{a}$$

zu sich selbst dual ist.

Und das gleiche gilt auch von den noch durch ihre Kombination mit sich selbst entstehenden Gleichungen wie:

$$1 - (1 - a) = \frac{0}{\left(\frac{0}{a}\right)}, \qquad \frac{0}{1 - a} = 1 - \frac{0}{a}$$

etc. Die p. 31 meines Operationskreis[2] gemachte Angabe, dass diese erwähnten die einzigen zu sich selbst dualen Formeln des identischen Kalkuls seien, beruhte jedoch auf einem Übersehen, ist eine zu weit gehende gewesen, wie wir denn in der That schon in § 18 unter φ) auch noch andre Formeln solchen Charakters kennen gelernt haben. —

Mit Rücksicht auf μ) hätten die fundamentalen Theoreme 30) und 31) nun auch in folgenden Formen angeschrieben werden können, in deren einigen (den durch die Beisetzung der Chiffre hervorgehobenen) es nützlich ist, sie gesehen zu haben:

$$\xi)\left\{\begin{array}{ll|ll}
30_+) & a + (1 - a) = 1 & & a \cdot \frac{0}{a} = 0 \\
& a + \frac{0}{a} = 1 & 30_\times) & a\,(1 - a) = 0 \\
31) & 1 - (1 - a) = a, & & \frac{0}{\left(\frac{0}{a}\right)} = a \\
& \frac{0}{1 - a} = a, & & 1 - \frac{0}{a} = a
\end{array}\right.$$

Die 31) zeigt, dass nicht $-(-a) = a$ oder $0 - (0 - a) = a$, sondern $1 - (1 - a) = a$ das wahre arithmetische Analogon des logischen Satzes von der doppelten Verneinung ist — worauf wir uns schon S. 306 beriefen.

Beachtenswert erscheint, dass der Ausdruck $\varkappa$), mit x bezeichnet bezüglich die Auflösung ist des folgenden Paares von Gleichungen:

$$o)\qquad x + b = a, \quad xb = 0 \qquad\Big|\qquad xb = a, \quad x + b = 1$$

durch welches also

$$\pi)\qquad x = a - b \qquad\Big|\qquad x = a : b = \frac{a}{b}$$

vollkommen eindeutig bestimmt wird.

Man erkennt dies leicht, indem man systematisch zuwerke geht, zuerst also die vereinigte Gleichung des Gleichungenpaares o) herstellt, aus dieser dann x eliminirt, wodurch sich abermals die Valenzbedingung δ) und nur diese ergibt, endlich jene nach der Unbekannten x auflöst. Als Auflösung ergibt sich der völlig bestimmte Wert:

$$x = ab_1 \qquad \Big| \qquad x = a + b_1;$$

und umgekehrt ist leicht nachzuweisen, dass dieser letztere Ansatz zusammen mit der Valenzbedingung δ) auch das Gleichungenpaar o) nach sich zieht, nämlich dieselbe vereinigte Gleichung liefert mit welcher dieses äquivalent sein muss. Sobald man also die in der Voraussetzung π) doch sicher miteingeschlossene Annahme gelten lässt, dass die daselbst gegebenen Ausdrücke einen Sinn haben, wird die Gleichung π) auch ihrerseits das Gleichungenpaar o) zu ersetzen im stande sein.

Links vom Mittelstriche z. B. ist aus dieser Betrachtung zu lernen, *dass man im identischen Kalkul einen Summanden* (b) *von der einen Seite der Gleichung wenigstens dann (jedoch auch nur dann) von dieser Seite als einen Subtrahenden* (mit dem Minuszeichen) *auf die andere Seite werfen darf, wenn er mit dem andern Summanden* (x, resp. mit allen übrigen Gliedern der vorausgesetzten Summe) *disjunkt ist,* wenn also die binomische Summe eine *reduzirte* war.

Während aus einer Gleichung $x + b = a$ im Allgemeinen nur zu schliessen ist, dass x *einer von den Werten* der volldeutigen Differenz $a \div b$ sein müsse, folgt $x = a - b$ ausschliesslich dann, wenn nebenher bekannt ist, dass $xb = 0$ sei.

Dagegen darf ein Subtrahend immer als Summand über das Gleichheitszeichen hinübergeschafft, transponirt werden, m. a. W. aus einer Gleichung $x = a - b$ ist es immer zulässig den Schluss zu ziehen: $x + b = a$, in Anbetracht, dass die Probe einer richtig vollzogenen Subtraktion doch sicher stimmen wird.

Im Hinblick darauf z. B., dass $b + 0 = b$ nebst $b \cdot 0 = 0$ gilt, wird es darnach insbesondre gestattet sein, eine Gleichung $a = b$ (oder $a = b + 0$) in die Form $a - b = 0$ umzusetzen, dieselbe mithin auch nach demselben Schema, welches in der Arithmetik geläufig ist, rechterhand auf 0 zu bringen. In der That sagt der Ansatz $a - b = 0$ nach $\varkappa$) aus, dass $ab_1 = 0$ sei, wozu aber noch die Valenzbedingung $a_1 b = 0$ tritt, und dieses läuft nach Th. 24) und 39) zusammen auf $a = b$ hinaus. Wie den Gebrauch der inversen Operationen überhaupt, so wird man aber auch die Schreibweise $a - b = 0$ in unsrer Disziplin besser vermeiden.

Unberechtigt würde es aber beispielsweise sein, aus der Gleichung $a + 0 = a$, die allgemein gilt, den Schluss zu ziehen, dass $0 = ua$ sein müsse bei *beliebigem* u, nämlich dass 0 dem Generalwert von $a \div a$, nach dem Schema η, λ) gebildet, gleichzusetzen sei. Es gilt dies, da der Term 0 ein vollkommen bekannter, notwendig nur für *gewisse* u ($= va_1$, z. B. für $u = 0$); es darf nur geschlossen werden, u sei *einer* von den im General-

wert zusammengefassten Werten, und weil $a \cdot 0 = 0$, so ist es hier der Hauptwert selber: $0 = a - a$.

Es erübrigt noch, auch Ausdrücke von den folgenden Formen einmal in's Auge zu fassen:

$$\varrho)\left\{\begin{array}{ll|ll} a \div 1, & a - 1 & a :: 0, & a : 0 = \dfrac{a}{0} \\[2ex] 0 \div a, & 0 - a & 1 :: a, & 1 : a = \dfrac{1}{a} \end{array}\right.$$

von welchen die Valenzbedingung zeigt, dass sie im Allgemeinen sinnlose, „uninterpretable“ sind, falls nämlich nicht gerade a gleich

$$\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

bezüglich bedeutet.

Führte man hier das Zeichen ∞ *(„unendlich“)* als Symbol der Absurdität, des Unsinns ein, so könnte man — falls nur nicht gerade die eben genannte Voraussetzung zutrifft — diese Ausdrücke samt und sonders gleich ∞ setzen, und speziell wäre zuverlässig:

$$\sigma) \qquad 0 \div 1 = \infty = 1 :: 0 \quad \text{sowie } 0 - 1 = \infty = 1 : 0 = \frac{1}{0}$$

— letzteres wie in der Arithmetik [wobei nun auch die Gleichung $0 - 1 = \frac{1}{0}$ als zu sich selbst dual erscheinen würde].

Es ist in der That unverfänglich, die verschiedenen absurden Ausdrücke, wie $0 - 1$ und $1 : 0$, *einander gleich zu setzen. Alles was unsinnig ist, darf für einerlei uns gelten.* Gäbe man überhaupt auch nur den allergeringsten Unsinn zu, so würde ja durch vollkommen logische Schlüsse auch jeder gewünschte „noch so grosse“ Unsinn sich beweisen lassen — ähnlich wie bekanntlich in der Arithmetik, so auch im identischen Kalkul.

Speziell hier: Lässt man zu, dass es ein $x = \frac{1}{0}$ gebe von der Eigenschaft, dass $x \cdot 0 = 1$ ist, so ist leicht zu zeigen, dass auch für ebendieses x gilt: $x + 1 = 0$ nebst $x \cdot 1 = 0$, dass also auch $x = 0 - 1$ anzuerkennen ist. Wegen $x \cdot 0 = 0$ folgte nämlich aus der Annahme, dass $0 = 1$, und hieraus durch beiderseitiges Multipliziren mit x auch $0 = x$, sodann $x + 1 = x + 0 = x = 0$ und $x \cdot 1 = 0 \cdot 1 = 0$. —

Das Symbol ∞ *kann* aber *nicht,* wie seinerzeit das Symbol 0, *als ein „uneigentliches“ Gebiet der Mannigfaltigkeit unsrer Gebiete zugeschlagen, adjungirt werden;* vielmehr vertritt es die Null der „abgeleiteten“ Mn., Mn. der Gebieteklassen.

Es müsste nämlich seine Hinzuziehung, Zulassung als „Gebiet“ die Folge haben, dass die Prinzipien unsres Kalkuls, wenn sie in voller Allgemeingültigkeit aufrecht erhalten würden, sich selbst aufhöben, uns nach allen Seiten in Widersprüche verwickelten [wie wir denn nach der Definition $\infty = \frac{1}{0}$ nun $\infty \cdot 0 = 1$ hätten im Widerspruch mit $a \cdot 0 = 0$ bei der Annahme $a = \infty$, etc.] — dass sie andernfalles ihre Allgemeingültigkeit verlören und mit lästig zu beobachtenden Ausnahmen behaftet würden, wodurch es nahegelegt erschiene, den Eindringling ∞ aus der Mannigfaltigkeit der Gebiete wieder auszustossen. —

Durch die Koexistenz der Gleichungen π) und o) findet sich unsre Definition von eindeutiger Differenz und Quotient, die wir oben durch Partikularisiren der volldeutigen gewannen, noch einmal selbständig ausgedrückt. Z. B. links: Weiss man von einem Gebiete x nur das eine, dass seine Summe mit einem gegebenen b ein anderes a liefert, so ist x noch nicht vollständig bekannt. Wohl aber ist der gesuchte Summand vollkommen bestimmt, wenn man ferner weiss, dass er den andern b ausschliesst, dass also bx gleichzeitig 0 ist. Etc.

Und ähnlich auch für *Klassen*. Für letztere besitzt die in $a - b = ab_1$ (während $a_1 b = 0$ gedacht wird) vorgeschriebene logische Operation einen sehr geläufigen sprachlichen Ausdruck in Gestalt jener verbalen Formen, mittelst welcher eine *Ausnahme* statuirt wird.

Es kann das Minuszeichen geradezu mit der Partikel *„ausgenommen“*, *„ohne“* in die Wortsprache übersetzt werden, indem die Differenz $a - b$ die *Klasse der a mit Ausschluss der b* vorstellen wird (von welchen die Valenzbedingung die Voraussetzung ausspricht, dass sie ganz in jener enthalten seien).

Bedeutet z. B. $a =$ Metall, $b =$ Edelmetall, so stellt $a - b = ab_1$ die Metalle vor, welche nicht Edelmetalle sind, also die Metalle *ohne* die Edelmetalle, die Metalle *mit Ausnahme der* Edelmetalle.

