folgerung auftretendes nomen ersetzte. Die Folgerung müsste nach einem allgemeingültigen *Schema* vor sich gehen.

Dieses ist hier, wie gezeigt, nicht der Fall, und der Schluss demnach ein „Fehlschluss“ resp. „Trugschluss“, d. i. eben gar kein wirklicher „Schluss“. (Der vorgeschrittenere Leser wird später leicht diesen speziellen Trugschluss auch nach den Regeln der Logik zu analysiren vermögen; derselbe läuft hinaus auf eine Verwechselung von Gleichheits- und Subsumtionszeichen.) —

Dergleichen *„negative“* Beweise, Beweise für die Unzulässigkeit einer gewissen Folgerung oder die Unmöglichkeit eines gewissen Beweises, sind gewöhnlich nicht ganz leicht zu geben. Dies wird auch in unserm Falle zu sehen sein.

Als an ein berühmtes Vorbild sei hier noch daran erinnert, wie durch die Arbeiten von Beltrami, Cayley und Felix Klein die Nichtbeweisbarkeit des 11[ten] (in englischen Ausgaben 12[ten]) Axioms des Euklides aus den übrigen Axiomen der Euklidischen Geometrie dargethan worden ist. Nennen wir jenes Parallelenaxiom kurz A, die Gruppe der übrigen Axiome B, so gelang es zu beweisen, dass A nicht aus B folgen kann, wesentlich dadurch, dass für die Worte: „Raum“, „Abstand“ und „kongruent“ durchweg substituirt wurden die Worte: „Quasi-Raum“, „Quasi-Abstand“ und „quasi-kongruent“, den letzteren aber eine solche (anschauliche) Bedeutung untergelegt wurde, dass die Axiomgruppe B sich als durchaus erfüllt, der Satz A dagegen sich als *nicht* erfüllt nachweisen liess.

Es haben selbst Lehrer der Mathematik in ihren gegen diese Arbeiten oder wenigstens deren Ergebniss polemisirenden Schriften (zahlreiche andere aber durch thatsächliche Nichtanerkennung dieses Ergebnisses) so wenig Verständniss für den logischen Charakter der Frage an den Tag gelegt, dass Denjenigen, die den Wert der Logik überhaupt bemängeln, hier greifbar gezeigt werden könnte, wie viel Streit, beharrlicher Irrtum, Papier- und Zeitverschwendung durch eine bessere logische Schulung des Geistes sich vermeiden liesse!

Da nun im identischen Kalkul — für unsre „Gebiete“ — der Satz A, wie wir durch Anschauung erkannten, doch materiell richtig ist, so wird sich die Unabhängigkeit des Satzes A von der Satzgruppe B nur darthun lassen, indem wir für gewisse Objekte, von denen hierin die Rede war, durchweg andere Objekte substituiren, m. a. W. den Symbolen, welche uns diese Objekte darstellten, eine neue Bedeutung unterlegen, die beiden Partieen von Sätzen in ihrer Anwendung auf ein weiteres Untersuchungsfeld studiren.

Ein solches Anwendungsfeld, in welchem die Gruppe B ohne den Satz A gilt, ist nun in der That der *„logische Kalkul mit Gruppen,* z. B. von Funktionalgleichungen, Algorithmen oder Kalkuln“, den ich in Anhang 4 und 5 (resp. in 6) mit allem Detail begründe. Ich weise — um bei dem Aufbau der gegenwärtigen Theorie nicht zu einer übergrossen Abschweifung genötigt zu sein, unter diesen besondern Überschriften — eingehend nach, dass hier wirklich B durchaus

zutrifft, während Beispiele sich darbieten werden, in welchen A keineswegs zutrifft. Den Beispielen, sowie dem ganzen Kalkul wird ein hervorragendes Interesse auch an sich zukommen.

Die Anwendbarkeit des identischen Kalkuls auf das in § 3, S. 160 mitaufgezählte Feld ζ) wird demnach keine durchgängige sein, vielmehr nur eine beschränkte, teilweise oder partielle; sie wird bei den Sätzen 26) aufhören.

In der systematischen Darstellung der Theorie, mit der wir im Zuge sind, werde ich also die behauptete Nichtbeweisbarkeit der Subsumtion $26_\times$) nunmehr als erwiesen ansehen.

Dieselbe bildet insofern auch kein wesentliches Moment dieser Theorie, als der letzteren doch nur obliegt positiv fortzuschreiten, so gut sie es eben vermag. Das Fortschreiten gelingt ersichtlich auf die Weise, in der wir es ausführen werden, und auf die Herausforderung, es anders zu machen, die Subsumtionen 26) mittelst Beweises auf Grundlage des Bisherigen zu Theoremen zu erheben, wird niemand sich melden können.

Wir stehen darnach einer *merkwürdigen Thatsache* gegenüber.

Nach der in § 8 erörterten sprachlichen Einkleidung von $a + b$ und $a \cdot b$, wenn a und b als Klassen aufgefasst werden, sind die Formeln $25_\times$) und $26_\times$) wie folgt in Worte zu fassen:

$25_\times$) $ab + ac ⋹ a(b + c)$. *„Alle a, die b sind, nebst allen a, die c sind, müssen solche a sein, die b oder auch c sind.“*

Exempel: Die Gebildeten, welche adelig, und die Gebildeten, welche wohlhabend sind (die adeligen Gebildeten und die wohlhabenden Gebildeten), sind Gebildete, welche adelig oder auch wohlhabend sind.

$26_\times$) $a(b + c) ⋹ ab + ac$. „Alle a, welche b oder auch c sind, müssen solche a sein, die b sind, oder auch solche a, die c sind.“

Exempel: Die Gebildeten, welche adelig oder auch wohlhabend sind, sind adelige Gebildete oder auch wohlhabende Gebildete (sind Gebildete, welche adelig, oder auch Gebildete, welche wohlhabend sind).

Von diesen beiden gleich selbstverständlich klingenden *Sätzen lässt der erstere sich syllogistisch beweisen, der letztere nicht.*

Bei den älteren blos *verbalen* Behandlungen der logischen Disziplin ist wol sicherlich nie jemand darauf verfallen, jenen ersten Beweis zu liefern, und übersah man ebenso die Unmöglichkeit des zweiten.

In dem Nachweise und der Ausfüllung solcher Lücken gibt sich auch wol eine Überlegenheit der mathematischen Behandlungsweise kund. —

Jene unberücksichtigt gebliebenen Sätze (ich denke fast: sie werden auch nirgends ausgesprochen worden sein) sind nichtsdestoweniger von der allerhäufigsten Anwendung (begreiflich zumeist unbewussterweise) — wie dies schon bei den Raisonnements des gewöhnlichen Lebens eine geringe Aufmerksamkeit lehrt.

Anstatt der beiden Subsumtionen 25_+) und 26_+) wollen wir schliesslich nur die Gleichung 27_+), die sie in sich zusammenfasst, noch für Klassen formuliren: „*Was a oder b und zugleich a oder c ist, das sind die a, nebst den b welche c sind.*"

Exempel: Die Gebildeten und die wohlhabenden Adeligen sind gerade diejenigen Personen, welche gebildet oder wohlhabend und (zugleich) gebildet oder adelig sind.

Ich muss an dieser Stelle das Verhältniss des hier Vorgetragenen zu Herrn Ch. S. Peirce's Vorarbeiten kennzeichnen.

So weit der identische Kalkul als Buchstabenrechnung bis hier überhaupt zur Darstellung gekommen ist, erscheint sein Aufbau der Hauptsache nach ganz in den §§ 4, 5, 10 und 11 enthalten. In formeller Hinsicht ist für diese Entwickelung Herrn Peirce's grundlegende Arbeit[5] im dritten Bande des American Journal of Mathematics maassgebend gewesen, und zwar nicht nur in Bezug auf den Plan im grossen und ganzen, sondern auch bezüglich fast aller einzelnen Sätze und der Mehrzahl ihrer Beweise. Die Sätze allerdings waren zum Teil schon von Boole, Jevons und Anderen gegeben.

Ein beträchtlicher Unterschied findet jedoch statt hinsichtlich der Interpretation der vorkommenden Symbole. Herr Peirce nämlich fasst die Buchstaben durchweg als Urteile auf, begründet also die Theoreme als solche des „Aussagenkalkuls" — wogegen hier sie als solche des „Gebietekalkuls" entwickelt wurden. Durch das letztere Verfahren erhalten sie, wie in § 32 gezeigt werden wird, eine erheblich grössere Tragweite; sie werden ganz wesentlich verallgemeinert. In formeller Hinsicht indess ist die Verschiedenheit der Interpretation bei dem von Peirce eingehaltenen Gange zufällig fast ohne jeglichen Einfluss gewesen, und lag uns oft einfach ob, die Peirce'schen Betrachtungsweisen auf die Gebiete zu übertragen.

Fussend auf die allbekannten Prinzipien I und II und die Definitionen (1), (2) und (3), von welchen die letzteren namentlich ihm eigentümlich sind, gibt Herr Peirce eine streng analytische Herleitung der verschiedenen Theoreme des Kalkuls und zwar zunächst derjenigen — sagen wir „*bejahenden Charakters*", in welchen nämlich von Negationen nicht die Rede ist — bis exclusive des Theorems 25).

Hier angelangt hält er indess bei den Distributionsgesetzen inne und werden diese [von uns mit 27) numerirten Formeln] von ihm ([5] pag. 33) mit der Bemerkung abgefertigt, dass sie nach l. c. von ihm citirten Formeln leicht zu beweisen, der Beweis aber für die Mitteilung zu langwierig sei [They are easily proved by*) . . ., but the proof is too tedious to give].

Dies war nun ein zu berichtigender Punkt.

Von den beiden Subsumtionen 25) und 26) aus denen als einfacheren Sätzen das „volle" Distributionsgesetz 27) sich zusammengesetzt erweist,

*) Hier Def. (3) und Th. 6).

liess die eine 25) sich in der That leicht, aber gar nicht langwierig, auf dem angedeuteten Wege beweisen. (Von den zwei in § 11 von mir gegebnen Beweisen beansprucht der erste kaum mehr als *eine* Zeile an Druckraum.)

Für den andern Teilsatz 26) aber wollte es mir zunächst durchaus nicht gelingen, den fehlenden Beweis zu erbringen. Statt dessen glückte es mir vielmehr, die Unbeweisbarkeit des Satzes — wie oben (in Verbindung mit den citirten Anhängen) auseinandergesetzt — darzuthun, und eine dieserhalb mit Herrn Peirce geführte Korrespondenz lieferte die Aufklärung, dass derselbe seines diesbezüglichen Irrtums ebenfalls schon inne geworden war — vergl. hiezu die Fussnote auf p. 190 in dessen inzwischen erfolgter Fortsetzung [8] seines citirten Aufsatzes, im siebten Bande des American Journal.

Wenn ich auch in dieser Berichtigung mit Herrn Peirce zusammentraf, so glaube ich doch darin über ihn hinauszugehen, dass ich eben die Unerreichbarkeit des zuerst von ihm erreicht Geglaubten nachweise.

Interessant wird es nunmehr sein, zu sehen, in welcher Gestalt das von Peirce errichtete wissenschaftliche Gebäude nach jener Berichtigung weiterzuführen ist.

Durch jenen Beweis der Unbeweisbarkeit der Subsumtion 26) wird es offenbar gemacht, dass statt des *einen* eigentlich *zweierlei* Kalkuln existiren, derart, dass in dem einen beide, im andern nur der eine der beiden Teile des Distributionsgesetzes unbedingt statthat. Mit dieser Erkenntniss aber drängt sich die Notwendigkeit auf, die verschiedenen Kalkuln auch verschieden zu benennen. Es erschien mir angemessen, den ersten, bisher schlechtweg so genannten „Logikkalkul" seitdem als den „*identischen*" Kalkul zu bezeichnen im Gegensatz zu dem andern, dem Kalkul mit „Gruppen" — vielleicht als dem eigentlich „*logischen*", beide Kalkuln jedoch nach wie vor in das Gebiet der „*Algebra der Logik*" zu verweisen.

Bis zum Einschluss der Theoreme 25) fallen beide Kalkuln wie gesagt in *einen* zusammen, so weit decken sie sich. Erst bei den Subsumtionen 26) erfolgt die Trennung, indem auch diese und damit das volle Distributionsgesetz 27) im identischen Kalkul noch durchaus gelten werden, im logischen (dem *Kalkul mit „Gruppen"*) nicht. So weit auch findet dieser Gruppenkalkul sich in Anhang 4 und 6 entwickelt, und darüber hinaus ist eine Entwickelung ihm überhaupt noch nicht zuteil geworden, auch bleibt er wol naturgemäss zurück, da ihm so wichtige Gesetze des identischen Kalkuls abgehn. Wir beschäftigen uns hiernächst nur mit dem identischen Kalkul weiter.

Um weiter zu fahren, müssen wir uns vor allem klar machen, dass *die beiden Sätze* $26_\times$) *und* 26_+) *sich auf einander zurückführen lassen.*

Gilt z. B. die Formel $26_\times$) allgemein, so auch wie oben dargelegt das *„volle“* Distributionsgesetz $27_\times$). Und durch des letztern wiederholte Anwendung ist ihrerseits leicht zu beweisen die *„Multiplikationsregel für Polynome“*, welche in dem (uns zunächst genügenden) einfachsten Falle ausgedrückt wird durch die Formel:

$28_\times$) $$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

Beweis. Multiplizirt man erst nur die Summe $a+b$ mit dem hinter ihr stehenden Faktor nach $27_\times$) aus, so ergibt sich:

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot(c+d)+b\cdot(c+d)$$

und wenn man in den beiden Termen rechterhand nunmehr auch die Summe $c+d$ je mit dem vor ihr stehenden Faktor ausmultiplizirt, so entsteht:

$$(a+b)(c+d)=(ac+ad)+(bc+bd),$$

wo nun die Klammern rechterhand auch weggelassen werden dürfen [cf. Anhang 2] und der Satz sich bewiesen findet.

Meist wird die Formel $28_\times$) im Sinne *von links nach rechts* angewendet, und verlohnt es nur zu diesem Zwecke sie sich in Worten einzuprägen (wobei wir wegen der späteren Ausdehnung des Satzes auf beliebig viele Glieder die Gliederzahl, die bis jetzt nur „zwei“ sein dürfte, schon unerwähnt lassen wollen):

Zwei Polynome (mehrgliedrige Summen) können mit einander multiplizirt werden, indem man jedes Glied des einen Polynoms mit jedem Glied des andern multiplizirt und die Einzelprodukte summirt (addirt).

Man nennt diesen Prozess das *„Ausmultipliziren“* der gedachten Polynome — in der Arithmetik auch wol das „Entwickeln“ ihres Produktes; doch erscheint wieder letzteres aus später zutage tretenden Gründen hier weniger geeignet (vergl. den § 19 über die „Entwickelung“ der Funktionen überhaupt.

Im umgekehrten Sinne, also von rechts nach links gelesen, zwecks der *„Zerfällung“* eines gegebenen Aggregates von (monomischen binären) Produkten in polynomische Faktoren, wird in der Praxis mit Recht der einmaligen Anwendung der komplizirten Formel $28_\times$) vorgezogen die wiederholte Anwendung der einfacheren $27_\times$) im Sinne des „Ausscheidens“ gemeinsamer Faktoren, so wie sie im umgekehrten Sinne beim Beweis von $28_\times$) bereits oben geleistet ist. Man wird hier eben den Ansatz machen:

$$ac+ad+bc+bd=a(c+d)+b(c+d)=(a+b)(c+d).$$

Bevor wir weiterfahren sei die Gleichung $28_\times$) auch für Klassen noch durch ein Beispiel erläutert:

Die russischen oder europäischen Kapitalisten oder Kaufleute sind die russischen Kapitalisten nebst den russischen Kaufleuten und den europäischen Kapitalisten sowie den europäischen Kaufleuten.

Sobald wir nun uns auf $28_\times$) berufen dürfen lässt sich die rechte Seite von 27_+) durch Ausmultipliziren wie folgt zerlegen:

$$(a+b)(a+c)=aa+ab+ac+bc,$$

und dies gibt nach Th. $14_\times$)

$$=\{(a+ab)+ac\}+bc=\{a+ac\}+bc=a+bc,$$

indem der erste Term aa oder a nach 23_+) die beiden zunächst ihm folgenden successive „absorbirt“.

Hiermit aber wird dann die Gleichung 27_+) und damit auch die kraft Def. (1) in ihr mitenthaltene Subsumtion 26_+) bewiesen erscheinen.

Dem bisherigen genau dual entsprechend würde vermittelst 26_+) auch $26_\times$) sich ableiten lassen. Daher nun musste auch 26_+) notwendig unbeweisbar sein, denn wenn für diese Subsumtion der Beweis gelänge, sc wäre damit auch für die $26_\times$) ein Beweis geliefert, was erwiesenermassen unmöglich ist.

Keinesfalls werden wir also genötigt sein, die Sätze 26) *alle beide* als Prinzipien hinzustellen.

Versuche, einen von ihnen etwa *nach* Hinzufügung der Def. (6) der Negation mit ihrem zugehörigen Postulate zu beweisen, schlagen ebenfalls fehl.

Dagegen brauchen wir blos einen speziellen Fall des einen, z. B. von $26_\times$) als Axiom oder Prinzip zu fordern, und zwar den folgenden.

Prinzip $\text{III}_\times$. *Wenigstens, wenn* [$bc \Subset 0$, somit auch] $bc=0$ *ist, gilt sicher:*

$$a(b+c)\Subset ab+ac.$$

Zusatz 1. Nach $25_\times$) und Def. (1) gilt dann auch die Gleichung:

$$a(b+c)=ab+ac$$

vorerst unter der einschränkenden Voraussetzung, dass $bc=0$ sei.

Zusatz 2. Von zweien ist der Satz leicht auf drei und mehr Glieder auszudehnen, vorerst unter der entsprechenden Voraussetzung, dass deren Produkte zu je zweien gleich 0 seien. So muss namentlich sein:

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad,$$

falls

$$bc = 0, \quad bd = 0, \quad cd = 0.$$

Dann ist nämlich (wegen $bc = 0$) nach Zusatz 1:

$$(b + c)d = bd + cd = 0 + 0 = 0$$

cf. Th. 21_+). Deshalb also abermals nach Zusatz 1 ist:

$$a\{(b + c) + d\} = a(b + c) + ad$$

und durch Einsetzung von $a(b + c) = ab + ac$ rechterhand ergibt sich hieraus der zu beweisende Satz.

Ebenso beweist sich leicht das Schema $28_\times$) sofern nur $ab = 0$ und $cd = 0$. Etc.

Anmerkung 1. Dem Prinzip $\mathrm{III}_\times$ würde ein Satz III_+ dual entsprechen: dass $(a + b)(a + c) \mathrel{=\!\!\!\in} a + bc$ wenigstens dann sein müsse, wenn $b + c = 1$ ist. Denselben dürfen wir aber *nicht* auch als ein „Prinzip" bezeichnen sondern müssen ihn ein „Theorem" nennen, weil er sich nunmehr — selbst ohne die angegebene beschränkende Voraussetzung, nämlich verallgemeinert zu 26_+) und 27_+) — auf Grund von $\mathrm{III}_\times$ beweisen lassen wird.

Indessen braucht auf dieses Theorem hier überhaupt nicht Bezug genommen zu werden.

Anmerkung 2. Ein spezieller Fall des Prinzips $\mathrm{III}_\times$, also ein noch speziellerer Fall der Subsumtion $26_\times$) würde der folgende Satz sein:

$\mathrm{III}_\times^0$. *Es ist* $a(b + c) \mathrel{=\!\!\!\in} ab + ac$, *soferne wenigstens* $bc = 0$ *und* $b + c = 1$ *ist*,

wo dann auch $a(b + c) = ab + ac$ unter denselben Bedingungen gelten würde — ein Satz, dem wir also weiter unten die kürzere Fassung

$$a(b + b_1) = ab + ab_1$$

oder die noch kürzere: $a = ab + ab_1$ würden geben können.

Mit diesem noch einfacheren Satze, selbst in Verbindung mit seinem dualen Gegenstücke, gelänge es aber (wie wir sehen werden) *nicht*, hier auszukommen.

Da von zwei einander dual entsprechenden Sätzen hier blos der eine $\mathrm{III}_\times$ zum Prinzip erhoben wurde, so werden unsre ferneren Beweisführungen eine Weile notwendig unsymmetrisch: der Dualismus ist uns zur Zeit entschlüpft, wird jedoch in Bälde wieder eingefangen.

Den in Kenntniss zu nehmenden Sätzen werden wir bis dahin auch nicht in der Lage sein, die ihnen dual entsprechenden immer sogleich gegenüberzustellen.

Über die anscheinende Unmöglichkeit, statt einseitig, hier doch symmetrisch vorzugehen, nämlich an Stelle von $\mathrm{III}_\times$ einen sich selbst

dual entsprechenden Satz zum dritten Prinzip zu erwählen, muss ich mir weitere Bemerkungen noch vorbehalten (S. 310 sq.).

Einstweilen garantirt uns unser Prinzip $\mathrm{III}_\times$ die Erlaubniss, *eine Summe wenigstens dann nach dem Distributionsgesetze auszumultipliziren*, wenn ihre Glieder unter sich *disjunkt* sind (d. h. zu je zweien multiplizirt ein Produkt 0 geben).

Dergleichen Summen mag man *„reduzirte"* nennen.

Man kann noch bemerken, dass auch die ausmultiplizirte Summe wieder eine reduzirte sein wird und nebenher diese Wahrnehmung mit McColl verallgemeinern zu dem Satze:

Zusatz 3. *Das Produkt zweier (oder mehrerer) reduzirten Summen gibt ausmultiplizirt wieder eine reduzirte Summe.*

Jedes Glied der ausmultiplizirten Summe hat nämlich, als Partialprodukt, ein Glied der ersten und ein Glied der zweiten Summe zum Faktor. Haben zwei Glieder aus der einen Summe *denselben* Term zum Faktor, so müssen ihre andern Faktoren disjunkte Terme aus der andern Summe sein, und sie darum zum Produkt 0 geben. Andernfalles haben sie sowol aus der einen als aus der andern Summe disjunkte Terme zu Faktoren und geben, wenn miteinander multiplizirt, um so mehr ein Produkt 0.

Anmerkung 3 zu Prinzip $\mathrm{III}_\times$.

Man kann — vergl. Jevons[1] p. 27 sq. — für das Prinzip $\mathrm{III}_\times$ und ebenso schon für die allgemeinere Subsumtion $26_\times$), nachdem sie (wie oben geschah) für Klassen oder auch für Gebiete in Worte gefasst sind, einen verbalen „Beweis" liefern wie folgt.

Vorausbemerkt sei nur, dass hiebei im Satze, wie im Beweis wiederholt (auch in „disjunktiven" Urteilen) die Konjunktion „oder" vorkommt. Beim spezielleren Satze $\mathrm{III}_\times$ ist dieselbe im Sinne von § 8, η) zu verstehen als „oder aber", bei dem allgemeineren Satze $26_\times$) dagegen im Sinne von § 8, ϑ) zu ersetzen durch „oder auch". Hierdurch allein würden die beiden Sätze und Beweise sich unterscheiden. Wir sagen hiernächst schlechtweg „oder".

Im übrigen muss man wesentlich auch die *Interpretation* § 8, ι) von $a + b$ vor Augen haben.

Jevons' „Beweis" zu $\mathrm{III}_\times$ resp. $26_\times$).

Was a und entweder b oder c ist — wenn es b ist, so ist es ab*), wenn es c ist, so ist es ac, und es ist folglich entweder ab oder ac. [— sintemal auch $a(b + c) \mathrel{=\!\!\!\in} b + c$, sowie $ab \mathrel{=\!\!\!\in} ab + ac$ und $ac \mathrel{=\!\!\!\in} ab + ac$ nach Th. 6) sein muss —].

*) Dann ist es nämlich a und b zugleich, ist ein a, *welches* b ist, ein ab. Man kann sich auch auf Th. $20_\times$) berufen, wonach für ein dem b eingeordnetes a, für $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$, auch sein muss $a = ab$, und um so mehr $a \mathrel{=\!\!\!\in} ab$.

Es sei nicht in Abrede gestellt die gemeinverbindliche Denknotwendigkeit dieser Überlegung, so wenig, als wie schon die Selbstverständlichkeit des durch sie (womöglich *noch*) plausibel(er) gemachten Satzes.

Allein es wird bei diesen Schlüssen von einem Grundsatze Gebrauch gemacht, der bisher weder implicite noch explicite Erwähnung fand, nämlich von diesem:

„*a ist* entweder *b* oder *c*“ heisst genau dasselbe, wie „entweder *a ist b*, oder *a ist c*“. Kürzer: *Was b oder c ist, ist entweder b, oder es ist c.*

Man sieht, wie hienach die Kopula „ist“ sich verteilt auf die beiden Glieder der Alternative, und wie umgekehrt sie von diesen beiden auch wieder abgezogen und in eine einzige Kopula zusammengezogen verschmolzen werden kann.

Von den in diesem Grundsatz für „einander äquivalent“ erklärten beiden Urteilen ist das erste ein kategorisches, also mit *einer* Kopula versehenes, mit dem Subjekte *a* und dem Prädikate „*b* oder *c*“. Das zweite Urteil aber ist gar kein kategorisches, sondern ein „disjunktives“. Es besteht aus zwei Sätzen, deren jeder für sich seine Kopula besitzt, und die mittelst der Bindewörter „entweder . .“, „oder . .“ verknüpft, in Abhängigkeit voneinander gesetzt sind.

Es gehört dieser Grundsatz als schlechthin gültiger ausschliesslich dem „Aussagenkalkul“ an, woselbst wir ihn noch näher studiren werden — § 45, α_+). Im Gebietekalkul gilt er im allgemeinen *nicht:* Wenn ein Gebiet *a* im Gebiete $b + c$ enthalten ist, braucht es nicht entweder in *b* oder in *c* ganz enthalten zu sein. Daselbst gilt er — wie wir erst viel später, § 47, sehen werden — nur für die „*Individuen*“ der Klassen, die Punkte von *a*, nicht aber für die Klassen selber.

Erst wenn diese „*Argumentation auf die Individuen*“ der Klasse als ein Grundsatz, als ein „Prinzip“ ausdrücklich vorausgeschickt worden wäre, dürften wir die obige Überlegung als einen wirklichen *Beweis* hinstellen.

Dergleichen zu thun wäre wohl in der That am zweckmässigsten beim ersten Unterricht mit Schülern.

Hier dagegen wollen wir darauf ausgehen, unsre Axiome oder Prinzipien möglichst aus dem Gebiete- oder Klassenkalkul selbst zu schöpfen (von dem Aussagenkalkul, der sich in ihm mitenthalten erweist, solange es nur irgend angeht auch mit den Prinzipien I und II auszukommen suchend — die wir ja bislang schon in doppeltem Sinne zu citiren hatten). Da *verbietet es sich* denn *von selbst, von Argumentationen auf die Individuen* der Klassen *wesentlich Gebrauch zu machen,* solange das „Individuum“ noch überhaupt nicht einer wissenschaft-

lichen Definition im Klassenkalkul teilhaftig geworden, auf welche solche Argumentationen in strenger Beweisführung erst zu basiren wären. Um aber solche Definition und Beweisführung zu verwirklichen (vergl. § 47) werden wir längst schon des vollen Distributionsgesetzes zum Aufbau unsrer Disziplin bedurft haben und vielfach in der Lage gewesen sein, desselben nicht entraten zu können.

Aus diesen Gründen verharren wir bei dem gewählten Prinzipe $\text{III}_\times$.

Unverkennbar geht die Arithmetik einen umgekehrten Weg: sie fängt bei Aufstellung ihrer Zahlbegriffe und ersten Sätze eben mit „Argumentationen auf die Individuen“ als den plausibelsten Überlegungen des Menschengeistes an. In didaktischer Hinsicht dürfte solches Verfahren auch die grössten Vorzüge besitzen, und tadeln wir sie keineswegs darob. Wir verlangen jedoch, dass entweder das Eine oder aber das Andre *konsequent* durchgeführt werde! *Hier* nun haben wir nicht den Begriff des Individuums sondern den der Einordnung zwischen Gebieten, Subsumtion, an die Spitze gestellt; wir haben bereits den entgegengesetzten Weg eingeschlagen und müssen ihn nun auch zu Ende gehen; wir dürfen darum jenen Begriff auch noch nicht voraussetzen (es sei denn ganz nebenher bei den Illustrationen durch Beispiele oder den Nutzanwendungen des Kalkuls), sondern werden erst verhältnissmässig spät im stande sein, eine Definition des Individuums, Punktes aufzustellen.

Wir begnügen uns, einstweilen mit Peirce zu sagen, der obige „Beweis“ sei nicht syllogistisch, sondern „*dilemmatisch*“ und verweisen in Bezug auf die als ein „Dilemma“ hinzustellende Art des Schliessens auf § 45 des mehrerwähnten Aussagenkalkuls, sowie schon auf das Schema der Aufgabe ι_1) des § 18. [Der vorgerücktere Leser wird leicht diese Schlussform als eine hier wirklich mit zur Anwendung gekommene erkennen, indem er sich das *s* des Schema's als $a(b+c)$, das *p* desselben als $ab + ac$ deutet — ohne dass wir nötig hätten, hierauf nochmals zurückzukommen.] Den *vor*greifenden Charakter des „Beweises“, zufolge dessen er hier noch nicht am Platze, noch deplacirt erscheint, erblicke ich aber wesentlich nicht darin, dass diese Schlussform in ihm zur Anwendung kommt, sondern vielmehr in dem erwähnten „Argumentiren auf Individuen“.

Dual entsprechend könnte der andre Satz:

$$26_+)\qquad (a+b)(a+c) \Subset a + bc,$$

— in Worten: „Was *a* oder *b* und zugleich *a* oder *c* ist, ist entweder *a* oder: *b* und *c*“ auch dilemmatisch so „bewiesen“ werden: Dasselbe ist entweder *a* oder nicht. Ist es nicht *a*, so muss es nach dem ersten Teil der Voraussetzung *b* und nach dem zweiten *c* sein; also ist es entweder *a* oder „*b* und *c*“.

Nebenbei bemerkt liegt hier ein Fall vor, wo die Wortsprache, als des Instrumentes der Klammern entbehrend, unpräzise, zweideutig oder doppelsinnig wird, resp. durch geeignete Betonung und Pausen die Klammerstellung andeuten, ersetzen muss. Es gibt ja „(a oder b) und zugleich c“, das ist $(a+b)c$, einen wesentlich andern Sinn als „a oder (b und zugleich c)“. Der letztere nur war vorhin maassgebend. Vergl. die Studie unter ζ) und η) des § 18. —

Hiezu ist gehörig Anhang 4 nebst 5 und eine Episode aus Anhang 6. —

Siebente Vorlesung.

§ 13. Negation (mit Postulat) und darauf zu gründende Sätze. Ihre Einführung für Gebiete.

Ich werde mich im § 13 und 16, d. h. in Bezug auf die Darstellung und Begründung der für die Technik des Kalkuls wichtigsten Sätze am nächsten an Robert Grassmann[2] anschliessen.

Wir haben nunmehr mit einer dritten fundamentalen Operation des identischen Kalkuls Bekanntschaft zu machen, welche — im Hinblick auf die Begriffsumfänge oder Klassen — *Negation* oder *Verneinung* schon von der alten Logik genannt worden ist — eine Benennung, die wir auch für die Punktgebiete unsrer Mannigfaltigkeit adoptiren. Schon auf die Begriffe angewendet erscheint die Benennung eigentlich als eine übertragene, aus dem Aussagenkalkul, in welchem sie ursprünglich wurzelt (resp. aus der Lehre von den Urteilen) metaphorisch herübergenommene.

Es ist diese dritte Operation insofern von einfacherem Charakter wie die beiden vorhergehenden, als sie immer schon an einem einzelnen Objekte vollziehbar ist, wogegen Multiplikation und Addition je deren zweie als zu verknüpfende Operationsglieder voraussetzen.

Multiplikation, Addition und Negation sind die *„drei Spezies“* des identischen Kalkuls.

Der Begriffserklärung der Negation müssen wir einen Hülfssatz vorausschicken.

29) Hülfstheorem. *Wenn einerseits*

$$ab = 0 \quad \textit{sowie} \quad a + b = 1$$

und andrerseits zugleich auch

$$ac = 0 \quad \textit{sowie} \quad a + c = 1$$

ist, so muss sein:

$$b = c.$$

Beweis. Nach Th. 4) hat man

$$ab = ac \quad \text{und} \quad a + b = a + c.$$

Multiplizirt man die *letztere* Gleichung beiderseits mit b, so entsteht nach Prinzip $III_\times$ [sogar schon nach $III_\times^0$] und Th. $14_\times$):

$$ab + b = ab + bc.$$

Ebenso entsteht aus ihr durch beiderseitige Multiplikation mit c:

$$ac + bc = ac + c.$$

Wegen der *erstern* Gleichung ist aber gemäss 16_+):

$$ab + bc = ac + bc$$

und folglich nach Th. 4) auch

$$ab + b = ac + c;$$

d. h. nach 23_+), indem die ersten Terme absorbirt werden haben wir:

$$b = c,$$

q. e. d. Einfacher hätte man auch, mit Rücksicht auf die Voraussetzung $ab = 0$, nach 21_+) und 23_+) das eine Multiplikationsergebniss in $b = bc$, das andre, wegen $ac = 0$, in $bc = c$ zusammenziehen können. Indessen hat der erstere Beweis den Vorzug, sich auf eine spätere Erweiterung des Satzes, zu Th. 40) und Zusätze, ohne weiteres übertragen zu lassen.

Bezeichnen werden wir die Negation eines Gebietes a, indem wir diesem den *„Negationsstrich“* $_{\text{,}}$ als Suffixum anhängen, sonach mit $a_,$ (gelesen: *„a-nicht“*).

Sollte ein zu negirendes Gebiet einen zusammengesetzten Ausdruck haben, so wird es überdies dabei einzuklammern sein gemäss der allgemein bezüglich Gebrauchs der Klammern geltenden Maxime (vergl. Anhang 2). So wird z. B. $(ab)_,$, $(a+b)_,$, $(a_,)_,$ die Negation von ab resp. $a+b$ und $a_,$ vorstellen.

Bei der Wahl obiger Bezeichnung kommt folgendes in Betracht.

Das Suffixum $_{\text{,}}$ soll einen *Vertikalstrich* vorstellen. Mittelst eines solchen werden wir auch anderweitig — namentlich für Beziehungen — die Negation andeuten. So wird uns z. B. das vertikal durchgestrichene Gleichheitszeichen: $\neq$, gelesen „ungleich“, die Verneinung der Gleichheit auszudrücken haben. Nach diesem Prinzip wird es nämlich leicht, zu jedem Beziehungszeichen sofort dessen Verneinung zu bilden. Indem man einfach dasselbe vertikal *durchstreicht* gewinnt man ein hübsches und durch sich selbst verständliches, mnemonisches, obendrein auch noch nicht anderweitig vergebenes Zeichen zur Darstellung eben der Beziehung, welche die Negation von jener zu nennen.