Umgekehrt jedoch *darf* ein sprachlicher Ausdruck von der Form *„die a ohne die b“*, *„a ausgenommen b“* in unsre Zeichensprache in der Regel *nicht mit* $a - b$ *ohne weiteres übertragen werden, sondern nur mit* $a - ab = a(ab)_1 = a(a_1 + b_1) = ab_1$ (wo dann in der That $a_1 \cdot ab = 0$ ist). Die Wortsprache setzt es nämlich als selbstverständlich voraus, dass man aus einer Klasse nur solche Individuen ausschliessen könne und auszuschliessen beabsichtige, welche in ihr enthalten sind — und diese stillschweigende Forderung muss der hier ausdrucksvollere Kalkul ausdrücklich darstellen. Sagt man „die a *ohne* die b“, so meint man sicherlich nur „die a ohne diejenigen b, welche a sind“.

Wird z. B. berichtet, im untergegangenen Schiffe seien alle Passagire (a) ertrunken, ausgenommen die Frauen (b), welche gerettet worden, so ist, wenn b die Klasse der Frauen schlechtweg, somit im ganzen Menschengeschlechte, bedeutet, die Klasse der ertrunkenen Personen offenbar nur $a - ab = ab_1$ nicht aber $a - b$, welcher Ansatz gar keinen Sinn haben würde, indem hier die Valenzbedingung $b \in a$ nicht erfüllt wäre. Für $a - ab$ hier $a - b$ schreiben hiesse: von den Passagiren des Schiffes auch die in ruhiger Sicherheit auf dem Festlande lebenden Frauen ausschliessen zu wollen.

Sagen wir ebenso: „die Europäer ohne die Russen“, so heisst dies vollständiger ausgedrückt: die Europäer ohne die europäischen Russen, und kann es uns nicht einfallen, auch die asiatischen Russen von den Europäern ausschliessen zu wollen.

Ungeachtet dessen, dass nun also hier die Wortsprache einem geringeren Zwange unterworfen ist, in ihren Ausdrucksformen eine grössere Freiheit, Licenz geniesst, wie unsere Zeichensprache, sind wir doch berechtigt, die Subtraktion im Klassenkalkul als eine Ausschliessung zu erklären, sie auszugeben für die *Exception*.

Für die eindeutige Division hat die Sprache keinen entsprechenden oder adäquaten Ausdruck. Unter der Voraussetzung, dass $a \in b$ sei, bedeutete $\frac{a}{b} = a + b_1$ dasjenige was a oder nicht-b ist. Es liegt im gewöhnlichen Gedankenverlaufe wol selten eine Veranlassung vor, eine derartige Klasse zu bilden, und dieser Umstand war Beweggrund für uns, der identischen Subtraktion den Vortritt vor der Division zu geben.

Unter denjenigen Operationen zwar, welche unter dem Namen der *volldeutigen* Division zusammengefasst sind, ist immer eine, welche im Klassenkalkul, im Kalkul mit Begriffsumfängen oder -Inhalten hinzustellen ist als eine *Abstraktion*.

Ist bei bekannten x nämlich $x \cdot b = a$, so ist x selbst sicherlich einer von den Werten des volldeutigen Quotienten $a :: b$ und muss man, um von dem Produkte a zu diesem seinem Faktor x überzugehen, dabei *absehen*, abstrahiren von den für den andern Faktor b charakteristischen Merkmalen.

Z. B. seien a, b, x die Klassen: $a =$ „Rappe“, $b =$ „schwarz“, $x =$ „Pferd“, so gibt der Begriff „Rappe“, befreit, abgesehen vom Merkmal der schwarzen Farbe, den Begriff „Pferd“.

Die eindeutige Division liefert uns aber in Gestalt von $\frac{a}{b}$ nicht gerade jenen besonderen Faktor x, sondern einen andern, der ebenfalls mit b multiplizirt, determinirt, a liefert. Als Quotienten der Klasse „Rappe“ geteilt durch die Klasse „schwarz“ stellt sie vielmehr hin: alles, was entweder ein Rappe, oder nicht schwarz ist. Unter diesen „nicht-schwarzen“ Dingen sind auch die übrigen Pferde noch mit enthalten.

Es mag der Psychologie überlassen bleiben, zu erklären, weshalb das duale Gegenstück zur Einschränkung, Ausnahmebildung im natürlichen Denken keine Stätte zu finden scheint, jedenfalls hier nicht die entsprechende Rolle spielt. Uns genügt es hier, von der Thatsache Notiz zu nehmen. —

In den Figuren 20 finden sich für die Kreisflächen a und b zunächst die Gebiete $a - b = ab_1$ und $\frac{a}{b} = a + b_1$ mittelst *schräger* Schraffirung hervorgehoben; zugleich sind für eine bestimmte Annahme von u als dritten Kreis durch *wagrechtes* Schraffiren die bei η) in Betracht kommenden Flächen ub resp. ub_1 sichtbar gemacht, und damit auch die Generalwerte $a \div b$ und $a :: b$ soweit möglich (nämlich exemplificando) veranschaulicht.

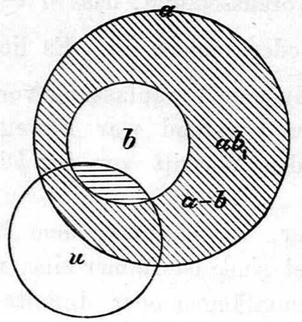

Fig. 20_+.

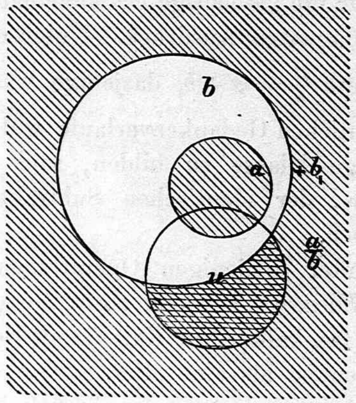

Fig. $20_\times$.

Wie wir gesehen, liesse sich der *Subtraktion* wol noch einige Wichtigkeit für die Technik des identischen Kalkuls zuerkennen, indem bei den Übersetzungen aus Wort- in Zeichensprache, oder umgekehrt — namentlich also bei der Einkleidung von Textaufgaben behufs ihrer rechnerischen Behandlung, sodann bei der Interpretation der Rechnungsergebnisse mittelst Worten — diese Operation in Betracht kommen wird, wo immer *Ausnahmen* zu konstatiren sind oder gefordert werden.

Aus diesem Grunde, dessengleichen bei der Division nicht vorliegt, wollen wir nun der Subtraktion noch einige Betrachtungen widmen (dem Leser es überlassend, sich das dual Entsprechende bezüglich der Division gewünschtenfalles selbst zum Bewusstsein zu bringen).

Von den *Gesetzen der eindeutigen Subtraktion* ist vor allem das „*Distributionsgesetz*“ (derselben) zu beachten:

τ) $\qquad a(b - c) = ab - ac \quad$ oder $\quad (b - c)a = ba - ca,$

von welchem auch in den Diskussionen des gemeinen Lebens allgemein Gebrauch gemacht wird.

Z. B. Der europäische ohne den russischen Handel ist der europäische Handel ohne den russischen Handel. Die geflügelten Tiere mit Ausnahme der Insekten sind die geflügelten Tiere mit Ausnahme der geflügelten Insekten und vice versā. Etc.

Der Beweis des Satzes ergibt sich am einfachsten, indem man die beiden Seiten der Formel nach dem Schema $\varkappa$) evaluirt. In der That hat die linke Seite derselben die Bedeutung $a(b - c) = abc_1$ mit der Valenzbedingung $b_1 c = 0$; und die rechte Seite der Formel hat den Wert:

$$ab - ac = ab(ac)_1 = ab(a_1 + c_1) = abc_1$$

mit der Valenzbedingung

$$(ab)_1 ac = (a_1 + b_1)ac = ab_1 c = 0.$$

Unter der Voraussetzung also, dass die Ausdrücke zu *beiden* Seiten der Formel nur überhaupt einen Sinn haben — eine Voraussetzung, die man füglich als eine „*selbstverständliche*“ bezeichnen kann — werden diese beiderseitigen Ausdrücke das Nämliche (nämlich abc_1) bedeuten und ist die Gültigkeit der Formel unanfechtbar. Bedingung dafür ist die vereinigte Gleichung der beiderseitigen Valenzbedingungen, welche im vorliegenden Falle aber auf die erste, die linkseitige Valenzbedingung sich reduzirt, indem diese, nämlich $b_1 c = 0$, schon von selber auch die andre $ab_1 c = 0$ zur Folge hat.

Immerhin ist nicht zu übersehen, dass die Valenzbedingungen für die beiden Seiten der Gleichung τ) *verschiedene* sind, dass die linke Seite, um einen Sinn zu haben, *mehr* verlangte, als die rechte. Man kann daher durch unbedachte Anwendung des Satzes in Fehler verfallen, und es ist z. B. $aa - a$ oder $a \cdot a - a \cdot 1$ *nicht* $= a(a - 1)$, weil die Valenzbedingung für die Differenz $a - 1$, das wäre $a_1 = 0$, im allgemeinen nicht erfüllt ist, während andrerseits $aa - a$ sehr wohl einen Sinn, nämlich den Wert 0 hat.

Im übrigen kann auf Grund von τ) der Satz des Widerspruchs oder die Formel $30_\times$) sub ξ) $a(1 - a) = 0$ jetzt aufgelöst werden in $a - aa = 0$ und erscheint er darnach als eine blosse Umschreibung des Tautologiegesetzes $14_\times$) $aa = a$ — eine Auffassung, welche besonders Boole betonte.

Für die Wortsprache ist die Ausserachtlassung der Verschiedenartigkeit jener beiderseitigen Valenzbedingungen *nicht* verfänglich und zwar wegen der oben erwähnten Licenz, deren sie sich beim Statuiren von Ausnahmen erfreut. Ein Beispiel wird dies deutlich machen.

Es möge a = betrunken, b = Heide, c = Grönländer bedeuten. Nehmen wir an, dass es betrunkene Grönländer gar nicht gibt, sintemal man auf Grönland nur in Leberthran kneipt, so wird der Satz anzuerkennen sein, dass die betrunkenen Heiden ohne die Grönländer einerlei sind mit den betrunkenen Heiden ohne die betrunkenen Grönländer, das ist $ab - ac$, welches wegen $ac = 0$ sich in ab zusammenzieht! Keineswegs dürfte aber $a(b - c)$ hiefür geschrieben werden, in Anbetracht, dass nicht alle Grönländer Heiden zu sein brauchen oder wirklich sind, man daher von den Heiden b exakt auch nicht die Grönländer c subtrahirend ausnehmen kann, sondern nur die grönländischen Heiden bc. Es würde darnach der Ausdruck $b - c$ schon jeglichen Sinnes baar sein, und wäre es nur zulässig die Klasse $b - bc = b(1 - c) = bc_1$ zu bilden.

Um uns auch über die sonstigen Gesetze der logischen Subtraktion möglichst rasch zu orientiren, will ich zunächst in übersichtlicher Formelzusammenstellung die fundamentalen Sätze der arithmetischen Subtraktion zur Vergleichung hersetzen.

Soweit dieselben auf nicht mehr als drei allgemeine Zahlen Bezug haben, können letztere — vergl. meine Schriften [1] und [2] — in folgende vier Gruppen gebracht werden:

$$v_1)\quad (a - b) + b = (a + b) - b = b - (b - a) = a,$$

$$v_2)\begin{cases} (a + b) - c = a + (b - c) = a - (c - b) = \\ \qquad = (a - c) + b = b - (c - a), \end{cases}$$

$$v_3)\begin{cases} a - (b + c) = (a - b) - c = \\ \qquad = (a - c) - b, \end{cases}$$

$$v_4)\begin{cases} a - b = (a + c) - (b + c) = (a - c) - (b - c) = \\ \qquad = (c - b) - (c - a) = (a - c) + (c - b), \\ a + b = (a + c) + (b - c) = (a + c) - (c - b) = \\ \qquad = (a - c) + (b + c) = (b + c) - (c - a). \end{cases}$$

Nach dem Schema $\varkappa$) können wir nun für jeden der hier verglichenen Ausdrücke den Wert angeben, der demselben im identischen Kalkul beizulegen ist. Desgleichen vermögen wir nach dem Schema δ) auch seine Valenzbedingung anzusetzen, oder, wo mehrere Minuszeichen in dem Ausdruck vorkommen, seine sämtlichen Valenzbedingungen, welche wir dann zu einer einzigen Gleichung vereinigen mögen. Mit Rücksicht auf diese seine Valenzbedingung (schlechtweg) können wir endlich jeden Ausdruck nötigenfalls entwickeln nach den Symbolen, $a, b, (c)$, aus welchen er aufgebaut ist.

Sonach ist es dann weiter keine Kunst, zuzusehen, ob (und unter welchen Bedingungen) die in der Arithmetik gleichwertigen Ausdrücke auch im identischen Kalkul übereinstimmen und um welche Terme sie sich andernfalles unterscheiden.

Es stellt sich heraus, dass von den in der Arithmetik geltenden Gleichungen so ziemlich die *Hälfte* auch im identischen Kalkul Geltung besitzt unter der Voraussetzung, dass die Ausdrücke beiderseits gleichzeitig einen Sinn besitzen, d. h. unter den aus dem Anblick der beiden Seiten selbst ersichtlichen Valenzbedingungen.

Unter Zugrundelegung derselben Annahme (der „vereinigten" Valenzbedingung der Gleichung) bedarf die andere Hälfte der Gleichungen, um im identischen Kalkul gültig zu werden der Hinzufügung eines *Korrektionsgliedes* auf der einen Seite derselben — eines additiven oder subtraktiven Gliedes, welches eines allgemeinen Ausdrucks selber fähig ist.

Es würde zu weit führen, wenn wir für alle Kombinationen der vorstehend unter v) einander gleichgesetzten Ausdrücke dies hier im einzelnen rechtfertigend durchführen wollten. Jede von den einschlägigen Untersuchungen nebst ihrer geometrischen Deutung kann als eine interessante oder wenigstens zuträgliche Übung, geistige Gymnastik für den Anfänger empfohlen werden.

Von den nicht unmodifizirt geltenden Sätzen sei deshalb nur weniges speziell hervorgehoben.

Zu v_1) haben wir insbesondere:

$$\varphi)\qquad (a + b) - b = a - ab \quad \text{oder} \quad a - b$$

das ist ab_1. Korrektionsglied ist mithin $-ab$ oder $-b$. Es wäre nicht erlaubt, den Ausdruck, wie in der Arithmetik, auf a zu reduziren. Z. B. Die Begüterten und die Adeligen, ohne die Begüterten, sind nicht etwa schlechtweg die Adeligen, sondern nur die unbegüterten Adeligen (R. Grassmann).

Zu v_2) gilt beispielsweise:

$$\chi)\qquad a + (b - c) = \{(a + b) - c\} + ac;$$

Korrektionsglied mithin: $+ac$. Die Reihenfolge, in welcher Additionen und Subtraktionen vollzogen werden, ist also im identischen Kalkul nicht gleichgültig.

Die Sätze v_3) dagegen gelten auch im identischen Kalkul ganz unverändert.

Zu v_4) haben wir exempli gratia:

$$\psi)\qquad (a + c) - (b + c) = (a - b)(1 - c),$$

das Korrektionsglied ist also $-(a - b)c$. Hieraus ersieht man, dass ein übereinstimmender Bestandteil (Summand, c) von Minuend und Subtrahend einer Differenz jedenfalls dann unterdrückt, die Differenz also immer dann mit ihm „gekürzt" werden darf, wenn derselbe gegen die andern Bestandteile disjunkt, wenn nämlich $ca = 0$ und $cb = 0$ ist: *beim Subtrahiren reduzirter Summen von einander sind übereinstimmende Terme unbedenklich zu streichen.*

Statt nach den Gesetzen der eindeutigen kann man auch nach denen der volldeutigen Subtraktion fragen.

Man findet, dass die Regel der Arithmetik für das distributive Ausmultipliziren einer Differenz (sowie umgekehrt für das Ausscheiden eines gemeinsamen Faktors im Minuend und Subtrahend einer solchen):

$$\omega_1)\qquad a(b \div c) = ab \div ac$$

auch hier Geltung hat, indem nach dem Schema η) sich übereinstimmend $ab(c_1 + u)$ als Wert der beiden Seiten ergibt unter der schon bei τ) erwähnten Valenzbedingung $b_1 c = 0$, die man als eine selbstverständliche auch unerwähnt lassen könnte auf Grund des Axioms, dass ein Satz nur Geltung beanspruchen kann für diejenigen Fälle, für welche Dasjenige, worüber er aussagt, einen Sinn besitzt.

Ferner ergeben sich die Werte der nachstehend untereinandergestellten

Elementarausdrücke, wenn man die rechts neben sie gestellten Gleichungen, eventuell — wo sie vorkommen — unter Elimination von y und z, gemäss der Methode des § 21 nach der Unbekannten x auflöst:

$$\omega_2)\quad\begin{cases} x=(a+b)\div c & \text{aus}\quad x+c=a+b, \\ x=a+(b\div c) & \text{„}\quad x=a+y,\qquad y+c=b, \\ x=a\div(c\div b) & \text{„}\quad x+y=a,\qquad y+b=c, \\ x=a\div(b+c) & \text{„}\quad x+b+c=a, \\ x=(a\div b)\div c & \text{„}\quad x+c=y,\qquad y+b=a, \\ x=(a+c)\div(b+c) & \text{aus}\quad x+b+c=a+c, \\ x=(a\div c)\div(b\div c) & \text{„}\quad x+y=z,\qquad y+c=b,\qquad z+c=a, \\ x=(a\div c)+(c\div b) & \text{„}\quad x=y+z,\qquad y+c=a,\qquad z+b=c, \end{cases}$$

und so weiter. Valenzbedingung ist jeweils die Resultante der Elimination von x, y, z.

Hier steht jedoch noch ein andrer Weg offen: man kann auch das Schema η) eventuell wiederholt als Vorschrift benutzen, um die verlangten Ausdrücke darnach aufzubauen, wobei man mit den Inhalten der Klammern beginnend successive nach aussen fortschreiten wird. Dieses Verfahren — bei ω_1) oben von uns angewendet — ist das bequemere da, wo nur *ein* $\div$ Zeichen sich in dem Ausdrucke vorfindet. Wo aber deren mehrere auftreten, würde so in das Ergebniss eine Mehrzahl von arbiträren Parametern u, v, w eingehen, die dann nach unserm Zusatze zu Th. 48_+) auf einen einzigen erst noch zurückgeführt werden müssten.

Hat man so (auf die eine oder andere Weise) die Elementarausdrücke berechnet, so unterliegt die Vergleichung derselben wiederum keiner Schwierigkeit, und wird man ähnliche Wahrnehmungen, wie oben bei den eindeutigen Ausdrücken, machen.

Insbesondere möge noch der Leser untersuchen, ob allgemein, oder unter welchen Bedingungen die Ausdrücke

$$\omega_3)\qquad (a+c)\div(b+d)\quad\text{und}\quad(a\div b)+(c\div d)$$

für einander gesetzt werden dürfen, desgl. für die einfachen Minuszeichen.

Wol genügen aber schon die bisherigen Studien um ein Bild zu geben von den Schwierigkeiten oder besser Unbequemlichkeiten, mit welchen man fortgesetzt sich zu placken hätte, wollte man etwa nach den solchergestalt für die Exception und Abstraktion geltenden Formeln wirklich rechnen. Als empfindlichster Misstand würde sich der Umstand fühlbar machen, dass die Regeln nicht unbedingt gültig, die Transformation von Ausdrücken nach denselben nicht allgemein zulässig sind, sondern an die von mir so genannten Valenzbedingungen als an eine jeweilige Voraussetzung geknüpft erscheinen. Sodann sind die mittelst des Korrektionsglieds modifizirten Sätze auch weniger einfach, als die entsprechenden in der Arithmetik, und analoge Ver-

einfachungen, wie sie letztere Disziplin noch obendrein durch die Einführung der „negativen“ Zahlen für den ganzen Komplex ihrer einschlägigen Sätze erzielt hat, wären hier nicht anzubringen. Die Sätze würden hier, zumal bei ihrer nicht unerheblichen wol kaum verminderbaren Anzahl, auch schwer zu behalten sein und müssten jedesmal bei der Anwendung samt ihren Gültigkeitsbedingungen nachgeschlagen werden — gewiss eine höchst unerquickliche Zumutung! Und anderes mehr.

Es ist darum nur zu beglückwünschen, dass durch das Studium einzig ihres gemeinsamen Spezialfalles, der Negation, die weitere Anwendung der inversen Operationen des Kalkuls entbehrlich und überflüssig geworden.

Der Studirende möge deshalb auch einen Ausdruck wie *„die a ohne die b“*, *„die a mit Ausnahme der b“* künftighin nicht mit $a - ab$ resp. $a - b$ sondern nur mit ab_1 in die Zeichensprache übertragen. In der That ist der Ausdruck mit: *„die a, welche nicht b sind“* augenscheinlich äquivalent. —

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass die Darstellung η) des Generalwerts der Differenz sich auch unter dem Gesichtspunkt des Th. 44_+) Zusatz 1 für die Entwickelung einer Funktion $f(a, b) = a \div b$ nach ihren Argumenten darstellen, nachträglich ableiten lässt. Nach diesem Satze nämlich müssten wir haben:

$$\alpha_1)\quad a\div b=(1\div 1)\,ab+(1\div 0)\,ab_1+(0\div 1)\,a_1b+(0\div 0)\,a_1b_1.$$

Nun ist der Koeffizient $0 \div 1$ sinnlos — vergl. das unter σ) Gesagte. Damit der sinnlose Term aus dem Ausdruck fortfalle, wird der zugehörige Konstituent $a_1b = 0$ sein müssen, was uns die Valenzbedingung liefert.

Nach den unter λ) angegebenen Spezialwerten (die auch durch gesonderte Überlegungen hätten unabhängig ermittelt werden können) sind:

$$1\div 1=u,\qquad 1\div 0=1\qquad\text{und}\qquad 0\div 0=0$$

für die übrigen Koeffizienten einzusetzen und ergibt sich:

$$a\div b=uab+ab_1$$

in Übereinstimmung mit η).

Analog dual entsprechend für den Generalwert des Quotienten.

Das Theorem 44_+) nebst Korollaren wird in dieser Weise auch für die unter Konkurrenz *inverser* Operationen aufgebauten Funktionsausdrücke gültig bleiben, wenn man es durch die Zusatzbemerkung ergänzt, *dass diejenigen Konstituenten, deren Koeffizienten undeutig aus-*

fallen, für sich gleich 0 *gesetzt werden müssen* und so die Valenzbedingung für den Funktionsausdruck liefern.