Aus $>$, z. B. wäre hienach auch das regelrechte Zeichen für „nicht grösser“, welches für's reelle Zahlengebiet als $\leqq$ („kleiner oder gleich“) in der Mathematik sehr viel gebraucht wird, unschwer abzuleiten.

Da es nun nicht angängig ist, Buchstaben oder gar zusammengesetzte Ausdrücke jeweils in Druck und Schrift wirklich durchzustreichen, so muss eben der Vertikalstrich *neben* jenen angemerkt werden (im letztern Falle, wie betont, unter Einklammerung der Ausdrücke). Da ferner eine Negation (die Operation des Negirens) nicht vollzogen werden kann, es sei denn an einem bestimmten Objekte, so ist es wiederum naturgemäss, das Objekt, welches man behuf Negirens schon haben muss, dem Negationsstrich dabei voranzuschicken, letztern also dahinter zu stellen, sei es auf gleicher Höhe, sei es darüber (als Accent) oder darunter (als Suffixum). Ich entschied mich für das Suffixum als das in Druck und Schrift die grösste Deutlichkeit gewährende Zeichen von immerhin minimalen Raumansprüchen.

[In meiner früheren Schrift[2] verwendete ich zur Bezeichnung der Negation noch das Suffixum 1, schrieb also für unser non-a stets a_1 (gelesen: *„a unten* 1“, kürzer *„a-eins“*). Es sollte dies daran erinnern, dass, wie in § 23 gezeigt wird, die Negation von a auch durch $1 - a$ darstellbar ist. Jedoch erscheint es angezeigt, des Dualismus halber, der alsdann reiner zum Ausdruck kommen wird, ein von den Symbolen 0 und 1 unabhängiges Zeichen zur Darstellung der Negation zu verwenden.]

Von Andern (namentlich Boole, R. Grassmann und Ch. S. Peirce) ist vorgezogen worden, das zu negirende Objekt mittelst *Horizontalstrich* zu *über*streichen, für unser $a_,$ also zu schreiben $\bar{a}$ (gelesen *a strich*).

Ernstliche Einwände lassen auch gegen diese Gepflogenheit sich nicht erheben. Die Entscheidung für diese oder jene ist gewissermassen Geschmacksache. Eine jede von ihnen hat gewisse Vorteile und Nachteile.

Will man mit dem Horizontalstrich *konsequent* sein, so müsste man nun mit $\equiv$ (statt $\neq$) die Ungleichheit darstellen. Dies sieht nun erstlich aus, wie ein doppelt negirtes Minuszeichen. Sodann ist das Zeichen auch schon anderweitig in Beschlag genommen: in der Zahlentheorie zur Darstellung von „gleichrestig“ oder *„kongruent“* — in andern Disziplinen auch wol für „identisch gleich“ im Sinne von „allgemein gleich“, d. i. gleich für *alle* Wertsysteme gewisser Buchstabengruppen. Das Zeichen $\equiv$ würde also hier seine dritte, mit den bisherigen disparate, Bedeutung beigelegt erhalten, wogegen $\neq$ für „nicht gleich“ schon vielfach üblich ist (vergl. z. B. Aufsätze von *Netto* und Andern im Journal für die reine und angewandte Mathematik). — Weiter würden wir für die Verneinung noch andrer Beziehungen, wie z. B. für „nicht untergeordnet“ mit dem Horizontalstrich viel weniger hübsche Zeichen bekommen: $\overline{\subset}$ statt $\not\subset$, etc. — Zeichen, die aus getrennten Teilen bestehen, weniger symmetrisch sind und wol auch mehr Raum einnehmen, als mit dem Vertikalstriche.

Endlich, schon bei Buchstaben, gefällt mir nicht, dass die Höhenlage des Horizontalstrichs von der Höhe des Buchstabens abhängig wird, z. B. $\bar{a}\bar{b}$ für unser $a_, b_,$. Sind aber die Buchstaben von gleicher Höhe, wie a und c, so erscheint es allzu nahe gelegt, solche, wie wir sehen werden, grundverschiedene Ausdrücke wie $\bar{a}\bar{c} = a_, c_,$ und $\overline{ac} = (ac)_,$ miteinander zu verwechseln, indem ihre Unterscheidung davon abhinge, ob an einer Stelle von höchst geringer Ausdehnung die Druckerschwärze, Tinte, nicht angegangen oder übergeflossen ist.

Bei zusammengesetzten Ausdrücken indess hat der Horizontalstrich den Vorteil, zugleich als Vinculum zu dienen und die Klammer zu ersetzen, wie in $\overline{ab}$, $\overline{a+b}$ und $\bar{\bar{a}}$ für die oben angeführten drei Beispiele. Auch lässt *unsre* Schreibweise wegen der Ähnlichkeit des Negationsstrichs mit dem Suffixum 1 es fortan weniger ratsam erscheinen, ein erstes, zweites, drittes etc. (in einer Untersuchung auftretendes) a etwa mit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ hier zu benennen. Hiefür kann man jedoch, da Potenzen ohnehin ausgeschlossen sind (Th. 14), nun mit $a^1, a^2, a^3, \ldots$ sich sehr gut behelfen.

In Bezug auf die Streitfrage zwischen Horizontal- und Vertikalstrich bei zu verneinenden Beziehungszeichen könnte übrigens Herrn Charles S. Peirce die Autorität seines Vaters Benjamin Peirce[1] gegenübergestellt werden, mit dessen Bezeichnungsvorschlägen in seiner „Linear associative Algebra" wir teilweise zusammentreffen.

De Morgan, Jevons und Andere nehmen für Begriffe resp. Klassen und deren Negation die korrespondirenden Buchstaben aus dem grossen und kleinen Alphabete, bezeichnen die Negation von A mit a, sowie umgekehrt — was nach Th. 31) zulässig. Dies ist nur durchführbar, insoweit blos „einfache" Symbole in Betracht kommen (vergl. Anhang 2), verbietet sich indess, wenn das Negiren auch für zusammengesetzte Ausdrücke soll angedeutet werden können. Denn die Negation von $A+B$ würde durchaus nicht etwa $a+b$ sein, u. s. w. — vergl. die Theoreme 36). Der Vorschlag erscheint uns *hier* als gänzlich unannehmbar.

Mit Worten nennen wir die Negation von a auch *„Nicht-a"* oder *„Non-a"*.

Indessen „non-a", „non $(a+b)$" etc. für unser a_1, $(a+b)_1$ in Formeln anzusetzen würde schwülstig („cumbrous") werden.

Definition (6), der Negation.

„Negation" eines Gebietes a nennen wir ein solches Gebiet a_1, welches zu ihm in der Beziehung steht, dass zugleich:

$$aa_1 \mathrel{\substack{=\\ \in}} 0 \quad \textit{und} \quad 1 \mathrel{\substack{=\\ \in}} a + a_1$$

ist.

Da nach Th. 5) ohnehin $0 \mathrel{\substack{=\\ \in}} aa_1$ und $a + a_1 \mathrel{\substack{=\\ \in}} 1$ sein wird, so gelten dann kraft Def. (1) auch die beiden Sätze:

30) Theoreme. *Allgemein ist:*

$30_\times)$ $\quad aa_1 = 0. \quad$ | $\quad 30_+)$ $\quad a + a_1 = 1.$

Diese Gleichungen hätten ebensogut zur Definition der Negation a_1 von a verwendet werden können, muten jedoch dieser Negation scheinbar etwas mehr zu, als nur die obigen in ihnen mitenthaltenen beiden Subsumtionen zu erfüllen.

Nach § 7, S. 214, können wir nun auch sagen: *Negation eines Gebietes nennen wir ein solches Gebiet, welches zu demselben zugleich disjunkt und supplementär ist.*

Zusatz 1 zu Def. (6). Zu einem Gebiete a kann es *nicht mehr als eine* Negation geben.

Denn wäre a_1' eine zweite, so würden neben den beiden Gleichungen 30), und mit demselben Rechte, auch diese beiden bestehen:

$$aa_1' = 0 \quad \text{und} \quad a + a_1' = 1$$

und würde aus allen vier Gleichungen nach Hülfstheorem 29) [wo b dem a_1 und c dem a_1' entspricht] folgen:

$$a_1' = a_1,$$

d. h. die beiden Negationen wären identisch, einerlei, wären in der That nur *eine*.

Die Operation des Negirens, d. i. die Herstellung der Negation zu einem gegebenen Gebiete, wird darnach jedenfalls keine „mehrdeutige" sein, die Negation a_1 von a ist ein *höchstens eindeutiges* Gebietsymbol. Dagegen könnte noch dieses Symbol als ein „undeutiges", die Operation des Negirens als „unausführbar" erscheinen. Bislang ist noch die Möglichkeit zugelassen, dass — vielleicht je nach dem „Werte" von a — das Zeichen a_1 ein sinnloses, einer Deutung als eigentliches Gebiet eventuell ganz unfähiges ist, welches dann als ein „uneigentliches" Gebiet der Mannigfaltigkeit zu adjungiren die Def. (6) uns zumutet.

Diese Möglichkeit schliesst aus das folgende Postulat mit dem zugehörigen die Interpretation liefernden Nachweise.

Postulat ((3)). *Zu jedem Gebiete a gibt es* (mindestens) *eine Negation a_1* (und dann wie schon gezeigt auch nur diese).

Dieselbe wird als Rückstand erhalten, wenn man das Gebiet a aus der ganzen Mannigfaltigkeit 1 *fortlässt.*

Dieses Restgebiet hat nämlich in der That die Eigenschaft, erstens: mit dem Gebiete a keinen Punkt gemeinsam zu haben, d. i. die Gleichung $30_\times)$ zu erfüllen; hätte es einen Punkt mit a gemein, so wäre ja dieser Punkt von a nicht pflichtschuldigst fortgelassen — und zweitens: das Gebiet a auch zur ganzen Mannigfaltigkeit 1 zu ergänzen, d. i. die Gleichung $30_+)$ zu erfüllen. Fehlte auch nur ein Punkt an dieser Mannigfaltigkeit, so wäre ja nicht der volle Rückstand genommen. Dasselbe ist sonach eine richtige Negation zu a, und weil es nur *eine* gibt, haben wir hier den bestimmten Artikel anzuwenden und zu sagen: *die* Negation von a.

Die Ausführungen des vorstehenden Absatzes sind nicht etwa als ein „Beweis" des vorhergehenden Postulates anzusehen, dessen Anerkennung vielmehr wir schlechthin fordern. Sie sollen nur beitragen, den Sinn desselben voll zum Bewusstsein zu bringen, und der Anschauung resp. Intuition behülflich sein, dasselbe zu verifiziren.

Die Negation a_1 eines Gebietes a ist — in unserm bevorzugten

Falle — *die Ergänzung dieses Gebietes zur Mannigfaltigkeit* 1, d. i. zur ganzen Fläche der Schultafel.

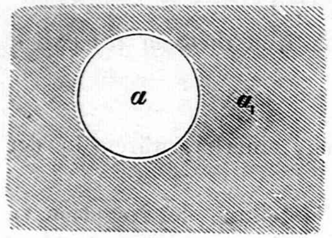

Fig. 16.

Ist z. B. a die (Innen)Fläche eines Kreises, mit Einschluss von dessen Kontur, so bedeutet a_1 die Aussenfläche desselben (soweit sie zur Tafelfläche gehört) mit Ausschluss von dessen Kontur. In Fig. 16 ist dieses Gebiet durch Schraffiren veranschaulicht.

Diese Ergänzung a_1 erscheint als das

Maximalgebiet unter den zu a „disjunkten“	Minimalgebiet unter den zu a „supplementären“

Gebieten.

Als ein „Postulat“ durften wir den Satz ((3)) deshalb hinstellen, weil er die Forderung in sich schliesst, involvirt, zu irgend einem Gebiet a ebenjene Ergänzung zu denken oder zu bilden, sie aus ihm abzuleiten und in Gedanken zu isoliren.

Dieser Forderung fühlen wir uns gewachsen.

Zusatz 2 zu Def. (6). Insbesondre ist:

$$0_1 = 1 \qquad , \quad 1_1 = 0;$$

die Negation der Null ist die Eins und umgekehrt; denn in der That haben wir nach den Theoremen 21) *oder* 22):

$$0 \cdot 1 = 0 \quad \text{und} \quad 0 + 1 = 1,$$

desgleichen mit umgestellten Faktoren resp. Gliedern. Auch ist es unmittelbar intuitiv: Nichts ist erforderlich, um ein Ganzes zu sich selbst zu ergänzen. Die ganze Mannigfaltigkeit ist erforderlich um das Nichts zu ihr selbst zu ergänzen.

Die so hochwichtige Deutung unsrer Definition und Sätze für *Klassen* wollen wir auf demnächstige Paragraphen verschieben und uns bis zum Wiedergewinn des Dualismus im reinen Gebietekalkul fortbewegen.

Die Theoreme 30) mögen auch einzeln in Worte gefasst werden:

Ein Gebiet mit seiner Negation multiplizirt gibt 0.	*Ein Gebiet zu seiner Negation addirt gibt* 1.

Und sie können auch auf beliebig viele Operationsglieder dahin ausgedehnt werden:

Zusatz 1 zu Th. 30).

Sooft unter den Faktoren eines Produktes solche vorkommen, deren einer die Negation des andern ist, verschwindet das Produkt.	*Findet sich unter den Gliedern einer Summe überhaupt eines, welches als die Negation eines andern Gliedes erscheint, so hat die Summe den Wert* 1.

So ist z. B.

$abc \cdot ab_1 cd_1 = 0.$	$a + b + c_1 + a + c + d_1 = 1.$

Man kann nämlich wegen der Kommutativität der Operationen die Operationsglieder so umordnen, dass das gedachte neben seine Negation zu stehen kommt; diese beiden kann man dann wegen der Associativität zu einem einzigen Operationsglied zusammenfassen (desgleichen die übrigen Operationsglieder) und nach Th. 19) Zusatz 2 durch seinen Wert 0 resp. 1 ersetzen, worauf das Th. 22) in Wirksamkeit tritt. In unsern Beispielen haben wir als Wert des Ausdrucks:

$acd_1 \cdot bb_1 = (acd_1) \cdot 0 = 0.$	$(a+b+d_1)+(c+c_1) = (a+b+d_1)+1 = 1.$

31) Theorem. *Es ist allgemein:*

$$(a_1)_1 = a.$$

Die Negation der Negation eines Gebietes ist dies Gebiet selbst, oder: *Doppelte Verneinung „bejaht“, hebt sich auf.*

Beweis 1. Nach Th. 30) hat man unter Anwendung des Kommutationsgesetzes:

$$a_1 \cdot a = 0, \qquad a_1 + a = 1,$$

und andrerseits, wenn Th. 30) für a_1 statt a (so, wie es ist) in Anspruch genommen wird:

$$a_1 \cdot (a_1)_1 = 0, \qquad a_1 + (a_1)_1 = 1.$$

Vergleicht man diese vier Gleichungen mit dem Schema der Voraussetzungen des Hülfstheorems 29), so nimmt man dessen Anwendbarkeit wahr, und erhält die Folgerung:

$$a = (a_1)_1,$$

die zu gewinnen war.

Beweis 2. Man kann auch einfach bemerken, dass die beiden Voraussetzungen der Def. (6) kraft Th. 12) unverändert gültig bleiben, wenn man die Symbole a und a_1 mit einander vertauscht. Da nun die Def. (6) eine *allgemeine* Festsetzung sein sollte, so muss auch die an jene Voraussetzung konventionell geknüpfte Folgerung in Kraft bleiben, wenn man a und a_1 vertauscht. — Die Sache wird deutlicher, wenn man in Def. (6) den Namen a_1 vermeidet, denselben durch irgend einen andern, etwa durch b ersetzt. Es wird ausgemacht: b die Negation von a zu nennen, wenn $ab = 0$ und $a + b = 1$ ist. In diesem Falle ist aber auch $ba = 0$ und $b + a = 1$ nach Th. 12). Folglich ist dann auch a die Negation von b zu nennen, wozu man sich eben durch die vorhergehende Abmachung verpflichtet hat, in Anbetracht, dass diese als eine allgemein zu befolgende hingestellt wurde, welche ebensogut für ein Paar b, a von Gebieten, wie für das Paar a, b verbindlich ist. Wird nun für b der Name a_1 eingeführt, so gilt für a auch der Name b_1 oder $(a_1)_1$ — vergl. übrigens Th. 32).

Ist also b (resp. a_1) die Negation von a, so ist auch a die Negation von b (resp. a_1).

Die Beziehung der Negation zwischen zwei Gebieten (a und a_1) *ist allemal eine gegenseitige.* Die Beziehung ist *„symmetrisch"*.

Man wird durch Th. 31 erinnert an die Eigenschaft des Minus-Zeichens, an den Satz der Arithmetik:

$$-(-a) = a,$$

und könnte sich im Hinblick auf diese Analogie versucht fühlen, die Bezeichnung a_1 durch $-a$ ersetzen zu wollen. Wir werden indess später sehen, dass nicht $0-(0-a)=a$ sondern $1-(1-a)=a$ das wahre arithmetische Analogon des Th. 31) bildet. Vergl. § 23.

32) Theorem.

Ist $a = b$, so ist auch $a_1 = b_1$, oder: *Gleiches, negirt, gibt Gleiches.*

Beweis. Aus den beiden Gleichungen des Th. 30): $aa_1 = 0$, $a + a_1 = 1$ folgt wegen $a = b$ nach Th. 16), d. h. indem man eben b für a substituirt:

$$ba_1 = 0, \quad b + a_1 = 1.$$

Nach Th. 30) — für b in Anspruch genommen — ist aber auch:

$$bb_1 = 0, \quad b + b_1 = 1.$$

Aus diesen vier Gleichungen folgt nach dem Schema des Hülfstheorems 29): $a_1 = b_1$, wie zu zeigen war.

Zusatz 1. Ist $a_1 = b_1$, so muss nach Th. 32) auch $(a_1)_1 = (b_1)_1$, mithin kraft Th. 31) auch $a = b$ sein. Die beiden Gleichungen $a = b$ und $a_1 = b_1$ bedingen sich also gegenseitig, sind äquivalent.

Zusatz 2. Hienach lässt der Zusatz 2 sub Th. 19), dass in gewissen Ausdrücken Gleiches für Gleiches gesetzt werden dürfe, sich nunmehr ausdehnen auf alle durch Addition, Multiplikation *und Negation* hergestellten Ausdrücke: *In jedem nur mittelst der identischen Operationen der „drei Spezies" aus Gebietsymbolen aufgebauten Ausdrucke ist es erlaubt, irgend einen Term durch einen ihm identisch gleichen zu ersetzen.*

Von dieser Erlaubniss wird beim Rechnen umfassendster Gebrauch gemacht, meist ohne besondern Hinweis auf dieselbe.

Ist z. B. $a = c$ und $b = d$, so darf man für $(ab_1 + a_1b)\,e$ auch schreiben $(cd_1 + c_1d)\,e$. Etc. etc.

„Erlaubt" nennt man diejenigen Umformungen eines Ausdrucks, welche ohne Einfluss auf den Wert (die Bedeutung) desselben sind, in der That also nur die Form des Ausdrucks (nur den Namen dessen, was er bedeutet) berühren. Diese erlaubten Umformungen nennt man vorzugsweise *„Transformationen"*. Es sind das diejenigen Veränderungen an dem Ausdrucke, oder freien Reproduktionen desselben, durch welche der Ausdruck in einen neuen verwandelt wird, übergeht, welcher dem gegebenen identisch gleich sein muss.

Von Verschiedenem eines für's andere zu setzen ist in dem angegebenen Sinne bei Ausdrücken im Allgemeinen nicht erlaubt, wie man leicht an den nächsten besten Beispielen (und schon bei den einfachsten Ausdrücken, wie $a \cdot b$, $a + b$, a_1) sich überzeugen kann.

Für einen Term auch einen von ihm *verschiedenen* zu substituiren ist natürlich aber angängig bei *allgemeinen* Sätzen oder Formeln. Kommt a als allgemeines Symbol in solchen vor, und ist unter a bereits ein bestimmtes Gebiet verstanden, so darf man doch b für a schreiben, auch wenn b ungleich a ist; man darf auch die vorkommenden Buchstabensymbole allgemeiner Art beliebig unter sich *vertauschen*, unbeschadet dessen, dass sie verschiedene Bedeutungen haben mögen (vergl. Anm. 2 zu Prinzip II). „Erlaubt" sind hier diejenigen Veränderungen zu nennen, die unbeschadet der Richtigkeit der Formel vollzogen werden können.

Anmerkung zu Theorem 32).

Der ungemein häufig auszuführende Schluss von einer Gleichung $a = b$ auf die Gleichheit zwischen den Negationen ihrer beiden Seiten: $a_1 = b_1$, dieser Schluss — mithin die Anwendung des Th. 32) — darf nicht etwa als das „Negiren jener Gleichung" bezeichnet werden; vielmehr ist zu sagen: aus $a = b$ folge durch *„beiderseitiges* Negiren*"* die Gleichung $a_1 = b_1$.

Es würde nämlich die Negation oder Verneinung der Gleichung $a = b$ selbst (schlechtweg) die Behauptung liefern, dass a *nicht* gleich b sei, in Zeichensprache, dass $a \neq b$ (vergleiche den Aussagenkalkul) — eine Behauptung welche die Gleichung $a = b$ aufhebt, umstösst, also mit ihr nicht nur nicht äquivalent, sondern sogar unverträglich ist — desgleichen also auch keineswegs sich deckt mit der Behauptung, dass Nicht-a gleich sei Nicht-b.

Ich glaubte darum[2] für diese Anwendung des Th. 32) einen eigenen Namen in Gestalt von („Entgegensetzung" oder) „Opposition" seiner Zeit vorschlagen zu sollen. Doch erscheint das vorstehende als das näher liegende Auskunftsmittel, die Verwechslung zu vermeiden, und dürfte dasselbe wol den Vorzug verdienen. Zudem liesse auch der bei einer Subsumtion — vergl. unten Th. 37) — schon sanktionirte Name des „Schlusses durch *Kontraposition*" sich hier auf die Gleichung mit übertragen.

33_+) Theorem. *Es ist allgemein:*

$$a + b = ab + ab_1 + a_1 b.$$

Beweis. Wir haben:

$$a+b = a\cdot 1 + 1\cdot b = a(b+b_1) + (a+a_1)b = (ab+ab_1) + (ab+a_1 b) = ab + ab_1 + a_1 b,$$

mit Rücksicht auf die Sätze $21_\times$), 30_+), $30_\times$) und $\mathrm{III}_\times$ (sogar schon $\mathrm{III}_\times{}^0$), endlich 14_+) — nicht zu gedenken der Theoreme 16), 12_+) und 13_+) Zusätze. Man darf nämlich den Faktor 1 hinzusetzen, für 1 nach Belieben $b + b_1$ oder $a + a_1$ substituiren (da diese Terme der 1 gleich sind), sodann ausmultipliziren, weil hier die Summanden disjunkte sind, endlich die Additionsklammern weglassen, und die Wiederholung des Summanden ab als tautologisch unterlassen.

Zusatz zu Th. 33_+). *Für beliebige a, b ist auch:*

$$a + b = a + a_1 b = ab_1 + b,$$

d. h. Eine Summe bleibt ungeändert, wenn man einen Summanden multiplizirt mit der Negation eines andern, und umgekehrt: *so oft in einem Glied einer Summe ein Faktor steht, der als die Negation eines andern Glieds derselben erscheint, darf man diesen Faktor unterdrücken.*

Beweis. Es ist ähnlich wie oben:

$$a+b = a\cdot 1 + b = a(b+b_1) + b = (ab+ab_1) + b = ab_1 + (ab+b) = ab_1 + b$$

mit Rücksicht, ferner, auf das Absorptionsgesetz $23_\times$). Und analog wenn b und a vertauscht werden. Dies ist der selbständige Beweis des für die Technik des Kalkuls ungemein wichtigen Zusatzes. Am schnellsten ergibt sich derselbe aus der Formel 33_+) durch Vereinigung des ersten Terms rechterhand mit dem zweiten oder dritten gemäss 27_+), 30_+) und $21_\times$).

Durch Anwendung vorstehender Sätze kann eine binomische Summe jederzeit in eine „reduzirte“ verwandelt werden. Es ist ratsam, sich dieselben einzuprägen. Ihre Veranschaulichung geben wir unter dem nächsten Satze.

34_+) Theorem. *Was auch a und b für Gebiete vorstellen mögen, so ist:*

$$1 = ab + ab_1 + a_1 b + a_1 b_1.$$

Beweis. Man hat in der bisherigen Weise:

$$1 = a + a_1 = a\cdot 1 + a_1\cdot 1 = a(b+b_1) + a_1(b+b_1) = ab + ab_1 + a_1 b + a_1 b_1$$

unter Berufung auf $\mathrm{III}_\times$ [oder auch nur $\mathrm{III}_\times{}^0$]. —

Sind a und b z. B. Kreisflächen, so entsprechen den Gliedern rechterhand in 34_+) die vier Teile, in welche von den Konturen dieser

Gebiete die ganze Ebene der Tafel im Allgemeinen zerschnitten wird — wie dies Fig. 17 veranschaulicht. Man sieht zugleich, dass das [in Fig. 9_+) schraffirte] Gebiet $a + b$ aus den drei ersten dieser Terme zusammengesetzt ist, und ebensoleicht, wie Th. 33_+), ist auch der Zusatz zu demselben durch die Anschauung zu bewahrheiten.

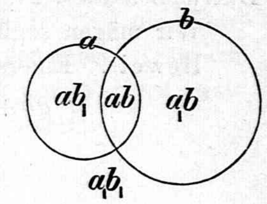

Fig. 17.

Zur Erläuterung sei erinnert, dass man der unter Postulat ((3)), Fig. 16 gegebenen Interpretation von a_1 und b_1 eingedenk sein muss. Hienach wird ab_1 — z. B. — dasjenige Gebiet vorstellen, welches der Innenfläche des Kreises a und der Aussenfläche des Kreises b gemeinsam ist, kurz gesagt: den Teil der Kreisfläche a, der ausserhalb b fällt. Und $a_1 b_1$ muss das den beiden Aussenflächen der Kreise a und b gemeinsame Gebiet vorstellen, mithin die Punkte umfassen, die ausserhalb beider Kreise zugleich liegen, ein Gebiet, das man als Aussenfläche des (als ein liegender Achter erscheinenden) Gebietes $a + b$ bezeichnen darf.

Berührten sich die Kreise a und b, so würde das Gebiet ab in *einen* Punkt, den Berührungspunkt zusammenschrumpfen; und hätten ihre Konturen gar keinen Punkt gemein, so würde das Gebiet ab fortfallen, nicht existiren, 0 sein; dann würde ab_1 mit dem ganzen Kreis a und $a_1 b$ mit b zusammenfallen.

Zusatz. Ersetzt man in 34_+) die Summe der drei ersten Glieder rechterhand durch den einfacheren Ausdruck, welchem dieselbe nach Th. 33_+) gleich ist, so ergibt sich noch:

$$1 = a + b + a_1 b_1.$$

Für die Zwecke des Unterrichts muss zum Bewusstsein gebracht werden, dass bei der korrekten Ausführung jener Substitution zweimal vom Assoziationsgesetze 13_+) der Addition, nebst Zusatz, Gebrauch zu machen war, und zwar in entgegengesetztem Sinne: einmal behufs *Einführung* einer Klammer, durch welche die Gleichung 34_+) in

$$1 = (ab + ab_1 + a_1 b) + a_1 b_1$$

umgeschrieben, die rechte Seite als zweigliedrige Summe dargestellt wird, deren erster Term nun erst durch das ihm gleiche $a + b$ ersetzbar ist, welches als ein zusammengesetzter Ausdruck zunächst wieder selbst auch eingeklammert werden muss (cf. Anhang 2) — sodann bei dem Substitutionsergebnisse: $1 = (a+b) + ab$ behufs *Unterdrückung* der letzten Klammer. Dergleichen Zwischenoperationen übergehen wir zumeist mit Stillschweigen.

Nunmehr können wir zur *Begründung des vollen Distributionsgesetzes* schreiten. Dazu bedürfen wir sogar des Th. 34_+) *nicht*, und wurde dieses blos wegen seiner nahen Verwandtschaft mit 33_+) gleich hinter diesem angereiht.

Theorem [ohne Nummer]. Auch wenn bc nicht gleich 0 ist, somit *ganz allgemein, gilt die Subsumtion* $26_\times$) *und damit auch das volle Distributionsgesetz* $27_\times$).

Wir mögen sogleich das letztere beweisen.

Beweis. Einerseits ist:

$$\begin{aligned} ab + ac &= ab \cdot 1 + ac \cdot 1 = \\ &= ab\,(c + c_1) + ac\,(b + b_1) = \\ &= abc + abc_1 + acb + acb_1 = \\ &= abc + abc_1 + ab_1c \end{aligned}$$

nach $\mathrm{III}_\times$ [sogar schon nach $\mathrm{III}_\times{}^0$].

Andrerseits ist wegen 33_+):

$$a\,(b + c) = a\,(bc + bc_1 + b_1c).$$

Und da die Produkte je zweier von den rechts eingeklammerten Gliedern 0 geben müssen, indem hier jedesmal mindestens zwei Faktoren zusammenkommen, die als Negationen von einander sich gegenseitig vernichten, da m. a. W.:

$$bc \cdot bc_1 = 0, \quad bc \cdot b_1c = 0, \quad bc_1 \cdot b_1c = 0$$

ist, so dürfen wir nach dem Zusatz 2 zu Prinzip $\mathrm{III}_\times$ nun rechterhand ausmultiplizieren. Dies liefert:

$$a\,(b + c) = abc + abc_1 + ab_1c.$$

Durch Vergleichung mit dem obigen Ausdruck folgt also nach Th. 4):

$$a\,(b + c) = ab + ac,$$

q. e. d. Mit dem durch Prinzip $\mathrm{III}_\times$, Def. (6) und Postulat ((3)) verstärkten Beweiskapitale ist hienach der Beweis des Distributionsgesetzes nunmehr gelungen.

Anmerkung. Eben um zu zeigen, dass auch das Produkt $a\,(bc + bc_1 + b_1c)$ durch Ausmultiplizieren entwickelt werden darf, würde augenscheinlich der speziellere Satz $\mathrm{III}_\times{}^0$ nicht ausgereicht haben und war es unumgänglich, den umfassenderen $\mathrm{III}_\times$ als Prinzip hinzustellen.

Dies scheint mir allerdings mathematisch noch nicht vollkommen sichergestellt. Und ebenso muss ich es hier noch dahingestellt sein lassen, ob nicht schon *ohne* das Prinzip $\mathrm{III}_\times$ — auf Grund lediglich des Zuzugs von Def. (6) und Postulat ((3)) mit Hülfe des (vielleicht *auch für Aussagen in Anspruch zu nehmenden*) Theorems 30) und 31) (d. i. den Sätzen des Widerspruchs, des ausgeschlossenen Mittels und der doppelten Verneinung) ein Beweis des Distributionsgesetzes möglich wäre. Den in Anhang 4 und 5 entwickelten logischen Kalkul mit Algorithmen kann man hiefür nicht als beweiskräftig gelten lassen, sofern sich in ihn der Begriff der Negation

nicht übertragen lässt (siehe ibidem Schlussnote) vielmehr in diesem Betreff dieser logische Kalkul noch weiter vom identischen zu divergiren, von ihm sich zu entfernen scheint.

Wir dürfen fortan auch die Formeln 26), 27) und $28_\times$) als *Theoreme* bezeichnen und ohne Einschränkung von denselben Gebrauch machen. Dasselbe gilt von dem dualen Gegenstück des letzteren, welches bislang noch nicht erwähnt worden ist, und lautet:

28_+) **Theorem.** *Es ist*

$$(a + c)\,(a + d)\,(b + c)\,(b + d) = ab + cd.$$

Beweis durch dreimalige Anwendung von 27_+), wodurch sich mittelst Zusammenziehung der beiden ersten und der beiden letzten Faktoren linkerhand ergibt: $(a + cd)\,(b + cd)$, und dies, ebenso zusammengezogen in die rechte Seite übergeht.

Die Theoreme 26) bis 28) finden nunmehr — ihrer vorgreifenden Chiffrirung ungeachtet — erst hier im System ihre Stelle.

Wir wollen deshalb die $27_\times$) und $28_\times$) auch einmal in ihrer allgemeinsten Fassung von binomischen Summen auf polynomische ausgedehnt aussprechen:

$27_\times$) Th. $\quad (a^1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^m)\,b = a^1b + a^2b + a^3b + \cdots + a^mb.$

$28_\times$) Th.

$$\begin{aligned} (a^1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^m)\,(b^1 + b^2 + \cdots + b^n) &= \\ = a^1b^1 + a^2b^1 + a^3b^1 + \cdots + a^mb^1 &+ \\ + a^1b^2 + a^2b^2 + a^3b^2 + \cdots + a^mb^2 &+ \\ + \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\ + a^1b^n + a^2b^n + a^3b^n + \cdots + a^mb^n &. \end{aligned}$$

Bei den diesen dual entsprechenden 27_+) und 28_+) sei dies dem Leser überlassen. Die Formulirung derselben dürfte hier kaum verlohnen, weil die Erfahrung des Rechners darthut, dass man schon mit den einschlägigen Theoremen auf der einen Seite des Mittelstrichs überall bequem auskommt — und diejenigen der linksseitigen Kolumne sind aus der Arithmetik geläufig.

Von vorstehender Multiplikationsregel für Polynome kann man sagen, dass sie auch das Distributionsgesetz 27) als besondern Fall in sich schliesse, indem man es als zulässig erachtet und sich vorstellen kann, dass das eine der beiden zu multiplizirenden Polynome von vornherein als ein Monom gedacht werde oder auf ein solches sich reduzire [vergl. die Anm. 1 zu Th. 21) und 22)]. Schrumpft z. B. das zweite Polynom in sein erstes Glied b^1 zusammen, so ergibt sich — indem man dieses erste b als das einzige nun in Betracht kommende statt mit b^1 einfacher mit b schlechtweg bezeichnet — aus $28_\times$) direkt das Th. $27_\times$).

Es lässt sich also das Th. 28) als der allgemeinste Ausdruck des Distributionsgesetzes ansehen.

Zusatz 1 zu Th. 28).

Ist aus Gebietsymbolen, die wir „einfache" nennen wollen und etwa durch Buchstaben dargestellt annehmen, *ein Ausdruck aufgebaut* lediglich mittelst der Operationen der identischen Multiplikation und Addition, mithin dadurch, dass jene Symbole untereinander und auch mit sich selbst irgendwie verknüpft sind *durch die* genannten *zwei direkten Spezies, so lässt sich* allemal *der Ausdruck darstellen als ein Aggregat von Monomen*, als eine Summe, deren Glieder nur Produkte sind aus lauter einfachen Symbolen.