Die vorstehende nähert sich der Art und Weise auf welche Boole seine inversen Operationsergebnisse ermittelte.

Die wesentlichsten in diesem Paragraphen gewonnenen Ergebnisse, seinerzeit im Operationskreis[2] von mir mitgeteilt, habe ich nachträglich als von Herrn Peirce in seiner Schrift[1a] schon früher veröffentlichte vorgefunden.

§ 24. Symmetrisch allgemeine Lösungen.

Die zur Vervollständigung der Theorie hiernächst von uns angestellten Betrachtungen können bei erstmaliger Lektüre des Buches überschlagen werden — es sei denn, dass der Anfänger sie benutzen wolle um sich im identischen Rechnen zu üben. Dieselben scheinen mir vorwiegend ein theoretisches Interesse zu besitzen — von eigentümlichem Reiz vielleicht für den Mathematiker — dagegen praktische Verwertbarkeit wol erst für eine fernere Zukunft in Aussicht zu stellen.

Ein nicht ganz leichtes Problem ist es, das uns hier noch zu beschäftigen hat, da seine Lösung unter Umständen wünschenswert erscheinen kann. Dasselbe bezieht sich auf den Fall, wo nach einer *Mehrzahl* von unbekannten Gebieten oder Klassen gleichzeitig gefragt wird.

Hier kam es darauf an, die sämtlichen Wertsysteme, und nur solche, anzugeben, welche für die Unbekannten $x, y, z, \ldots$ in die vereinigte Gleichung des Problems bezüglich eingesetzt, dieselbe erfüllen.

In § 22, unter ϑ) sqq. *gelang uns dieses,* indem wir die vereinigte Gleichung nach dem System der Unbekannten allgemein auflösen, ihre Wurzeln wirklich „berechnen", d. h. unter Zuhülfenahme *arbiträrer* Parameter $u, v, w, \ldots$ Ausdrücke für dieselben aufzustellen lernten, welche bei beliebiger Deutung jener Parameter uns allemal ein System von Wurzeln, ein solches aber auf jede mögliche Weise, liefern mussten.

Zu dem Ende mussten aber die Unbekannten *successive* (eliminirt und in der umgekehrten Ordnung) *berechnet* werden und die für dieselben als Wurzeln erhaltenen Ausdrücke erwiesen sich nach ihrem ganzen Baue — „formell" — abhängig von der dabei eingehaltenen Reihenfolge.

Die zuerst berechnete Unbekannte enthielt z. B. in ihrem Ausdruck nur *einen* willkürlichen Parameter, die nach dieser berechnete dazu noch einen weiteren, mithin deren zweie, die nächstberechnete ihrer dreie, u. s. w. Es konnte auch vorkommen, dass bei der letzten Elimination (eine oder) mehrere Unbekannte auf einmal herausfielen. Diese mussten dann unbestimmt, willkürlich bleiben und waren *durch sie* hernach die übrigen Unbekannten auszudrücken. Auf diese Weise

wurden bei der Auflösung einzelne Unbekannte vor den andern *bevorzugt*, und solches war sogar der Fall, wenn auch die urspüngliche Aufgabe *„symmetrisch"* erschien bezüglich sämtlicher Unbekannten oder auch einer gewissen Gruppe von solchen, wenn die vereinigte Gleichung durch gewisse unter den Unbekannten vorgenommene Vertauschungen — in Verbindung vielleicht mit einer gleichzeitigen Vertauschung unter ihren *gegebenen* Parametern $a, b, c, \ldots$ — ungeändert blieb, nur in sich selbst transformirt wurde.

So ist z. B. die Gleichung $xy = 0$ bezüglich x und y symmetrisch. Elimination von y gibt $0 = 0$ (womit also auch x von selbst herausgefallen); mithin kann x als willkürlich hingestellt werden, und darnach berechnet sich dann: $y = vx_1$. Somit stellen uns die Gleichungen:

$$x = x, \quad y = vx_1$$

bei beliebigem x und v in der That jedes System von Wurzeln vor; man könnte auch sagen:

$$x = u, \quad y = vu_1$$

bei beliebigen u, v.

Hätten wir aber die umgekehrte Reihenfolge bei der Auflösung vorgezogen, so würden wir in Gestalt von $y = y$, $x = uy_1$, oder:

$$x = uv_1, \quad y = v$$

zur Darstellung von ebendiesen Wurzelpaaren gelangt sein.

Eine gerechtfertigte, rationelle Anforderung ist es, nunmehr zu verlangen, dass die Darstellung für die Wurzelnsysteme von dem bei dem Auflösungsverfahren befolgten modus procedendi unabhängig erscheinen sollen, und dass insbesondere alle diejenigen *Vertauschungen* einerseits zwischen den Unbekannten $x, y, z, \ldots$ andrerseits zwischen den gegebenen Parametern $a, b, \ldots$ welche die *Data* des Problems ungeändert lassen, nämlich die vereinigte Gleichung desselben in sich selbst transformiren, auch das System der *Lösungen* nicht affiziren, nämlich die Darstellungen der verschiedenen Wurzeln nur *auf einander* zurückführen, wofern sie noch mit geeigneten Vertauschungen unter den neu hinzugekommenen Symbolen, den *willkürlichen* Parametern, verbunden werden.

Um diesen Anforderungen zu genügen, dürfen nun jedenfalls nicht mehr einzelne Unbekannte direkt durch andere von ihnen ausgedrückt werden, wo letztere unbestimmt bleiben; vielmehr müssen jetzt *alle* Wurzeln ausgedrückt werden lediglich durch die *gegebenen* Parameter $a, b, c, \ldots$ (oder die Koeffizienten der nach den Unbekannten entwickelten vereinigten Gleichung) und durch *willkürliche* oder „unabhängige" Parameter.

Dergleichen arbiträre Gebiete (welche wir bisher mit Vorliebe u, v, w genannt haben), will ich in diesem Paragraphen ausschliesslich durch *griechische* Buchstaben (des kleinen Alphabetes) darstellen, sodass auch umgekehrt jeder solche uns stets ein *vollkommen willkürliches* Gebiet bedeutet.

Ein durch solche Parameter ausgedrücktes System von Wurzeln wird als ein richtiges, als eine *Lösung* der gegebenen Relation oder vereinigten Gleichung zu bezeichnen sein, wenn dasselbe, in die Gleichung eingesetzt, diese in eine analytische Identität verwandelt; es darf also durch die Einsetzung nicht etwa eine „Relation“ zwischen den Parametern sich ergeben.

Und als die *allgemein(st)e* Lösung wird es zu bezeichnen sein, wenn *jedes* beliebige *die vereinigte Gleichung erfüllende* Wertsystem $x, y, z, \ldots$ der Unbekannten aus den für die Wurzeln aufgestellten Ausdrücken dadurch erhalten werden kann, dass man den in sie eingehenden Parametern geeignete partikulare oder besondere Werte beilegt.

Die Forderung der „*Symmetrie*“ haben wir oben schon charakterisirt.

Ein allen diesen Anforderungen genügendes System von Ausdrücken (resp. von Gleichungen, in welchen linkerhand die Unbekannten sämtlich isolirt erscheinen, rechterhand nur die Koeffizienten mit willkürlichen Parametern verbunden erscheinen) nennen wir eine „*symmetrisch allgemeine*“ Lösung des vorgelegten Problems.

Man mag noch ausserdem verlangen, dass die Anzahl der verwendeten arbiträren Parameter nicht grösser sei, als unumgänglich.

Ich werde nunmehr die vorstehend charakterisirte Aufgabe für eine Reihe von Einzelfällen lösen — die wichtigsten, von elementarer Natur. Es zeigt sich, dass die gefundenen Lösungen immer leicht als solche, die allen Anforderungen wirklich genügen, zu bewahrheiten sind. Weniger leicht sind sie manchmal zu entdecken.

Zu ihrer Auffindung verfüge ich bis jetzt erst über den Anfang einer allgemeinen Methode. Der erste Schritt von dieser — bei jedem Problem der gleiche — führt nicht selten schon sofort zum Endergebnisse. Manchmal aber wird man durch denselben zunächst in einen Zirkel geführt, aus welchem es bis jetzt nicht möglich erscheint, ohne besondere Kunstgriffe herauszukommen. Die Methode bedarf also noch weiterer Ausgestaltung. Was über dieselbe zu sagen ist, will ich gelegentlich der Beispiele auseinandersetzen.

Ich beginne mit der folgenden (unbegrenzten) Reihe von fundamentalen Problemen.

Aufgabe 1. *Es soll die Gleichung*

$$xy = 0$$

„symmetrisch allgemein“ nach den Unbekannten x und y aufgelöst werden.

Die **Auflösung** wird dargestellt durch die Gleichungen:

$$x = \alpha\beta_1\omega_1 + \alpha_1\beta\omega, \qquad y = \alpha_1\beta\omega_1 + \alpha\beta_1\omega,$$

worin, wie vorbemerkt, α, β und ω ganz beliebige Gebiete bedeuten.

Aufgabe 2. *Ebenso nach x, y, z die Gleichung*

$$xyz = 0$$

symmetrisch allgemein zu lösen.

Auflösung:

$$x = \alpha(\beta_1 + \gamma_1)\omega_1 + \alpha_1(\beta + \gamma)\omega,$$
$$y = \beta(\gamma_1 + \alpha_1)\omega_1 + \beta_1(\gamma + \alpha)\omega,$$
$$z = \gamma(\alpha_1 + \beta_1)\omega_1 + \gamma_1(\alpha + \beta)\omega.$$

Aufgabe 3. *Desgleichen nach x, y, z, w aufzulösen die Gleichung:*

$$xyzw = 0.$$

Auflösung:

$$x = \alpha(\beta_1 + \gamma_1 + \delta_1)\omega_1 + \alpha_1(\beta + \gamma + \delta)\omega,$$
$$y = \beta(\alpha_1 + \gamma_1 + \delta_1)\omega_1 + \beta_1(\alpha + \gamma + \delta)\omega,$$
$$z = \gamma(\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1)\omega_1 + \gamma_1(\alpha + \beta + \delta)\omega,$$
$$w = \delta(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)\omega_1 + \delta_1(\alpha + \beta + \gamma)\omega.$$

Und so weiter: das Bildungsgesetz für beliebig viele Faktoren des zum Verschwinden zu bringenden Produktes ist ersichtlich.

Beweis. Erstens *stimmt* bei ganz unbestimmt gelassenen willkürlichen Gebieten $\omega, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ für die angegebenen Wurzelwerte *die Probe der Auflösung* — wie dies leicht nachzurechnen ist.

Die Auflösungen sind also jedenfalls *richtige*.

Zweitens sind sie aber auch die *allgemeinsten*, wie ich für Aufgabe 3 näher nachweisen will (ganz analog ist es auch für die vorhergehenden beiden Aufgaben zu leisten, etc.).

Ist x, y, z, w *irgend ein* Wertsystem oder System von gegebenen Gebieten, welche die Anforderung $xyzw = 0$ erfüllen, so kann man immer unsre Parameter $\omega, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ so bestimmen, dass unsre Ausdrücke für die Wurzeln *gerade dieses* Wertsystem liefern. In der That genügt es, zu diesem Zwecke etwa:

$$\omega = 0 \quad \text{und} \quad \alpha = x, \quad \beta = y, \quad \gamma = z, \quad \delta = w$$

selbst zu denken.

Um dies darzuthun muss nur erkannt werden, dass die Gleichung:

$$x = x\,(y_1 + z_1 + w_1)$$

unter der Voraussetzung $0 = xyzw$ eine richtige Identität ist. Addiren wir aber diese letztere überschiebend zu der vorigen Gleichung, so entsteht:

$$x = x\,(y_1 + z_1 + w_1 + yzw) = x \cdot 1 = x,$$

in Anbetracht, dass wegen $y_1 + z_1 + w_1 = (yzw)_1$ der Inhalt der Klammer rechts gleich 1 sein muss — cf. Th. $36_\times$) und 30_+).

Und analog bezüglich der übrigen Unbekannten. Ebenso würde mit den Annahmen

$$\omega = 1, \qquad \alpha = x_1, \qquad \beta = y_1, \qquad \gamma = z_1, \qquad \delta = w_1$$

der Nachweis gelungen sein.

Es ist also wirklich jede denkbare Lösung, jedes der Forderung $xyzw = 0$ genügende Wertsystem in unsern Ausdrücken für die Wurzeln enthalten.

Und drittens gleichwie die Aufgabe in Bezug auf sämtliche Unbekannte *symmetrisch* war, so sind es auch unsre Resultate, indem durch Vertauschungen unter den Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ augenscheinlich die verschiedenen Wurzeln nur in einander übergeführt werden, das System der Lösungen aber, wenn zugleich auch diese Wurzeln vertauscht werden, als Ganzes unverändert bleibt.

Wir sind darnach mit dem Beweis zu Ende. —

Unsre Lösungen sind sogar *symmetrisch in Bezug auf die Gruppe der Parameter und diejenige ihrer Negationen*, indem bei Vertauschung von $\omega, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit bezüglich $\omega_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ die Ausdrücke wesentlich ungeändert bleiben, nur in sich selbst wieder übergehen.

Letztere Eigenschaft ist ein *Luxus*. Man kann sie preisgeben und dafür den Vorteil erkaufen, dass man mit einem Parameter weniger auskommt.

Wie im zweiten Teil des Beweises sich offenbarte sind nämlich auch die für die spezielle Annahme $\omega = 1$ (oder auch $= 0$) sich ergebenden Ausdrücke schon die allgemeinsten Lösungen und kann man also sagen, dass auch durch die Formeln:

$$x = \alpha_1\,(\beta + \gamma + \delta)$$
$$y = \beta_1\,(\gamma + \delta + \alpha)$$
$$z = \gamma_1\,(\delta + \alpha + \beta)$$
$$w = \delta_1\,(\alpha + \beta + \gamma)$$

die Gleichung $xyzw = 0$ schon symmetrisch allgemein gelöst wird, wobei wir nun nicht *mehr* Parameter, als Unbekannte haben.

Analog auch für die übrigen Aufgaben: es wird z. B.

$$x = \alpha\beta_1, \qquad y = \alpha_1\beta$$

die einfachst mögliche symmetrisch allgemeine Lösung der Gleichung $xy = 0$ sein. Etc.

Zur Auffindung der angegebenen Lösungen kann man *heuristisch* sich leiten lassen durch die folgende Überlegung.

Soll $xyzw = 0$ sein, so müssen wir nach Th. 43) Zusatz haben: $x = \alpha\,(yzw)_1 = \alpha\,(y_1 + z_1 + w_1)$ und ist damit die allgemeine Form gefunden, in welcher x sich durch vier andre Gebiete α, y, z, w ausdrücken lässt; symmetriehalber muss das Analoge in Bezug auf die übrigen Unbekannten der Fall sein, sich also y durch β, x, z, w ausdrücken lassen, etc. Würden wir aber dieses Schema zum Vorbild nehmen, so bekämen wir noch mit einer übergrossen Anzahl von Parametern zu thun (die auch nicht von einander unabhängig bleiben dürften).

Vorteilhafter ist darum die Bemerkung, dass nach bekannten Sätzen — cf. Th. 38) Zus. und Th. 20) — eine *Gleichung* $ab = 0$ *äquivalent ist* (der Subsumtion $a \mathrel{\overline{\in}} b_1$ und folglich auch) *der Gleichung* $a = ab_1$ (wie dies, wegen $a = ab_1 + ab$, auch leicht ganz direkt nachzuweisen). Aus der Gleichung $xyzw = 0$ erhalten wir also:

$$x = x\,(y_1 + z_1 + w_1), \qquad y = y\,(z_1 + w_1 + x_1), \qquad \text{etc.}$$

Ersetzt man hier *rechterhand* die Symbole x, y, z, w selbst durch unbestimmt gelassene Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so erhält man jedenfalls symmetrische Darstellungen für die vier Unbekannten, welche fähig sind jedes gegebene Wertsystem der Wurzeln bei geeigneter Bestimmung der Parameter (nämlich für die Annahme $\alpha = x$, $\beta = y$, etc. derselben) auch wirklich zu liefern, und ist mit diesen Darstellungen nur die Probe noch zu machen, ob sie auch für alle möglichen Werte dieser Parameter schon die Forderung, dass $xyzw = 0$ werde, erfüllen — und siehe da: die Probe stimmt!

Die damit gewonnenen symmetrisch allgemeinen Lösungen:

$$x = \alpha\,(\beta_1 + \gamma_1 + \delta_1), \qquad y = \beta\,(\gamma_1 + \delta_1 + \alpha_1), \qquad \text{etc.}$$

bleiben jedenfalls ebensolche, wenn man sie noch mit einem weitern unbestimmten Parameter ω_1 multiplizirt, und aus den Darstellungen gehen dann ebenso berechtigte hervor, indem man sämtliche Parameter mit ihren Negationen vertauscht. Aus den beiden Systemen von Ausdrücken ergeben sich endlich durch additive Vereinigung der entsprechenden neue, anscheinend die allgemeinsten (in Wahrheit aber nur ebenso allgemeine) die ebenfalls die Forderung $xyzw = 0$ erfüllen müssen, in Anbetracht, dass sie nach ω samt und sonders entwickelt erscheinen und man also behufs Multiplikation derselben nur die Koeffizienten ihrer gleichnamigen Glieder übereinander zu legen braucht.

Um die beim vorstehenden Spezialproblem erlangten Fingerzeige in der Richtung einer zum Ziel führenden Methode zu verallgemeinern, müssen wir noch dem Th. 50) eine neue Ausdrucksform geben, durch welche dasselbe mit dem Zusatze zum Th. 47_+) in Zusammenhang gebracht wird. Das letztere sagte (mit neuer Bezeichnung) aus, dass sooft $A \mathrel{\underline{\in}} x \mathrel{\underline{\in}} B$ ist, auch immer $Ax_1 + Bx = x$ sein müsse. Sagen wir hier b für A und a_1 für B, so gelangen wir — in Anbetracht, dass die Gleichung $ax + bx_1 = 0$ auch mit der Doppelsubsumtion $b \mathrel{\underline{\in}} x \mathrel{\underline{\in}} a_1$ nach Th. 49_+) äquivalent ist, zu dem Satze, den wir bezeichnen als das

Hülfstheorem des § 24: *Die Gleichung* $ax + bx_1 = 0$ *ist äquivalent der:*

$$x = bx_1 + a_1x.$$

In der That kann diese Äquivalenz auch leicht direkt nachgewiesen werden, indem man einfach die letztere rechterhand auf 0 bringt.

Die letztere Gleichung, obwol sie rechterhand die Unbekannte x selbst noch enthält, kann gleichwol als eine *partikulare* „Lösung" der erstern hingestellt werden, in Anbetracht, dass sie aus der allgemeinen Lösung $x = bu_1 + a_1u$ auch hervorgeht, indem man den willkürlichen Parameter u gleich x selbst annimmt. Sie stellt aber mit gleichem Rechte *jede* Partikularlösung vor, indem es offen blieb, welche von diesen unter x gedacht wurde.

Man könnte, im Hinblick auf die erste, unsre zweite Gleichung auch noch zu:

$$x = a_1x$$

(mittelst Unterdrückung von bx_1, welches ja 0 sein sollte) vereinfachen. Für unsre beabsichtigten Anwendungen wird sich dieses aber nur selten empfehlen, — so, natürlich, wenn der Term bx_1 analytisch verschwinden sollte, wie es oben bei Aufgabe 4, wo $b = 0$ war, der Fall gewesen.

Wir werden darnach ein Arbeiten nach dem *„vollen"* und ein solches nach dem *„verkürzten" Schema* unsres Hülfstheorems zu unterscheiden haben.

Nach obigem Hülfstheorem können wir nun die vereinigte Gleichung unsres Problems nach irgend einer Unbekannten *so* auflösen, dass wir *ohne Zuhülfenahme eines arbiträren Parameters* diese Unbekannte *durch*

sich selbst und durch die übrigen Unbekannten linear und eindeutig *ausdrücken.*

Thun wir dies für *jede* Unbekannte, so erhalten wir ein System von Gleichungen, deren jede mit der ursprünglichen vereinigten Gleichung äquivalent ist (und je für eine Unbekannte einen Ausdruck angibt).

Jede Vertauschung von Symbolen, welche die ursprüngliche Gleichung in sich selbst verwandelt, muss darum auch bei dem System dieser aus ihr gezogenen Folgerungen zulässig sein, dasselbe in sich selbst verwandeln.

In unsern Darstellungen für die Unbekannten kommen nun freilich rechterhand neben den Koeffizienten der vereinigten Gleichung auch diese *Unbekannten* selbst wieder vor. *Ersetzt man aber (blos rechterhand) jede einzelne von diesen letztern durchweg durch einen* besondern nunmehr *unbestimmt zu lassenden Parameter* oder griechischen Buchstaben, so wird man ein allgemeineres System von Darstellungen für die Unbekannten erhalten, welches jedenfalls fähig ist, ein jedes besondere System von Wurzelwerten (für gewisse Parameterwerte) darzustellen, welches (m. a. W.) alle Wurzelsysteme notwendig mitumfasst oder in sich begreift.

Ausserdem wird dieses System von Gleichungen unfehlbar die Anforderungen der Symmetrie auch erfüllen. Wenn nämlich *vor* der Ersetzung durch die griechischen Buchstaben eine Gleichung des Systems aus einer andern hervorging durch eine vielleicht zwischen den Koeffizienten und jedenfalls auch zwischen den Unbekannten der vereinigten Gleichung vorgenommene Vertauschung, so muss das gleiche auch *nach* jener Ersetzung noch der Fall sein sobald man nur mit der Vertauschung eben der Unbekannten auch die entsprechende zwischen den für sie eingesetzten griechischen Parametern parallel gehen lässt.

Also die Anforderung der *Allgemeinheit* und die Anforderung der *Symmetrie* erfüllen bereits die so gewonnenen Darstellungen für die Unbekannten. Um sie als „symmetrisch allgemeine Lösungen" der vereinigten Gleichung hinstellen zu dürfen, müssen wir nur noch zusehen, ob sie auch *Lösungen* derselben sind, ob sie als Wurzeln dieselbe erfüllen schon bei beliebig gelassenen Parameterwerten. Zu dem Ende ist nunmehr die *Probe* zu machen; die Ausdrücke sind für die Unbekannten in die vereinigte Gleichung einzusetzen.

Nicht selten, wie gesagt, stimmt diese Probe: es resultirt aus der Substitution der Ausdrücke, die wir dann als die *„Wurzeln"* bezeichnen dürfen, eine von den Parametern analytisch erfüllte Identität; man ist schon mit dem einen geschilderten als dem ersten Schritt der Methode am Ziele.