Beweis. Die vorkommenden Operationsglieder können nämlich nur entweder Summanden oder Faktoren sein, und sofern sie selbst noch als zusammengesetzt erscheinen, können sie nur Produkte oder aber Summen sein. In Bezug auf einen zusammengesetzten Ausdruckteil sind daher nur folgende vier Fälle denkbar:

1⁰) derselbe ist eine Summe und tritt als Summand auf
2⁰) „ „ „ „ „ „ „ Faktor „
3⁰) „ „ ein Produkt „ „ „ „ „
4⁰) „ „ „ „ „ „ „ Summand auf.

Der *zweite* Fall lässt sich überall, wo er vorkommt, durch Ausmultipliziren nach dem Distributionsgesetze *beseitigen* (zu gunsten einer Vermehrung des vierten Falles, indem dabei Produkte von Summen aufgelöst werden in Summen aus Produkten).

Die Fälle 1⁰) und 3⁰) *kommen unmittelbar in Wegfall*, indem man die den zusammengesetzten Ausdruckteil umschliessende *Klammer unterdrückt* — in Anbetracht, dass diese sich nach dem Assoziationsgesetze 13) nebst Zusatzdefinitionen in ebendiesen Fällen als überflüssig charakterisirt. Eine Summe aus Summen (genauer gesagt: mit einer Summe als einem Gliede, oder auch mit mehreren Summen und vielleicht noch andern Gliedern als Gliedern) lässt sich ja immer ansehen als eine einzige Summe aus den sämtlichen Gliedern, und ebenso ein Produkt aus Produkten und vielleicht noch andern Faktoren immer darstellen als einziges Produkt aus den Faktoren jener nebst diesen übrigen Faktoren.

Hienach bleibt nur noch der vierte Fall übrig. Das heisst, unser Ausdruck wird nur mehr sein können eine Summe, ein (*ein-* oder mehrgliedriges) Aggregat von Monomen, welche selbst nichts anderes sein

können als (*ein-* oder mehrfaktorige) Produkte aus einfachen Gebietsymbolen, irgendwie herausgegriffen aus der Gruppe der in den Ausdruck ursprünglich eingehenden literalen Gebiete. q. e. d.

Man sagt von einem in solcher Weise dargestellten Ausdruck: derselbe sei *in seine letzten Glieder* („ultimate aggregants") *zerfällt*, aufgelöst (oder entwickelt).

Bemerkenswert ist, dass er dann *keine Klammern mehr enthalten* wird. In der That nur beim Multipliziren von Summen durfte die Klammer (um diese herum) nicht ohne weiteres weggelassen werden, wogegen beim Addiren von Produkten dem herrschenden Gebrauch gemäss die Klammern jeweils gespart werden.

Es versteht sich, dass man bei der geschilderten Zerfällungsarbeit von den Gesetzen der Tautologie und Absorption, — Th. 14) und 23) — im Sinne der Vereinfachung des Resultates umfassendsten Gebrauch machen wird.

Geschieht letzteres nach Möglichkeit, also dass kein Term wiederholt angesetzt und jeder unterdrückt wird, der einen andern als Faktor enthält, so würde sich wol zeigen lassen, dass die Zerfällung eines Ausdruckes in seine letzten Aggreganten immer nur auf *eine* Weise möglich, dass sie eine vollkommen eindeutig bestimmte ist, sobald wenigstens die in den Ausdruck eingehenden „einfachen" Gebiete von einander unabhängig beliebige sind [solange also insbesondre unter diesen Gebieten auch keine vorkommen, welche die „Negation" von andern sind]. Indessen im Hinblick auf spätere viel wichtigere Ausdehnungen unsres Satzes (vergl. §19) dürfte es kaum verlohnen, diesen immerhin schwierig erscheinenden Nachweis zu liefern.

Zur Illustration werde die Aufgabe gelöst den folgenden Ausdruck in seine letzten Aggreganten zu zerfällen:

$$x = \{abc + (abd + acd)\} +$$
$$+ \{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc) + (a+b+c)(a+b+d)(a+c+d)(b+c+d)\} \times$$
$$\cdot \{(a+b)(c+d) + (a+c)(b+d)\}(a+bc)(a+bd)(a+cd)(a+bcd).$$

Als Nebenrechnung entwickle man erst die beiden Glieder in der zweiten Zeile.

Das erste wird (durch Ausmultipliziren):

$$abcd + abc + abd + acd + bcd,$$

wovon auch noch der erste Term eingeht; das zweite wird:

$$(a+b+cd)(ab+c+d) = ab+ac+ad+bc+bd+cd+abcd,$$

wovon der letzte Term absorbirt wird.

Die stehen bleibenden sechs Terme absorbiren aber auch noch die sämtlichen des vorhergehenden Gliedes, und da die Entwickelung des Inhaltes der geschwungenen Klammer in der dritten Zeile gerade die nämlichen sechs Terme liefert, so erhalten wir:

$$x = abc + abd + acd + \\ + (ab + ac + ad + bc + bd + cd)(a + bcd).$$

Multiplizirt man hier vollends aus, so gehen auch noch die ersten drei Terme von x in dem Ergebnisse ein, und entsteht:

$$x = ab + ac + ad + bcd$$

als das gesuchte Ergebniss.

Ganz genau *dual entsprechend* kann man auch jeden Ausdruck der gedachten Art (der mithin Ergebniss der Verknüpfung von lauter einfachen Symbolen mittelst identischer Multiplikationen und Additionen ist) *„zerfällen in seine letzten Faktoren“*, („ultimate factors“ — von Peirce auch geradezu als *Primfaktoren* bezeichnet), d. h. in solche Faktoren, welche nur Summen aus irgendwelchen von den gegebenen einfachen Symbolen sind, mithin kein Produkt mehr zum Summanden enthalten.

Man scheide hier gemeinsame Faktoren, soweit solche ersichtlich sind, jeweils aus, und vereinige die dann noch übrig bleibenden Glieder successive nach dem dualen Gegenstück der Multiplikationsregel für Polynome, d. h. gemäss dem Th. 28_+), indem man jeweils jeden Faktor des einen Gliedes um jeden Faktor des andern vermehrt und die sich ergebenden Einzelsummen schliesslich miteinander multiplizirt (ohne Ausmultipliziren sie zu einem Produkte vereinigt, ihre Multiplikation „blos andeutend“).

Auf diese Weise umgeformt wird z. B., wie leicht zu sehen, unser letzter Ausdruck:

$$x = (a + b)(a + c)(a + d)(b + c + d).$$

Ebenso würde ein Ausdruck $y = x + e$ sich nun darstellen als:

$$y = (a + b + e)(a + c + e)(a + d + e)(b + c + d + e).$$

Da jedoch die Anwendung des dualen Gegenstücks 28_+) der Multiplikationsregel für Polynome dem Mathematiker nicht geläufig ist, so werden wir später [unter Th. 36), Zusatz 3] ein anderes Mittel angeben, um ohne jenes denselben Zweck zu erreichen — ein Zweck übrigens, dessen Verwirklichung ohnehin nur selten als vorteilhaft oder wünschenswert erscheinen möchte. —

Zusatz 2 zu Th. 28) [und 30)].

Ist eine „reduzirte“ Summe gleich 1, d. h. eine Summe, deren Glieder unter sich disjunkt sind, *so ist die Negation irgend eines Gliedes dieser Summe allemal die Summe ihrer übrigen Glieder* (ohne das genannte); *ebenso* ist — noch allgemeiner — *die Negation irgend eines Aggregates von Gliedern, hervorgehoben aus dieser Summe, leicht angebbar in Gestalt des Aggregates ihrer übrig bleibenden Glieder.*

Denn dieses letztere Aggregat erfüllt die für die Negation des erstern charakteristischen beiden Bedingungen des Theorems 30): dasselbe erstens zur 1 additiv zu ergänzen — dies laut Voraussetzung — und zweitens mit ihm disjunkt zu sein, das Produkt 0 zu liefern; das Produkt muss verschwinden, weil beim Ausmultipliziren desselben gemäss Th. 28_+) alle Partialprodukte nach Voraussetzung verschwinden werden, mithin auch deren Summe.

Ist z. B. $1 = a + b + c + d + e$, während a, b, c, d, e disjunkt sind, so muss sein:

$$a_1 = b + c + d + e, \quad c_1 = a + b + d + e, \quad (a + b + c + d)_1 = e,$$
$$(a + b)_1 = c + d + e, \quad (a + c + e)_1 = b + d, \quad \text{etc.}$$

In der Mannigfaltigkeit 1 der Wirbeltiere muss, was „nicht“ Fisch ist, Reptil oder Vogel oder Säugetier sein, und was *nicht* Reptil oder Vogel ist, muss Fisch oder Säugetier sein. Etc.

§ 14. Der Dualismus.

Mit den Prinzipien I, II und $\text{III}_\times$ und den bisherigen Definitionen hatten wir bereits die formalen Grundlagen für die Schlussfolgerungen im identischen Kalkul vollständig gewonnen. Diese Grundlagen entsprachen entweder „dualistisch“ sich selbst, oder sie traten paarweise auf als Gegenstücke zu einander. Nur bei Prinzip $\text{III}_\times$ hörte die Symmetrie zeitweilig auf, indem der diesem dualistisch entsprechende Satz III_+ nicht auch zum Prinzip erhoben wurde (vergl. Anm. 1 zu $\text{III}_\times$). Die Gültigkeit auch dieses Satzes ist nun aber nachgewiesen; sie ist mit dem allgemeineren Satze 26_+), in dem er enthalten, zugleich sichergestellt.

Gleichwie nun also die *Grundlagen*, so müssen auch die aus diesen ableitbaren *Folgerungen* durchaus dem Satze des *Dualismus* genügen, welcher lautet:

35) Theorem.

In jedem Satze und in jeder allgemeinen Formel des identischen Gebietekalkuls ist es gestattet, gleichzeitig die Zeichen der Unter- und Überordnung, die 0 *und die* 1*) *sowie das Mal- und das Pluszeichen* — selbstverständlich mit den zugehörigen Benennungen im etwaigen verbalen Texte, wie Subjekt und Prädikat, Produkt und Summe, Faktor und Summand — *durchweg zu vertauschen, und muss man hiedurch immer*

---

*) Der Negationsstrich muss dabei unverändert gelassen werden. Dasselbe gilt vom Gleichheitszeichen; doch wird die Eleganz erfordern, dass man die Gleichungen rückwärts lese.

wieder einen gültigen Satz, eine richtige Formel erhalten, die von den ursprünglichen in der Regel, doch nicht notwendig verschieden.

Anstatt die Zeichen $\mathrel{\underline{\in}}$ und $\mathrel{\underline{\ni}}$ der Einordnung und Überdeckung, oder das „Sub"- und das „Supersumtionszeichen" miteinander zu vertauschen, konnte man auch ein jedes derselben, z. B. das erste $\mathrel{\underline{\in}}$ festhalten, wofern man nur alsdann die beiden Seiten der Subsumtion, das Subjekt und Prädikat jeweils vertauschte. In der That: aus $a \mathrel{\underline{\in}} b$ entsteht durch Vertauschung des im Subsumtionszeichen enthaltenen Bogens $\subset$ der Unterordnung mit dem $\supset$ der Überordnung ersichtlich: $a \mathrel{\underline{\ni}} b$, und durch Vertauschung von major und minor entsteht: $b \mathrel{\underline{\in}} a$, *was genau dasselbe sagt* — [aber freilich etwas ganz anderes als die ursprüngliche Subsumtion $a \mathrel{\underline{\in}} b$. Diese, wenn für sich allein hingestellt, gilt auch in der That nicht als allgemeine Formel, mithin beansprucht der Satz 35) auch nicht, auf sie anwendbar zu sein. Erst da, wo eine solche Subsumtion von andern Relationen abhängig gemacht ist, kann er mit auf sie anwendbar werden, desgleichen auch in solchen besondern Fällen, wie $a \mathrel{\underline{\in}} a$, wo eben die Subsumtion den Charakter einer Formel annimmt].

Prinzip I $a \mathrel{\underline{\in}} a$ gibt insbesondre $a \mathrel{\underline{\ni}} a$; dasselbe geht also auf genannte Weise in sich selbst über.

Aus Prinzip II, welches aussagt: „Wenn $a \mathrel{\underline{\in}} b$ und $b \mathrel{\underline{\in}} c$ so ist $a \mathrel{\underline{\in}} c$" erhalten wir auf die eine Art: „Wenn $a \mathrel{\underline{\ni}} b$ und $b \mathrel{\underline{\ni}} c$, so ist $a \mathrel{\underline{\ni}} c$", auf die andre: „Wenn $b \mathrel{\underline{\in}} a$ und $c \mathrel{\underline{\in}} b$, so ist $c \mathrel{\underline{\in}} a$"; beides aber ist richtig und deckt sich mit Prinzip II selber.

Man revidire schliesslich, dass durch das angegebene Verfahren die beiden Definitionen $(2_\times)$ und (2_+) ebenso $(3_\times)$ und (3_+) zu tauschen kommen, wogegen die Def. (1) der Gleichheit und die (6) der Negation nur in sich selbst übergeht.

Ersetzten wir die Gebietsymbole 1 und 0 etwa durch $1_\subset$ resp. $1_\supset$ und die Operationssymbole $\cdot$ und $+$ durch $\times_\subset$ resp. $\times_\supset$ [desgleichen die Chiffrirungssuffixa $_\times$ und $_+$ durch $\subset$ und $\supset$], so könnten wir dem Prinzip des Dualismus den einfacheren Ausdruck geben: *In allen Theoremen des Kalkuls darf man die Zeichen $\subset$ und $\supset$ durchweg vertauschen.*

Führt nämlich von den Grundlagen eine Denknotwendigkeit zu gewissen Folgerungen hin, so muss diese Notwendigkeit bestehen unabhängig von der Materie des Denkens und deren Bezeichnung. Also auch wenn man das mit $\subset$ Ausgedrückte mit $\supset$ dargestellt hätte, müsste sie fortbestehen. Dann würden aber die Grundlagen dieselben geworden sein, und statt der vorigen hätte man wol grossenteils neue Folgerungen erhalten — die dualen Gegenstücke der letzteren — sonach müssen denn auch diese gelten.

Wir wollen die Berechtigung zu diesem Schlusse noch etwas übersichtlicher darlegen.

Es mögen mit $G_{\asymp}$ die mehrerwähnten formalen „Grundlagen" des identischen Kalkuls bezeichnet werden, bestehend aus den bisherigen Definitionen (1), (2), (3), (6), und den hier als „Prinzipien" bezeichneten Axiomen I, II — unter Zuzug des als ebenfalls gültig nachgewiesenen dualen Gegenstückes III_+ (oder $\mathrm{III}_\supset$) zu $\mathrm{III}_\times$ (oder $\mathrm{III}_\subset$).

Wie wir gesehen, haben dann diese Grundlagen G die Eigenschaft, wiederum in sich selbst nur überzugehen, d. h. ungeändert zu bleiben, wenn man im obigen Sinne die Zeichen $\subset$ und $\supset$ durchweg vertauscht, und wurde dieser Umstand dadurch sichtbar gemacht, dass wir dem G das Suffixum $\asymp$ erteilten, welches die gleiche Eigenschaft in sich zu erkennen gibt.

Durch diese Grundlagen $G_{\asymp}$ ist nun erwiesenermassen eine Gruppe von Folgerungen denknotwendig mitbedingt, z. B. die direkt bewiesenen Theoreme in der Kolumne zur Linken des Mittelstriches enthaltend, welche $F_\subset$ genannt werden möge. Dieser notwendige Zusammenhang:

„Es gilt $G_{\asymp}$, *also* auch $F_\subset$"

muss a priori bestehen bleiben, wenn man die Zeichen $\subset$ und $\supset$ vertauscht. Dadurch gelangen wir aber zu dem Satze:

„Es gilt $G_{\asymp}$, *also* auch $F_\supset$",

durch welchen die ganze Gruppe $F_\supset$ der den vorigen $F_\subset$ dual entsprechenden Sätze, darunter alle die in der Spalte rechts vom Mittelstrich befindlichen, mit einem Schlage bewiesen erscheint.

Hieraus erhellen auch die Vorteile des Dualismus und seiner Beachtung.

Die durchgängige Symmetrie erleichtert schon das Behalten der Sätze, wie denn auf zwei Säulen ein Bau fester ruht, als auf einer.

Man kann aber den Dualismus auch in der That benutzen als ein *wirksames* Prinzip um sich die Herleitung und Begründung von nahe der Hälfte aller künftigen Sätze zu ersparen. Neben der kleinen Minderzahl sich selbst dual entsprechender Sätze genügt es fortan, nur die in der *einen* Spalte stehenden selbständig abzuleiten, woraus die fehlenden in der andern Spalte fast mühelos abzuschreiben sind, und man sich auf deren Gültigkeit wird ohne weiteres verlassen können. Ja bei jedem Paar einander dual entsprechenden Sätze hat man die Wahl, ob man nur den linksseitigen oder nur den rechtseitigen wirklich beweisen will.

Beispielsweise müssen darum auch Geltung haben die sämtlichen noch ausstehenden dualen Gegenstücke bisheriger Sätze, nämlich die noch nicht erwähnten Theoreme:

$33_\times$) Th. $$ab = (a + b)(a + b_1)(a_1 + b).$$

Zusatz dazu:
$$ab = (a + b_1)b = a(a_1 + b).$$

$34_\times$) Th. $$(a + b)(a + b_1)(a_1 + b)(a_1 + b_1) = 0.$$

Zusatz dazu:
$$ab(a_1 + b_1) = 0.$$

Beweise für diese Sätze kann man *zum Überfluss* auch, den vorgetragenen genau dual entsprechend, konstruiren. Desgleichen mögen — eine für den Anfänger empfehlenswerte Übung selbständig Beweise für sie aufgesucht werden.

Bei den „Zusätzen" genügt schon einfaches Ausmultipliziren mit Rücksicht auf $30_\times$) und 21_+). Bei den „Theoremen" empfiehlt sich Anwendung des Schemas 27_+), wonach sich z. B. die beiden ersten Klammerfaktoren zusammenziehen in $a + bb_1 = a + 0 = a$, etc.

Übrigens gleichwie in vorstehenden Beispielen werden wir auch sonst nirgends *gezwungen* sein, vom Th. 35) des Dualismus einen wesentlichen Gebrauch zu machen, indem wir uns ja die benötigten Sätze auch samt und sonders einzeln zu beweisen vermögen. Sofern es uns beliebt, mögen wir das Th. 35) auch lediglich die Rolle eines *empirischen* Prinzips hier spielen lassen, welches die eben bei jedem einzelnen Satze zu machende Wahrnehmung, dass auch sein duales Gegenstück gilt, nachträglich konstatirt, m. a. W. alle diese Wahrnehmungen zu einem allgemeinen Satze in erschöpfender Induktion zusammenfasst, resumirt.

In solchen Fällen, wo wir nur mehr des einen der beiden zu einander dualen Sätze für die Technik des Kalkuls bedürfen werden, begnügen wir uns hinfort, auf die Existenz des andern lediglich in der Chiffrirung — durch Anbringung eines Suffixums $_\times$ oder $_+$ bei des erstern Chiffre — hinzuweisen.

Den tiefern Grund für die Thatsache, dass wie durch den Gebietekalkul, so auch durch die Lehre von den Begriffen ein Dualismus sich hindurchzieht, kann man darin erblicken, dass — wie auf S. 130 erkannt — die Unterordnung von Begriffsumfängen einer Überordnung der zugehörigen Begriffsinhalte parallel geht, und insbesondre auch die Multiplikation der Umfänge gleichzeitig angesehen werden kann als eine Addition der Inhalte. Es ist deshalb nicht zu verwundern, dass jener identischen Multiplikation auch die Eigenschaften der identischen Addition genau zukommen, da sie im Grunde selbst eine solche ist.

§ 15. Kritische Vorbemerkungen zum nächsten Paragraphen: Inwiefern negative Urteile als negativ prädizirende anzusehen und disjunktiv prädizirende Urteile von den disjunktiven zu unterscheiden sind.

Wir treten nunmehr an ein Untersuchungsfeld heran, auf welchem grosse Vorsicht geboten ist, indem wir namhafteste Philosophen aller Zeiten — ich nenne zunächst nur Aristoteles und Kant — hier weit auseinandergehen sehen und auch ganz neuerdings von autoritativen Seiten unhaltbare Theorieen aufgestellt zu finden meinen, die ihre Urheber, wofern diese nur konsequent dabei zuwerke gingen, in die grössten Widersprüche mit sich selbst verwickeln müssten.

Schon um die hiernach entgegenstehenden Hindernisse hinwegzuräumen sehe ich mich veranlasst, der Fortsetzung des systematischen Teils unsrer Disziplin einige Betrachtungen von kritisch-polemischer Natur voranzuschicken.

Bei diesen Vorbetrachtungen will ich mich des Rechnens noch enthalten, die Überlegungen vielmehr gemeinverständlich blos in Worten führen. Der Kalkul wird schliesslich die Ergebnisse dieser Überlegungen bestätigen und alles in noch hellerem Lichte erscheinen lassen.

Der Gründe für die Schwierigkeiten einer Theorie der Negation und die durch sie bedingte Uneinigkeit unter den Fachgelehrten sind mehrere, und werde hier auf die hauptsächlichsten im voraus hingewiesen, obwol sie sich erst nach Bewältigung des Aussagenkalkuls völlig überblicken und dann auch alle Schwierigkeiten sich als überwunden erkennen lassen werden.

Ein Hauptgrund dürfte zu erblicken sein in gewissen Unbestimmtheiten der Wortsprache, welche oft schon in ihren einfachsten und fundamentalsten Satzbildungen die wünschenswerte Präzision vermissen lässt, indem sie — als eine notwendiger Zeichen, wie namentlich des Instituts der Klammern, entbehrende — verschiedene Auffassungen dieser Satzbildungen zuzulassen scheint und insbesondere eine Vermengung von Deutungen des *Klassen*kalkuls mit solchen des *Aussagen*kalkuls nicht selten nahe legt.

Die in Titel des § 16 genannten Sätze der Logik gehören wesentlich dem Aussagenkalkul an, wurzeln ganz in diesem und können in ihrer ursprünglichen Bedeutung erst dort völlig erledigt werden (Vergl. § 31).

Es kann sich im Klassenkalkul nur um Analoga von ebendiesen Sätzen handeln, denen wir aber, weil sie gleichlautenden Ausdrucks in der Formelsprache teilhaftig sind und später durch einen blossen Wechsel der Interpretation, durch eine einfache *Umdeutung* aus ihnen hervor oder in sie übergehen werden, einstweilen schon den gleichen Namen beilegen mit dem unterscheidenden Zusatze: „*im Klassenkalkul*“.

Zwei zu den allergeläufigsten gehörende Redewendungen sind es besonders, die durch ihren Doppelsinn der Verwirrung Vorschub leisteten.

Die *eine**) lautet:

α) „*A ist nicht B*“.

Entgegen einer weitverbreiteten Meinung ist es im Allgemeinen *durchaus nicht gleichgültig* (für den Sinn dieser Aussage), *ob die Verneinungspartikel* „nicht“ (in noch näher zu erläuterndem Sinne) *zur Kopula* „ist“, *oder ob sie zum Prädikate* „*B*“ *geschlagen wird.*

Es handelt sich um die beiden Aussagen:

β) „*A* »*ist nicht*« *B*“ und γ) „*A ist* »*nicht B*«“

welche als die Deutungsmöglichkeiten der Aussage α) zunächst sich darzubieten scheinen.

Da im Worttext die Klammern ganz andern Zwecken zu dienen pflegen, als wie im Kalkul, da sie hier schon anderweitig beschlagnahmt sind, nämlich wie bekannt jeweils verwendet werden, um Anmerkungen, Erläuterungen in den Haupttext einzufügen, so ersetze ich daselbst die Zeichen (,) des Kalkuls durch eigentümlich gestaltete Anführungszeichen (guillemets, quotation marks) », «.

Man kann die fraglichen Deutungen β) und γ) beim Aussprechen schon durch den Tonfall unterscheiden: es wird der Satz β) etwa im Rhythmus des Choriambus (– ◡ ◡ –) zu sprechen sein, mit einer Pause hinter der ersten Länge, wogegen der Satz γ) mehr an den Versfuss des Ditrochäus (– ◡ – ◡) anklingt.

Nach der Meinung derjenigen Philosophen, welche, wie Kant, Lotze, Sigwart**) das „verneinende“ Urteil α) im Sinne von β) aufgefasst wissen, nämlich die Verneinungspartikel zur Kopula geschlagen haben wollen — wenn sie auch nicht gerade zu der deutlichkeitshalber von mir dafür gewählten Schreibung β) sich bequemen — soll dieses Urteil α) oder β) nur konstatiren, *dass die Aussage*

δ) „*A ist B*“

beziehungsweise

δ') Das Gebiet *A* ist im Gebiete *B* enthalten,

δ'') Die Klasse *A* ist enthalten in der Klasse *B*,

δ''') Alle *A* sind *B*

unrichtig, falsch sei. Umgekehrt käme darnach der Leugnung dieser

---

*) Die andre werden wir weiter unten erst unter η) namhaft machen.

**) Übrigens ohne dabei unter sich übereinzustimmen!

Aussagen δ) der sprachliche Ausdruck β) zu, beziehungsweise die Ausdrucksform:

β') Das Gebiet *A* ist nicht in dem Gebiete *B* enthalten,

β'') Die Klasse *A* ist nicht enthalten in der Klasse *B*,

β''') Alle *A* »sind nicht« *B*.

Die Frage, ob es wirklich angängig ist, die Verneinung der Aussagen δ) sprachlich in die Ausdrucksformen β) einzukleiden, werden wir nachher zum Austrag zu bringen haben. Um Einwänden zuvorzukommen will ich voraus bemerken, dass dies nicht allgemein, und strenge genommen wol überhaupt nicht, angängig ist und dass ich mich blos provisorisch zu dieser Ausdrucksweise bequeme um auf den Gedankengang derjenigen Philosophen eingehen zu können, welche darin den Typus der „verneinenden“ Urteile zu erblicken wähnen.

Das Missliche solcher Darstellung wird der Leser sicherlich bei β''') bereits herausgefühlt haben.

Bei genauerem Zusehen wird es sich uns als *inkorrekt* erweisen, nämlich mit dem anerkanntesten Prinzip der Logik ersichtlich in Widerspruch bringen, bestünde man darauf, *die Verneinung der Aussagen* δ), δ''') *in die Form der Sätze* β), β'') *zu kleiden,* die Verneinungspartikel sonach auf die *Kopula* zu beziehen.

Als den korrekten Ausdruck solcher Verneinung werden wir schliesslich allgemein nur gelten lassen können:

ε) „*Es ist unrichtig zu behaupten, A sei B*“

ε''') Es ist nicht wahr, dass alle *A* *B* sind.

Im Hinblick darauf werde ich mich auch enthalten, das im Sinne von β) verstandene Urteil α) hier ein „verneinendes“ Urteil zu nennen; ich werde vielmehr diese korrekt durch ε) darzustellende Aussage hier nur als eine „*Urteilsverneinung*“ gelten lassen.

Gebrauchen wir demungeachtet vorderhand dafür die Ausdrucksweise β), so ist der bei den Chiffren δ) erklärte Sinn derselben nie ausser Augen zu lassen: es ist demgemäss unter allen Umständen festzuhalten, dass sie die Geltung der Aussagen δ) in Abrede zu stellen haben und weiter nichts. —

Was ferner den Sinn der Aussage γ) betrifft, welche als die andre Deutungsmöglichkeit von α) sich darbot, so hat, wenn *A* und *B* Gebiete unsrer Mannigfaltigkeit bedeuten, das »nicht *B*«, non-*B* oder B_1 im vorvorigen Paragraphen bereits seine Erklärung wiederum als ein Gebiet ebendieser Mannigfaltigkeit gefunden, und können wir in diesem Falle nicht im Zweifel darüber sein, was die Aussage oder Subsumtion γ) bedeutet. Sie wird dann, etwas ausführlicher formulirt, behaupten:

γ') Das Gebiet A ist enthalten in dem Gebiet Nicht-B, d. i. in demjenigen Gebiete, welches übrig bleibt, wenn man die sämtlichen Elemente von B, und nur diese, aus unsrer Mannigfaltigkeit fortlässt, dem Gebiete, welches ohne ein Element mit B gemein zu haben, das B zur ganzen Mannigfaltigkeit ergänzt.

Wie ein Punktgebiet aus der Ebene der Schultafel, so vermögen wir aber auch irgend ein gewünschtes System von Individuen aus einer Klasse, der sie angehören, im Geiste fortzulassen oder auszustreichen und die alsdann übrig bleibenden Individuen festzuhalten; diese vermögen wir so zusammenzufassen zu einer neuen Klasse.

Sofern dabei nur Bezug genommen wird auf eine bestimmte Mannigfaltigkeit der „gewöhnlichen" Art, deren Individuen etwa den Punkten einer Ebene eindeutig zugeordnet werden könnten und welche die bei einer Untersuchung in Betracht gezogenen Begriffsumfänge oder Klassen mit ihren Individuen sämtlich enthält, wird demnach auch die Bedeutung der *„Negation einer Klasse"* (und damit, nach dem Umfange betrachtet, auch des zugehörigen „Begriffes") einsinnig feststehn — und zwar für alle Klassen des erwähnten Untersuchungsfeldes, überhaupt für alle diejenigen, welche etwa aus Individuen jener Mannigfaltigkeit gebildet werden könnten.

Haben wir z. B. die Mannigfaltigkeit der farbigen Dinge im Auge, so ist klar, was wir meinen, wenn wir reden von »nicht weissen«, oder auch von »nicht-schwarzen« Dingen, und dieselben Ausdrücke erhalten abermals eine bestimmt feststehende, obzwar beträchtlich weitere, umfassendere Bedeutung, sobald wir sie etwa auf die Mannigfaltigkeit der sinnlich wahrnehmbaren Dinge beziehen; im letzteren Falle gehört ein Schall, Geruch, ein Druck oder Schlag etc. dazu, im ersteren nicht.

Einerlei, ob das erstere geschieht, oder das letztere, so werden beispielsweise die Aussagen gültig sein: „Einige Schafe sind nicht-weiss", und „Alle Schafe sind nicht-grün", oder, was dasselbe sagt: „Kein Schaf ist grün".

Diese Aussagen, welche nach der landläufigen Terminologie das *„partikular verneinende"* und das *„universell verneinende"* Urteil exemplifiziren, werden sogar noch richtig bleiben, wenn man auch die in Gedanken zugrunde gelegte Mannigfaltigkeit noch beliebig weiter ausdehnt; denn ebendadurch könnte auch nur eine Erweiterung der Prädikatklasse »nicht weiss« resp. »nicht-grün« (oder des auf die Mannigfaltigkeit beschränkten Umfangs des Prädikat„begriffes", sofern von einem solchen noch zu sprechen ist) bewirkt werden, und gehörte das

Subjekt schon zu der engeren, so wird es um so mehr auch zu der erweiterten Prädikatklasse gehören.

Sind A und B irgend welche Klassen von Individuen oder völlig bestimmten mittelst Eigennamens bezeichenbaren Objekten des Denkens — Klassen, die z. B. als die Umfänge von uns gegebenen Begriffen bestimmt sein mögen — so kann man immer eine Mannigfaltigkeit konstruiren, welche die Individuen aus beiden Klassen sämtlich enthält, und schon mit Bezug auf diese Mannigfaltigkeit (die Mn. $A+B$) werden dann die Aussagen: „Einige A sind nicht-B" sowie „Alle A sind nicht-B" einen völlig bestimmten Sinn haben, nämlich fähig sein, auszudrücken, dass die Klassen A und B teilweise resp. ganz einander ausschliessen (und zwar im ersteren Falle auch auf welche Weise).

Ganz dasselbe wird auch gelten für eine jede der genannten übergeordnete Mannigfaltigkeit. Und es scheint zunächst nichts im Wege zu stehen, dass wir die letztere sogar sich erstrecken lassen über das ganze Gebiet des überhaupt zu denken Möglichen, dass — wie wir dies ausdrücken wollen — wir unsern Betrachtungen zugrunde legen die *„absolute* Mannigfaltigkeit" (des Denkmöglichen).

Es würde dadurch die als „Verneinung" einer bestimmten Klasse B „schlechtweg" zu bezeichnende Klasse Nicht-B die weiteste Bedeutung zugewiesen erhalten, deren sie überhaupt fähig sein kann, sie würde nämlich alle möglichen individuellen Objekte des Denkens zusammenschliessen mit Ausnahme der zur Klasse B gehörenden.

In so erweiterter Bedeutung pflegt nun die Wortsprache die durch Verbindung eines Terms B mit der Verneinungspartikel „nicht" von ihr zusammengesetzten Ausdrücke „nicht-B" allerdings gemeinhin nicht aufzufassen, namentlich dann nicht, wenn dieselben in andern Stellungen wie als Prädikat gebraucht werden. Vielmehr bezieht sie dieselben in der Regel stillschweigend nur auf irgend ein dem Begriffe B übergeordnetes genus proximum.

Sprechen wir z. B. von „Nichtkombattanten", so wird das genus proximum (zu Kombattanten) hier etwa die Klasse der zur Armee gehörigen oder aber der an einem Feldzug teilnehmenden Personen sein. Und sicher, wenn wir das Wort als Subjekt eines Satzes, oder im Genitiv, in einem von andern Substantiven regirten Kasus gebrauchen, werden wir — wie Lotze treffend betont — die Pferde, Wagen und Steine am Wege nicht unter die Nicht-Kombattanten einrechnen.

Fällt dagegen das Wort als Prädikat, sagen wir z. B. „die Ärzte sind Nichtkombattanten", so wird es für die logische Tragweite des Satzes gleichgültig, ob wir das Wort in jener engeren oder in irgend einer weiteren Bedeutung fassen. Da schon die engere Bedeutung des Wortes „Nichtkombattant" die Ärzte umschliesst, so wird die weitere es ebenfalls thun.

Strenge genommen sagt freilich im letzteren Falle das Urteil weniger aus, als im erstern; es lässt nämlich unausgedrückt, dass die (gedachten) Ärzte zu den (am Feldzug teilnehmenden) *Personen* gehören. Allein dieser Umstand bildete einen auch im erstern Falle nur *enthymematischen* Bestandteil des Urteils, indem letzteres ja des genus proximum nicht ausdrücklich Erwähnung that. Sofern man — worauf es hier allein ankommen wird — nur eben die Thatsache, dass kein Arzt ein Kombattant ist, als den vollen Sinn und Gehalt des Urteils gelten lässt, sagt bei der zweiten Auffassung das Urteil auch ebensoviel als bei der ersten.

Wir mögen hienach die Frage, ob bei dem prädikativen Gebrauche des (dem Umfange nach jedenfalls existirenden) Begriffes Nicht-B dieser letztere mehr oder weniger enge gefasst werden soll, die Frage, ob bei der Begrenzung dieser durch Negation aus einer gegebenen B abzuleitenden Klasse Nicht-B Bezug zu nehmen sei auf eine bestimmte, mental zu supplirende, der B nächst übergeordnete Gattung (in welchem Falle auch non-B als eine wohldefinirte Klasse erscheinen wird, deren Aufstellung und Verwendung unmöglich beanstandet werden kann), oder ob dabei vielmehr Bezug genommen werde auf die „absolute" Mannigfaltigkeit (ein Verfahren, gegen welches von gewissen Seiten Protest erhoben worden ist) — diese Frage können wir zunächst ganz offen lassen, sie in das subjektive Belieben stellen. Wir mögen z. B. die in Betracht kommenden verneinenden Ausdrücke wie „nicht-schädlich", „nicht vollkommen" oder „unvollkommen", „*nicht* in eine bestimmte Beziehung eingehend, etwas bestimmtes thuend oder leidend, etc." ganz in dem allergeläufigsten Sinne verstehen, und sind darnach auf dem Punkte angelangt, sagen zu dürfen, dass mit einer Aussage der Form

γ'') Die Klasse A ist enthalten in der Klasse Nicht-B

oder

γ''') Alle A sind »nicht B«

ein bestimmter und bekannter Sinn verbunden wird.

Das uns die Klammer vertretende Anführungszeichen » « konnte hier auch entbehrlich gemacht werden durch die Schreibung:

A ist (resp. alle A sind) nicht-B, non-B oder Nicht-B,

wodurch sich schon die Auffassung γ) des Urteils α) hinlänglich charakterisirt und von der Deutung β) unterscheidet. Beliebt ist für γ) auch die Ausdrucksweise: „*A ist ein Nicht-B*".

Berechtigt ist nun die Bemerkung, dass ein solches Urteil γ) ganz wesentlich als ein *bejahendes* erscheint: es wird dadurch, wie sonst allerwärts, eine Subjektklasse unter die Prädikatklasse subsumirt — welche letztere hier nur, gewissermassen zufällig, den verneinenden Ausdruck Nicht-B besitzt. Dass solche Ausdrucksform aber als ein nebensächlicher Umstand hinzustellen ist, sich mehr nur psychologisch, als logisch, begründen und zumeist sich auch vermeiden lässt (sofern für nicht-B auch ein „positiver" Name zur Verfügung steht), dass ebenso, wo sie fehlte, die Ausdrucksform sich (mittelst doppelter Verneinung) willkürlich herstellen liesse, das haben wir schon unter ν_2) in B der Einleitung ausgeführt oder angedeutet (vergl. die dortigen Betrachtungen über parallele und nicht-schneidende sowie schneidende und nicht-parallele Geraden in einer Ebene).

Im Hinblick darauf will es nicht als rationell erscheinen, auf diesen Umstand eine wesentliche Unterscheidung zwischen bejahenden und verneinenden Urteilen zu gründen. Es scheint Beanstandung zu verdienen, dass man die Urteile α) mit der Deutung γ) überhaupt als „verneinende" bezeichne — wie ich dies im Einklang mit der seit Aristoteles in der scholastischen Logik (noch) *herrschenden* (erst neuerdings mehrseitig bekämpften) Terminologie in der That hier thun werde.

Die Wahrnehmung dieser Diskrepanz hat bekanntlich Kant veranlasst, neben den „bejahenden" und den *von ihm* „verneinende" genannten Urteilen β) noch eine dritte Art von Urteilen einzuführen, die er ziemlich unglücklich — vergl. Sigwart I, p. 122 — „unendliche" oder „limitirende" Urteile nennt (Die Seele ist nicht-sterblich, soviel als: gehört in die unendliche Sphäre, die übrig bleibt, wenn ich das Sterbliche aussondere). Wie man sieht decken sich diese „limitativen" Urteile Kant's (deren Berechtigung und Vorkommen Sigwart — im Gegensatz zu Lotze — ausdrücklich anerkennt) mit den eben besprochenen Urteilen γ).

Ich würde vorstehenden Einwand als berechtigt anerkennen und die „verneinenden" Urteile der herrschenden Terminologie als unpassend benannte umtaufen, wenn es daneben noch wirklich verneinende Urteile — etwa die β) — gäbe. Indem wir aber, wie schon angedeutet, diese Ausdrucksform β) als nicht haltbar erkennen werden, wird offenbar, dass solches nicht der Fall ist, und aus diesem Grunde mögen wir uns auch der herrschenden Terminologie in Bezug auf ihre „*verneinenden*" Urteile ganz unbedenklich anschliessen.

Am angemessensten erscheint es, dergleichen Urteile γ) — mit Wundt — als „*negativ prädizirende*" zu bezeichnen.

Diese Benennung dürfte auf alle Fälle passend und unanfechtbar erscheinen, und auch von Denjenigen der Kant'schen vorgezogen werden, die, wie Sigwart, auf einem, dem hier zu rechtfertigenden entgegengesetzten Standpunkte bestehen zu müssen glauben.

Wir haben jetzt den Sinn der Aussagen β) und γ) als der beiden Deutungsmöglichkeiten von α) selbständig festgestellt und vorweg die einschlägigen Benennungsfragen erledigt.

Nunmehr können wir dazu schreiten, zu zeigen, dass *die Bedeutung der beiden Urteile β), γ) in der That grundverschieden* ist. Im Anschluss daran wird sich dann auch herausstellen, welches von beiden die dem Urteil α) rechtmässig zukommende Deutung ist.

Ob in α) die Verneinungspartikel „nicht" in dem angeführten Sinne zur Kopula, oder ob sie zum Prädikat geschlagen wird, wird sich als *gleichgültig* uns nur dann erweisen, wenn das Urteil α) ein *singulares* ist, d. h. wenn das Subjekt A des Urteils *keine Klasse*, sondern ein *Individuum* vorstellt, wenn es mithin nicht durch einen Gemeinnamen als ein vieldeutiger Term, sondern als ein eindeutiger Term durch einen Eigennamen ausgedrückt sich darstellt.

Stellt A einen Punkt unsrer Mannigfaltigkeit vor, so decken sich die Aussagen β') und γ'). Wenn der Punkt einem Gebiete B nicht angehört, so gehört er notwendig dem Aussengebiete, der Negation des letztern oder dem Gebiete Nicht-B an, und umgekehrt. Der Punkt kann nicht gespalten werden; er kann nicht in zwei einander ausschliessende Gebiete zugleich hineinragen.

Ebenso, wenn A ein Individuum vorstellt.

Die Musik von Beethoven — ich meine diese selber, und zwar (um ein ganz individuelles Subjekt zu erhalten) bei einer bestimmten Gelegenheit von gewissen Künstlern exekutirt, nicht etwa aber die gedruckten Noten — »*ist* nicht« schwarz. Sie *ist* folglich »*nicht*-schwarz«.

Oder, um noch ein besseres Beispiel zu nehmen:

Das Kind frägt: „Darf ich dies thun?" Der Vater sagt: „Nein!" und er mag diese Antwort ausführlicher in den Satz kleiden: „Du darfst dies nicht thun."

Dies ist zunächst wol zu unterscheiden von: Du darfst es »nicht thun«, d. h. Du darfst es unterlassen! Man sieht: die Verneinungspartikel gehört nicht zu dem ihr unmittelbar folgenden Worte „thun", sondern zu dem Worte „darfst" und wäre logisch-konsequenter Weise, aber im Gegensatz zum Sprachgebrauche, eigentlich voranzustellen dem Prädikate „darfst dies thun" des entsprechenden bejahenden Urteils. Im Englischen wird sie schon etwas weiter vorangenommen: „You dare not do that", und am unzweideutigsten prägt sich ihre Bezugnahme auf das Verbum „dürfen", welches das nachfolgende regirt, im Französischen aus: „Tu ne dois pas faire cela".

Ob wir nun das Verbot „Du darfst dies nicht thun" wie vor-

stehend auffassen als die blosse Verneinung des Satzes „Du darfst dies thun", welchen das Kind als einen Fragesatz aufgeworfen, oder ob wir dasselbe deuten in dem Sinne: „Du gehörst zur Klasse der Personen, welche nicht es thun dürfen", dies ist in materieller Hinsicht ganz ohne Belang, kommt wesentlich auf dasselbe hinaus. Hier rächt es sich nicht, wenn man die Verneinungspartikel zur Kopula anstatt zum Prädikate schlägt.

Wollte aber darauf hin jemand behaupten, aus der Verneinung der Aussage: „Du darfst dies thun" sei mit Denknotwendigkeit *gefolgt:* „Du darfst dies nicht thun", oder umgekehrt, so wäre zu entgegnen, dass solcher Schluss von der Verneinung des „A ist B" auf die Behauptung „A ist nicht B" doch ein formell unrichtiger wäre. Im vorliegenden Falle, wo Prämisse und Konklusion materiell richtig, war der Schluss ein unvollständiger, ein *Enthymem.* Und zwar beruhte er wesentlich mit auf einer stillschweigend übergangenen Nebenprämisse, besagend, dass das Subjekt „Du" resp. das „Ich" des Fragesatzes ein *Individuum* sei. Nach der Art, wie wir den Begriff des Individuums fassen, drückt diese unerwähnt gebliebene Prämisse einerseits aus, dass unser Subjekt nicht eine Mehrheit von Bedeutungen habe (keine Gattung ist), und andrerseits auch dass es existire, nicht „nichts" bedeute oder bedeutungslos wäre — sodass, in der die Null adjungirt habenden exakten Logik wenigstens, die ausgelassene Prämisse auch als ein Paar von Prämissen hingestellt werden könnte.

Dass in der That ohne solche Prämisse der Schluss hinfällig wäre, wird sogleich ersichtlich, wenn wir nachher das Subjekt Ich, Du des Frage- und Antwortsatzes durch Wir, Ihr ersetzen.

Ganz anders (nämlich) verhält sich aber die Sache, wenn das Urteil α) ein *generelles* ist, mag es partikular, mag es universal sein. Hier geben die Sätze β) und γ) verschiedenen Sinn, und wenn dem Sprachgebrauch unzweifelhaft entsprechend das Urteil α) interpretirt werden soll, so ist es durchaus nur im Sinne von γ) zu deuten. Konsequenterweise *muss* demnach *die Verneinungspartikel zum Prädikate geschlagen werden.*

Nehmen wir z. B. an, dass die ältern Geschwister etwas thun dürfen (vielleicht sogar sollen), was den jüngeren untersagt bleibt, so wird auf die Frage der Kinder oder des unter ihnen das Wort führenden: „Dürfen wir dies thun?" das „Nein" des Vaters in Kraft bleiben, denn ein „Ja" oder „Ihr dürft dies thun" würde es den jüngeren Geschwistern mit erlauben.

Die Antwort aber: „Ihr dürft dies nicht thun" würde es (nach dem Prinzipe: „quidquid de omnibus valet, etc.) auch den älteren verbieten! Und sie würde gewiss auch als ein solches Verbot verstanden werden.

Hier also ist es einmal jedenfalls nicht angängig, die Verneinung des Urteils δ) in der Form α) auszusprechen, m. a. W. den Satz α) in dem als Bedeutung von β) erklärten Sinne zu verstehen. Es fehlt ja der Sprache nicht an Ausdrucksformen zur Darstellung des zutreffenden Sachverhaltes; der Vater mag z. B. auf die gestellte Frage zur Antwort geben: „Ihr nicht, aber wohl (sondern nur) die beiden ältesten", oder „Nur zum Teile dürft Ihr es thun, zum Teil nicht, und zwar etc." Als vollständig unmöglich muss es aber hingestellt werden, die richtige Antwort in Gestalt eines einzigen Satzes zu geben, dessen Subjekt „Ihr" (logisch dasselbe wie das „Wir" des Fragesatzes) wäre, und dessen Prädikat (in Bejahung oder Verneinung hingestellt) schlechtweg als „dürft dies thun" sich darstellte!

Da genau genommen selbst das Pronomen personale „Ich", auf eine bestimmte Person bezogen, noch ein Gattungsbegriff ist, insofern diese Person gemeint sein kann in verschiedenen Momenten ihres sich abwickelnden Lebens, so würden schon an die Frage: „*Kann ich* dies thun?" — z. B. ein gewisses schwieriges Kunststück hinbringen, welches nur zeitweilig gelingt — sich Betrachtungen anknüpfen lassen, welche den letzten analog sind.

Das vorstehende Beispiel war gewiss aus dem Leben genommen; es hatte höchstens den Misstand, dass ein logisch identisches Subjekt A doch im Frage- und Antwortsatze als Ich, Wir resp. Du, Ihr verschiedenen Ausdrucks teilhaftig wurde. Fassen wir darum noch ein Beispiel in's Auge, in welchem das Subjekt seinen Ausdruck nicht wechselt.

Zugegeben, dass es weisse und auch schwarze Schafe gibt. Bedeutet dann A die ganze Klasse der „Schafe" und B die Klasse „weiss", so erkennt man augenblicklich dass die Aussage β) *in dem oben für sie festgesetzten Sinne* richtig ist, und die zweite γ) falsch. Erstere, nämlich:

β^0) „Die Schafe (schlechtweg, d. h. *alle* Schafe) »sind nicht« weiss" müsste als ein richtiges Urteil anerkannt werden indem sie die Geltung der falschen Aussage

δ^0) „Alle Schafe sind weiss"

in Abrede stellte — so wenigstens gemäss der über die Auslegung einer jeden Aussage β) oben getroffenen Verabredung.

Die zweite Aussage dagegen

γ^0) „Die (Alle) Schafe sind nicht-weiss"

ist ein falsches Urteil, würde behaupten, dass auch die weissen Schafe, welche es doch gibt, welche sogar die Mehrzahl bilden, nicht-weiss seien.

Die beiden Urteile können daher unmöglich äquivalent sein.

Man bemerkt aber auch, wie *gezwungen* die dem Satze β^0) gegebene Auslegung erscheint. Unstreitig würde hiefür die Sprache den Ausdruck vorziehen: „Nicht alle Schafe sind weiss" (d. h. die Klasse der Schafe ist *nicht ganz,* nur zum Teil, enthalten in der Klasse der weissen Dinge), womit sie allerdings darüber hinaus noch andeuten würde, dass es neben „nicht-weissen" auch weisse Schafe gibt; am besten den: Einige Schafe sind nicht-weiss. Soll wirklich weiter nichts, als was in dem Satze ausgesagt wird: „Es ist nicht wahr, dass alle Schafe weiss sind" korrekt zum Ausdruck gebracht werden, ohne dass man aufhört von allen Schafen zu reden, so steht uns vorerst nur diese allerdings etwas umständliche Ausdrucksweise selbst zur Verfügung (§ 33 und 35).

Ich möchte indess weitere zur Rechtfertigung unserer Behauptungen dienende Ausführungen an gegnerischerseits gemachte Einwürfe anknüpfen:

Kant's „limitative" Urteile γ) glaubten wir angemessener als „negativ-prädizirende" bezeichnen zu sollen, und auch fortfahren zu dürfen, im Einklang mit der „herrschenden" Aristotelisch-scholastischen Terminologie dieselben schlechtweg als „verneinende" Urteile gelten zu lassen — in Anbetracht dass wir die andere Urteilform β) (die für Kant-Lotze-Sigwart den Typus des verneinenden Urteils vorstellt) überhaupt nicht werden anerkennen können.

Gegen Kant's limitative, also unsre negativ prädizirenden Urteile polemisirt nun aber auf das heftigste Lotze. Ein Autor von des letzteren Bedeutung und Ansehen, falls er irrt, verdient gewiss widerlegt zu werden. Geben wir ihm darum zunächst selbst das Wort. In [1] p. 61 sagt derselbe:

„Eine bestimmte Beziehung zwischen S und P, welcher Art sie immer sein mag, denken wir uns durch ein Urtheil: S ist P, als einen noch fraglichen Gedanken ausgedrückt; diese Beziehung bildet den Gedankeninhalt, über den zwei einander entgegengesetzte Nebenurtheile gefällt werden; das eine affirmative gibt ihm das Prädicat der Gültigkeit oder der Wirklichkeit, das andere negative verweigert sie ihm."

Es erhellt hieraus, dass Lotze das „verneinende" Urteil im Sinne unsrer Aussage β) aufgefasst wissen will. Für diese Auffassung plädirt er überhaupt auf der ganzen Seite (p. 61) und weiterhin.

Er fährt z. B. fort (und hierin kann ich ihm beipflichten):

„ . . . aber zwei wesentlich verschiedene Arten des Urtheils begründet dieser Unterschied nicht. Gültigkeit oder Ungültigkeit sind vielmehr in Bezug auf die Frage, die uns hier beschäftigt, als sachliche Prädicate zu bezeichnen, die von dem ganzen Urtheilsinhalte als ihrem Subjecte gelten."

Aber nun weiter unten:

„ . . . das limitative oder unendliche Urtheil, das durch eine positive Copula dem Subject ein negatives Prädicat beilegen soll und durch die Formel: S ist ein Nicht-P, ausgedrückt zu werden pflegt. Viel Scharfsinn ist auch in neuerer Zeit zur Ehrenrettung dieser Urtheilsform aufgeboten worden, in der ich dennoch nur *ein widersinniges Erzeugniss des Schulwitzes**) finden kann."

Ich werfe zunächst die Zwischenfrage ein: Steht nicht unmittelbar vorher das „sachliche Prädikat der *Un*gültigkeit" schon im Widerspruch mit der soeben und noch weiterhin verfochtenen Anschauung? Ist nicht

*) Ich gestatte mir, in diesen Citaten einzelnes durch kursiven Druck eigenmächtig hervorzuheben.

eine Aussage, wie: „Dies Urteil ist ein ungültiges“ gerade von der bekämpften Form: „*S* ist ein nicht-*P*“?

Fern liegt mir indess, etwa einen kleinen lapsus consequentiae aufgreifen zu wollen, um einen Vorwurf daraus zu schmieden. Hören wir weiter (auf p. 62):

„Und so gibt es nirgends für das natürliche Denken eine zwingende Veranlassung, limitative Urtheile zu bilden; *jede Folgerung, die aus dem Satze: S ist ein Nicht-P, möglich wäre, bleibt auch möglich aus dem andern: S ist nicht P.* Es ist nicht der Mühe werth, hierüber weitläufiger zu werden; offenbare Grillen müssen in der Wissenschaft nicht einmal durch zu sorgfältige Bekämpfung fortgepflanzt werden.“

Dies — insbesondre was kursiv gedruckt — *ist ein fundamentaler Irrtum!* Wir haben bereits gesehen, dass wenn *S* zum Beispiel „Alle *A*“ bedeutet, diese hier für äquivalent erklärten Sätze — im Grunde unser γ) und β) — durchaus nicht gleichbedeutend sind; sie können daher auch nicht dieselbe logische Tragweite besitzen. In der That wird später wahrzunehmen sein: aus dem letztern Urteil β) — sei es für sich, sei's in Verbindung mit andern Prämissen — *folgt* viel *weniger* als aus dem erstern γ).

Leicht war es eine derartige allgemeine Behauptung aufzustellen, wenn man sich dabei beruhigte und es unterliess, dieselbe in ihre Konsequenzen zu verfolgen.

Letzteres haben wir schon gethan nach der Seite der universalen Aussagen. Thun wir's auch noch nach der Seite der partikularen, um uns zu vergewissern, wie weit Lotze mit sich selbst in Übereinstimmung bleibt.

Sein Subjekt *S* möge also nun bedeuten: „Einige *A*“.

Wenn Lotze nach den von ihm selbst aufgestellten Grundsätzen zuwerke geht, so muss er unter dem Satze „*Einige A sind nicht B*“, oder wie dies noch deutlicher geschrieben werden könnte, unter: „Einige *A* »sind nicht« *B*“ verstehen: die verneinend ausfallende Antwort auf die Frage, ob einige *A* wol *B* seien? Verneinung des Urteils: „Einige *A* sind *B*“ liefert aber nach dem gesunden Menschenverstand, nach den Regeln der Schullogik und wie dies später auch die Rechnung bestätigt, das Urteil: „*Kein A ist B*“.

Niemandem wird es einfallen, unter dieser letzteren Aussage genau das nämliche zu verstehen, wie unter der vorigen, die beiden für äquivalent zu erklären; niemand wird z. B. den Satz: „Einige Schafe sind nicht weiss“ verstehen als „Kein Schaf ist weiss“ und niemand wird die Verneinung der Behauptung, dass einige Schafe gelb seien, durch den Satz ausdrücken: „Einige Schafe sind nicht gelb“.

Auch Lotze thut dies nicht. Er versteht unter Sätzen, wie: einige *A* sind nicht *B*, alle *A* sind nicht *B*, ganz dasselbe, wie alle übrigen Menschen, und steht nur in dem Wahne, die verneinenden Aussagen gleichwol durchaus unserm Schema β) gemäss zu deuten.

Lotze tritt überhaupt als entschiedener Gegner einer *Logik des* (Begriffs-)*Umfanges* auf. [1] p. 58 sagt er:

„Natürlich haben auch diese Umfangsverhältnisse ihren logischen Werth; aber wo man diesen bedürfen wird, ist er *nicht so schwierig zu ermitteln*, um sich seiner nicht nebenher augenblicklich zu bemächtigen; *einen Hauptgesichtspunkt für die Betrachtung der Urtheile aus jenen Verhältnissen zu machen, halte ich für ebenso irrig als langweilig.*“

Wenn Lotze damit Recht hätte, so würde unser Bemühen, eine exakte Logik des Umfanges hier zu begründen, ein eitel vergebliches sein.

Nun zeigen aber die Fehler, in welche Lotze verfällt (und zwar schon in so einfachen jedweder Komplikation ermangelnden Fällen, wie bei dem besprochenen verneinenden Urteile), dass es *doch nicht so leicht* ist, sich der fraglichen Umfangsverhältnisse nebenher zu bemächtigen, und damit richtet sich seine (ohnehin, wie die vorhergehenden, eminent subjektive) letzte Schlussbemerkung von selbst. Des näheren vergleiche man hiezu noch δ_3) in C unsrer Einleitung.

Wir haben gesehen, dass sooft das Urteil α) oder δ) ein *generelles* ist, es wesentlich einen *andern* Sinn liefert, als der ist, welchen der Sprachgebrauch mit der Aussage α) verbindet, will man die Verneinungspartikel gemäss β) auf die *Kopula* beziehen.

Nun aber zu zeigen, dass dies genau genommen sogar einen *Unsinn* liefert, dazu will ich jetzt schreiten.

Es handelt sich um das Urteil:

ε) Die Behauptung „*A* ist *B*“ ist unrichtig, von dem ich nachweisen will, dass es *nicht* (wie provisorisch bisher) mit β) „*A* »*ist nicht*« *B*“ — noch weniger auch mit α) — wiedergegeben werden darf.

Das Urteil ε) ist von Hause aus und bleibt in Ewigkeit (in Boole's Benennungsweise) ein *sekundäres*, ein Urteil über ein Urteil; nur mittelbar zunächst sagt es auch über *A* und *B* selbst etwas aus.

Welche Schlüsse aus dem Urteil ε) in Bezug auf *A* und *B* zu ziehen sind, wie m. a. W. dieses Urteil aufzulösen ist in primäre Aussagen, die von diesen Dingen *A*, *B* selbst (und von deren Negationen) unmittelbar handeln, werden wir später (Ende § 35) erschöpfend darlegen. Dort wird zu sehen sein, dass dieses Urteil allgemein nur in eine Alternative von primären Urteilen zerfällbar ist.

Die wirkliche Verneinung, Leugnung einer Aussage hat zum Subjekt (wie Lotze richtig bemerkte) ebendiese Aussage, und zum Prädikate „ungültig, falsch, nicht-wahr“. *Subjekt* jenes Urteils ε) ist die Behauptung δ) „*A* ist *B*“.

Diese selbst*), und nicht, wie nach Sigwart, die Kopula „ist“ derselben, ist dasjenige, was bestritten, in Abrede gestellt werden soll, ist der Gegenstand, auf den die Ableugnung sich bezieht, ist zugleich das „*Objekt* der Verneinung“.

Es scheint von vornherein eine Verdrehung der wahren Sachlage zu sein, wenn man für dieses Urteil ε) ein anderes unterzuschieben

*) In der suppositio realis genommen, nämlich in Hinsicht dessen, was sie bedeutet, nicht aber (in suppositio nominalis) als blosser Schall oder Wortgefüge genommen — vergl. ξ_1) in B der Einleitung und § 31.

sucht — in Gestalt von β) — *mit dem Subjekte A*! Die Berechtigung hiezu müsste doch erst nachgewiesen werden.

Wie wir aber bereits die Unmöglichkeit eingesehen haben, wenigstens falls A eine(n) Gattung(sbegriff) vorstellt, dies in korrekter Weise durchzuführen, so lässt sich nun auch obendrein erkennen, dass die Aussage β) dann einen Widerspruch in sich schliesst.

Mit dem Urteil β) wird beabsichtigt, von dem Subjekte (das ist unstreitig:) A etwas auszusagen, zu prädiziren. Die hinter diesem Subjekt stehenden Worte:

ζ) „»ist nicht« B“

geben an, was vom Subjekte A ausgesagt werden soll, sie erscheinen — wenn man nicht gerade sagen will: als das „Prädikat“ des Satzes — so doch gewiss: als die „Prädikation“ in demselben.

Unbeschadet des distributiven Charakters des Prädikates kann die Kopula in dasselbe eingerechnet werden. Schon aus dem Grunde, weil eine Kopula sehr häufig fehlt, erst in Gedanken zugefügt werden müsste (z. B. auch sobald ein anderes Verbum, als das Hülfszeitwort „sein“ im Satze auftritt), wird nicht selten dasjenige, was eigentlich die „Verbindung der Kopula mit dem Prädikate“ zu nennen wäre, schlechtweg als „Prädikat“ bezeichnet. Wer schärfer unterscheiden will, mag für diese Verbindung den Ausdruck „*Prädikation*“ gebrauchen.

Mit dieser Prädikation ζ) geraten wir nun aber in Widerspruch mit unserm Prinzip II, in Konflikt mit dem Satze: quidquid de omnibus valet, valet etiam de nonnullis et de singulis — den auch die Gegner unsrer Ausführungen als einen die ganze Logik beherrschenden Grundsatz ausdrücklich anerkennen.

Es müsste diese Prädikation ζ) sobald das Urteil β) anerkannt wird, nun auch den sämtlichen Arten und Individuen der Gattung A zukommen, was im Allgemeinen (wie die Beispiele zeigen) nicht der Fall ist.

Vom gegnerischen Standpunkt musste als richtig der Satz zugegeben werden: β'') Alle (Die) Schafe »sind nicht« weiss. Diese Prädikation „»sind nicht« weiss“ müsste nach dem dictum de omni auch den weissen unter den Schafen (als einzelnen) zukommen, was widersinnig. Von der Gattung der Schafe müsste sie ebenso auf deren Arten, auf jede Schafrasse sich übertragen, während es doch sehr wohl eine solche Rasse geben kann, die nur weisse Schafe enthält.

Ragt der Kreis A nur teilweise in den Kreis B herein, so hätte man ebenso anzuerkennen: Alle Punkte des Kreises A »sind nicht« im Kreise B enthalten. Dasselbe aber erschiene damit auch von den in B hineinfallenden Punkten des A behauptet.

Sagen wir aber: der Kreis A fällt nicht in den Kreis B hinein, so scheinen wiederum beide Deutungen β) und γ) gleichermassen zulässig zu

sein. Das Subjekt ist nunmehr ein Individuum, welches die in ihm enthaltenen Punktindividuen *kollektiv* — nicht *generell* — zusammenfasst, und hier könnte man den erhobenen Einwand nicht mehr vorbringen, denn einen Grundsatz der Logik, wonach, was von dem *Ganzen* behauptet wird, unbedingt auch von dessen *Teilen* einzeln gelten müsste, einen solchen Grundsatz gibt es nicht.

Die obige Argumentation wird hinfällig, wenn ein Schliessen von allen oder einigen auf einzelne nicht angeht, weil überhaupt nur *ein* Individuum vorliegt.

Logisch ist dies der Fall nur beim singulären Urteil, dem Sprachgefühl nach mitunter schon, wenn das Subjekt A im *Singular* steht.

[So kann man namentlich die Sätze β') und β'') passiren lassen, auch wenn darin das »ist nicht« in Anführungszeichen gesetzt würde, um so mehr aber ohne diese Verunstaltung, und zwar weil ihr Subjekt charakterisirt erscheint als ein Individuum — allerdings nicht aus unsrer ursprünglichen, sondern in der aus ihr „abgeleiteten“ Mannigfaltigkeit, der Mn. der Punktgebiete, der Klassen. Jedenfalls ist — im Gegensatz, wie gezeigt, zu β''') — bezüglich jener beiden Sätze zu erklären, dass sie den sprachlich richtigen Ausdruck für die Verneinung der entsprechenden Sätze δ'), δ'') vorstellten.]

Durch die Singularform wird in der Regel psychologisch eine Individualisirung des Subjektes angeregt. Man mag sich deshalb versucht fühlen, auch Lotze für sein Beispiel wenigstens zuzustimmen, wenn er das Urteil: „Der Geist ist nicht Materie“ aufgefasst wissen will als die verneinende Antwort auf die Frage, ob der Geist Materie sei?

Das Urteil tritt zwar in der Form eines „unbestimmten“ Urteils auf, beansprucht aber unzweifelhaft ein „universales“ in logischer Hinsicht zu sein.

Unrecht muss man Lotze sofort auch für das Beispiel geben, wenn man — anstatt „Der Geist“ schlechtweg — einmal sagt: „Alle Geister“ oder auch nur: „Jeder Geist“. [Letzteres, obwol in Singularform, bringt durch das adjektivische Pronomen „Jeder“ sofort die generelle Natur des Urteils, den Charakter des Subjekts als eine Gattung zum Bewusstsein, und begründet dadurch eine Ausnahme zu der eben nebenher statuirten psychologischen Regel.] Es könnten ja — rein logisch betrachtet — auch einige Geister Materie sein und andere nicht. Da wäre denn die Frage, ob allgemein der Geist Materie ist, zu verneinen, und dennoch das Urteil: „Der Geist ist nicht Materie“, mit der gleichen Allgemeinheit hingestellt, ein ungültiges!

Nun unterscheiden sich aber die beiden Aussagen: „Der Geist ist nicht Materie“ (so, wie diese verstanden werden sollte) und „Jeder Geist ist nicht Materie“ (oder: Kein Geist ist Materie) logisch überhaupt nicht. Sie unterscheiden sich nur *psychologisch*, insofern die Mehrdeutigkeit des Subjekts bei der erstern dem Bewusstsein entschwunden ist.

Man erkennt hier überhaupt die psychologische oder subjektive Bedingung dafür, dass man Kant's Benennungsweise, Lotze's und Sigwart's Theorie der verneinenden Urteile zustimmen könne: sie besteht darin, dass man *vollständig ausser Acht lasse oder vergesse,* dass das Subjekt der zu verneinenden Urteile eine Mehrheit von Bedeutungen umfassen kann oder umfasst.

Von rechtswegen hätte diese Theorie zum wenigsten auf die singulären Urteile ausdrücklich beschränkt werden müssen.

Da bei den generellen Urteilen nun nichts übrig bleibt, als zu der Deutung γ) für ihre Verneinung die Zuflucht zu nehmen, und wir bei den singulären Urteilen zwischen den Deutungen β) und γ) die Wahl hatten, so werden wir im Interesse der Einheitlichkeit des Verfahrens, um eine *allgemeine Theorie* zu ermöglichen, *auch bei den letzteren der Deutung γ) den Vorzug zu geben haben.*

Für die Algebra der Logik liesse sich noch ein weiterer Grund geltend machen, *ganz und gar,* auch bei den singulären Urteilen, nicht nur die Auslegung, die wir mittelst β) dem Urteil α) gaben, sondern diese Ausdrucksweise β) selbst: „A »ist nicht« B“ zu verwerfen.

Dieser stellt sich dar als eine Folge oder Wirkung der hier (im Gegensatz zur Sprache des gemeinen Lebens) vollzogenen Zuziehung der Null.

Die Null — haben wir gesehen — ist in jeder Klasse mitenthalten; sie ist Subjekt zu *jedem* Prädikate. *Hier* muss gelten: Das Nichts ist ein B (in B enthalten), und zugleich auch: Das Nichts ist ein Nicht-B (in Nicht-B mitenthalten) — was nebenbei gesagt durchaus keinen Widerspruch bildet, obwol die Klassen B und Nicht-B einander ausschliessen, indem sie gerade eben Nichts gemein haben.

Zugleich mit der Klasse A, zu der das Nichts mitgehört, zu der es quasi sich mit herandrängt, von der es nicht ausgeschlossen werden kann, würde nun im Urteil β) die Prädikation ζ) „»ist nicht« ein B“ auch dem Nichts zugesprochen erscheinen. Wir würden so auf die Anerkennung des Satzes geführt: „Das Nichts »ist nicht« ein B“, welcher seinerseits zu verstehen war als die *Inabredestellung* des Urteils: „Das Nichts ist ein B“. Das letztere unbedingt *anzuerkennen* waren wir aber durch die Konsequenz verpflichtet — daher ein Widerspruch!

Für die Sprache des gemeinen Lebens wäre, wie schon angedeutet, diese Überlegung nicht maassgebend, weil diese in ihren Urteilsbildungen, wie anderwärts ausgeführt, das Nichts gemeinhin vorweg ausschliesst (präkludirt). *In der exakten Logik aber dürfen* (resp. müssen) *wir jedes Urteil der Form β) für falsch erklären.* Die Verneinungspartikel mit Sigwart auf die *Kopula* zu beziehen ist dann hier überhaupt nicht angängig.

So wenigstens, wenn der Grundsatz „quidquid de omnibus valet, valet etiam de singulis“ für alle Prädikationen, welche die Wortsprache auszudrücken vermag, wirklich für „quidquid valet“, für alles, was gültig ausgesagt werden kann, soll aufrecht erhalten werden. Denn unter diesen Einzelnen („singuli“) figurirt hier auch das Nichts, wenngleich wir dasselbe sonst freilich nicht als ein „Individuum (im engeren Sinne)“ der Subjektklasse gelten lassen werden.

Ich gebe zu, dass dieser vorstehenden Argumentation kein grosses

Gewicht beizulegen ist. Ob man sich ihr anschliessen will, bleibt in gewissem Grade Geschmackssache. Man kann auch den Standpunkt einnehmen (wie wir ohnehin, bei unsrer Fassung des Prinzipes II, es thun), dass man die Gültigkeit des Grundsatzes „quidquid valet etc.“ einschränkt auf solche Prädikationen, welche als wirkliche (und demnach selbstverständlich bejahend auftretende) *Subsumtion* unter eine (wenn auch vielleicht als Negation einer andern sich darstellende) Prädikatklasse erscheinen.

Ich meine jedoch, dass es nicht angezeigt ist, ganz unnötigerweise und sozusagen gewaltsam, in Gestalt der (wie mich dünkt absonderlichen) Satzform: A »ist nicht« B, solche Prädikationen in die Wortsprache einzuführen, welche, indem sie einer Klasse A gültig zugesprochen werden, gleichwol nicht allem Dem zukommen können, was unter dieser Klasse A mitenthalten ist.

Unsre Ergebnisse sind also folgende.