Zuweilen aber führt die Einsetzung jener Darstellungen für die Unbekannten zu einer *Relation zwischen den Parametern*, welche von diesen erst erfüllt werden müsste. Die Aufgabe ist alsdann wenigstens auf die andre zurückgeführt: diese Relation nunmehr nach besagten Parametern als Unbekannten symmetrisch allgemein zu lösen. Hätten wir schon deren Wurzeln, so würde ihre Substitution in die früheren Gleichungen uns auch die ursprünglichen Unbekannten darstellen lehren.

Die Hülfsaufgabe, auf die wir so geführt werden, kann sehr viel einfacher und leichter sein, als wie die ursprüngliche, in welchen Fällen wir schrittweise zum Ziel gelangen werden. Allein es kommt auch vor, dass die für die Parameter resultirende Relation oder Hülfsgleichung genau von derselben Form ist, wie die ursprüngliche vereinigte Gleichung in Bezug auf die ursprünglichen Unbekannten es war, sodass das Problem wesentlich — bis auf die nunmehr durch andere vertretenen Namen der Unbekannten (und vielleicht Koeffizienten) — *dasselbe* geblieben ist, und es, auf die gleiche Art von neuem in Angriff genommen, in Ewigkeit bleiben müsste. Alsdann vermögen nur andersartige Kunstgriffe aus dem Zirkel herauszuführen — wofern überhaupt das Problem ein lösbares.

Es werden fernere Beispiele dies nach und nach illustriren.

Aufgabe 4. *Die Subsumtion:*

$$x \mathrel{\leftarrow\!\!\!\!\in} y$$

nach x und y symmetrisch allgemein zu lösen.

Auflösung. Die Gleichung $xy_1 = 0$, mit der unsre Subsumtion äquivalent, ist dies auch wieder mit den beiden:

$$x = xy \quad \text{und} \quad y = x + y.$$

Nach der auseinandergesetzten Methode gelangen wir also zu den Formeln:

$$x = \alpha\beta\omega_1 + \alpha_1\beta_1\omega, \quad y = (\alpha+\beta)\omega_1 + (\alpha_1+\beta_1)\omega$$

welche auch schon für $\omega = 0$ angesetzt werden konnten als:

$$x = \alpha\beta, \quad y = \alpha + \beta,$$

und die Aufgabe lösen.

Ebenso konnte aber auch die Lösung schon aus der bei Aufgabe 1 gegebenen abgeleitet werden, indem man nach dortigen Schemata die Gleichung $xy_1 = 0$ symmetrisch allgemein löst nach den Unbekannten x und y_1; für diese hat man die l. c. aufgestellten Ausdrücke und ergibt noch aus dem letztern sich y selbst durch beiderseitiges Negiren. Man bekommt die nämlichen Formeln, wie vorstehend, bis auf den Umstand, dass der Parameter β mit seiner Negation gewechselt.

Es gibt keine wirkliche Vertauschung, welche hier die Data des Problems ungeändert liesse: es können x und y hier nicht die Rollen tauschen und die Aufgabe selbst ist unsymmetrisch. Die Symmetrie unsrer Lösungen besteht hier gleichwol in dem Sinne, dass weder y einseitig durch x ausgedrückt wird, noch umgekehrt x durch y, sondern dass vielmehr beide Unbekannte gleichmässig dargestellt werden durch zwei unabhängige Parameter α und β. Dass diese Darstellungen sogar in Bezug auf letztere symmetrisch erscheinen, dürfte mehr wol nur als ein Zufall anzusehen sein. Verzichteten wir auf diese Gleichmässigkeit, so könnte die Aufgabe schon einfacher mittelst:

$$x = \alpha, \quad y = \alpha + \beta,$$

oder auch mittelst:

$$x = \alpha\beta, \quad y = \beta$$

in unabhängigen Parametern gelöst werden.

Aufgabe 5. Eine Reihe von Problemen einfachsten Charakters ergibt sich, indem man fordert, dass von den vier Gliedern der nach x und y entwickelten Einheit (identischen Eins) irgend eines, irgend zweie oder irgend dreie verschwinden, dass also von den vier Gleichungen:

$$xy = 0, \quad xy_1 = 0, \quad x_1y = 0, \quad x_1y_1 = 0$$

in jeder möglichen Weise eine Gruppe gelten solle und allemal das System nach x und y symmetrisch allgemein gelöst werde.

Für die erste Gleichung, wenn sie für sich allein gelten soll, ist dies schon unter Aufgabe 1 geleistet, für die zweite unter Aufgabe 4 und daraus ergibt sich auch die Lösung für die dritte Gleichung, indem man x und y vertauscht; endlich braucht man, um für die vierte Gleichung die Lösungen zu finden, nur bei denen der Aufgabe 1 das x, y durch x_1, y_1 zu ersetzen, somit hier als x und y anzusetzen: die Negationen der angegebnen Wurzeln.

Gleichzeitige Geltung von irgend zweien der vier obigen Gleichungen führt auf die sechs Aufgaben, je eine von den Gleichungen symmetrisch allgemein zu lösen:

$$xy + xy_1 = x = 0, \qquad xy + x_1y = y = 0, \qquad xy + x_1y_1 = 0,$$
$$xy_1 + x_1y = 0, \qquad xy_1 + x_1y_1 = y_1 = 0, \qquad x_1y + x_1y_1 = x_1 = 0.$$

Von diesen bietet nur die dritte und die vierte ein Interesse (siehe unten). Bei den vier andern Aufgaben fiel nämlich die eine Unbekannte von selbst heraus; diese bleibt willkürlich und kann einem Parameter α, oder β, gleichgesetzt werden, wogegen sich die andre Unbekannte gleich 0 resp. 1 bestimmt.

Nach Th. 33_+) gibt das Verschwinden irgend dreier von den vier Termen, mithin auch ihrer Summen zu irgend dreien, die Ansätze:

$$x_1 + y_1 = 0, \quad x_1 + y = 0, \quad x + y_1 = 0, \quad x + y = 0,$$

welche nur je durch das Verschwinden der beiden Glieder befriedigt werden können, womit sich aber x und y gleich 1 oder 0 völlig bestimmen.

Alle vier Terme zugleich können nicht verschwinden, weil der Ansatz nach Th. 34_+) auf die absurde Gleichung $1 = 0$ führen würde.

Als einzige weitere Ausbeute der vorstehenden Blumenlese notiren wir also diese beiden Probleme: *die Gleichung*

$$xy + x_1 y_1 = 0 \quad \text{resp.} \quad xy_1 + x_1 y = 0$$

je symmetrisch allgemein zu lösen.

Dieselben sind dadurch interessant, dass sie die *einfachsten Exempel* zu dem oben erwähnten *„Zirkel"* liefern.

Behandeln wir zunächst das erste derselben. Die Gleichung zerfällt in die beiden Forderungen $xy = 0$ und $x_1 y_1 = 0$. Der ersten von diesen wird nach Aufgabe 1 durch den Ansatz: $x = \alpha\beta_1$, $y = \alpha_1\beta$ auf die allgemeinste Weise symmetrisch genügt, und müssen die Parameter α und β nur mehr noch so bestimmt werden, dass sie auch die zweite Forderung $x_1 y_1 = 0$ erfüllen. Es wird aber

$$x_1 y_1 = (\alpha_1 + \beta)(\alpha + \beta_1) = \alpha_1\beta_1 + \alpha\beta$$

und sonach erhalten wir in Gestalt von $\alpha\beta + \alpha_1\beta_1 = 0$ für diese unbekannten Parameter eine Gleichung von genau derselben Form, als die ursprüngliche Gleichung in Hinsicht von x und y gewesen.

Das gleiche stellt sich heraus, wenn wir streng systematisch verfahren, die Gleichung nämlich gemäss dem Hülfstheorem des § 24 nach x und y auflösen, wodurch sich $x = y_1$, $y = x_1$ ergibt, alsdann die Symbole x, y rechterhand durch arbiträre Parameter α, β ersetzen und mit den gewonnenen Darstellungen $x = \beta_1$, $y = \alpha_1$ die Probe der Auflösung machen: es zeigt sich, dass diese Parameter nicht unabhängig von einander sind, sondern die Relation: $\alpha_1\beta_1 + \alpha\beta = 0$ befriedigen müssen, welche wiederum von der alten Form ist. Auf dieselbe Weise (behufs Ermittelung von α, β) fortfahrend müssten wir nun immerfort auf die gleiche Aufgabe behufs ihrer eignen Lösung zurückverwiesen werden.

Aus dem Zirkel tritt man aber hier leicht heraus vermittelst der Bemerkung, dass die Relation zwischen den Parametern auch mit $\alpha = \beta_1$ oder $\beta = \alpha_1$ äquivalent ist. Es genügt also in den obigen Darstellungen β_1 durch α zu ersetzen, und erhalten wir:

$$x = \alpha, \quad y = \alpha_1$$

als die gesuchten symmetrisch allgemeinen Lösungen.

Die Symmetrie gibt hier sich darin kund, dass die beiden Lösungen

in einander übergehen, wenn man den (einzigen) vorkommenden *Parameter α mit seiner Negation α_1* vertauscht. —

Die analogen Betrachtungen für das zweite Problem durchzuführen, dessen Gleichung auf $x = y$ oder $y = x$ hinausläuft und mittelst:

$$x = \alpha, \quad y = \alpha$$

symmetrisch allgemein gelöst wird, dürfen wir füglich dem Leser überlassen.

Indem man analog dem hier Durchgesprochenen systematisch alle diejenigen Probleme aufsucht, welche sich ergeben können durch die Forderung des Verschwindens von irgend einer Gruppe von Termen, hervorgehoben aus den acht Gliedern der Entwickelung von 1 nach *x, y und z* gelangt man weiter zu den in Aufgabe 6 bis 11 behandelten Problemen — wobei wir aber nur mehr diejenigen erwähnen, welche nicht zufolge Herausfallens von Unbekannten auf früher Erledigtes hinauslaufen und welche ferner der Art nach verschieden sind, sodass sie nicht durch blosse Vertauschung von Unbekannten miteinander oder mit ihren Negationen auf bereits Behandeltes zurückkommen.

In Aufgabe 2 ist sonach für die Forderung des Verschwindens von nur *einem* der acht Terme implicite die Lösung schon für alle Möglichkeiten angegeben.

Wir führen auch die Probleme nicht mehr in der streng kombinatorisch-lexikalischen Reihenfolge vor — in welche sie erst durch die Anordnung: Aufg. 2, 10, 7 (oder 8 Anm.), 6, 8, 11, 9 treten würden.

Aufgabe 6. *Die Gleichung*

$$x = yz_1 + y_1 z$$

oder, die rechte Seite auf 0 gebracht:

$$xyz + xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 = 0$$

symmetrisch allgemeinst zu lösen.

Die Auflösung leisten die Formeln:

$$x = \beta\gamma_1 + \beta_1\gamma, \quad x_1 = \beta\gamma + \beta_1\gamma_1,$$
$$y = \gamma\alpha_1 + \gamma_1\alpha, \quad \text{etc.}$$
$$z = \alpha\beta_1 + \alpha_1\beta,$$

wie schon durch den ersten Schritt der auseinandergesetzten Methode sich ohne weiteres ergibt — vergl. hiezu auch das Th. von Jevons unter π) des § 18. Wieder genügt hier die Annahme $\alpha = x$, $\beta = y$, $\gamma = z$, um gegebene Werte von x, y, z herausspringen zu machen.