Die herrschende Terminologie ist wesentlich im Rechte. Ihre *„verneinenden“ Urteile sind negativ prädizirende. Die Verneinungspartikel* im verneinenden Urteil *gehört zum Prädikate,* und in seiner Polemik gegen Kant ist Lotze im Unrechte.

Mit Kant aber diese Urteile als „limitative“ abweichend zu benennen ist überflüssig. Denn die nach Kant-Lotze-Sigwart's Theorie als »verneinende« hingestellten Urteile *können* allgemein als diese jedenfalls nicht gelten und sie *brauchen* — was sich empfiehlt — als besondere Urteilsformen der *Wortsprache* (und in der Logik als primäre Urteile) überhaupt nicht anerkannt zu werden.

Dieselben sind verneinende, d. h. nun also negativ prädizirende Urteile *über ein Urteil,* welches ihr Subjekt und zugleich das Objekt der Verneinung ist. Allgemein ist es nicht möglich, dieselben darzustellen in Gestalt eines Urteils, welches das Subjekt dieses Subjektes zum Subjekte hätte. Die exakte Logik wird vielmehr diese sekundären Urteile, diese *„Urteilsverneinungen“* auflösen in eine Alternative von primären Urteilen.

Noch bleibt der Einwurf Lotze's zu widerlegen, wenn unsrer Prädikatklasse B ein *Begriff* zugeordnet ist, der (als seinen Inhalt) bestimmte Merkmale in sich zusammenfasst, dass es zumeist nicht möglich sei, mit der Negation der Klasse, mit (Kant's und) unserm „Nicht-B“, dem „widersinnigen Erzeugniss des Schulwitzes“ einen *Begriff* zu verbinden.

Darauf ist zu bemerken, *erstens,* dass wenn dem so ist oder wäre, es nichts zu bedeuten hätte. Das thut nichts!

Der Sinn, den wir Aussagen, wie:

Alle A sind nicht B, Einige A sind nicht B, wirklich beizulegen haben, ist, wie wir gesehen haben, ein solcher, dass die „Prädikation“, nicht-B zu sein, sich ganz in gleicher Weise von den omnes auf die nonnulli und die singuli (von allen auf einige und die einzelnen, ja sogar auf das Nichts mit) überträgt, wie eine Prädikation, B zu sein.

Weil sonach jene Prädikation „nicht-B" zu sein, den *distributiven* Charakter mit jedem wirklichem Prädikate gemein hat, weil sie die fundamentale Eigenschaft besitzt, auf eine Mehrheit generell angewendet allemal dem Prinzip II gemäss sich auf die Glieder derselben zu verteilen, so müssten wir schon aus rein äusserlichen Zweckmässigkeitsrücksichten — um eine gemeinschaftliche Behandlung solcher Prädikation mit den wirklichen Prädikaten (mit Prädikat*begriffen*) zu ermöglichen — dazu schreiten, den Begriff des Prädikats zu erweitern. Wir müssten uns dadurch bestimmen lassen, jenes „nicht-B" — sei es auch als ein fiktives, „uneigentliches" Prädikat, d. h. im Grunde blosse Redensart — doch als „Prädikat im weitern Sinne" mit zuzulassen; jene wären also unter die „Prädikate" mitaufzunehmen, und zwar, wenn auch weiter gar nichts darunter zu denken wäre.

Letzteres ist aber noch obendrein nicht der Fall. Denn *zweitens* ist nicht der geringste Anlass oder gar zwingende Grund vorhanden, den Begriff des Merkmals so enge zu fassen, wie es bei Lotze's Argumentation anscheinend geschieht. [Vergl. γ_3) unsrer Einleitung.]

Wir erinnern an die grosse Allgemeinheit mit welcher der Begriff des Merkmals hier stets aufgefasst werden sollte und auch sonst immer aufgefasst wird. *Merkmal* eines Dinges oder isolirbaren Objekts des Denkens war alles zu nennen, *was von dem Dinge* (oder in Bezug auf dasselbe) *wahrheitsgemäss ausgesagt werden kann.*

Solches konnte sogar bestehen in einer Beziehung des Dinges zu uns selbst als der mittelbaren Folge einer z. B. willkürlich von uns hergestellten Beziehung unsrer selbst zu diesem. Wenn ich — beispielsweise — in einen Laden trete um gewisse Dinge zu kaufen, so muss es — während meiner Verhandlungen mit dem Kaufmann, der Besichtigung der Waren ev. dem Feilschen um den Preis — als ein Merkmal gewisser von den Waren gelten, dass ich sie kaufen will, im Gegensatz zu den übrigen, die ich nicht kaufen will. Habe ich jene gekauft, so ist es wiederum ein Merkmal derselben, dass sie in meinen Besitz oder Eigentum übergegangen. Der Kaufmann wird, um dieses Merkmal festzuhalten, sie beiseite legen, meine Adresse auf das Paket schreiben, etc., wofern er nicht, falls die Gegenstände schwer beweglich sind, sie gar mit Kreidestrich versieht, das „Merkmal" sichtbar zu machen. Das gleiche würde der Kaufmann vielmehr bei den nicht-gekauften Waren thun, falls ich etwa beinah den ganzen Laden ausgekauft hätte. Die gekauften Waren sind diejenigen, die *nicht* dem Kaufmann verbleiben; die *nicht* gekauften diejenigen, die ich ihm lassen will; das eine ist sogut ein Merkmal wie das andre, und kann auch, wie man sieht, nach Belieben positiv oder negativ ausgedrückt werden.

Wer je versuchen sollte, etwa die Maxime: „Sooft du im Zweifel bist, ob du etwas thun sollst oder nicht, so unterlass' es!" im praktischen Leben zu befolgen, wird bald gewahr werden, wie oft ihn dieser Rat im Stiche lässt, indem, was unter einem Gesichtspunkt als ein Thun erscheint, sich unter einem andern als ein Unterlassen darstellt, sowie umgekehrt. So z. B. bei der Frage: Soll ich Herrn N grüssen?, oder soll ich ihn „schneiden"?

Auch „Abwesenheit", „Nichtvorhandensein", „Fehlen" oder „Mangel" eines bestimmten Merkmals oder einer Merkmalgruppe ist wiederum als

ein Merkmal und damit auch als ein Begriff anzuerkennen, wie denn auch die Sprache dafür die soeben angeführten abstrakten Begriffswörter und überhaupt — vor allem in Gestalt der mit der Vorsilbe „un-" zusammengesetzten Beiwörter und Hauptwörter — eine Unmasse von Benennungen hat.

Es ist ein Merkmal des Schalles, Tons oder Klanges z. B., dass er der Farbe (im eigentlichen, nicht im übertragenen Sinne) *entbehrt,* dass er überhaupt *nicht* auf den Gesichtssinn wirkt. Wir erblicken darin eine Verschiedenheit, einen Gegensatz, Kontrast desselben z. B. mit dem Bilde des Spektrums. Soll auch „Kontrast" nicht als ein Merkmal gelten?

Warum, frage ich — um noch ein Beispiel zu nehmen — warum soll es nicht ein Merkmal für die Katze der Insel Man („Manxcat") genannt werden, dass sie *keinen* Schwanz besitzt? Mir scheint es für die Katzen dieser Rasse noch ein wichtigeres Merkmal zu sein, dass sie keinen, als für die übrigen Katzen, dass sie einen Schwanz jeweils besitzen.

Wer sich diesem zuzustimmen weigerte, müsste vor allem ein unfehlbares, *vom sprachlichen Ausdruck unabhängiges* Kennzeichen aufstellen, wonach über die „positive" Natur eines Merkmals zu entscheiden wäre, z. B. sich ergeben würde, ob *parallel* oder *schneidend*, ob gesund oder krank, nützlich oder schädlich, frei oder gebunden, vorwärts oder rückwärts, gleich oder verschieden, etc. das positive (Beziehungs-)Merkmal.

Sofern wir die Klasse „Mensch" als eine wohldefinirte anzusehen vermögen, glauben wir mit dem Begriffe „Mensch" ein Mittel zu besitzen, Alles, was (ein) Mensch ist, zu unterscheiden von allem Erdenklichen, was es nicht ist. Diese Unterscheidung ist eine gegenseitige. Im ferneren Besitze des fundamentalen Begriffs der *Verneinung,* „begreifen" wir damit auch, was es heisst, wenn sich die für den „Menschen" charakteristische Merkmalgruppe an einem Objekt des Denkens *nicht,* oder nicht vollständig, vorfinden sollte. Wir haben damit von selbst auch den „Begriff": „Nicht-Mensch", und haben es gar nicht nötig, nach weiteren gemeinsamen Merkmalen „von Dreieck, Wehmut und Schwefelsäure etc." noch besonders zu suchen, indem das Nichtzutreffen jener bestimmten Merkmalgruppe als Merkmal völlig genügt, um den Begriff „Nicht-Mensch" zu charakterisiren und (kraft des in Gestalt dieses Merkmals in uns wirksamen Prinzips) die Klasse „Nicht-mensch" zu einer genau ebenso wohldefinirten Klasse zu machen, als die Klasse „Mensch" es war. Vergl. γ_3) der Einleitung.

Auch wer die Existenz eines Inhaltes zu dem angeblichen Begriffe Nichtmensch leugnet, indem er bei einer engeren, doktrinären, Auffassung des „Begriffes" verharrt, wird aber wenigstens zugeben müssen, dass ein *„Umfang"* zu diesem streitigen Begriffe in Gestalt der *Klasse* wirklich vorhanden ist (S. 99), dass der Begriff mindestens „dem Umfange nach" existirt — und dies genügt für eine Logik des Umfanges!

Allerdings muss die Mannigfaltigkeit unsrer Denkobjekte, damit in ihr der Negationsbegriff aufstellbar ist, gewisse Anforderungen*)

*) Diese Anforderungen vermöchte aber eine neben dem Menschen auch die Dreiecke, Wehmut und Schwefelsäure nebst noch vielem andern enthaltende Mannigfaltigkeit — für unser obiges Beispiel — in der That zu erfüllen.

erfüllen, an die indess noch niemand gedacht zu haben scheint, welche zu formuliren jedenfalls die Philosophen gänzlich unterlassen haben (an die auch Lotze's Ausstellungen nicht entfernt streifen). Bei der Fortsetzung der Theorie werden wir diese Anforderungen zu statuiren haben.

Die *zweite* der eingangs erwähnten Redensarten lautet:

η) „A ist B oder C".

Auch hier macht es einen grossen Unterschied, ob wir die Partikel *„oder"* mit auf die Kopula beziehen, oder ob wir sie blos auf die beiden Ausdrücke beziehen, die sie, anscheinend im Prädikate, unmittelbar verknüpft, m. a. W. ob wir als Glieder der Alternative ansehen wollen: die durch distributive Verwendung der Kopula entstehenden beiden Prädikationen „ist B" und „ist C", oder aber blos: die Klassenterme „B" und „C".

Im erstern Falle haben wir in Gestalt von:

ϑ) { „A ist entweder B, oder C" — genauer:
„*(Entweder) A ist B, oder* (es) *A ist C*"

ein wirklich *„disjunktives"* Urteil vor uns (falls nämlich die Glieder der Disjunktion einander ausschliessen). Dieses Urteil stellt eine Aussage (A ist B) als abhängig hin von einer andern (A ist C), genauer gesagt: es macht die beiden Aussagen von einander abhängig. Entweder es gilt die eine, oder es gilt die andere, oder also vielleicht auch beide zugleich — so wenigstens bei der für uns hier maassgebenden Auffassung.*)

Als ein sekundäres Urteil vermögen wir dieses in unsrer bisherigen Formelsprache noch keineswegs auszudrücken; vielmehr muss das dem Aussagenkalkul vorbehalten bleiben.

Da in η) die Worte „ist" und „oder" durch das eine, B, der beiden Prädikate B und C getrennt erscheinen, so könnten sie auch nicht durch eine Klammer auf der Zeile zusammengeschlossen werden, und bleibt zur deutlichen Charakterisirung der hier geforderten Auslegung, wenn man nicht eigene Ein- und Auslösungszeichen einführen will, nichts übrig, als eben so, wie es in der zweiten Fassung von ϑ) geschah, die Kopula „ist" hinter der Konjunktion „oder" zu wiederholen.

Im zweiten Falle haben wir in Gestalt von:

ι) „*A ist »B oder C«*"

einfach ein kategorisches Urteil vor uns, kein disjunktives. Während

---

*) Diese Auffassung ist allerdings eine weitere als die altherkömmliche, die zu dem Namen der *disjunktiven* Urteile den Grund aus der Voraussetzung entnahm, dass die Klassen B und C *disjunkte* seien.

vorhin B und C zwei gesonderte Prädikate waren, hat das vorliegende Urteil nur *ein* Prädikat: »B oder C«, welches aber aus zwei Klassen B und C mittelst der Konjunktion „oder" zusammengesetzt erscheint, somit einen (von Jevons so genannten) *„pluralen* Term" vorstellt. Man könnte auch in Gestalt eines sog. „divisiven" Urteils sagen: Die A sind teils B, teils C.

Diesmal genügte die Klammer, oder das sie vertretende Anführungszeichen, zur deutlichen Charakterisirung der für die Aussage η) hier geforderten Auffassung. Sofern es nun lediglich darauf ankommt, einer Verwechselung der beiden Auffassungen ϑ) und ι) des Urteils η) vorzubeugen, so lässt sich dieser Zweck erreichen, indem wir etwa die Vorschrift beobachteten, im zweiten Falle allemal die Anführungszeichen » « zu setzen, im ersten sie fortzulassen. Alles in allem genommen würde also in dieser Frage mit dem Institut der Klammern doch auszukommen sein.

Im Gegensatz zu den (eigentlich) „disjunktiven" ϑ) sind Urteile von der Form ι) nur als *„disjunktiv prädizirende"* zu bezeichnen.

Beide Urteile ϑ) und ι) geben denselben Sinn, decken sich oder sind logisch äquivalent, das eine folgt jedesmal mit aus dem andern (und umgekehrt) falls sie sich als *singuläre* Urteile darstellen, sobald nämlich das Subjekt A derselben ein Individuum bezeichnet. (Und dieser Umstand bildet dann eine Prämisse, welche auch unerlässlich ist, damit man die erwähnte Folgerung ziehen dürfe.)

Stellen dagegen unsre Urteile sich als *generelle* dar, genauer: bedeutet ihr Subjekt A eine Klasse oder Gattung, so geben sie verschiedenen Sinn, und zwar sagt das disjunktive Urteil ϑ) entschieden *mehr* aus als das disjunktiv prädizirende ι), indem es unfehlbar auch die Gültigkeit des letzteren nach sich zieht, wogegen das disjunktiv prädizirende Urteil ι) alsdann *nicht* aufgebrochen werden darf in ein disjunktives ϑ).

Ist in der That ein *Punkt* A enthalten im Gebiete »B oder C« (d. i. in dem aus den Kreisen B und C zusammengesetzten Gebiete $B + C$, dem Inbegriff, der Gesamtheit jener Gebiete), so ist notwendig er entweder enthalten im Gebiete B, oder aber im Gebiete C, oder vielleicht auch (falls diese einander nicht ausschlossen) in beiden Gebieten zugleich, d. h. es gilt dann: Entweder ist A in B enthalten oder es ist A in C enthalten. Desgleichen selbstverständlich auch umgekehrt: Gilt letzteres, so ist der Punkt A gewiss auch im Gebiete »B oder C« enthalten.

Der Punkt konnte ja nicht teilweise dem einen, teilweise dem andern Gebiet angehören, da er eben unteilbar ist.

Anders, wenn dem Gebiet A eine Ausdehnung zukommt.

Ist es nach ϑ) richtig, dass ein solches A entweder ganz in B hineinfällt, oder dass es ganz in C hineinfällt, so wird es damit auch in »B oder C« hineinfallen, d. h. es gilt alsdann auch wieder ι).

Dagegen ist der umgekehrte Schluss jetzt nicht mehr zulässig. Wenn ι) gilt, so kann dies auch so geschehen, dass A zu einem Teile in den Kreis B zum andern in C hineinfällt; es gilt dann das disjunktiv prädizirende Urteil ι): A ist in »B oder C« enthalten, und gleichwol gilt das disjunktive Urteil ϑ) *nicht*, indem weder A in B noch A in C (schlechtweg, d. h. ganz) enthalten sein wird.

Und so verhält es sich nun auch, falls A eine Klasse, ein Gattungsbegriff sein sollte.

Zugegeben etwa, dass es blos weisse und schwarze Schafe gebe. Alsdann ist das disjunktive Urteil:

ϑ) Entweder sind alle Schafe weiss, oder sie sind schwarz, offenbar unrichtig; das Gegenteil vielmehr:

Weder sind alle Schafe weiss, noch sind sie alle schwarz, ist richtig.

Das disjunktiv prädizirende Urteil dagegen ist richtig, und zwar gibt ihm die Sprache (ohne Anwendung von besondern Anführungszeichen) den Ausdruck:

ι) Alle Schafe sind (entweder) weiss(e) oder schwarz(e).

Dass unser Urteil, wie in diesem Beispiele, ein universales, sowie dass die Glieder B und C der Alternative einander ausschliessen, erscheint dabei als nebensächlich. Das gleiche gilt, falls es partikular, sowie falls B und C ein Gebiet gemein haben.

Im Hinblick darauf z. B., dass westafrikanische Schafe der Wolle entbehren und unter diesen sich auch schwarze finden mögen, können wir sagen:

ι) Einige Schafe sind schwarz oder ohne Wollhaare, und niemand wird diesen Satz als das disjunktive Urteil verstehen:

ϑ) Entweder einige Schafe sind schwarz, oder einige Schafe (dieselben) entbehren der Wollhaare.

Und auch, wenn das generelle Urteil sich im Subjekt des Ausdrucks „Jedes A“, „Manches A“ bedienen, sowie wenn es in der sprachlichen Ausdrucksform des „unbestimmten“ Urteils sich darstellen sollte, gilt ein gleiches.

Sagen wir:

(Die) Milch ist entweder gefälscht oder unverfälscht (echt), so ist das Urteil wesentlich ein universales, es will von „jeder“ oder „aller“ Milch gelten.

Dasselbe Urteil aber würde wieder nur im Sinne von ι) als disjunktiv prädizirendes zu verstehen sein und unzweifelhaft auch verstanden werden.

Das entsprechende disjunktive Urteil

ϑ) Entweder ist alle Milch gefälscht, oder alle Milch ist echt, wäre abermals sowol als Deutung jenes Urteils, wie auch an sich zu verwerfen.

Die bisherige Logik scheint mir nun zwischen den beiden Arten von Urteilen, den disjunktiven (die sie den kategorischen gegenüberstellt) und den disjunktiv prädizirenden (welche unter die kategorischen fallen) nicht hinlänglich unterschieden zu haben.

Die von ihr so genannten disjunktiven Urteile sind, wie aus dem vorstehenden erhellt, *in der Regel* disjunktiv prädizirende. Jedenfalls werden wir es zunächst (bis zum Aussagenkalkul) nur mit den letzteren

zu thun haben. Blos, wo sie singulär sind, erscheinen beide Auffassungen gleichermassen zulässig.

Im Hinblick auf den Umstand, dass bei diesen Urteilen die Glieder der Disjunktion schon vielfach in der Sprache des gemeinen Lebens, desgleichen bei den in unsrer Theorie mit zuzulassenden Urteilen einander nicht notwendig *auszuschliessen* brauchen, dürfte es als angemessener erscheinen, das Wort „disjunktiv“ durchweg durch ein anderes, etwa durch „*alternativ*“ zu ersetzen.

Anmerkung. Im Hinblick auf das unter η) Gesagte könnte man auf die Vermutung kommen, als ob ähnlich auch das Urteil:

$\varkappa$) *A oder B ist C*,

in welchem das Bindewort „oder“ anscheinend im Subjekt des Satzes auftritt, zweierlei Deutungsmöglichkeiten darböte.

Bei korrekter Handhabung der Sprache ist dies *nicht* der Fall. Das Urteil ist unter allen Umständen ein sekundäres, in Wirklichkeit disjunktives, welches die zwei Urteile „A ist C“ und „B ist C“ derart von einander abhängig hinstellt, dass mindestens das eine derselben gelten muss: Entweder A ist C, oder aber B ist C, oder auch (bei der für uns maassgebenden Auffassung des „oder“) beide, A und B, sind C. Zu seiner Darstellung in der Formelsprache wird auch dieses Urteil des Aussagenkalkuls bedürfen.

Dagegen würde ein Urteil

λ) »A oder B« ist C

auszudrücken haben, dass das Gebiet $A + B$, der Inbegriff der Klassen A und B in C enthalten ist, demnach sowol A als B selber sich unter C subsumirt. Bereits unter ι) des § 8 haben wir darauf aufmerksam gemacht, dass aber das Pluszeichen des identischen Kalkuls im Subjekte mit „und“ zu übersetzen ist, und hätte darnach in der Wortsprache der Sachverhalt, anstatt durch λ) nur durch das Urteil

μ) *A und B* ist C

ausgedrückt werden dürfen, wo Verwechselungen alsdann ausgeschlossen erscheinen.

Die in diesem Paragraphen besprochenen Urteilsformen lassen erkennen, dass es — wie schon Jevons betont — oft einen Unterschied macht, ob man von einer Klasse spricht, oder ob von den in ihr enthaltenen *Individuen*. Will man von Klassen reden — wie wir es bis zur Erledigung der wissenschaftlichen Definition des Individuums durchweg vorhaben — so müssen disjunktiv (resp. alternativ) prädizirende Urteile von den disjunktiven (resp. alternativen) und negativ prädizirende Urteile von den Urteilsverneinungen sorgfältig unterschieden werden. —

Achte Vorlesung.

§ 16. Deutung der Negation für Klassen. Satz des Widerspruchs, des ausgeschlossenen Mittels und der doppelten Verneinung im Klassenkalkul. Dichotomie. Gewöhnliche Mannigfaltigkeit.

Die Übertragung der bisherigen Begriffe und Sätze von den Gebieten einer Mannigfaltigkeit 1 von Punkten auf die Klassen einer Mannigfaltigkeit von Individuen unterliegt keiner innern Schwierigkeit, wenn nur ebendiese Mannigfaltigkeit wieder die beiden Grundeigenschaften besitzt: erstens als ein Ganzes 1 denkbar zu sein, d. h. nur miteinander *verträgliche* Elemente als Individuen zu enthalten („*konsistente*“ Mn. — vergl. § 7) und zweitens eine „*reine*“ Mn. zu sein, somit unter ihren Individuen nicht auch Klassen von solchen Individuen (nebst vielleicht noch anderem) zu enthalten, und demzufolge die Adjungirung einer einheitlichen Null zuzulassen [vergl. § 9, ψ, χ)].

Diese beiden Anforderungen aber, *vereinbar* und *rein* zu sein, werden sich für die Existenz, für die Möglichkeit der Bildung, eines Negationsbegriffes nicht nur als *hinreichende*, sondern auch als unerlässliche, *notwendige* Bedingungen demnächst erweisen.

Aus der Mannigfaltigkeit des Denkmöglichen überhaupt denken wir uns eine Mn. der verlangten Art als eine wohldefinirte Klasse hervorgehoben und bezeichnen dieselbe fortan kurz als eine „*gewöhnliche* Mannigfaltigkeit“.

Die Elemente oder Individuen derselben *müssen*, wie gesagt, *einander gegenseitig ausschliessen*, in dem Sinne, dass zwar wohl ein Individuum zugleich *Teil**) oder *Eigenschaft*, *Thätigkeit*, *Merkmal* eines andern, desgleichen sogar eine *Beziehung* zwischen andern, aber nicht eine *Bedeutung* desselben sein darf, das andre nicht etwa eine das erste mitumfassende Klasse sei. Und ferner müssen diese Individuen vereinbar, d. i. gleichzeitig denkmögliche sein, *es dürfen keine zwei einander ausschliessen* in dem Sinne, dass sie beide zusammen zu denken einen Widerspruch involviren würde.*)

*) Vergleiche eine unten S. 351 folgende exemplifizirende Betrachtung.

Unter diesen Umständen, wissen wir bereits, ist es zulässig, eine Klasse 0 zu fingiren, welche allen aus der Mn. hervorhebbaren Klassen a gegenüber jene von der Def. $(2_\times)$ geforderte Eigenschaft besitzt, dass nämlich $0 \mathrel{\overline{\in}} a$ sei, und diese Klasse ist die leere, welche die Rolle des „Nichts“ *für* diese, *in* dieser Mn. spielt.

Und ferner gibt es dann auch eine Klasse 1, welche diesen Klassen gegenüber die Forderung der Def. (2_+) erfüllt, dass $a \mathrel{\overline{\in}} 1$ stets ist, und dies ist die Mn. selbst als die umfassendste der in ihr enthaltenen Klassen.

Alsdann auch ist es möglich, die Individuen irgend einer gegebenen Klasse a aus der Mn. fortzulassen, und die übrig bleibenden Individuen derselben wiederum zu einer Klasse zusammenzufassen (für welche 0 zu nehmen ist, wenn keine übrig bleiben sollten).

Wir haben damit die ausreichenden Grundlagen zur Bildung eines Negationsbegriffes: die Negation $\bar{a}$ oder a_1 von a wird die bei dem geschilderten Prozess resultirende Klasse sein.

Wir nennen diese Klasse *nicht-a*, *non-a*, die *Negation*, auch das *kontradiktorische Gegenteil* der Klasse a *in Bezug auf die zugrunde liegend gedachte Mannigfaltigkeit*, welche letztere indess in der Regel durch den Gegenstand der Untersuchung oder die Natur der anzustellenden Über-

*) Dergleichen wäre wol nur dann zu gewärtigen, wenn als Elemente der Mn. (auch) in Urteilen niedergelegte Überzeugungen figuriren, wenn als deren Individuen „*Glaubenssätze*“ (im weiteren Sinne des Wortes) auftreten. Dann Obiges ausdrücklich zu verlangen, scheint eigentlich überflüssig, weil von Vernünftigen Unvereinbares ohnehin nicht zusammen gedacht wird, und für Verrückte keine Logik geschrieben wird. Von Vernünftigen — ja! — sofern sie nicht auf dem Holzwege sind, nicht irren. Versteckte Widersprüche können aber auch solchen entgehen.

Ohnehin dürfte auch die Grenze zwischen beiden Kategorieen von Personen gar nicht so scharf zu ziehen sein; vielmehr hat die Ansicht sehr viel für sich, dass jeder Mensch an partiellem Wahnsinn leide, dass er seinen „Tollpunkt“ besitzt (eventuell auch deren mehrere, welche, nebenbei gesagt, meist schon daran erkennbar, dass er „böse“ wird, sobald ein solcher von Andern berührt wird) — oder, um mit meinem Kollegen **Knop** einen terminus technicus der Geologie zu verwerten, mit dem sie das Vorkommniss bezeichnet, wo eine Schicht plötzlich in ganz anderem Niveau sich fortsetzt, als auf welchem sie aufgehört hat zu streichen: dass es auch in des Menschen Hirne „Verwerfungsspalten“ gibt. —

Endlich war doch in Anhang 4 und 5 zu sehen, dass man auch unvereinbare, inkonsistente Mannigfaltigkeiten sehr wohl zum Gegenstand des Studiums machen, als Untersuchungsfeld sich erwählen kann. —

legungen von vornherein bestimmt ist, als ein für allemal gegeben erscheint, woneben es, andernfalles, meist als belanglos sich erweist, ob sie mehr oder minder enge begrenzt wird — woraus sich erklärt, weshalb sie nicht weiter erwähnt zu werden pflegt.

Wir übertragen auch diese Benennungen auf die den Klassen a und a_1 (oder $\bar{a}$) möglicherweise zugeordneten *Begriffe*.

Als Beispiele haben wir bereits im vorigen Paragraphen die Negationen „nicht-schwarz" und Nichtkombattant" besprochen. Der letztere Begriff umfasst z. B. die Pionire, Trainsoldaten, Regimentshandwerker, Lazaretgehülfen, Ärzte, Auditoren und Geistlichen die am Feldzug teilnehmen oder zur Armee gehören, und lassen die Beispiele erkennen, dass in der That der Negationsbegriff auf eine bestimmt abgegrenzte Mn. gemeinhin bezogen wird.

In der Unbestimmtheit jener beim Negiren eines Begriffes zugrunde zu legenden Mannigfaltigkeit, welche als eine demselben (nicht immer gerade „nächst-") übergeordnete Gattung ausfindig zu machen die Sprache gewöhnlich dem Sprachgefühl des Einzelnen überlässt, liegt nun allerdings eine Schwierigkeit, mit welcher die Theorie sich abzufinden hat. In praktischer Hinsicht ist diese Schwierigkeit minder erheblich, da man bei der angewandten Logik, in den Wissenschaften, doch allemal nur zu thun hat mit Objekten einer bestimmten Gattung, mit den Dingen, welche eben dem Felde der Untersuchung angehören. Fühlbarer macht sie sich auf dem Gebiete der reinen Logik, die sich ja nach Möglichkeit erstrecken sollte über alles Erdenkliche.

Behufs Erzielung einer möglichst unumschränkten Anwendbarkeit unsres Kalkuls wird es sich empfehlen, die beim Negiren zugrunde zu legende Mannigfaltigkeit thunlichst *weit* zu fassen. Auf die Art, wie dies sich erreichen lässt, gehen wir nachher (am Schluss des Paragraphen) ein.

Einstweilen sei nur auf folgendes hingewiesen. Ausser beim Prädiziren kommt die Verneinungspartikel „nicht" am häufigsten in Verbindung mit Adjektiven (oder deren Substantivirung) vor, und wird hier nicht selten durch die mit dem griechischen Alpha privativum entsprechende Vorsilbe „un-" vertreten. Z. B. „möglich", „unmöglich" = nicht-möglich, „Unmöglichkeit".

Durch die letztere pflegt aber noch bestimmter als bei Anwendung der Partikel „nicht", auf ein bestimmtes genus proximum des dem negirten Adjektiv entsprechenden Begriffes hingewiesen zu werden, sodass man die beiden Ausdrucksformen nicht unbedingt für gleichbedeutend erklären darf. Z. B. von „durchsichtig" oder „undurchsichtig" zu sprechen, werden wir nur Anlass haben, wo von körperlichen Dingen die Rede ist. Bei der Bildung des Negationsbegriffs der „Undurchsichtigkeit" wird deshalb auf die Mannigfaltigkeit der Körperwelt (resp. ihrer Merkmale) Bezug

genommen, reflektirt. Die Frage, ob Geister durchsichtig seien (Drobisch) wird allgemein zu verneinen sein; aus dem genannten Grunde dürfen sie aber doch nicht „undurchsichtig" genannt werden. Logisch korrekt bleibt die Antwort: „Geister sind nicht-durchsichtig", wo dann mit der Negation Bezug genommen ist auf eine hinreichend umfassende Mannigfaltigkeit, welche neben dem Sichtbaren, der Körperwelt auch mindestens die Geister, und (nach Belieben) anderes mehr, umfasst.

Mit Denknotwendigkeit gelten nun die Gleichungen:

$$30_\times)\ a\bar{a} = 0, \qquad 30_+)\ a + \bar{a} = 1, \qquad 31)\ \bar{\bar{a}} = a,$$

sowie

$$\bar{0} = 1 \quad \text{und} \quad \bar{1} = 0.$$

Zunächst die beiden letzteren geben uns (für Klassen gedeutet) die Sätze: *Nicht-nichts ist etwas* — eine Klasse, die, wie wir gesehen haben, Alles überhaupt (innerhalb der Mn.) Denkbare umfasst. Und *Nicht-etwas ist nichts.*

So unumschränkt diese Sätze auch zu gelten scheinen (zufolge unsrer Gewöhnung, mit unsern Überlegungen uns immer nur innerhalb einer „gewöhnlichen" Mn. zu bewegen), dürfen wir doch schon bei ihnen nicht ausser Acht lassen, dass für eine völlig offene Mn., für die „absolute" Mannigfaltigkeit des überhaupt zu denken Möglichen, dieselben keine Geltung haben werden, indem für sie — wie in § 9, ψ) gezeigt — ein einheitliches, ein „absolutes Nichts" undenkbar ist. Schon durch seine blosse Benennung und Einführung, durch seine Adjungirung zu *einem* Teile der absoluten Mn. wurde das Nichts zu einem Individuum gestempelt, „individualisirt" für andere Teilmannigfaltigkeiten derselben. Das Nichts in Bezug auf eine gewöhnliche Mn. z. B. war allemal ein Individuum in Bezug auf die aus dieser „abgeleitete" Mn.: das Nichts der Grössenlehre war ein Individuum in der Klasse der Zahlen (die arithmetische 0), die Null des identischen Kalkuls ein Individuum in der Klasse der Gebiete oder in der Mn. der Klassen. Sie wurde selbst ja zu einem Gebiete, zu einer Klasse. Überhaupt ist „Nichts" immer ein Individuum in der Klasse der Eigennamen sowie der Namen schlechtweg, der Worte und der Symbole, eventuell der Vorstellungen, Gedankendinge oder Erfindungen des Menschen. Jedermann wird die Behauptung zugeben: *Nichts* ist etwas, wovon man reden, *„etwas"*, worüber man verschiedener Meinung sein und streiten kann. Es existirt also schon der obige Gegensatz zwischen „nichts" und „etwas" in der absoluten Mn. *nicht.*

[Es könnte eingewendet werden, dass wir hier von „Nichts" immer nur in der suppositio nominalis gesprochen vergl. ξ_1) der Einleitung, S. 44 — von *„dem* Nichts", als dem Worte, ev. der Vorstellung des Nichts, aber nicht von der Sache, nicht von ebendiesen in der suppositio realis oder im Hinblick auf seine Bedeutung genommen, nicht wirklich von nichts. Allein im letztern Sinn kann davon überhaupt nicht gesprochen werden, man müsste denn schweigen.]

Die Gleichung $30_\times)\ aa_1 = 0$ sagt nun aus: *Es gibt nichts, was zugleich* (und im selben Sinne) *a und nicht-a ist.*

. Z. B. Nichts ist schwarz und zugleich auch nicht schwarz. Ein Subjekt auch, dem die Prädikate „schwarz“ und „nicht-schwarz“ gleichzeitig zukommen sollten, muss „nichts“ sein.

Die Gleichung erscheint als der konziseste Ausdruck für den *„Satz des Widerspruchs“*, das *principium contradictionis* der alten Logik — zunächst hier mit der Beschränkung auf Klassen und Begriffsumfänge.

Aristoteles in seiner Metaphysik formulirt den Satz so (vergl. Sigwart[1] p. 145): *Es ist unmöglich, dass dasselbe demselben in derselben Beziehung zugleich zukomme und nicht zukomme* ... und sagt weiter: Dies ist der allergewisseste Grundsatz ..., denn es ist unmöglich, dass irgend jemand annehme, dasselbe sei und sei nicht ... Jedermann, der einen Beweis führt, führt ihn deshalb auf diesen Satz als letzten zurück; denn er ist von Natur das Prinzip auch für alle andern Axiome.

Demselben Satze werden wir im Aussagenkalkul wieder begegnen gleichwie auch den übrigen.

Die Gleichung 30_+) $a + a_1 = 1$ sagt aus:

Alles ist »a oder nicht-a«.

In die Formelsprache zurückübersetzt würde dieser Ausspruch allerdings nur besagen: $1 \mathrel{\underline{\in}} a + a_1$, allein nach Th. 5_+) muss diese Subsumtion äquivalent sein der Gleichung 30_+). Jedenfalls: *Was a ist, und was nicht-a ist, ergänzt sich zu der Gesamtheit alles* (in unsrer Mannigfaltigkeit) *Denkbaren*, macht zusammen diese ganze Mn. aus.

Ein Drittes oder *Mittelding zwischen a und nicht-a*, „schwarz“ und „nicht-schwarz“, *gibt es* darum in ihr *nicht*. Und so erscheint der Satz als Ausdruck des *„principium exclusi tertii* (oder *medii*) *inter duo contradictoria“*, als der *Grundsatz des ausgeschlossenen Dritten* oder *Mittels* zwischen zwei kontradiktorisch entgegengesetzten Begriffen oder als das „tertium non datur“ der alten Logik — für den Klassenkalkul gedeutet.

Die übliche Fassung: *Omne A est aut B, aut non-B* (Jedes A ist entweder B, oder nicht-B) muss aber vor missverständlicher Deutung, vor einer zu weit gehenden Interpretation bewahrt werden.

Übersetzt man das „omne A“ mit „jedes Individuum einer Klasse A“, so ist der Satz richtig, nämlich, wie oben § 16 auseinandergesetzt, sowol zu verstehen als das disjunktiv prädizirende Urteil: A ist »B oder nicht-B« — unzweifelhaft gilt in der That: $A \mathrel{\underline{\in}} B + B_1$, da eben $B + B_1 = 1$ und $A \mathrel{\underline{\in}} 1$ sein muss — als auch als disjunktives Urteil für's einzelne Individuum.

Deutete man aber das „omne A“ als: „jedes Objekt A des Denkens“, so überschritte man den dem Satze faktisch zukommenden Gültigkeitsbereich, und namentlich würde man über die demselben rechtmässig zukommende Deutung hinaus gehen, wenn man das „omne A“ übersetzen wollte mit „jede Klasse A“. Hierdurch nämlich würde das Urteil gleichbedeutend mit der (disjunktiven) Behauptung, dass entweder $A \mathrel{\underline{\in}} B$ oder $A \mathrel{\underline{\in}} B_1$

sein müsse, was ja falsch zu nennen ist, sooft A aus Teilen von B und B_1 sich zusammensetzt.

So mag z. B. wahr sein: Alle Schafe sind, oder jedes Schaf ist entweder schwarz oder nicht schwarz (resp. weiss), wogegen doch gleichwol *nicht* gelten wird: Jede Schafrasse ist entweder schwarz oder nicht schwarz (weiss), indem eine solche Rasse auch schwarze neben weissen Schafen enthalten mag.

Mit andern Worten: der von „jedem A“ behauptete Satz gilt nur in der ursprünglichen und nicht in der (aus ihr) „abgeleiteten“ Mannigfaltigkeit.

Die Theoreme 30) müssen besonders bei der *wissenschaftlichen Klassifikation, Einteilung* (divisio) berücksichtigt werden.

Von einer solchen ist als oberste Anforderung die zu erfüllen, dass die Einteilungsglieder oder (Unter)Arten der zu klassifizirenden Gattung wirklich zusammen diese Gattung ausmachen: kein Individuum der Gattung darf ausgelassen werden; die Klassifikation muss eine *vollständige* sein; die Einteilung darf keine *Lücke* (gap, *hiatus* in dividendo) aufweisen.

Natürlich müssen die Einteilungsglieder auch wirklich Arten der genannten Gattung (müssen derselben sämtlich eingeordnet) sein; die Arten dürfen nicht über die Gattung hinausgreifen.

Diese Anforderung bildet aber keine solche, vor deren Vernachlässigung besonders zu warnen ist, weil die Einteilungsglieder ohnehin nur als determinirende Faktoren der Gattung in Betracht zu kommen pflegen. Teilten wir z. B. die Schafe ein in weisse und schwarze, so meinten wir natürlich nicht: in weisse *Dinge* und schwarze Dinge, sondern in weisse *Schafe* und schwarze.

Darnach pflegt sich die Anforderung, dass die identische Summe der Einteilungsglieder der Gattung eingeordnet sei, gemäss Th. $6_\times$) und Def. (3_+) ganz von selbst zu erfüllen; die Vollständigkeit aber erfordert, dass nun auch die umgekehrte Einordnung stattfinde, damit eben gemäss Def. (1) identische Gleichheit zwischen der Gattung und der Summe ihrer Arten vorliege.

Als eine zweite fundamentale Anforderung pflegt die hingestellt zu werden, dass die Einteilungsglieder disjunkt seien, einander gegenseitig ausschlössen, je zu zweien 0 zum Produkt geben.

Die Vernachlässigung dieser Anforderung würde nämlich zu tautologischen Wiederholungen von bereits Aufgezähltem führen, welche als nicht wünschenswert, an sich zwecklos hinzustellen. Fehlerhaft könnte aber solches Verfahren nicht wol genannt werden, auch würde ein Verstoss gegen diese zweite Anforderung keine bedenklichen Wirkungen haben — vielmehr kann, wie wir in § 18, $\alpha .. \delta$) zeigen, die Missachtung derselben durch Rücksichten auf die Kürze und Bequemlichkeit des Ausdrucks, bei Aufzählungen (die eine Gattung oder

Kategorie klassifizirend erschöpfen sollen) nicht selten sogar geboten erscheinen.

Eine dritte und letzte Anforderung, die rigoros gestellt zu werden pflegt, ist die: dass ein „Einteilungsgrund" vorhanden sei (vergl. Einleitung S. 85). Diese Anforderung mag durch psychologische, didaktische, oder auch methodologische Rücksichten diktirt erscheinen; in rein logischer Hinsicht ist sie wol irrelevant zu nennen. Logisch vollkommen ist eine Einteilung — im Sinne der Logik des *Umfanges* wenigstens — sobald sie nur die beiden ersten Anforderungen ja zur Not schon, sobald sie die erste derselben erfüllt.

Eine, alle drei Anforderungen erfüllende, und überhaupt die *logisch vollkommenste* Einteilungsweise wird erhalten, indem man das Th. 30_+) zum Schema der Einteilung nimmt, nämlich aus der Gattung nur zwei Arten, aus jeder Art ebenso nur zwei Unterarten, und so weiter, macht, und zwar in folgender Weise. Sobald (durch ein *Merkmal* bestimmt, was indess vom Standpunkt der Logik des Umfanges noch unwesentlich zu nennen) eine Art a der Gattung als solche sich darbietet, muss die Negation von dieser: a_1, soweit sie nur unter die Gattung fällt, als die andere Art hingestellt werden. Und ebenso weiter in Hinsicht der Arten und ihrer Unterarten, falls jene noch fort und fort eingeteilt werden sollten.

Das solches Einteilungsverfahren ein erschöpfendes sein muss, ist nach Th. 30_+) evident, wenn man dieses für die jeweils einzuteilende Gattung als augenblicklicher Mannigfaltigkeit 1 in Anspruch nimmt. Ebenso erfüllt das Verfahren kraft Th. $30_\times$) auch die zweite Anforderung (und bildet allemal das erwähnte Merkmal den durch die dritte geforderten Einteilungsgrund).

Anwendbar ist das Verfahren auf jede Gattung einer „gewöhnlichen" Mannigfaltigkeit 1. Hält man letztere fest, und nennt a die zu klassifizirende Gattung, b eine erste Art derselben, so wird $b \in a$, somit nach Th. $20_\times$) $b = ab$ sein. Man hat demnach die Einteilung:

$$a = ab + ab_1$$

Ist dann c eine Unterart von ab, d eine solche von ab_1, so hat man ebenso weiter:

$$ab = abc + abc_1, \qquad ab_1 = ab_1d + ab_1d_1$$

sonach

$$a = abc + abc_1 + ab_1d + ab_1d_1,$$

wo augenscheinlich das Produkt irgend zweier Glieder rechts verschwinden muss, als ein zwei solche Faktoren vereinigendes, die Negationen von einander sind. Etc.

Eine derartige Einteilung heisst *zweiteilig* oder *dichotomisch* (im weitern Sinne). Die Gattung verzweigt sich dabei in Arten und Unterarten so wie mancher Baum sich in Äste und Zweige gabelt. Es ist aber nicht erforderlich, dass jede Unterart gleichmässig weiter eingeteilt werde und jedenfalls wird man bei gewissen Spezies als letzten Einteilungsgliedern stehen bleiben.

Gewöhnlich setzt man sogleich eines von diesen endgültigen Einteilungsgliedern jeweils als erste Art resp. Unterart an, dessen Negation dann also die übrigen unter die betreffende Gattung resp. Art fallenden Einteilungsglieder in sich vereinigen wird. Hier braucht nur diese letztere, mithin immer nur das eine der beiden Einteilungsglieder noch weiter eingeteilt zu werden — *Dichotomie* im engeren Sinne. Auch diese ist zuverlässig eine erschöpfende (exhaustive) Einteilungsweise.

Werden z. B. mit Max Müller[1] die menschlichen Sprachen unter dem Gesichtspunkt ihrer genealogischen Verwandtschaft oder nachweislichen Abstammung von einer gemeinschaftlichen Muttersprache eingeteilt in die arischen (oder indogermanischen), die semitischen und die turanischen, so erhalten wir dichotomisch zuwerkegehend die Einteilung:

$$\overbrace{\text{arisch} \quad \overbrace{\text{nicht-arisch}}^{}}^{\text{Sprache}}$$

$$\text{nicht-arisch} = \overbrace{\text{semitisch} \quad \overbrace{\text{turanisch} \quad \text{nicht-turanisch}}^{\text{nicht-semitisch}}}$$

und ist nun ersichtlich, dass wenn etwa bei der oben erwähnten Einteilung eine Sprache übersehen worden sein sollte, die sich in keine der drei Abteilungen einfügt, oder wenn vielleicht bei einem wilden Volksstamme eine solche Sprache noch neu entdeckt werden sollte, diese notwendig zu unsrer *letzten* Gruppe gehören wird — d. i. zur Gruppe der weder arisch- noch semitisch- noch turanischen Sprachen.

Vergl. hiezu Jevons[6] p. 98 .. 111, insbesondre auch bezüglich des „Baum des Porphyrius" (Malchos).

Solange dergleichen nicht bekannt, mögen wir diese vierte Unterabteilung allerdings gleich 0 annehmen.

Ähnlich aber, wie in diesem Beispiele, bewahrt uns auf den weniger sicheren Gebieten des Wissens allein das dichotomische Verfahren vor dem Begehen einer Auslassung beim Einteilen. Um hiergegen die erforderliche Garantie zu gewinnen, genügt es indess, wie man sieht, sich nur die *letzte* Unterklasse allemal zum Bewusstsein zu bringen, welche von den bereits aufgezählten übrig gelassen wird, und mit Sorgfalt zu erwägen, ob sie wirklich eine leere.

Unterbleibt dies, während sie doch mitangeführt wurde, so macht der Klassifizirende den Eindruck nur Selbstverständliches zu sagen. Hierauf beruht z. B. der Humor der folgenden in Studentenkreisen beliebten Hexameter von unbekanntem Autor:

Si bene rem memini sunt causae quinque bibendi:
Hospitis adventus, praesens sitis atque futura,
Vinum, festa dies et quaelibet alia causa.

— Weiss ich die Sache noch recht, so gibt's fünf Gründe des Trinkens:
Erstlich die Ankunft des Gast's, dann Durst nebst künftigem Dürsten,
Wein auch, und festlicher Tag, *und jegliche andere Ursach.* —

Die Gleichung 31) $(a_1)_1 = a$ stellt das „Prinzip der *doppelten Verneinung*", das „*dupplex negatio affirmat*" vor. Sie zerfällt nach Def. (1) in die beiden Subsumtionen:

$a ⋹ (a_1)_1$, d. h. *a ist nicht nicht-a*,

und

$(a_1)_1 ⋹ a$, *was nicht nicht-a ist, muss a sein.*

So unbestimmt sind ihrem Sinne nach die in Worten ausgedrückten Sätze, sogar Grundsätze, der herkömmlichen Logik, dass man darüber verschiedener Meinung sein kann, welchen derselben eigentlich unsre Formeln jeweils darstellen! Es stellt z. B. Boole, dem wir uns angeschlossen, [4] pag. 49 die Gleichung $30_\times$) als den Ausdruck des principium contradictionis hin, wogegen Peirce[5] pag. 28 im Anschluss an Leibniz und Kant, die Subsumtion $a ⋹ (a_1)_1$ als solchen ansieht — die umgekehrte als das principium exclusi medii hinstellend.

Man vergleiche über diese Streitfrage die gründliche Auseinandersetzung von Sigwart[1] § 23, welcher auf Aristoteles zurückgehend darthut, dass unsre obige Auffassung die berechtigte.

Übrigens hängen die drei Sätze in der That auf das innigste zusammen. Alle drei gelten sie indess nur für eine „gewöhnliche" Mannigfaltigkeit, weil nur für eine solche der Begriff Nicht-*a* aufgestellt werden konnte, und konstatiren sie, indem sie als schlechtweg gültige hingestellt zu werden pflegen, gewissermassen gleichmässig, dass wir uns mit unserm Denken immer nur in einer solchen bewegen.

Wer mit Sigwart die Verneinungspartikel auf die Kopula bezieht, kann die Sätze 31) auch wieder nur für Individuen von *a* gelten lassen, aber nicht für Klassen *a*. Eine Schafrasse z. B. von der es falsch ist, zu behaupten, sie sei nicht-weiss, indem sie neben schwarzen auch weisse Schafe enthält, darf darum doch nicht weiss genannt werden, weil dieses Prädikat damit auch ihren schwarzen Schafen zugesprochen würde.

Dass nun die an unsre Mannigfaltigkeit zu stellenden beiden Anforderungen „konsistent" und „rein" zu sein, nicht nur, wie erkannt, *hinreichend*, sondern auch *notwendig* (unerlässlich) sind, damit die

Theorie der Negation Anwendung finden könne und allgemein, für jede der Mn. angehörige Klasse, der Begriff ihrer Negation aufstellbar werde, ist zudem leicht zu sehen.

Wäre die Mn. nicht konsistent, so wäre durch ihre Setzung bereits ein Widerspruch *gegeben*, und könnte auf dieser Basis unmöglich die Forderung widerspruchsfreien logischen Denkens erfüllt werden.

Wäre aber die Mn. keine reine, so müsste mindestens *ein*mal *als Individuum* derselben eine Klasse A figuriren, die neben anderm auch ein ausserdem schon vorkommendes *Individuum* b derselben Mn. unter sich begreift. Die Negation dieser Klasse A dürfte nach $30_\times$) kein Individuum derselben, also auch b nicht, enthalten, und müsste dennoch alle übrigen Individuen der Mn., ausser genanntem A, umfassen, unter diesen auch das frei vorkommende b — es wäre mithin Widersprechendes gefordert. Ebenso hätte die Negation des b (als isolirten Individuums der Mn.) alle übrigen Individuen derselben, sonach auch A, als Individuen zu umfassen, damit als Inbegriff von b und fraglichem Nicht-b die ganze Mn. herauskomme (die ja das Individuum A enthalten soll), und zudem dürfte dieses Nicht-b das b nicht enthalten, welches zugleich mit dem in ihr enthaltenen A doch in ihr steckt. Auch hier wäre also der Ausschluss des b zugleich mit dessen Einschluss (das eine explicite, das andre implicite mittelst A) gefordert — was unvereinbar.

Während es so sich nicht angängig erwies, unter Ausschluss eines Individuums doch ganz eine Gattung zuzulassen, die es unter sich begreift, oder umgekehrt, bei Ausschluss dieser ganzen Gattung das Individuum zuzulassen, während es logisch unmöglich erschien, der *Gattung* und den *Bedeutungen* ihres Namens Widersprechendes zuzumuten, bleibt solches sehr wohl möglich in Bezug auf ein *Ganzes* und dessen *Teile*, wie es das folgende Beispiel erläutern mag.

Gesetzt in einer Frage der Besteuerung von Grund- und Hausbesitzern gelten als *Steuerobjekte* nicht blos die Häuser, sondern auch die Fenster und die Kamine derselben — um nicht zu sagen, auch die Ziegel auf den Dächern. Dann sind diese letztern ja sämtlich Teile der erstern. Man wird sie aber alle als gänzlich von einander unabhängige Objekte ansehen und behandeln können, und z. B. aus bestimmten vielleicht gesetzlich normirten Gründen jemanden von der Besteuerung seines Gebäudes frei sprechen können, ohne ihm (damit) doch diejenige von dessen Kaminen zu erlassen, u. s. w. In dieser Mn. würde die Negation eines Hauses doch dessen sämtliche Kamine und Fenster als Individuen enthalten müssen, die Negation der gesamten letztern aber das Haus (als Ganzes) doch einbegreifen. Es entstünde keinerlei Widerspruch, denn was vom Ganzen gilt (quidquid valet etc.) braucht darum bei den Teilen nicht auch schon zuzutreffen. Das Haus und sein Kamin bleiben hier doch von einander unabhängige Objekte des Denkens.

Konsistent wird nun eine Mn. schon sein, sobald sie keine Urteile als Individuen umfasst, denn dann kann auch zwischen letzteren kein Widerspruch bestehen. Rein wird sie sicher sein, sobald keine Klassen als ihre Individuen figuriren.

Eine Mn. aller erfindlichen, (im engern Sinne) individuellen Objekte des Denkens ohne die (in der suppositio realis genommenen) Urteile wird nun überall da, wo nicht von Urteilen, sondern von Dingen schlechtweg die Rede ist, von hinreichender Erstreckung sein, um beim Negiren aller in Betracht kommenden Begriffe oder Klassen einheitlich zugrunde gelegt werden zu können, und mag solche etwa die *„Mannigfaltigkeit der erdenklichen individuellen Dinge“* genannt werden. Nach Bedarf kann man diese auch noch auf die Sphäre der *„wirklichen“* Dinge einschränken.

§ 17. Fernere Sätze für Gebiete und Klassen. Kontraposition, etc.

36) Theoreme. *Allgemein ist:*

$36_\times$) $(ab)_1 = a_1 + b_1$	36_+) $(a+b)_1 = a_1 b_1$
Die Negation eines Produktes ist die Summe der Negationen der Faktoren.	*Die Negation einer Summe ist das Produkt der Negationen der Glieder.*

Umgekehrt auch:

Eine Summe von Negationen ist die Negation des Produktes ihrer Neganden.	*Ein Produkt von Negationen ist die Negation der Summe*

Beweis. Da es nur *eine* Negation zu einem Gebiete geben kann, so ist behuf Beweises gewissermassen nur die Probe zu machen, d. h. nachzusehen, ob die angebliche Negation

$$a_1 + b_1 \text{ von } ab \qquad\Big|\qquad a_1 b_1 \text{ von } a+b$$

die für dieselbe charakteristischen beiden Beziehungen des Th. 30) mit diesem Gebiete zusammen erfüllt, d. h. ob wirklich

$$ab(a_1+b_1) = 0, \quad ab + a_1 + b_1 = 1 \quad\Big|\quad (a+b)a_1 b_1 = 0, \quad a+b+a_1 b_1 = 1$$

ist. Dies folgt nun in der That aus den Zusätzen zu Th. $34_\times$) und 34_+), wenn man dieselben auch noch für die Gebiete a_1, b_1 statt a, b mit Rücksicht auf Th. 31) in Anspruch nimmt.

Im Grunde kam hiebei wieder das Hülfstheorem 29) in Anwendung. Man hat — z. B. links vom Mittelstrich — nach 30) einerseits:

$$ab\cdot(ab)_1 = 0, \qquad ab + (ab)_1 = 1$$

und, wie eben gezeigt, andrerseits:

$$ab\cdot(a_1+b_1) = 0, \qquad ab + (a_1+b_1) = 1,$$

folglich nach jenem: $(ab)_1 = a_1 + b_1$.

Exempel für Klassen. Wer nicht adelig *und* Grundbesitzer zugleich ist, ist entweder nicht adelig, *oder* nicht Grundbesitzer [oder auch beides zugleich nicht, cf. § 8, ϑ)].

Was nicht „ausländisch *oder* billig“ ist, muss nicht ausländisch (ev. inländisch) *und* zugleich nicht billig (ev. teuer) sein.

Hier ist wieder an eine Eigenheit der Wortsprache zu erinnern. Die Subsumtion $c \subseteq a_1 b_1$ heisst:

„Jedes c ist nicht a und (zugleich) nicht b“,

wofür man auch den Ausdruck wählen kann: *„Jedes c ist weder a noch b“* — sogenanntes „verneinendes konjunktives“ Urteil. Man kann sich auch noch anders ausdrücken und beispielsweise sagen: „(Jeder Fisch) Ein Fisch ist kein Vogel *und* kein Säugetier“.

Schlägt man aber in solchem Falle den verneinenden Artikel zum Subjekte (anstatt, wie soeben, zum Prädikate), so muss das Mal-Zeichen im Prädikate, statt wie vorhin mit *„und“*, nun mit *„oder“* übersetzt werden: „Kein Fisch ist ein Vogel *oder* ein Säugetier“ — vergl. § 8, λ, μ), S. 232. Wogegen der Satz: „Kein Fisch ist (ein) Vogel *und* (ein) Säugetier“ nur bedeuten würde: $c \subseteq (ab)_1$, das heisst: $c \subseteq a_1 + b_1$. —

Dem gegenüber würde das sog. „verneinende kopulative“ Urteil: *„Weder die a noch die b sind c“* (= Sowol die a als auch die b sind nicht c) in Formeln einfach durch: $a + b \subseteq c_1$ darzustellen sein. Und analog für mehr als zwei Terme.

Für Gebiete werden (im Hinblick auf Fig. 16) die Theoreme 36) veranschaulicht durch Fig. 17.

Zusatz 1. Die Ausdehnung der Theoreme 36) auf beliebig viele Terme (Operationsglieder, Faktoren oder Summanden) ist naheliegend. So ist auch:

$$(abc)_1 = a_1 + b_1 + c_1 \qquad\Big|\qquad (a+b+c)_1 = a_1 b_1 c_1,$$

denn:

$$(abc)_1 = \{(ab)\cdot c\}_1 = (ab)_1 + c_1 = (a_1+b_1) + c_1 = a_1 + b_1 + c_1, \text{ etc.}$$

Anmerkung zu Th. 36). Wendet man die Formeln 36) auf a_1 und b_1 statt a und b an, so ergibt sich nach 31):

$$(a_1 b_1)_1 = a + b \qquad\Big|\qquad (a_1 + b_1)_1 = ab.$$

Diese Formeln zeigen (wie Peirce bemerkt), *dass mit Hülfe* der dritten Spezies, *der Negation,* von den beiden ersten Spezies — d. i. *von den direkten Rechnungsarten* des identischen Kalkuls: Multiplikation und Addition — *irgend eine,* gleichviel welche, *entbehrlich* gemacht werden könnte.

Wollte man mit Negation und Multiplikation allein auskommen, so brauchte man nur überall, wo eine Summe $a+b$ auftritt, für diese $\overline{\bar{a}\bar{b}}$ zu schreiben. Mit Addition und Negation würde man ausreichen, indem man für jedes Produkt ab konsequent sagte $\overline{\bar{a}+\bar{b}}$ — falls wir hier einmal den wagerechten Negationsstrich benutzen. [Ebenso liesse nach früherem für 0 sich $\bar{1}$, oder aber für 1 sich $\bar{0}$ durchweg schreiben, d. h. man könnte auch noch des einen der beiden Symbole 0 und 1 entraten.]

Analog lässt sich mittelst der Partikel „nicht“ von den beiden Konjunktionen „und“ und „oder“ irgend eine logisch durch die andere darstellen:

Für „*a oder b*“ könnte gesagt werden: „was nicht »Nicht-*a und* Nicht-*b*« ist“.	Für „was *a und b* ist“ liesse sich sagen: „was nicht »Nicht-*a oder* Nicht-*b*« ist“.

Dass es aber *unzweckmässig* wäre, solches durchzuführen, sei es im Kalkul, sei's in der Wortsprache, bedarf kaum einer nähern Darlegung.

Es liegt die Möglichkeit vor, dass sich die Sätze 36) vielleicht in der Gestalt:

Was nicht *a und b* ist, muss nicht *a* oder nicht *b* sein,	Was nicht *a oder b* ist, muss zugleich nicht *a* und nicht *b* sein,

in Worte gefasst schon irgendwo in ältern Logikbüchern vorfinden.

Wo nicht, so müssen sie De Morgan zugeschrieben werden, welcher [wie Herr Venn[1] p. 389, Fussnote ausfindig gemacht hat] in [6] p. 208, indessen ohne Beweis, bemerkt, es hätten $a + b$ und ab bezüglich $a_1 b_1$ und $a_1 + b_1$ zum Gegenteile. Selbständig ist auf diese beiden hübschen Sätze auch Herr Robert Grassmann[2] gekommen, und dürfte dieser sie zum ersten mal (und zwar auf die vorgetragene Weise) *bewiesen* haben.

Die in seiner Fussnote zu [5] p. 32 von Herrn Peirce — jedenfalls im guten Glauben — ausgesprochene, Herrn R. Grassmann eigentlich verdächtigende Vermutung (auf Grund unsicherer Reminiscenzen von Jevons' Schrift [1]) kann ich (nachdem es mir unlängst endlich gelungen ist, dieses Buch durch antiquarischen Erwerb desselben zu Gesicht zu bekommen) durchaus nicht begründet finden.

Die Anwendung der Theoreme 36) im Sinne von links nach rechts, also die Verwandlung eines Ausdruckes $(ab)_1$ resp. $(a + b)_1$ in den ihm gleichwertigen $a_1 + b_1$ resp. $a_1 b_1$ nennt man das *„Ausführen“* (Entwickeln*)) *der Negation*, welche im Gegensatz hiezu bei den ursprünglichen Ausdrücken $(ab)_1$ und $(a + b)_1$ *„nur angedeutet“* erscheint. Eine, wie hier mit Negationsstrich versehene Klammer $(\ )_1$ mag eine *„Negationsklammer“* genannt werden. Das Ausführen der Negation läuft auf das „Auflösen“ dieser Klammer hinaus.

Zusatz 2 zu Th. 36).

Durch kombinirte Anwendung der beiden Theoreme 36) und des Th. 31) kann man nunmehr von jedem nur durch Multiplikation und

*) Aus einem in § 19 ersichtlichen Grunde wird dieser letztere Ausdruck indess besser vermieden.

Addition aus lauter einfachen Symbolen und deren Negationen aufgebauten übrigens noch so komplizirten Ausdrucke die Negation sofort und mit leichter Mühe ausgeführt herstellen, und zwar indem man jedes Gebiet mit seiner Negation und ausserdem noch die Zeichen „mal“ und „plus“ vertauscht.

Man schreibe also aus dem gegebenen Ausdruck ab: a mit a_1, a_1 in Gestalt von a, $\cdot$ als $+$ und $+$ als $\cdot$, wobei nur noch zu beachten ist, dass manche Klammern, welche im ursprünglichen Ausdruck blos gesetzt zu denken waren aber unterdrückt sein durften, im negirten Ausdruck ausdrücklich angeschrieben und beibehalten werden müssen wogegen andere, diejenigen, die dort unentbehrlich waren, hier als überflüssig in Wegfall kommen. Man hat nämlich gemäss Anhang 2 zu berücksichtigen, dass ursprünglich jeder zusammengesetzte Ausdruck, wenn mit andern Termen verknüpft oder zu verknüpfen, in Klammer stehen muss, dass aber endgültig (teils zufolge gewisser Eigenschaften, Gesetze unsrer direkten Operationen, teils auf Grund eigener auf Klammerersparniss es absehender Konventionen) nur um Summen herum, welche als Faktor auftreten, die Klammer nicht weggelassen werden darf.

War hienach der ursprüngliche Ausdruck schon frei von überflüssigen Klammern, so wird beim Negiren desselben eine Klammer allemal dann einzuführen, im negirten Ausdruck neu anzubringen sein, wenn man an das Negiren eines Produktes kommt, welches als ein Summand im ursprünglichen Ausdruck steht — indem eben dadurch sich eine Summe ergeben wird die als Faktor zu setzen. Dagegen kommt jede (andre, jede nicht gerade ein Produkt als Glied umschliessende) Klammer des ursprünglichen Ausdrucks beim Negiren in Wegfall.

Zur Erläuterung und Übung seien zunächst für einige Ausdrücke die Negationen hergesetzt, deren erste sechs schon De Morgan [3] pag. 42 gegeben hat:

Ausdruck:	$a + bc$,	Negation desselben:	$a_1(b_1 + c_1)$
„	$x = (a + b)c$,	„	$x_1 = a_1 b_1 + c_1$
„	$(a + b)(c + d)$,	„	$a_1 b_1 + c_1 d_1$
„	$a + b(c + d)$,	„	$a_1(b_1 + c_1 d_1)$
„	$a + b + a_1 c$ (oder $a + b + c$),	„	$a_1 b_1 c_1$
„	$(a + bc)(d + ef)$,	„	$a_1(b_1 + c_1) + d_1(e_1 + f_1)$
„	$a_1 b + c_1$,	„	$(a + b_1)c$
„	$ab + a_1 b_1$,	„	$(a_1 + b_1)(a + b) = ab_1 + a_1 b$

Ausdruck:	$a_1(b_1 + c + d_1)$,	Negation desselben:	$a + bc_1d$
„	$a_1bc + ab_1c_1$,	„	$(a + b_1 + c_1)(a_1 + b + c)$
„	$a(b_1 + c_1) + b_1c_1$,	„	$(a_1+bc)(b+c)=a_1(b+c)+bc$
„	$a_1(b + c + d) + bcd$,	„	$a(b_1 + c_1 + d_1) + b_1c_1d_1$.

Noch weitere Aufgaben in § 18, χ).

In jedem aus einfachen Gebietsymbolen *durch die Operationen der drei Spezies* Multiplikation, Addition und Negation *aufgebauten Ausdrucke kann man jetzt alle vorgeschriebenen* (angedeuteten) *Negationen ausführen*, wodurch der Ausdruck übergeht in einen solchen, *der nur noch durch* die beiden direkten Spezies, *Multiplikation und Addition, aufgebaut erscheint aus den einfachen Symbolen und deren Negationen.*

Man braucht zu diesem Zwecke nur mit den innersten „Neganden“ zusammengesetzter Natur, welche von der oben beschriebenen Art sein werden, zu beginnen, die innersten mit Negationsstrich behafteten Klammern zuerst, und dann nach aussen fortschreitend nach und nach auch die äussern Klammern dieser Art, aufzulösen, bis keine Negationsklammer mehr vorhanden ist.

Wird auch auf diese Weise rasch die Möglichkeit der Ausführung erkannt, so ist das geschilderte Verfahren doch nicht das praktischste. Es kann sich nämlich dabei ereignen, dass man irgend einen zusammengesetzten Ausdruckteil wiederholt „umzunegiren“, in seine Negation umzuschreiben bekommt, was, sooft es zweimal geschah, nach Th. 31) unnötige Arbeit war. Besser also wird man mit dem Auflösen der Negationsklammern in der Richtung *von aussen nach innen* fortschreiten, und sobald man mit dem Negiren der in einer solchen stehenden Terme wiederum auf eine Negationsklammer stösst, solche (mitsamt dem auf sie bezüglichen Vorsatze des Negirens) einfach fallen lassen, ignoriren.

Darnach ist z. B.

$$[\{(a+b)_1 c + d_1e\}f]_1 = \{(a_1b_1c + d_1e)f\}_1 = (a + b + c_1)(d + e_1) + f_1$$

auf die erstere Art *mit*, auf die letztere *ohne* die angegebene Zwischenrechnung (der doppelt negirte Ausdruckteil war $a + b$) sofort hinzusetzen.

Weitere Exempel:

$$[\{(ab)_1 + (cd)_1\}(e+f)_1]_1 = abcd + e + f,$$

$$[a + b\{c + d(e+fg)_1\}_1]_1 = a_1\{b_1 + c + de_1(f_1 + g_1)\},$$

$$\left([(ax + bx_1)_1\{(mx)_1(nx_1)_1\}_1 c]_1 + x\right)_1 =$$

$$= (a + x_1)(b_1 + x)(mx + nx_1)cx_1 = b_1ncx_1.$$

Zusatz 3 zu Th. 36).

Das am Schluss des § 13 erwähnte Problem der *Zerfällung eines Ausdrucks in seine letzten Faktoren* kann nunmehr dadurch gelöst wer-

den, dass man die Negation des Ausdrucks herstellt, dieselbe (durch Ausmultipliziren) *in ihre letzten Aggreganten* zerfällt und dann abermals die Negation davon gemäss Th. 36) bildet. Z. B. für

$$y = ab + ac + ad + bcd + e$$

ergibt sich:

$$y_1 = (a_1 + b_1)(a_1 + c_1)(a_1 + d_1)(b_1 + c_1 + d_1)e_1 = a_1b_1e_1 + a_1c_1e_1 + a_1d_1e_1 + b_1c_1d_1e_1,$$

sonach:

$$y = (a + b + e)(a + c + e)(a + d + e)(b + c + d + e)$$

in Übereinstimmung mit dem früheren Ergebnisse.

37) Theorem.

Wenn $a \subseteq b$, *so ist* $b_1 \subseteq a_1$ (und umgekehrt).

Man darf also auch *die beiden Seiten einer Subsumtion negiren, wenn man nur zugleich das Subsumtionszeichen umkehrt.* Oder: *Untergeordnetes* (oder Gleiches), *negirt, gibt Übergeordnetes* (oder Gleiches). Eingeordnetes, negirt, gibt Umgeordnetes.

Es lassen sich zwei Beweise vollkommen dualistisch führen.

Beweis. Wenn $a \subseteq b$ ist, so ist

$a = ab$ nach Th. $20_\times$) | $a + b = b$ nach Th. 20_+)

also nach Th. 32) auch

$a_1 = (ab)_1$, das ist $a_1 = a_1 + b_1$ | $(a + b)_1 = b_1$, das ist $a_1b_1 = b_1$

nach Th. 36), und diese Gleichung ist, wiederum nach Th. 20) äquivalent der Subsumtion: $b_1 \subseteq a_1$, q. e. d.

Wendet man den Satz 37) auf die Subsumtion $b_1 \subseteq a_1$ als die ursprünglich vorauszusetzende an, so folgt aus dieser auch $(a_1)_1 \subseteq (b_1)_1$, das ist nach Th. 31) $a \subseteq b$.

Die beiden im Satze vorkommenden Subsumtionen bedingen sich also gegenseitig, sagen wesentlich dasselbe aus oder sind äquivalent.

Exempel. Da Gold Metall ist, so ist, was nicht Metall ist, auch nicht Gold. Desgl. umgekehrt: Gilt etwa der Satz: „Was nicht Proteinsubstanz ist (nicht aus dem Ei stammt) ist auch nicht lebendig“, so folgt: „Alles Lebendige ist Proteinsubstanz (stammt aus dem Ei)“.