Hätte man für die Auflösung einer Gleichung $ax + bx_1 = 0$ anstatt des vollen Schemas $x = bx_1 + a_1x_1$ das verkürzte: $x = a_1x$ — vergl. unser Hülfstheorem — benutzt, so würden sich die ebenfalls richtigen aber weniger einfachen Formeln als Lösung des Problems ergeben haben:

$$x = \alpha(\beta\gamma_1 + \beta_1\gamma), \quad x_1 = \alpha_1 + \beta\gamma + \beta_1\gamma_1,$$
$$y = \beta(\gamma\alpha_1 + \gamma_1\alpha), \quad \text{etc.}$$
$$z = \gamma(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta),$$

Man ersieht hieraus, dass das Problem der symmetrisch allgemeinen Darstellung eines Systems von Unbekannten nicht nur *auf* verschiedene Weisen, sondern auch *in* verschiedener Weise lösbar ist.

Aufgabe 7. *Die Gleichung*

$$xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 = 0,$$

welche nur die letzten drei Glieder der vorigen enthält, *symmetrisch allgemein zu lösen.*

Auflösung. Systematisch ergibt sich:

$$x = \alpha(\beta + \gamma) + \alpha_1(\beta\gamma_1 + \beta_1\gamma) = (\beta + \gamma)(\alpha + \beta_1 + \gamma_1) =$$
$$= \alpha\beta\gamma + \beta\gamma_1 + \beta_1\gamma,$$

wozu

$$x_1 = \alpha_1\beta\gamma + \beta_1\gamma_1$$

gehört, und so weiter — x, y, z nebst α, β, γ cyklisch (im Ringe herum) vertauscht.

Die Lösungen sind richtige, aber nicht die einfachst möglichen. Bessere ergeben sich hier merkwürdigerweise, indem man anstatt des „vollen" Schema's das „gekürzte" in Anwendung bringt. So kommt:

$$x = \alpha(\beta + \gamma), \quad x_1 = \alpha_1 + \beta_1\gamma_1,$$
$$y = \beta(\gamma + \alpha), \quad \text{etc.}$$
$$z = \gamma(\alpha + \beta),$$

als eine schon beträchtlich einfachere unter den möglichen Lösungen der Aufgabe. Man mache hier die Probe und überzeuge sich, dass mittelst der Annahme $\alpha = x$, $\beta = y$, $\gamma = z$ die Lösungen auch jedes gewünschte die Data erfüllende System von Wurzelwerten zu liefern im stande sind; Elimination von α, β, γ führt blos auf die obige Gleichung.

Aufgabe 8. *Die Gleichung*

$$xyz + x_1yz + y_1zx + z_1xy = 0$$

nach x, y, z symmetrisch allgemein zu lösen.

Dieselbe ist auch äquivalent dem System der drei Gleichungen:

$$yz = 0, \quad zx = 0, \quad xy = 0,$$

indem ihr Polynom sich mittelst identischer Umformungen leicht in $xy + yz + zx$ zusammenziehen lässt.

Auflösung. Es wird also die nach x aufzulösende Gleichung in der Gestalt erscheinen:

$$x(y + z) + x_1yz = 0,$$

und nach dem vollen Schema ergibt sich darnach systematisch:

$$x = \alpha\beta_1\gamma_1 + \alpha_1\beta\gamma, \quad x_1 = \alpha(\beta + \gamma) + \alpha_1(\beta_1 + \gamma_1),$$
$$y = \beta\gamma_1\alpha_1 + \beta_1\gamma\alpha, \quad \text{etc.}$$
$$z = \gamma\alpha_1\beta_1 + \gamma_1\alpha\beta,$$

wozu nur noch bemerkt werden mag, dass x und x_1 auch in der Gestalt:

$$x = (\gamma\alpha_1 + \gamma_1\alpha)(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta), \quad x_1 = (\gamma\alpha + \gamma_1\alpha_1) + (\alpha\beta + \alpha_1\beta_1)$$

geschrieben werden könnten, etc.

Anmerkung. Die Lösung derjenigen Gleichung:

$$x_1yz + y_1zx + z_1xy = 0,$$

welche nur die drei letzten Glieder der obigen umfasst, müssen sich nunmehr ergeben, wenn man in denen der Aufgabe 7 die Unbekannten mit ihren Negationen vertauscht. Thut man das gleiche auch mit den dortigen Parametern, so werden sich:

$$x = \alpha + \beta\gamma, \quad x_1 = \alpha_1(\beta_1 + \gamma_1)$$
$$y = \beta + \gamma\alpha, \quad \text{etc.}$$
$$z = \gamma + \alpha\beta,$$

als diese gesuchten Lösungen ergeben.

Übrigens ist hervorzuheben, dass bei den Aufgaben 7 und 8 weder das Verfahren nach dem vollen, noch dasjenige nach dem verkürzten Schema uns die in formaler Hinsicht *einfachsten* Lösungen lieferte, welche möglich erscheinen.

Vielmehr drücken schon die Ansätze:

$x = \beta + \gamma$ $y = \gamma + \alpha$ $z = \alpha + \beta$	$x = \beta\gamma$ $y = \gamma\alpha$ $z = \alpha\beta$	$x = \beta_1\gamma$ $y = \gamma_1\alpha$ $z = \alpha_1\beta$	$x = \beta + \gamma_1$ $y = \gamma + \alpha_1$ $z = \alpha + \beta_1$
Aufg. 7	Aufg. 8 Anm.	Aufg. 8 $yz + zx + xy = 0$	$y_1z_1 + z_1x_1 + x_1y_1 = 0$

Lösungen aus für die darunter gesetzten Aufgaben (deren letzte aus Aufgabe 8 durch Vertauschung der Unbekannten mit ihren Negationen hervorgeht) — wie durch Eliminiren von α, β, γ aus den drei Gleichungen je leicht zu verifiziren ist.

Bei *gegebenen* Werten von x, y, z, welche die Resultante oder vorgelegte Gleichung erfüllen, sind hier bezüglich:

$$\alpha = yz + x_1(y+z)$$

bei den zwei ersten Problemen; sodann

$$\alpha = y \text{ (auch } y + uz_1); \quad \alpha = y_1 \text{ (auch } y_1 + uz)$$

— und so weiter, die Buchstaben α, β, γ und x, y, z cyklisch vertauscht — diejenigen Werte, welche für die Parameter anzunehmen sind, um die Lösungsgleichungen identisch zu erfüllen.

Gelegentlich der ersten von obigen vier Aufgaben sei noch eines kleinen Paradoxons erwähnt. Eliminirt man blos β und γ, so entsteht für α die Gleichung:

$$(y_1 + z_1)\alpha + x_1(y+z)\alpha_1 + xy_1z_1 = 0,$$

in welcher das letzte Glied links auch unterdrückt werden mag auf Grund der von x, y, z ohnehin erfüllt vorauszusetzenden Relation oder Endresultante der Elimination (auch noch von α). Darnach berechnet sich:

$$\alpha = x_1(y+z) + uyz,$$

worin u willkürlich.

Behufs Erzielung einer möglichst einfachen Annahme für α wird man sich nun versucht fühlen u (anstatt wie oben 1) lieber gleich 0 zu nehmen, somit $\alpha = x_1(y+z)$ und entsprechend $\beta = y_1(z+x)$, $\gamma = z_1(x+y)$ zu setzen. Mit diesen Werten stimmt nun aber die Probe $\beta + \gamma = x$ auffallenderweise *nicht*, vielmehr läuft diese Gleichung (auf Grund der Voraussetzungen über x, y, z vereinfacht) noch auf die Relation $xyz = 0$ hinaus, welche mit den Voraussetzungen nicht gegeben war.

Um dies aufzuhellen, eliminiren wir aus den drei Gleichungen

$$x = \beta + \gamma, \quad \text{etc.}$$

der Aufgabe in Vereinigung mit den drei Ansätzen:

$$\alpha = x_1(y+z) + uyz, \quad \beta = y_1(z+x) + vzx, \quad \gamma = z_1(x+y) + wxy$$

die Parameter α, β, γ und erhalten als vereinigte Resultante:

$$0 = xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 + xyz(v_1w_1 + w_1u_1 + u_1v_1).$$

Aus dieser ist zu ersehen, dass u, v, w in allen drei Ansätzen willkürlich bleiben, wenn $xyz = 0$ sein sollte, dass aber ohne diese Voraussetzung dieselben (unabhängig von x, y, z) nur einander gleich genommen werden dürfen, falls $u_1 = v_1 = w_1 = 0$ somit $u = v = w = 1$ gesetzt wird, womit sich die oben angeführten Parameterannahmen als notwendige ergeben.

Bei der dritten Aufgabe dagegen resultirt für α die Gleichung:

$$y\alpha_1 + z\alpha + xz = 0, \quad \text{woraus} \quad \alpha = y + uz_1$$

folgt. Der analoge Ansatz für β und γ in Gestalt von

$$\beta = z + vx_1, \quad \gamma = x + wy_1$$

liefert durch das entsprechende Verfahren die Resultante:

$$0 = yz + zx + xy + x_1y_1z_1(v_1w + w_1u + u_1v),$$

woraus ersichtlich ist, dass der letzte Term für $u = v = w$ schon bei beliebigem u in Wegfall kommen wird. —

Aufgabe 9. *Die Gleichung:*

$$xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 + x_1yz + y_1zx + z_1xy = 0,$$

welche die bei den Aufgaben 7, und 8 Anm., vorgekommenen Glieder in sich zusammenfasst, *nach x, y, z symmetrisch allgemein zu lösen.*

Auflösung. Die Gleichung fordert, dass:

$$x + y + z = xyz, \quad \text{oder} \quad (x+y+z)(x_1+y_1+z_1) = 0$$

sein solle, und lässt sich schreiben in der Gestalt:

$$yz_1 + zx_1 + xy_1 = 0,$$

oder

$$y_1z + z_1x + x_1y = 0,$$

oder

$$(yz_1 + y_1z) + (zx_1 + z_1x) + (xy_1 + x_1y) = 0,$$

womit, da die drei Terme auch einzeln verschwinden müssen, nach Th. 39) gesagt ist, dass:

$$x = y = z$$

sein müsse. Hiernach wird denn augenscheinlich:

$$x = \alpha, \quad x_1 = \alpha_1$$
$$y = \alpha, \quad y_1 = \alpha_1$$
$$z = \alpha, \quad z_1 = \alpha_1$$

die gesuchte Lösung in unabhängigen Parametern sein.