Ist eine Klasse als Subjekt enthalten in einer Prädikatklasse, so muss (als Klasse aufgefasst) *die Negation des Prädikats enthalten sein in der Negation des Subjektes* — und zwar ganz einerlei, in Bezug auf welche Mannigfaltigkeit man die Negationen bildet, wofern dieselbe nur eine gewöhnliche ist, den Negationsbegriff zulässt.

Für Gebiete kann man den Satz durch die Anschauung verifiziren an der Fig. 1 S. 155: die Aussenfläche des Kreises b ist ganz in der des Kreises a enthalten.

Der Schluss von der Subsumtion $a \Subset b$ auf die Subsumtion $b_1 \Subset a_1$ (oder umgekehrt) gehört zu den sog. „unmittelbaren Folgerungen“, indem derselbe schon zustande kommt, wenn auch nur *eine* Prämisse gegeben ist. Derselbe wird in der Logik als die *„Konversion durch Kontraposition“* des durch die gegebene Subsumtion ausgedrückten Urteils bezeichnet.

Zusatz. *Ist $a \Subset b$ und zugleich $a_1 \Subset b_1$, so wird $a = b$ sein, und umgekehrt.*

Beweis nach Def. (1), indem aus der letzten Subsumtion nach Th. 37) und 31) hinzufolgt: $b \Subset a$.

Exempel. Die beiden Sätze: „Was Kochsalz ist, ist auch Chlornatrium“, und „was nicht Kochsalz ist, ist nicht Chlornatrium“ — drücken zusammen aus, dass Kochsalz und Chlornatrium einerlei sind.

38) Theoreme.

Die Subsumtion $a \Subset b$ *sagt genau dasselbe aus, wie eine jede der beiden Gleichungen:*

ad $38_\times$) $ab_1 = 0$. | ad 38_+) $a_1 + b = 1$.

Beweis. Aus $a \Subset b$ folgt nach Th.

$15_\times$) durch beiderseitiges Multipliziren mit b_1, dass $ab_1 \Subset bb_1$, somit nach Th. $30_\times$), dass $ab_1 \Subset 0$, was nach Th. $5_\times$) auf $ab_1 = 0$ hinauskommt. — Ist umgekehrt

$$ab_1 = 0,$$

so hat man nach Th. 30_+):

$$a = a \cdot 1 = a(b + b_1)$$
$$= ab + ab_1 = ab + 0$$

| 15_+) durch beiderseitiges Addiren von a_1, dass $a_1 + a \Subset a_1 + b$, somit nach Th. 30_+), dass $1 \Subset a_1 + b$, was nach Th. 5_+) auf $1 = a_1 + b$

$$a_1 + b = 1,$$

so folgt nach Th. $16_\times$) etc.:

$$a = a \cdot 1 = a(a_1 + b)$$
$$= aa_1 + ab = 0 + ab$$

oder $a = ab$. Aus diesem Resultate folgt aber nach Th. $20_\times$), dass $a \Subset b$, wie zu beweisen war.

Aus dem Umstand, dass der letzte Teil des hier gegebenen Beweises rechterhand dem links durchaus nicht dual entspricht, erkennt man die Möglichkeit noch andrer Varianten der beiden Beweise, welche aufzusuchen dem Leser als eine gute Übung empfohlen sei.

Exempel für Klassen. Da alles Gold Metall ist, so gibt es nichts, was zugleich Gold und nicht Metall wäre. Und jede Substanz — ja alles Denkbare innerhalb einer die Klasse Metall umfassenden gewöhnlichen Mannigfaltigkeit — ist (entweder) Metall oder [auch] nicht Gold.

Nach den Theoremen 38) lässt jede Subsumtion sich als eine Gleichung schreiben, deren eine Seite 0, *oder, wenn man will, auch* 1 *ist.*

Zusatz zu Th. 38). Nach diesem Satze in Verbindung mit Th. 31) muss auch die Gleichung

$ab = 0$ | $a + b = 1$

bezüglich äquivalent sein einer der beiden Subsumtionen:

$a \Subset b_1$, $b \Subset a_1$ | $a_1 \Subset b$, $b_1 \Subset a$.

Die Gleichung $ab = 0$ erscheint so, als der symmetrische Ausdruck — symmetrisch allerdings nur im Hinblick auf das Kommutationsgesetz $12_\times$) der identischen Multiplikation — für eine *symmetrische* Beziehung, für welche die Wortsprache nur die unsymmetrischen Ausdrucksformen hat:

„Kein a ist b“, oder „Kein b ist a“,

resp.

„Alle a sind nicht b“, „Alle b sind nicht a“,

(die demnach auch unter sich äquivalent sein werden) — woferne man hier nicht etwa seine Zuflucht nehmen will zu der Umschreibung mittels verneinenden Existenzialurteils:

„Es gibt nichts, was a und b zugleich ist“.

39) Theoreme.

Jede Gleichung $a = b$ *lässt sich* (auf der einen Seite, z. B.) *rechterhand auf*

$39_\times$) 0 | 39_+) 1

bringen. Dieselbe ist nämlich äquivalent der Gleichung:

$ab_1 + a_1b = 0$ | $ab + a_1b_1 = 1$,

oder auch in einer praktisch minder wichtigen Form geschrieben:

$(a + b)(a_1 + b_1) = 0$ | $(a + b_1)(a_1 + b) = 1$,

welche, wie leicht zu sehen, durch Ausmultipliziren gemäss Th. $28_\times$), $30_\times$) und 21_+) auf die vorige zurückkommt.

Beweis. Nach Def. (1) zerfällt die Gleichung $a = b$ in die beiden gleichzeitig anzuerkennenden Subsumtionen:

$$a \Subset b \quad \text{und} \quad b \Subset a.$$

Nach dem Th. 38) lassen dieselben sich umschreiben in die Gleichungen

$ab_1 = 0$, $a_1b = 0$ | $a_1 + b = 1$, $b_1 + a = 1$

und folgt aus diesen durch überschiebendes Addiren resp. Multipliziren die zu beweisende Gleichung in der einen ihrer angegebenen beiden Formen.

Umgekehrt, wenn die Gleichung gilt:

$$ab_1 + a_1 b = 0, \qquad \Big| \quad \text{sive} \quad ab + a_1 b_1 = 1, \quad (a + b_1)(a_1 + b) = 1,$$

so muss nach Th. 24) sein:

$$ab_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_1 b = 0, \qquad \Big| \qquad a_1 + b = 1 \quad \text{und} \quad a + b_1 = 1,$$

was nach Th. 38) hinauskommt auf die beiden Subsumtionen $a \subseteq b$ und $b \subseteq a$, somit nach Def. (1) auf die Gleichung $a = b$, wie zu zeigen war.

Indess konnte man hier auch schon mit der ersten Hälfte des Beweises auskommen, mit Rücksicht darauf, dass nach den citirten Sätzen das Paar der Subsumtionen sowie der für sie genommenen Gleichungen jeweils *äquivalent* sein musste der zum Ausgangspunkt genommenen Gleichung.

Exempel. Da Kochsalz einerlei mit Chlornatrium ist, so gibt es nichts, was Kochsalz und nicht Chlornatrium oder Chlornatrium und nicht Kochsalz wäre. Auch nichts, was Kochsalz oder Chlornatrium und zugleich nicht Kochsalz oder nicht Chlornatrium wäre.

Alles ist entweder Kochsalz und zugleich Chlornatrium oder nicht Kochsalz und dann auch nicht Chlornatrium. Desgleichen Kochsalz oder nicht Chlornatrium und zugleich Chlornatrium oder nicht Kochsalz.

Aufgabe. Man bringe die Gleichungen

$$ab = ac, \qquad a + b = a + c$$

rechts auf 0.

Auflösung: Mittelst der Zwischenrechnung — cf. Th. 36):

$$ab(a_1 + c_1) + ac(a_1 + b_1) = 0, \qquad (a + b)a_1 c_1 + a_1 b_1 (a + c) = 0$$

erhält man leicht die Resultate:

$$a(bc_1 + b_1 c) = 0 \quad \text{resp.} \quad a_1(bc_1 + b_1 c) = 0.$$

Bei den Anwendungen wird man aber, besonders wenn a, b oder c komplizirte Ausdrücke vorstellen, die Zwischenrechnung sparen und sich sogleich an das Schema dieser Endergebnisse halten. — Ebenso würden die rechts auf 1 gebrachten Gleichungen lauten:

$$a_1 + bc + b_1 c_1 = 1 \quad \text{resp.} \quad a + bc + b_1 c_1 = 1.$$

Das Th. 39) ist von grosser Wichtigkeit für die Technik unsres Kalkuls, und zwar das $39_\times$) in höherem Maasse als sein duales Gegenstück aus dem teilweise schon erwähnten Grunde, weil man lieber mit Aggregaten (Summen) von monomischen Produkten als mit Produkten von Polynomen (die in Klammern gesetzt bleiben müssten) rechnet, desgleichen vorzieht, das auch der Arithmetik angehörige Distributionsgesetz $27_\times$), statt seines Gegenparts 27_+), anzuwenden — wozu endlich

jetzt als ein weiterer Grund der Umstand hinzutritt, dass es schon jedermann geläufig ist, mit rechterhand auf 0 (nicht aber auf 1) gebrachten Gleichungen zu operiren. [Es könnte überdies als ebendahin wirkend angeführt werden, dass auch in der Wortsprache Ausdrücke wie $(a + b)(c + d)$ meist unbequemer unzweideutig darzustellen sind, als die ihnen dual entsprechenden $ab + cd$.]

Nach Th. 24) Zusatz konnte jedes System von gleichzeitig geltenden Gleichungen mit der rechten Seite 0 in eine einzige solche Gleichung zusammengezogen und durch diese ausreichend vertreten werden. Nach den Th. 38) und 39) kann aber jede *Subsumtion* sowol als jede *Gleichung überhaupt* dargestellt werden als eine Gleichung mit der rechten Seite 0.*) Thut man dies bei allen etwa gegebenen Subsumtionen und Gleichungen, und wendet hernach den genannten Zusatz an, so lässt sich offenbar das Ziel verwirklichen, welches der folgende Satz ausspricht:

Zusatz zu Th. 39). *Jedes System von simultanen* (koexistirenden, als gleichzeitig geltend hingestellten) *Subsumtionen und Gleichungen lässt sich in eine einzige Gleichung mit der rechten Seite* 0 (oder, wenn man will 1) *zusammenziehen und durch diese vollkommen vertreten.*

Wir werden dieselbe die *„vereinigte Gleichung* des Systemes" nennen.

Dies legt uns folgende Bemerkung nahe. In der verbalen Logik wird gewöhnlich unterschieden zwischen *„Folgerungen"*, als welche sich an eine einzige Prämisse knüpfen, und *„Schlüssen"*, als welche mehrere Prämissen haben. Diese Unterscheidung erscheint auf Grund des vorstehenden Zusatzes in der exakten Logik — für den Kalkul — als belanglos, da wir hier immer ein System von Prämissen in eine einzige Prämisse werden zusammenziehen können. Auch „Schlüsse" dürfen hier als „Folgerungen" hingestellt werden.

Und mit der Lösung von Problemen, die sich allgemein beziehen auf eine einzige Gleichung — z. B. mit deren Auflösung nach einer Unbekannten — wird das nämliche dann auch von selbst geleistet sein für irgend ein System von Gleichungen!

Übungsaufgabe. Man bilde die vereinigte Gleichung der folgenden acht Subsumtionen und Gleichungen:

$$a \subseteq b, \quad c \subseteq d_1, \quad e_1 \subseteq f, \quad g_1 \subseteq h_1, \quad k = l, \quad m = n_1, \quad p_1 = q, \quad r_1 = s_1.$$

Auflösung. Die vereinigte Gleichung ist:

$$ab_1 + cd + e_1 f_1 + g_1 h + kl_1 + k_1 l + mn + m_1 n_1 + p_1 q_1 + pq + r_1 s + rs_1 = 0.$$

*) Und statt 0 konnte auch 1 gesagt werden.

Ebenso ist von den drei Subsumtionen:

$$a \mathrel{\overline{\in}} b, \quad a \mathrel{\overline{\in}} c_1, \quad c \mathrel{\overline{\in}} b$$

die vereinigte Gleichung:

$$ab_1 + ac + b_1 c = 0. \quad \text{Etc.}$$

Die linke Seite einer rechts auf 0 gebrachten Gleichung nennt man, wie in der Mathematik auch „das *Polynom* dieser Gleichung“. So ist $ab_1 + ac + b_1 c$ das Polynom der zuletzt erwähnten.

Mehr beiläufig wollen wir jetzt ein paar Theoreme anreihen, die sich zwar nicht selbst auf Negationen beziehen, aber erst jetzt bewiesen werden können, nachdem wir (auf Grund des Prinzips $\mathrm{III}_\times$) unter Hinzuziehung des Negationsbegriffs die Berechtigung erworben haben, von dem vollen Distributionsgesetze Gebrauch zu machen.

40) Theorem. *Wenn zugleich*

$$ac \mathrel{\overline{\in}} bc \quad \textit{und} \quad a + c \mathrel{\overline{\in}} b + c$$

ist, so muss sein:

$$a \mathrel{\overline{\in}} b$$

Beweis. Ähnlich wie bei Th. 29) haben wir:

$$a = a(a+c) \mathrel{\overline{\in}} a(b+c) = ab + ac \mathrel{\overline{\in}} ab + bc = b(a+c) \mathrel{\overline{\in}} b(b+c) = b$$

nach Th. $23_\times$), der zweiten Voraussetzung nebst $15_\times$), sodann $27_\times$), der ersten Voraussetzung nebst 15_+), wieder $27_\times$), dann der zweiten Voraussetzung nebst $15_\times$) und endlich $23_\times$). Oder dual entsprechend.

Also nach Th. 2) und 3): $a \mathrel{\overline{\in}} b$, q. e. d.

Zusatz 1. Kombinirt man die durch das Theorem 40) gegebene Aussage mit derjenigen, welche sich durch Vertauschung von a und b aus ihr ergibt so erhält man das *Theorem:*

Wenn $ac = bc$ *und zugleich* $a + c = b + c$ *ist, so muss* $a = b$ *sein,*

— welches als eine Verallgemeinerung des Hülfstheorems 29) erscheint und auch selbständig genau wie letzteres bewiesen werden kann.

Anmerkung. Dass sowol beim Th. 40) als bei dessen Zusatz eine der beiden Prämissen allein nicht genügt, um die Konklusion zu rechtfertigen, haben wir bereits unter Th. 15) und 16) hervorgehoben und durch Beispiele über Klassen sowie durch Figuren belegt. Wir sind jetzt auch im stande, es analytisch zu beweisen.

Bei Th. 40) gibt die Annahme $a = (b + c_1)u$, wo u ein willkürliches Gebiet vorstellt, jedesmal ein solches Gebiet a, für welches die erste Prämisse $ac \mathrel{\overline{\in}} bc$ erfüllt ist, indem ja $ac = bc \cdot u \mathrel{\overline{\in}} bc$ nach Th. $6_\times$) wird — und, nebenbei gesagt, auf die allgemeinste Weise; hier wird nun $ab_1 = b_1 c_1 u$ im Allgemeinen nicht $= 0$, also nicht $a \mathrel{\overline{\in}} b$ sein.

Ähnlich für $b = ac_1 + u$ ist $a + c \mathrel{\overline{\in}} b + c$ nämlich $a + c + u$, und wieder

$$ab_1 = a \cdot (a_1 + c)u_1 = acu_1$$

nicht notwendig 0, wie es nach Th. $38_\times$) sein müsste, falls $a \mathrel{\overline{\in}} b$ folgte.

Desgleichen, was den Zusatz betrifft, ist $ac = (a + uc_1)c$ ohne dass $a = a + uc_1$ sein müsste, endlich ist $a + c = (a + uc) + c$, ohne dass doch im Allgemeinen, und für jedes beliebige Gebiet u sein müsste $a = a + uc$.

Das Theorem sowol als sein Zusatz gilt auch umgekehrt, und zwar für jedes beliebige Gebiet c. Nämlich wenn z. B. $a \mathrel{\overline{\in}} b$ ist, so muss nach Th. 15) auch $ac \mathrel{\overline{\in}} bc$ sowie $a + c \mathrel{\overline{\in}} b + c$ für jedes c sein.

Exempel zu dem Satze. Sind die Mongolen und die Russen stets Russen oder Asiaten, zugleich alle mongolischen Russen auch asiatische Russen, so müssen die Mongolen sämtlich Asiaten sein. [Seit der chinesischen Einwanderung in fremde Weltteile sind freilich die Prämissen nicht mehr ganz zutreffend, sie waren es jedoch zeitweise.]

Zusatz 2 zu Th. 40) Theorem von Peirce.

Wenn für irgend ein c *zugleich*

$$ac \mathrel{\overline{\in}} b \quad \textit{und} \quad a \mathrel{\overline{\in}} b + c$$

ist, so folgt:

$$a \mathrel{\overline{\in}} b,$$

desgleichen umgekehrt, für jedes c.

Beweis 1, nach Th. 40), weil unter den Voraussetzungen des Satzes nach Th. 15) auch $acc \mathrel{\overline{\in}} bc$ und $a + c \mathrel{\overline{\in}} b + c + c$, also $ac \mathrel{\overline{\in}} bc$ und $a + c \mathrel{\overline{\in}} b + c$ folgt.

Beweis $2_\times$. Aus der zweiten Prämisse folgt durch beiderseitiges Multipliziren mit a gemäss $15_\times$):

$$aa \mathrel{\overline{\in}} a(b + c) \quad \text{also nach } 14_\times) \text{ und } 27_\times)\text{:} \quad a \mathrel{\overline{\in}} ab + ac.$$

Aber es ist $ab + ac \mathrel{\overline{\in}} ab + b$, wie sich durch beiderseitiges Addiren von ab zur ersten Prämisse gemäss 15_+) ergibt. Hienach folgt a fortiori: $a \mathrel{\overline{\in}} ab + b$ oder wegen des Absorptionsgesetzes 23_+): $a \mathrel{\overline{\in}} b$, wie zu zeigen war.

Hiezu genau dual entsprechend lässt sich noch ein dritter „Beweis 2_+“ führen, was dem Leser zur Übung empfohlen sei.

Die Umkehrung versteht sich nach Th. 6) und II von selbst: Ist $a \mathrel{\overline{\in}} b$, so wegen $ac \mathrel{\overline{\in}} a$ auch $ac \mathrel{\overline{\in}} b$ für jedes c. Etc.

Der Satz wäre eigentlich als ein selbständiges Theorem aufzuführen gewesen; er sieht noch einfacher aus als das Th. 40) demzuliebe wir ihn behufs Vergleichung hier eingereiht haben. Sonderliche Wichtigkeit für die Theorie möchte er gleichwol nicht besitzen und betrachte ich ihn mehr nur als Kuriosum. Die Exempel zu demselben klingen alle recht sonderbar. Z. B. Da Gold, welches käuflich, Metall ist, und alles Gold käuflich oder Metall sein wird, so muss Gold Metall sein. Umgekehrt folgt aus letzterm einerseits, dass auch geschmiedetes Gold Metall ist, und Gold sein wird Metall oder auch geschmiedet.

Von fundamentaler Wichtigkeit sind dagegen folgende Sätze:

$41_\times$) Theorem (Peirce[5] p. 39)	41_+) Theorem. (Peirce)
Wenn $$ab \mathrel{\underline{\in}} c$$ *ist, so ist* $$a \mathrel{\underline{\in}} b_1 + c\,.$$	*Wenn* $$a \mathrel{\underline{\in}} b + c$$ *ist, so ist* $$ab_1 \mathrel{\underline{\in}} c\,.$$

D. h. *Es darf*

ein Faktor des Subjekts	*ein Summand des Prädikats*

jeweils von diesem abgelöst und mit Negationsstrich versehen (in seine Negation verwandelt, negirt) *als*

Summand zum Prädikat	*Faktor zum Subjekt*

geschlagen werden — wonach denn aus der zweiten Subsumtion mit Rücksicht auf Th. 31) auch wieder die erste folgt. Der eine Satz nämlich kann, indem man b mit b_1 vertauscht, auch als die *Umkehrung* des andern dargestellt werden, ermächtigt zum Rückschlusse von dessen Behauptung auf seine Voraussetzung.

Behufs Beweises schliesse man aus der Voraussetzung durch beiderseitiges

Addiren von b_1: $$ab + b_1 \mathrel{\underline{\in}} b_1 + c\,.$$ Nach Theorem 33_+) Zusatz gibt dies: $$a + b_1 \mathrel{\underline{\in}} b_1 + c$$ und da nach Th. 6_+) auch $$a \mathrel{\underline{\in}} a + b_1$$	Multipliziren mit b_1: $$ab_1 \mathrel{\underline{\in}} b_1(b + c)\,,$$ oder, wenn rechts ausmultiplizirt wird mit Rücksicht auf $30_\times$): $$ab_1 \mathrel{\underline{\in}} b_1c\,.$$ Da aber nach Th. $6_\times$) $$b_1c \mathrel{\underline{\in}} c$$

ist, so folgt die Behauptung nach Prinzip II.

Vergleiche hiezu das Theorem ν) von Peirce im nächsten Paragraphen. Noch einfacher kann man sich gemäss Th. $38_\times$) und ev. 36) überzeugen, dass sowohl die behauptete als die vorausgesetzte Subsumtion hinausläuft auf die Gleichung:

$$abc_1 = 0\,.$$	$$ab_1c_1 = 0\,.$$

Exempel:

Die Säugetiere welche Flossen haben, sind Wale; ergo: die Säugetiere sind Wale oder haben keine Flossen.	Mohammedaner sind Schiiten oder Sunniten; ergo: Mohammedaner, welche nicht Schiiten sind, müssen Sunniten sein.

Neunte Vorlesung.

§ 18. Verschiedenartige Anwendungen: Rechtfertigungen, Studien und Übungsaufgaben.

α) Auf Grund der Theoreme 33_+) und Zusatz sind wir nun in der Lage, die zuerst von Jevons (dann unabhängig auch von Peirce, R. Grassmann und mir, Mc Coll und ev. noch Anderen) erfasste und in diesem Buche zu Grunde gelegte *identische Addition* vollends zu *rechtfertigen* gegenüber den von sehr beachtenswerter Seite gegen sie erhobenen Einwänden. Die Betrachtungen dürften auch an sich instruktiv sein, dazu als eine gute Übung erscheinen.

Es wurde bereits erwähnt, dass Boole[4] in, ihm unbewusst, zu engem Anschluss an das Vorbild der arithmetischen Addition die gleichnamige Operation in der Logik nur verwendet wissen will um Klassen zu verknüpfen, die keine Individuen gemein haben — und dass, nach der inzwischen vollzogenen Läuterung der Disziplin von arithmetischen Beimengungen, von neueren Autoren ihm hierin nur Herr Venn noch beipflichtet, indem er [1] pag. 381 .. 389 die Forderung verficht, die Addition auf gebietfremde Summanden, individuenfremde oder disjunkte Klassen zu beschränken.

Herr Venn verwirft es, die Summe $a + b$ für den Fall wo ab nicht $= 0$ ist, überhaupt zu erklären, da es ihm hier anstössig erscheint, dass der den beiden Gliedern gemeinsame Teil ab, welcher in die Summe $a + b$ doch nur *ein* mal eingehen soll, daselbst doch *zwei* mal (als Teil von a sowol, wie als Teil von b) implicite erwähnt wird.

Es ist unbestreitbar, dass man diesen Standpunkt einnehmen *kann*, denn auf Grund der oben citirten Sätze ist man berechtigt, und hindert in der That nichts, überall da, wo eine unsrer im Jevons'schen Sinne auftretenden Summen $a + b$ auftritt, dafür *unsymmetrisch und etwas umständlicher* sei es $a + a_1b$, sei es $ab_1 + b$ zu schreiben, oder endlich auch *symmetrisch aber noch umständlicher:* $ab + ab_1 + a_1b$.

Wer dieses vorzieht, wird also in der That es durchführbar finden, ausschliesslich mit „reduzirten“ Summen zu operiren und bei Herrn

Venn's Ansicht zu verharren. Es frägt sich nur, *wie* man damit durchkäme, ob etwa besser und bequemer?

Nicht der einzige, aber doch ein Hauptzweck unsres Kalkuls sind jedenfalls die *Anwendungen* desselben. Bei diesen müssen wir Data von Textaufgaben übertragen in die Zeichensprache des Kalkuls, in Relationen oder Formeln, und haben deren rechnerisch gefundene Lösungen alsdann wieder in die Wortsprache zurückzuübersetzen.

Die Brauchbarkeit des Kalkuls wird dabei im allgemeinen als eine um so grössere erscheinen, je inniger derselbe sich an die Wortsprache anschmiegt; wenigstens soll er von den Gepflogenheiten der letzteren nicht ohne Not, nicht ohne triftige, durch greifbaren Vorteil sich rechtfertigende Gründe*) abweichen.

Ich werde nun durch ein paar Beispiele den Nachweis liefern, dass die Wortsprache unsre *identische Addition* nicht nur zulässt, sondern allerorten ganz ungenirt und *wesentlich* von derselben Gebrauch macht — in der Wissenschaft natürlich nicht weniger wie im gemeinen Leben (doch genügt es schon, aus letzterm nur die Beispiele herauszugreifen**)). Es erscheint schon deshalb nicht ratsam, jene Addition aus unsrer Disziplin der Algebra der Logik auszuschliessen. Überdies werden wir aber sehen, dass die Wortsprache auch *wohl daran thut*, dieselbe zu verwenden.

β) Exempel. Die geographische Gesellschaft einer Universitätsstadt veranstaltete im Saale der Museumsgesellschaft einen öffentlichen Vortrag, und schrieb in dessen Ankündigung im Tageblatt aus, dass *Studenten sowie Museumsmitglieder* freien Eintritt hätten.

Es gab aber viele Studenten, die zugleich Mitglieder der Museumsgesellschaft waren.

Sagen wir für „Studenten" a, für „Museumsmitglieder" b, so war also die Klasse der durch freien Eintritt bevorzugten Personen in der Ankündigung als „Studenten und Museumsmitglieder", mithin als $a+b$ bezeichnet.

Es ist augenscheinlich, dass die Klasse $a \cdot b$ der den beiden Kategorieen gemeinschaftlich angehörenden Individuen auf diese Weise zweimal aufgezählt wurde, und hätte im Sinne des Herrn Venn kor-

*) Rücksicht auf das Gebot der Konsequenz und Streben nach Allgemeinheit, Sparsamkeit, gehören zu den vornehmsten solchen.

**) Auf Beispiele aus verschiedenen Wissenschaften verzichten wir, da solche, um gemeinverständlich zu werden, in der Regel längere Vorbetrachtungen erheischen.

rekter das Inserat besagen müssen, dass „für die Studenten und *diejenigen* Mitglieder der Museumsgesellschaft, *welche keine Studenten sind*" der Eintritt frei sei — entsprechend $a + a_1 b$.

Die Ankündigung wurde wohlweislich *nicht* so stilisirt, schon weil sie dann um die Inseratkosten für die gespaltene Petit-Zeile, welche die hier kursiv gedruckten Worte erfordert haben würden, teurer zu stehen gekommen wäre!

γ) Anderes Exempel. Ein Armeebefehl gibt bekannt, dass während des Waffenstillstandes aus einer von den deutschen Truppen umzingelten Festung folgende Kategorieen von Personen herauszulassen seien:

a — Personen weiblichen Geschlechts
b — Kinder
c — greise und altersschwache Personen
d — Verwundete
e — Kranke und
f — Angehörige deutscher Nation.

Hiermit ist die Klasse der herauszulassenden Personen schlechtweg gekennzeichnet als die identische Summe:

A) $$a + b + c + d + e + f.$$

Dies ist in der That der kürzeste Ausdruck für diese Klasse, welcher möglich erscheint, obgleich, oder vielmehr gerade weil man sich dabei nicht scheut, es nicht ängstlich umgeht, verschiedene Klassen von Personen implicite, d. h. in verhüllter Gestalt, unter anderm Namen, *wiederholt aufzuzählen.* Z. B. die deutschen Kinder sind unter b mit aufgezählt als Kinder und unter f nochmals als Deutsche, etc.

Will man niemals andere Klassen zusammenfassen als solche, die einander ausschliessen, so ist man genötigt — falls wir etwa die obige Reihenfolge beibehalten wollen — den folgenden Ausdruck in Worten darzustellen:

B) $$a + ba_1 + ca_1b_1 + da_1b_1c_1 + ea_1b_1c_1d_1 + fa_1b_1c_1d_1e_1.$$

Um zu *beweisen*, dass dieser in der That dem vorigen identisch gleich ist, scheide man erst den Faktor a_1 bei den fünf letzten Gliedern aus, wodurch entsteht:

$$a + a_1 (b + cb_1 + db_1c_1 + eb_1c_1d_1 + fb_1c_1d_1e_1)$$

und ersichtlich wird, dass nach Th. 33_+) Zusatz dieser ausgeschiedene Faktor a_1 unterdrückt werden darf. Thut man dies und scheidet bei den vier letzten Gliedern der entstehenden Summe sogleich den Faktor b_1 aus:

$$a + b + b_1 (c + dc_1 + ec_1d_1 + fc_1d_1e_1)$$

so darf auch dieser unterdrückt werden, und so fort.

Ebenso wie wir eben B) in A) transformirten, kann man auch umgekehrt den Ausdruck A) in den B) überführen, indem man — die Glieder des A) von rechts nach links durchgehend — successive von der Erlaubniss Gebrauch macht, ein jedes Glied mit der Negation des ihm vorangehenden zu multipliziren.

Das gäbe nun die folgende Aufzählung: Frauen oder Mädchen, dazu die Kinder männlichen Geschlechts (Knaben), sodann die greisen Personen, welche männlichen Geschlechts „und keine Kinder" sind (Greise), sodann die Verwundeten, welche nicht weiblichen Geschlechts, auch keine Kinder und keine Greise sind, weiter die Kranken, welche nicht weiblichen Geschlechts, keine Kinder, keine Greise und unverwundet sind, endlich die Deutschen, welche nicht weiblichen Geschlechts, keine Kinder, keine Greise, unverwundet und gesund sind.

Nun lässt sich der Ausdruck ja allerdings noch in etwas vereinfachen. Indem nämlich hier $bc = 0$ ist, d. h. es keine Kinder gibt, die Greise sind, muss:

$$cb_1 = b_1c + 0 = b_1c + bc = (b + b_1)\,c = 1 \cdot c = c$$

sein; es lässt sich also der Faktor b_1 bei c unterdrücken, oder ist der Zusatz „welche keine Kinder sind" bei den „Greisen" — wie man ja wol augenblicklich gesehen hat — überflüssig.

Welcher Befehlshabende würde gleichwohl sich einer solchen Pedanterie schuldig machen, wie sie auch der so vereinfachten letzten Aussage noch anhaftet?! —

Man bemerke noch die Unsymmetrie des letzten Ausdruckes (B), die Abhängigkeit seines Baues von der gewählten Reihenfolge der Glieder. Nähme man die Glieder von A) in der umgekehrten Folge, z. B., so hätte man, um nichts schon Aufgezähltes zu wiederholen, nunmehr zu sagen:

C) $$f + ef_1 + de_1f_1 + cd_1e_1f_1 + bc_1d_1e_1f_1 + ab_1c_1d_1e_1f_1.$$

Und wollte man neben Erfüllung der Boole-Venn'schen Anforderung gar noch die Symmetrie des Ausdrucks bezüglich aller sechs Terme von A) wahren — so, wie es Th. 33_+) bezüglich der zwei ersten ermöglicht — so wären nicht weniger als dreiundsechzig Glieder anzusetzen, deren jedes aus sechs Faktoren a oder a_1, b oder b_1, etc. bis f oder f_1 bestünde, wie aus späteren Untersuchungen erhellen wird.

δ) Die vorstehenden Beispiele liefern Belege für eine sehr bemerkenswerte Thatsache:

Etwas schon einmal Gesagtes zu *wiederholen* scheint auf den ersten Blick eine Verschwendung zu sein an Zeit und Worten.

Die Beispiele thun aber dar, dass es sehr viel umständlicher wird, den Wiederholungen konsequent aus dem Wege zu gehen, als sie sich gelegentlich zu gestatten; sie zeigen, *dass nur durch solche scheinbare*

Verschwendung die grösste Sparsamkeit an zur Beschreibung einer Klasse benötigten *Worten oder Zeichen sich erzielen lässt*, und bewahrheiten so auf dem Gebiete des Haushalts mit Worten, auf dem Felde der „Terminologie", einen Satz, dem auch auf andern wirtschaftlichen Gebieten (so namentlich bei den Beratungen des Staatshaushalts seitens der Volksvertreter) eine allgemeinere Berücksichtigung zu wünschen wäre: dass die anscheinend allerengste Sparsamkeit oft auf die ärgste Verschwendung notwendig hinausläuft.

Als Vorteile, welche durch den Gebrauch der (Jevons'schen) einschliessenden oder tautologisirenden Addition (gegenüber der ausschliessenden Boole-Venn's) zu erzielen sind, somit denselben rechtfertigen, lassen sich namhaft machen:

1⁰) Der direkte *Anschluss an die Wortsprache* und demgemäss leichteste Übertragbarkeit aus Worten in Formeln, und umgekehrt.

2⁰) *Verwirklichung des denkbar kürzesten* (Wort- sowie Formel-) *Ausdrucks* für die aus gegebenen sich zusammensetzenden Klassen — und in Verbindung damit gleichwol

3⁰) *Wahrung der Symmetrie* der Ausdrücke (in Hinsicht auf die als Elemente der Zusammensetzung gegebenen Klassen).

4⁰) *Bedingungslose Ausführbarkeit der Addition;* der Allgemeinheit dieser Operation kommt es zu statten, wenn bei der Herstellung von Summen aus Klassen der Fall einer Gleichheit solcher nicht ausgeschlossen wird. Demzufolge auch

5⁰) *Grössere Freiheit* der Rechnungsoperationen und Transformationsmethoden, m. a. W. reichere Mannigfaltigkeit der zur Verfügung stehenden Formen von Ausdrücken oder Darstellungen von Klassen, somit auch der Lösungsmittel bei Aufgaben.

6⁰) *Geltung des Dualismus*, zufolge dessen die ganze Disziplin sich übersichtlich und symmetrisch gestaltete, sodass es möglich wurde, aus nahe der einen Hälfte der Sätze fast die ganze andre Hälfte abzuschreiben — eine Harmonie, die aber schwinden würde, falls wir die Grundoperation der einen Spalte preisgäben.

Der einzige Einwand, der gegen jene Addition sich erheben lässt und auch erhoben wurde*), ist der Vorwurf der Tautologie: dass man

*) Von den Vorzügen, welche Herr Venn seiner exklusiven Addition vindizirt, erscheint mir der erste: der einer grösseren Annäherung an die arithmetische Zeichensprache, als ein zweifelhafter. Wenn reduzirte Summen zur Anwendung auf gewisse arithmetische Probleme — wie z. B. zur unmittelbaren Umdeutung in Probabilitäten der entsprechenden Ereignisse bei Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung — sich in der That nicht nur besser qualifiziren sondern gar allein

dabei sich schuldig mache, schon einmal Gesagtes (zumeist doch nur in verhüllter Gestalt) nochmals zu sagen, zu wiederholen.

Dieses ist nun aber an sich etwas ganz Harmloses, und kann uns das Ärgerniss, welches an Tautologien, wenn sie etwa wie bei Th. 14) unverhüllt auftreten, welches an den „nackten“ Pleonasmen zu nehmen ist, nicht bewegen, auf alle oben aufgezählten Vorteile zu verzichten — um so weniger, als ja ohnehin bei allgemeinen Festsetzungen fast immer gewisse Grenzfälle mit eingeschlossen werden, mit unterlaufen, im Hinblick auf welche *allein* man die Festsetzungen sicher nicht getroffen haben würde. —

Jevons[1] p. 76 sq. führt als Beleg dafür, dass das „oder“ — eventuell „und“, vergl. § 8, η, ϑ) — faktisch nicht im ausschliessenden Sinne gebraucht wird, den Satz an: Ein (englischer) „peer“ ist entweder ein Herzog (duke), oder ein Graf (earl) oder ein Marquis oder ein „viscount“ oder ein Baron, und macht darauf aufmerksam, dass viele peers zwei oder mehr von diesen Titeln besitzen, z. B. der Prince of Wales zugleich Duke of Cornwall, Earl of Chester, Baron Renfrew etc. ist. Auf p. 77 citirt er Stellen aus Shakespeare, Milton, Tennyson und Darwin's „Origin of species“ (denen leicht aus deutschen Klassikern ähnliche gegenüberzustellen wären) um die gleiche Thatsache zu stützen, und resumirt mit Recht, dass die Bedeutungen der durch die Konjunktionen „und“ sowie „oder“ verknüpften Terme *von der absoluten Identität bis zum absoluten Gegensatze* schwanken.

ε) Als nächste Anwendung unsres Kalkuls sei eine kleine Studie ausgeführt über *unzulängliche Präzision* und *Missverständlichkeit* verbaler Ausdrücke, welche mit den Partikeln *„und“*, *„oder“* und *„nicht“* aufgebaut werden und die *Beschreibung von Klassen* bezwecken, welche sich aus andern als bekannt vorausgesetzten Klassen ableiten.

und ausschliesslich eignen, so begegnen wir dem dadurch, dass wir *in solchem Bedarfsfalle* eben auch unsre Summen mit Leichtigkeit in reduzirte umwandeln, und ist solcher Umstand kein Grund für uns, uns auch sonst stets mit solchen zu placken. [Über die vorgehaltene Anstössigkeit der Gleichung $1 + 1 = 1$ glaube ich mit Stillschweigen hinweggehen zu dürfen.] Was aber die von Venn viertens als Hauptgrund angeführte angebliche Thatsache betrifft, dass die schönen Entwickelungs- und Eliminationschemata von Boole beim Aufgeben seiner Addition nicht mehr anwendbar sein würden („so far as has yet been schown“), so ist derselbe wol gänzlich hinfällig und beruht — wie schon Herr Bruce Halsted[2] p. 212 angedeutet zu haben scheint — auf einer Verkennung des Umstandes, dass jene Schemata oder „generalizations“ durch die in meinem Operationskreis[2] dargelegten Methoden nicht nur aufrecht erhalten sondern noch einfacher und eleganter gestaltet werden — einfacher namentlich schon durch die völlige Entbehrlichmachung aller subtraktiven und divisiven Operationen. Vergleiche auch Frau Ladd Franklin[2] p. 559 sq. —

Auf die Mehrsinnigkeit des Bindewortes „oder“ wurde schon in § 8 unter ζ, η, ϑ) aufmerksam gemacht.

Was *a oder b* ist, im inklusiven Sinne verstanden als *„a oder auch b“*, entsprach nach dortigen Auseinandersetzungen der identischen Summe:

$$a + b, \quad \text{welche} \quad = ab_1 + ab + a_1 b \quad \text{ist,}$$

d. h. bedeutet, was entweder a und nicht b, oder b und nicht a, oder endlich a und b zugleich ist.

Was a oder b ist, im *exklusiven* Sinne verstanden als *„a oder aber b“*, vergl. § 8, η), wird nunmehr darzustellen sein mit:

$$ab_1 + a_1 b,$$

d. h. entweder a, und dann nicht b, oder aber b, und dann nicht a.

Für zwei Kreise a und b wird dieses Gebiet durch die in nebenstehender Figur schraffirte Fläche veranschaulicht.

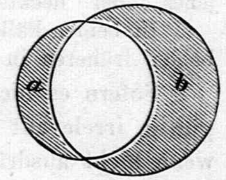

Fig. 18.

Die beiden Ausdrücke differiren um das Glied ab, fallen also mit ihren Bedeutungen zusammen, sooft $ab = 0$ ist.

Wir haben dies bereits l. c. durch das Beispiel „Gold oder Silber“ erläutert, resp. exemplifizirt. Dagegen bedeutet „Grundbesitzer oder aber Adelige“ etwas ganz anderes als „Grundbesitzer oder auch Adelige“. Jenes nämlich fasst blos die bürgerlichen Grundbesitzer mit den nicht grundbesitzenden Adeligen in eine Klasse zusammen unter Ausschluss der adeligen Grundbesitzer. Dieses dagegen unter Einschluss der letzteren.

Beiderlei „oder“ erscheinen als *symmetrisch* in Bezug auf die Glieder der Alternative. *„a* oder auch *b“* sagt dasselbe wie *„b* oder auch *a“* nach dem Kommutationsgesetze $12_\times$).

Ebenso ist aber auch *„a* oder aber *b“* einerlei mit *„b* oder aber *a“*, da, wie leicht zu sehen,

$$ab_1 + a_1 b = ba_1 + b_1 a$$

sein muss.

Hier möchten wir noch die Frage einschalten, ob es nicht vielleicht ein unsymmetrisches „oder“ gibt in dem Sinne, dass *„a* oder *b“* bedeutet: entweder a und dann nicht b, oder aber b und dann vielleicht doch auch a zugleich?

Die Frage ist offenbar zu verneinen. Der Ausdruck ist ganz *unklar*, sofern er in seinem ersten Teil etwas verbietet, was er in seinem zweiten Teile ausdrücklich erlaubt.

Hier kann man entweder — in Analogie mit dem in der Gesetzgebung maassgebenden Usus — den Grundsatz anerkennen, dass, was etwa in *einem* Gesetzesparagraphen als erlaubt (nicht verboten) erscheint, in einem andern aber verboten wird, *verboten* sei, den Grundsatz also: Wenn Erlaubniss und Verbot zusammentreffen, so gilt das Verbot. Darnach hätten wir

$$ab_1 + ba_1 + bab_1 = ab_1 + a_1b$$

als Sinn des obigen Ausdrucks, entsprechend dem exklusiven „oder aber" — da das b, welches zugleich auch a ist, dem ersten Teil zufolge auch nicht b sein muss, also mit dem Faktor $bb_1, = 0$, behaftet sein und wegfallen wird.

Oder man könnte auch den Grundsatz einhalten, sobald in Bezug auf das Nämliche eine Erlaubniss *und* ein Verbot ausgesprochen werden, immer das *zuletzt* Gesagte gelten zu lassen, ein ergangenes Verbot also durch eine darauf folgende ausdrückliche Erlaubniss als aufgehoben zu betrachten — was allerdings nicht im Einklang mit dem Prinzip I des Aussagenkalkuls stehen wird. In diesem Falle würde unser Ausdruck bedeuten:

$$ab_1 + b + ab = a + b;$$

jenes „oder" deckte sich dann also mit „oder auch".

In beiden Fällen hätten wir kein neues „oder", sondern nur eines der beiden früheren in weitläufigerer Formulirung.

Sofern es nicht aus dem oben genannten Grunde ohnehin gleichgültig, irrelevant ist, werden wir wie bisher, so auch fortgesetzt *hier*, wenn nicht ausdrücklich „oder aber" gesagt wird, unter der schlechtweg gesetzten Partikel *„oder"* immer das einschliessende „oder auch" verstehen.

ζ) Nach unsern Festsetzungen sind nun die Ausdrücke:

„nicht-a" „was a und b ist", sowie, „was a oder b ist"

von einer ganz bestimmten Bedeutung; sie können nur auf *eine* Weise verstanden werden als a_1, ab, resp. $a + b$, und erscheinen Missverständnisse hiebei ausgeschlossen.

Ebenso sind:

„Was a und nicht b ist" als ab_1,

„Was a oder nicht b ist" als $a + b_1$

völlig unzweideutige Ausdrücke.

Doppelsinnig dagegen erscheinen schon die Ausdrücke:

„Was nicht a und b ist", „Was nicht a oder b ist".

Den erstern z. B. kann man einerseits verstehen als:

„Was nicht a, und zugleich b, ist"

d. h. als a_1b, andrerseits als:

„Was nicht a und b zugleich ist",

d. h. als

$$(ab)_1 = a_1 + b_1 = a_1b + b_1 = a_1b + ab_1 + a_1b_1 \quad \text{nach Th. } 33_+)$$

— woraus zu ersehen, um was sich die Bedeutung des Ausdrucks von der des vorigen unterscheidet.

Ebenso kann der zweite verstanden werden als:

„Was »nicht a« oder b ist", d. h. $a_1 + b = a_1b_1 + ab + ab_1$,

oder aber als:

„Was nicht »a oder b« ist, d. h. $(a+b)_1 = a_1b_1$.

Im Interesse der Deutlichkeit empfiehlt sich hiernach die Maxime: bei konjunktiver Häufung von Attributen oder Prädikaten die bejahten den verneinten womöglich vorangehen zu lassen.

Man wird hier wiederum bestätigt finden, dass die Mehrsinnigkeit und die damit gegebene Möglichkeit von Missverständnissen, ja, gelegentlich die Verleitung zu solchen, daher rührt, dass die Wortsprache des *Instituts der Klammern* entbehrt. Hiefür noch ein Beispiel:

„Was a und b oder c ist"

kann verstanden werden als:

„Was »a und b« oder c ist",

d. i. als

$$ab + c = (ab) + c$$

oder auch in dem wesentlich davon verschiedenen Sinne:

„Was a und »b oder c« ist",

d. i. als

$$a\,(b + c).$$

Letzterer Ausdruck wird nun vollständig bekanntlich gelesen als: „a (mal) Klammer b plus c geschlossen", und so könnte man — scheint es — auch im Texte Doppelsinnigkeiten vermeiden, wenn man daselbst die Worte ... „Klammer" ... „Geschlossen" ... an geeigneter Stelle einfügte. Mindestens würden aber hiefür die ... *Anführungszeichen* » und ... *Schlusszeichen* « ... den Vorzug verdienen, da wie schon einmal erwähnt, im Worttext die Einklammerung schon anderweitig beschlagnahmt ist.

In Druck und Schrift dürfte der Gebrauch dieser Zeichen, zu denen wir auch gelegentlich greifen, in der That der beste Behelf sein wo immer es auf genaueste Unterscheidung ankommt und Missverständnisse sich nicht durch den Stil, Wahl geeigneter Redewendungen schon völlig ausschliessen lassen.

Zu so verzweifeltem Auskunftsmittel, jene Zeichen, wie angegeben, ausdrücklich zu lesen, greift die Sprache jedoch im *gesprochenen* Texte nicht; vielmehr verhält sie sich diesen Zeichen gegenüber gerade wie bei den Interpunktionszeichen und bestrebt sich ihrem Mangel abzuhelfen und dasjenige was die Zeichen uns auszudrücken bestimmt sind, darzustellen durch den Tonfall und Rhythmus der Rede, Anbringung geeigneter Pausen und nachdrückliche Betonung einzelner Redeteile, Emphase. Auch beim Lesen von Formeln werden ja die Klammern nicht immer gesprochen, sondern zumeist in ähnlicher Weise angedeutet — woraus allerdings, beim Diktiren z. B., bekannte Schwierigkeiten entspringen.

Immerhin besitzt die Zeichensprache des Kalkuls zufolge ihrer korrekten Handhabung der Klammern einen merklichen Vorsprung vor der Wortsprache, der sich besonders bei subtileren und verwickelten Untersuchungen geltend macht.

Wie schon beim Beschreiben von Klassen, so macht sich auch in irgend welchen andern Beziehungen der beklagte Mangel und gerügte Nichtgebrauch von die Klammern zu vertreten fähigen sprachlichen Gebilden sehr häufig fühlbar.

Als Beispiel dadurch herbeigeführter Unbestimmtheit führt Jevons u. a. den Satz an: Er fuhr ‚von Dover nach London und ‘von London nach Brighton¸ mit dem Schnellzuge’. Zufolge der (Un-)Sitte, das Zeitwort ganz an's Ende zu stellen, entstehen im Deutschen leider solche Unklarheiten ganz besonders leicht, wie es beispielsweise die Zeitungsnotiz erkennen lässt: An der deutschfranzösischen Grenze wird viel über ‚Wilddiebereien ‘von französischer Seite¸ geklagt’ — derengleichen aber unschwer auch von den bessern Schriftstellern in unbegrenzter Fülle beizubringen wären.

In der begonnenen Aufzählung missverständlicher Ausdrücke der Wortsprache wollen wir nicht nach Vollständigkeit streben, sondern begnügen uns mit noch ein paar Beispielen.

η) Aufgabe. Auf wieviele Arten kann der Ausdruck: „Was a und b oder c und d ist“ verstanden, beziehungsweise missverstanden werden?

Auflösung. Verstanden auf vier, somit missverstanden auf drei Arten.

Sind nämlich vier Terme durch irgendwelche Operationen zu verknüpfen, was wir dadurch andeuten wollen, dass wir die Terme $abcd$ *ohne* Knüpfungszeichen nebeneinander setzen, so können Klammern auf folgende fünf Arten gesetzt werden, um die Knüpfungen auf lauter „binäre“ (d. h. immer nur zwei Elemente auf einmal verbindende) zurückzuführen:

$$\{(ab)\,c\}\,d, \quad \{a\,(bc)\}\,d, \quad (ab)\,(cd), \quad a\,\{(bc)\,d\}, \quad a\{b\,(cd)\}.$$

Unser obiger Ausdruck lautet nun:

$$a \cdot b + c \cdot d$$

und lässt folglich fünf Deutungen zu, von denen aber die zweite und vierte dasselbe Resultat liefern, indem nach Th. $13_\times$) etc.:

$$\{a\,(b+c)\}\,d = a\{(b+c)\,d\} = a\,(b+c)\,d = abd + acd$$

sein muss, wogegen dieses Resultat von den drei andern Deutungen:

$$\{(ab)+c\}\,d = (ab+c)\,d = abd + cd, \quad a\{b+(cd)\} = a(b+cd) = ab + acd$$

und

$$(ab) + (cd) = ab + cd$$

verschieden ist, gleichwie auch diese unter sich es sind im Allgemeinen.

ϑ) Aufgabe. Wie unterscheidet sich der Ausdruck: „folgsame (a) fleissige (b) Kinder (c)“ von dem Ausdruck: „folgsame Kinder und fleissige Kinder“.

Auflösung. Der erstere ist abc, der letztere

$$ac + bc = (a+b)\,c \quad \text{also} \quad abc + ab_1c + a_1bc,$$

d. h. er umfasst ausser dem erstern auch noch die Kinder, welche folgsam aber nicht fleissig und diejenigen, welche fleissig aber nicht folgsam sind.

Sagt man nun: „folgsame und fleissige Kinder“, so erscheint es ganz in subjektives Belieben gestellt, ob man den erstern Ausdruck darunter verstehen will, oder den letztern — vergl. § 8, ξ).

Es geben, denke ich, die vorstehenden Betrachtungen kein allzu glänzendes Bild von der Qualifikation der Wortsprache zur exakten Darstellung und Einkleidung von Untersuchungen über Klassen, und sie lassen wol auch erkennen, dass das Heil nicht etwa zu erwarten ist von Bestrebungen, die — wie das „Volapük“ — blos die unregelmässigen Formen, z. B. der Deklinationen und Konjugationen, abschaffen.

ι) Nunmehr Betrachtungen von einer andern Tendenz: Die Sätze bisheriger Theorie können gelegentlich verwertet werden um *Ausdrücke zu vereinfachen*, welche Klassen darstellen sollen.

Aufgabe. Wenn gesprochen wird von den gebildeten Reichen, den reichen Adeligen und den adeligen Ungebildeten — wie ist die Beschreibung dieser Klasse von Personen zu vereinfachen?

Auflösung. Man lasse den mittleren Term weg; die Anführung der reichen Adeligen ist zu sparen. Denn:

Sei $a =$ gebildet, $b =$ reich, $c =$ adelig,

so ist:

$$ab + bc + ca_1$$

die gegebene Klasse, und für bc kann gesetzt werden:

$$1 \cdot bc = (a + a_1)\,bc = abc + a_1bc;$$

alsdann aber wird in dem Ausdrucke:

$$ab + abc + a_1bc + a_1c$$

das zweite Glied vom ersten, das dritte vom letzten nach Th. 23_+) absorbirt, und entsteht:

$$ab + a_1c.$$

In Worten kann man überlegen: Die reichen Adeligen sind entweder gebildet oder ungebildet. Im erstern Falle sind sie unter den gebildeten Reichen, im letztern unter den adeligen Ungebildeten ohnehin erwähnt, und folglich ist es durchaus überflüssig, sie noch besonders zu erwähnen.

Man sieht, wie hier die Rechnung zwar für den in ihr noch Ungeübten vielleicht nicht bequemer ist, als die Überlegung in Worten, wie sie aber die Operationen dieses verbalen oder mentalen Räsonnements Schritt für Schritt wiederspiegelt und dieselben in knappster Form zum Ausdruck und Bewusstsein bringt.

Beiläufig haben wir vorstehend einen Satz gewonnen. Denselben spricht die Formel aus:

Theorem ι) $\quad ab + bc + ca_1 = ab + ca_1,$

welche leicht zu merken und in der Technik des Kalkuls von ziemlicher Anwendbarkeit ist.

$\varkappa$) Der Satz ist übrigens nahe verwandt, wenn man will nur eine kleine Umformung, eines schon von Herrn Peirce aufgestellten Theorems, nämlich des folgenden: *Es gilt stets:*

Theorem $\varkappa$) $\quad (a+x)(b+x_1) = ax_1 + bx.$

Durch Ausmultipliziren der linken Seite lässt sich nämlich erhalten:

$$xb + ba + ax_1,$$

wonach der Satz ersichtlich auf den ι) zurückkommt. In der ihr von Peirce gegebenen Form ist die Gleichung dadurch bemerkenswert, dass die eine Seite derselben als das duale Gegenstück der andern (und umgekehrt) erscheinen *würde*, wenn nicht das Symbol x zugleich mit seiner Negation x_1 tauschte. Es wäre darnach nicht korrekt, die Formel $\varkappa$) selber eine „zu sich selbst duale" zu nennen, wohl aber darf man von dem durch sie ausgedrückten allgemeinen Satze sagen, dass er sich selbst dual entspreche. Denn das duale Gegenstück von $\varkappa$), welches lautet: $\quad ax + bx_1 = (a+x_1)(b+x),$

wird den nämlichen Satz ausdrücken, da man in letzterer Gleichung unter x auch dasjenige Gebiet verstehen kann, welches in $\varkappa$) mit x_1 bezeichnet wurde.

λ) Aufgabe. Auf einer strategischen Bahnlinie findet sich für eine gewisse Zeit der Transport verboten von allen Gütern ausser solchen, welche Kriegszwecken dienen können, wenn sie explosiv oder

nicht für die Montanindustrie bestimmt sind, sowie solchen, welche für die Montanindustrie bestimmt sind, wenn sie nicht explosiv sind oder nicht Kriegszwecken dienlich.

Man soll das Transportverbot vereinfachen.

Auflösung. Es bedeute a = Kriegszwecken dienlich, b = explosiv, c = für die Bergbauindustrie bestimmt. So ist nur erlaubt zu transportiren die Klasse der Güter:

$$a(b+c_1) + c(b_1+a_1).$$

Von Th. 33_+), Zusatz, Gebrauch machend kann man hiefür schreiben:

$$a(bc+c_1) + c(b_1a+a_1) = ac(b+b_1) + ac_1 + a_1c = ac + ac_1 + a_1c = a + c,$$

quod erat inveniendum. Also:

Ausschliesslich *erlaubt* ist der Transport derjenigen Güter, welche Kriegszwecken dienlich, oder für die Montanindustrie bestimmt sind (ganz ohne Rücksicht darauf, ob sie explosiv sind, oder nicht). —

Man kann auch gemäss Th. 36) von dem Ausdruck die Negation nehmen, und findet: $\quad (a_1 + b_1c)(c_1 + ba) = a_1c_1$

unmittelbar durch Ausmultipliziren. Also ist der Transport *verboten* für Alles, was weder Kriegszwecken dienlich noch auch für die Montanindustrie bestimmt ist. — Die Klasse „explosiv" fiel beidemal ganz heraus; dieselbe kommt wesentlich gar nicht in Betracht. —

μ) Man kann nun auch schon manche Streitfrage rechnerisch entscheiden.

Aufgabe. Ein Chemiker hatte, um weitere Schlüsse darauf zu bauen, gesagt:

„Salze, die nicht farbig sind, sind Salze, die nicht organisch sind, oder organische Körper, die nicht farbig sind."

Ein anderer bestreitet ihm dies. Zu entscheiden, wer Recht hat.

Auflösung. Es bedeute a = Salze, b = organisch, c = farbig. So lautete die Behauptung:

$$ac_1 \mathrel{=\!\!\!\in} ab_1 + bc_1.$$

Nach Th. $38_\times$) ist die vorstehende Subsumtion völlig gleichbedeutend mit der Gleichung:

$$ac_1(ab_1 + bc_1)_1 = 0, \quad \text{oder} \quad ac_1(a_1 + b)(b_1 + c) = 0$$

und da Ausmultipliziren linkerhand diese Gleichung nach Th. $30_\times$) bewahrheitet, so ist auch die Subsumtion richtig, hatte der *Erstere* Recht.

Wie von allen verfügbaren Mitteln, so auch vom Ausmultipliziren kann geschickt und ungeschickt Gebrauch gemacht werden. Unzweckmässig wäre es, hier erst die beiden Binome auszumultipliziren, wobei von den vier zu bildenden Produkten blos eines, bb_1 fortfiele. Besser gehe man mit dem Faktor a in die erste Klammer und mit dem c_1 in die letzte Klammer hinein, wo dann nur je ein Glied stehen bleiben und sogleich $ab \cdot b_1 c_1$ entstehen wird.

Man kann auch nach Th. 38_+) die Subsumtion umschreiben in die Gleichung:

$$(ac_1)_1 + ab_1 + bc_1 = 1 \quad \text{oder} \quad a_1 + c + ab_1 + bc_1 = 1,$$

welche sich ebenfalls bewahrheitet, indem nach Th. 33_+) Zusatz:

$a_1 + ab_1 = a_1 + b_1$, desgleichen $c + bc_1 = c + b$, hernach aber $b_1 + b = 1$ und die ganze Summe: $1 + a_1 + c = 1$ nach Th. 22_+) sein wird.

Endlich könnte man die rechte Seite der fraglichen Subsumtion umformen in:

$$ab_1(c + c_1) + (a + a_1)\,bc_1 = ab_1c + ac_1(b_1 + b) + a_1bc_1 = ac_1 + (ab_1c + a_1bc_1).$$

Nach Th. 6_+) ist nun ein Summand — hier ac_1 — jederzeit in der Summe enthalten. —

ν) So unvollständig unser bis jetzt gesichertes wissenschaftliches Kapital noch ist (wie aus der Fortsetzung der Theorie erhellen wird), so vermag man doch mit demselben schon unbeschränkt neue Sätze aufzustellen, deren oft recht interessante zu entdecken, entdeckte zu beweisen. Wir begnügen uns mit ein paar Beispielen.

Theorem ν) (von Peirce). *Wenn*

$$ab \;\leqslant\; c + d$$

ist, so muss auch:

$$ac_1 \;\leqslant\; b_1 + d$$

sein [und desgleichen, mit demselben Rechte:

$$ad_1 \leqslant b_1 + c, \qquad bc_1 \leqslant a_1 + d, \qquad bd_1 \leqslant a_1 + c, \qquad c_1d_1 \leqslant a_1 + b_1,$$

sodass von allen sechs Subsumtionen eine jede die fünf übrigen nach sich zieht, mit jeder andern äquivalent ist]. *Es kann hienach ein Faktor des Subjekts mit einem Summanden des Prädikats vertauscht werden, sofern man nur beide in ihre Negationen umwandelt.*

Der Beweis des Theorems wird am einfachsten dadurch geleistet, dass man nach Th. $38_\times$) die Subsumtionen in Gleichungen umschreibt, wodurch die vorausgesetzte in $ab\,(c + d)_1 = 0$ oder wegen 36_+) in $abc_1d_1 = 0$, die behauptete in $ac_1(b_1 + d)_1 = 0$, das ist $ac_1bd_1 = 0$ übergeht, sonach die beiden ganz das nämliche besagen.

[Nun darf man in der Voraussetzung unbeschadet ihrer Gültigkeit

a mit b sowie auch c mit d vertauschen, und muss hiebei auch die Behauptung gültig bleiben. Thut man dies einzeln oder gleichzeitig, so erhält man aus der letztern sofort auch noch die drei folgenden von den behaupteten Subsumtionen, und geht die allerletzte dann nach dem Theorem selbst aus der vorletzten hervor, wenn man in ihr die Terme b und c vorschriftsmässig auf die andre Seite des Subsumtionszeichens wirft. Zum Überfluss folgt die eine Hälfte der sechs Subsumtionen auch aus der andern und so die letzte aus der ersten durch beiderseitiges Negiren gemäss Th. 37) und 36).]

ξ) Exempel hiezu. In der Mannigfaltigkeit 1 der (ebenen) Kurven bedeute a die Klasse der *Kegelschnitte*, b die Klasse derjenigen *Kurven, welche einen „Mittelpunkt“ haben*, c die Klasse der *Ellipsen* (mit Einschluss des Kreises) und d die Klasse der *Hyperbeln* (mit Einschluss des Geradenpaars, nämlich Paares *einander schneidender* Geraden), so ist die vorausgesetzte Subsumtion erfüllt, nämlich:

Kegelschnitte, welche einen Mittelpunkt haben, sind Ellipsen oder Hyperbeln.

Nach dem Theoreme folgt daraus: Kegelschnitte, welche nicht Ellipsen sind, müssen Hyperbeln sein oder (Kurven, die) keinen Mittelpunkt haben. Etc. etc.

Anmerkung. Das gegebene Beispiel kann benutzt werden um darzuthun, dass es nicht gestattet ist, die Subsumtionszeichen in dem Satze ν) durch Gleichheitszeichen zu ersetzen. Denn die vorausgesetzte Subsumtion gilt hier sogar als *Gleichung* (indem die Ellipsen nebst den Hyperbeln auch die Kegelschnitte sind, die einen Mittelpunkt haben), die gefolgerte Subsumtion aber nicht:

Kurven, die keinen Mittelpunkt haben (oder aber, resp.), sowie Hyperbeln, brauchen nicht Kegelschnitte zu sein, die nicht Ellipsen sind — sie brauchen nämlich überhaupt nicht Kegelschnitte zu sein.

o) Herr Peirce erblickt im obigen Satze ν) das wahre Wesen, die „Essenz“ der Negation — was insofern begründet erscheint, als derselbe die hochwichtigen Theoreme 41) in sich vereinigt. Diese fliessen aus ihm, indem man $c = 0$ resp. $b = 1$ annimmt.

Man konnte auch umgekehrt das Th. ν) ganz unmittelbar auf die beiden einfacheren Theoreme 41) zurückführen.

Anstatt aus diesen setzt Peirce[5] p. 35, sein Theorem aus folgenden beiden Sätzen zusammen (*wie?* ist mir nicht recht ersichtlich):

Theorem $o_\times$). *Wenn*

$$ab \leqslant c$$

Theorem o_+). *Wenn*

$$a \leqslant b + c$$

so ist: $ac_1 ⋹ b_1$ | *so ist:* $b_1 ⋹ c + a_1$

sowie umgekehrt — deren Beweis und Deutung dem Leser überlassen sei.

π) Theorem (von Jevons[1] p. 61). *Von den sechs Gleichungen:*

$$a = bc_1 + b_1c, \qquad a_1 = bc + b_1c_1$$
$$b = ca_1 + c_1a, \qquad b_1 = ca + c_1a_1$$
$$c = ab_1 + a_1b, \qquad c_1 = ab + a_1b_1$$

hat jede die fünf übrigen zur Folge; dieselben sind alle sechse einander äquivalent.

Aufgabe: das Theorem zu beweisen.

Auflösung. Durch beiderseitiges Negiren nach Th. 32) und 36) gehen die beiden Gleichungen einer jeden Zeile in einander über. Es handelt sich also nur noch darum, die untereinander stehenden links auf einander zurückzuführen.

Dies kann geschehen, indem man die beiden ersten Gleichungen mit c_1 resp. c beiderseits multiplizirt und die Ergebnisse $ac_1 = bc_1$, $a_1c = bc$ überschiebend addirt. Etc.

Am besten bringt man gemäss Th. 39_+) die erste dieser Gleichungen rechterhand auf Null. Dieselbe erweist darnach sich äquivalent mit

$$a(bc_1 + b_1c)_1 + a_1(bc_1 + b_1c) = 0$$

oder, wegen

$$(bc_1 + b_1c)_1 = bc + b_1c_1,$$

mit:

$$abc + ab_1c_1 + bc_1a_1 + ca_1b_1 = 0.$$

Hieraus ist aber zu ersehen, dass der vorausgesetzte Zusammenhang zwischen den Symbolen a, b, c in Bezug auf diese symmetrisch ist, durch Vertauschung derselben nicht verändert wird. Man mag demnach z. B. die Buchstaben a, b, c „cyklisch“ — im Ringe herum — vertauschen, d. h. a durch b, daneben b durch c und c durch a ersetzen; dadurch wird man aus jener ersten Formel die dritte und aus dieser die fünfte erhalten.

Das behufs Beweises vorstehend eingeschlagene Verfahren und die daran geknüpfte Wahrnehmung mochte ungezwungen zur Entdeckung des Satzes geführt haben.

Man verifizire den Satz auch durch die Anschauung an der Fig. 18 (S. 371), indem man das dort schraffirte Gebiet mit c bezeichnet.

In Worten kann man sagen: *Wenn a bedeutet „b oder aber c“, so muss auch b einerlei sein mit „a oder aber c“, und c mit „a oder aber b“.*

Exempel zu dem Satze. Es möge a die Klasse der gesetzlich

erlaubten, b diejenige der moralischen Handlungen vorstellen (welche beiden Sphären einander bekanntlich nicht durchaus decken). Alsdann sind die Handlungen ab unbedingt zu billigen oder wenigstens nicht zu beanstanden (es sei denn unter Gesichtspunkten, wie der Klugheit, Zweckmässigkeit, u. a. auf die wir hier keine Rücksicht nehmen wollen), die Handlungen a_1b_1 sind unbedingt zu verwerfen; dagegen können wir die Handlungen der Klasse $ab_1 + a_1b \; (= c)$, welche nur gesetzlich oder nur moralisch, aber nicht beides zugleich sind, für den Augenblick — nur um etwa einen kurzen Namen für die Klasse zu haben — „strittige“ oder „fragwürdige“ nennen, sofern sie von dem Interpreten des Gesetzes eine andere Beurteilung zu erfahren haben als wie vom Standpunkte der Moral. Noch besser vielleicht wird man sie „Konfliktshandlungen“ nennen, weil Derjenige, der sie begeht oder sich vor sie gestellt sieht, sich in Konflikt befindet oder in solchen gerät zwischen seinem eigenen sittlichen Bewusstsein und demjenigen seiner Nation soweit es in der Gesetzgebung zum Ausdruck gelangt ist.

Nach unserm Satze müssen dann auch die gesetzlichen Handlungen entweder moralische oder aber Konfliktshandlungen sein, und umgekehrt. Desgleichen müssen diejenigen Handlungen welche fragwürdig (Konfliktsh.) oder aber gesetzlich sind, moralische sein, und umgekehrt.

Stellt man einen Ausdruck $ab_1 + a_1b$ symbolisch als eine Knüpfung $a \circ b$ von a mit b dar, so ist diese Knüpfung einerseits, wie erwähnt, eine *kommutative*, es ist $a \circ b = b \circ a$, zugleich ist sie nach Jevons' Satze auch *eindeutig umkehrbar*, und befolgt in Bezug auf ihre Umkehrungen das Gesetz, dass sooft $c = a \circ b$ ist, auch $a = b \circ c$ und $b = c \circ a$ sein muss. Man beweise, dass allgemein auch:

$$(a \circ b) \circ a = b = a \circ (b \circ a)$$

sein wird. Die Knüpfung genügt überhaupt den Gesetzen des in Anhang 5 unter „Beleg 6“ angeführten Algorithmus Q_0. —

ϱ) Wir haben gelernt, jede beliebige Subsumtion $a ⋹ b$ auf verschiedene Arten in *eine* Gleichung umzuwandeln, welche ganz das nämliche sagt — cf. Th. 20) und 38).

Umgekehrt hingegen mochte eine Gleichung $a = b$ nach Def. (1) durch *zwei* als gleichzeitig geltend hingestellte Subsumtionen $a ⋹ b$ und $b ⋹ a$ ersetzt werden.

Hier liegt die Frage nahe, ob es nicht auch angängig ist, jede beliebige Gleichung umzuschreiben in *eine einzige* Subsumtion.

Diese Frage beantwortet in bejahendem Sinne — das

Theorem ϱ). *Wenn $a = b$ ist, so muss auch $a + b \subseteq ab$ sein, und umgekehrt*, sodass die Gleichung mit der Subsumtion äquivalent.

In Worten: Wenn alles, was *a oder b* ist, auch *a und b* sein muss, so sind a und b identisch, einerlei — und vice versā.

Dies zu *beweisen* kann als eine leichte Übungsaufgabe für Anfänger empfohlen werden. Doch sei deren Lösung hier angegeben:

Wenn $a = b$ ist, so wird

$$a + b = a + a = a \quad \text{und} \quad ab = aa = a,$$

somit läuft die behauptete Subsumtion hinaus auf die durch das Prinzip I verbürgte $a \subseteq a$. Die Gleichung zog mithin die Subsumtion nach sich.

Ist umgekehrt $a + b \subseteq ab$, so können wir nach Th. 6_+), der Voraussetzung und Th. $6_\times$) den Kettenschluss ausführen:

$$a \subseteq a + b, \quad a + b \subseteq ab, \quad ab \subseteq b, \quad \text{ergo} \quad a \subseteq b,$$

und ebenso zeigt man, was überdies nach der Symmetrie schon