Behufs Verfahrens nach dem (vollen) Schema der Methode müsste man die Gleichung zuerst nach einer Unbekannten ordnen, z. B. nach x, wo sie sich in folgender einfachen Gestalt darstellen wird:

$$x(y_1 + z_1) + x_1(y+z) = 0,$$

sodann nach jener auflösen, etc. Es würde sich

$$x = \alpha\beta\gamma + \alpha_1(\beta+\gamma) = (\beta+\gamma)(\alpha_1 + \beta\gamma),$$

oder noch konziser:

$$x = \beta\gamma + \alpha_1(\beta+\gamma), \quad x_1 = \beta_1\gamma_1 + \alpha(\beta_1+\gamma_1),$$
$$y = \gamma\alpha + \beta_1(\gamma+\alpha), \quad \text{etc.}$$
$$z = \alpha\beta + \gamma_1(\alpha+\beta),$$

ergeben, und da sich $yz = \alpha(\beta\gamma + \beta_1\gamma_1)$, somit $x_1yz = \alpha\beta_1\gamma_1$ und folglich ebenso $xy_1z_1 = \alpha_1\beta\gamma$ herausstellt, so führt uns die Probe der Auflösung auf eine Gleichung in α, β, γ von derselben Form wie die gegebene in x, y, z — nur die drei ersten Glieder mit den drei letzten vertauscht, d. h. wir gelangen zum Zirkel. Aus diesem wird wieder nur herauszukommen sein durch die Bemerkung, dass die Relation zwischen unsern Parametern auf $\gamma = \beta = \alpha$ hinausläuft, womit sich die oben angeführten Lösungen ergeben. — Nach dem gekürzten Schema würden hier alle drei Unbekannten sich gleich $\alpha\beta\gamma$ ergeben haben. —

Aufgabe 10. *Die Gleichung:*

$$xyz + x_1y_1z_1 = 0$$

symmetrisch allgemein zu lösen in unabhängigen Parametern.

Das systematische Verfahren nach dem vollen Schema der Methode führt hier zu der Erkenntniss, dass die Wurzeln folgenden Bau haben müssen:

$$x = \alpha(\beta_1 + \gamma_1) + \alpha_1\beta_1\gamma_1 = \alpha(\beta_1 + \gamma_1) + \beta_1\gamma_1, \quad x_1 = \alpha_1(\beta + \gamma) + \beta\gamma \cdot$$
$$y = \beta(\gamma_1 + \alpha_1) + \gamma_1\alpha_1, \qquad \text{etc.}$$
$$z = \gamma(\alpha_1 + \beta_1) + \alpha_1\beta_1,$$

d. h. wir erhalten dieselben Ausdrücke, wie im Kontext der vorigen Aufgabe — nur die Parameter mit ihren Negationen vertauscht. Weil nun aber $xyz = \alpha_1\beta_1\gamma_1$ und $x_1y_1z_1 = \alpha\beta\gamma$ wird, so werden die Parameter selbst noch die Relation

$$\alpha\beta\gamma + \alpha_1\beta_1\gamma_1 = 0$$

symmetrisch allgemein zu erfüllen haben, womit wir bei dem Zirkel uns angelangt finden.

Auf ebendiesen Zirkel würde es auch führen wenn man etwa die Lösungen der Aufgabe 2 benutzen wollte, um die vorliegenden zu entdecken. Ebenso:

Wendete man das gekürzte Schema an, so ergäbe sich:

$$x = \alpha(\beta_1 + \gamma_1), \qquad x_1 = \alpha_1 + \beta\gamma$$

und so weiter (die Buchstaben cyklisch vertauscht). Hier würde zwar $xyz = 0$ schon identisch verschwinden, dafür aber

$$x_1y_1z_1 = \alpha_1\beta_1\gamma_1 + \alpha\beta\gamma$$

sich ergeben und somit der alte Zirkel resultiren.

Der Leser mag hier nun selbst versuchen, aus diesem Zirkel herauszukommen.*)

Aufgabe 11. *Die Gleichung:*

$$xyz + x_1yz + y_1zx + z_1xy + x_1y_1z_1 = 0,$$

*) Vergleiche hiezu Anhang 6. —

— welche links die Glieder der in Aufgabe 8, Anmerkung und Aufgabe 10 gegebenen Gleichungen zusammenfasst — *symmetrisch allgemein zu lösen.*

Die Darstellungen für die Wurzeln müssen — hiernach — sich ergeben, wenn man in die bei der Aufgabe 7 gefundenen Ausdrücke diejenigen Parameterwerte substituirt, welche die Forderung der Aufgabe 10:
$$\alpha\beta\gamma + \alpha_1\beta_1\gamma_1 = 0$$
symmetrisch allgemein erfüllen.

Anmerkung. Vertauschte man noch die Unbekannten mit ihren Negationen, so ergäben sich daraus weiter die Lösungen für eine Aufgabe, welche die Glieder aus den Aufgaben 7 und 10 zusammenfasste. —

Mit vorstehenden Aufgaben würden alle diejenigen erledigt sein, welche irgend Interesse bieten von jenen, die unter den sub Aufgabe 5 angegebnen Gesichtspunkt fallen.

Aufgabe 12. *Die Gleichung:*

$$xy_1 + x_1y = c$$

nach x und y symmetrisch allgemein zu lösen.

Auflösung.

Die in Aufgabe 6 gelöste Gleichung hätte nach Jevons' dort citirtem Theorem auch angeschrieben werden können in der Gestalt;

$$xy_1 + x_1y = z,$$

woraus ersichtlich ist, dass die dortige von der hier vorliegenden Aufgabe sich nur dadurch unterscheidet, dass jetzt z nicht mehr unbekannt sein, sondern einen gegebenen Wert c besitzen soll.

Wollte man die Lösungen der Aufgabe 6 zur Auffindung der Wurzeln der obigen 12 benutzen, so bliebe man in den Zirkel gebannt, für die unbestimmten Parameter α und β jener Lösungen eine Gleichung $\alpha_1\beta + \alpha\beta_1 = c$ von genau der nämlichen Form, wie die vorstehende lösen zu müssen, und so ohne Ende fort weiter, falls man abermals neue Parameter zur Darstellung der letztern einführen wollte.

Eliminirt man x und y aus der rechts auf 0 gebrachten Gleichung, so resultirt $0 = 0$, woraus zu erkennen ist, dass c vollkommen willkürlich gegeben werden kann. Die Gleichung lautet:

$$c(xy + x_1y_1) + c_1(xy_1 + x_1y) = 0.$$

Das systematische Verfahren führt (ebenfalls) hier zum Zirkel:

Nach dem vollen Schema wird man unschwer die Darstellungen gewinnen:

$$x = c\beta_1 + c_1\beta, \qquad y = c\alpha_1 + c_1\alpha$$

(in Bestätigung von Jevons' Theorem) und müssen dann aber, damit die

Probe stimme, die Parameter selbst wieder die Relation $\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta = c$ erfüllen.

Nach dem gekürzten Schema erhielte man:

$$x = \alpha(c\beta_1 + c_1\beta), \qquad y = \beta(c\alpha_1 + c_1\alpha),$$

wo α, β dann die Gleichung erfüllen müssten:

$$c(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta) = c, \quad \text{oder} \quad c(\alpha\beta + \alpha_1\beta_1) = 0,$$

welche aufzulösen wenigstens nicht leichter ist, als die ursprüngliche Aufgabe.

Um nun aus diesem Zirkel herauszukommen, nehmen wir die Unbekannten nach c entwickelt an:

$$x = \alpha c_1 + \beta c, \qquad y = \gamma c_1 + \delta c$$
$$x_1 = \alpha_1 c_1 + \beta_1 c, \qquad y_1 = \gamma_1 c_1 + \delta_1 c$$

und machen mit diesen Werten die Probe; es muss dann:

$$c_1(\alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma) + c(\beta\delta_1 + \beta_1\delta) = c$$

werden, d. h.:

$$c_1(\alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma) = 0 \quad \text{und} \quad c(\beta\delta + \beta_1\delta_1) = 0.$$

Diesen Forderungen genügen wir (zwar für ein gegebenes c keineswegs auf die allgemeinste Weise, immerhin jedoch in einer für alle c zutreffenden Weise), indem wir:

$$\alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma = 0 \quad \text{und} \quad \beta\delta + \beta_1\delta_1 = 0$$

selbst machen, womit sich

$$\gamma = \alpha \quad \text{und} \quad \delta = \beta_1$$

bestimmt. Einsetzung dieser Werte führt uns nunmehr zu den *Darstellungen der Wurzeln*:

$$x = \alpha c_1 + \beta c, \qquad x_1 = \alpha_1 c_1 + \beta_1 c$$
$$y = \alpha c_1 + \beta_1 c, \qquad y_1 = \alpha_1 c_1 + \beta c,$$

von welchen in der That erweislich ist, dass sie unser Problem lösen.

Einerseits stimmt (wie gezeigt) die Probe.

Andererseits genügen sie den Forderungen der Symmetrie: durch Vertauschung von β mit β_1 gehen x und y ineinander über — während durch Vertauschung von α, β mit α_1, β_1 auch x, y in x_1, y_1, und umgekehrt, übergeht.

Endlich aber — und dies muss hier noch besonders nachgewiesen werden — sind die Lösungen auch die allgemeinsten: Für die Annahmen:

$$\alpha = xy, \quad \beta = xy_1 \ (\text{oder auch } x + y_1), \quad c = xy_1 + x_1 y$$

werden in der That die Gleichungen zu analytischen, identisch in x, y erfüllten. Bei geeigneter Bestimmung der Parameter α, β werden also unsre Ausdrücke für die Unbekannten auch jedes gewünschte, die vor-

gelegte Gleichung erfüllende Wertepaar x, y darzustellen im stande sein, q. e. d. —

Selbstredend können solche Parameterwerte, welche dieses leisten, wie soeben die für α und β angegebenen, auch systematisch aufgefunden werden, indem man unsre die Wurzeln darstellenden Gleichungen mit der ursprünglichen Gleichung des Problems „vereinigt" und nach den Unbekannten α, β auflöst. Es genügt dann aber für diese nur irgend ein System von Partikularlösungen zu entdecken, wobei man denjenigen vom einfachsten Ausdrucke den Vorzug geben wird.

Zur Übung für den Studirenden führen wir noch folgende beiden Aufgaben mit ihren Lösungen ohne weitere Bemerkung an.

Aufgabe 13. Die Gleichung:

$$xy = a$$

nach x und y symmetrisch allgemein zu lösen.

Auflösung: $x = a + \alpha\beta_1, \quad y = a + \alpha_1\beta.$

Aufgabe 14. Das Gleichungenpaar:

$$xy = a, \qquad x_1 y_1 = b$$

symmetrisch allgemein zu lösen.

Auflösung. Es müssen a und b die Voraussetzung:

$$ab = 0$$

erfüllen, womit sich: $a = \alpha\beta_1$, $b = \alpha_1\beta$ ergibt. Alsdann sind:

$$x = a + \gamma b_1, \qquad x_1 = b + \gamma_1 a_1$$
$$y = a + \gamma_1 b_1, \qquad y_1 = b + \gamma a_1$$

die gesuchten Lösungen. Um *gegebene* x, y zu erhalten, braucht man blos $\gamma = xy_1$ oder auch $\gamma = x + y_1$ (oder irgendwie dazwischen) zu nehmen.

Wir gehen nunmehr zu einer letzten und Hauptaufgabe über.

Aufgabe 15. *Die allgemeinste Gleichung mit zwei Unbekannten x, y:*

$$axy + bxy_1 + cx_1y + dx_1y_1 = 0$$

— kürzer: $F = 0$ — soll nach diesen symmetrisch allgemein gelöst werden.

Auflösung. Durch Elimination von x, y resultirt zwischen den Koeffizienten der Gleichung die Relation:

$$abcd = 0$$

und diese ist zunächst identisch zu erfüllen, indem man gemäss Aufgabe 3 für jene Koeffizienten in unabhängigen Parametern die Ausdrücke nimmt: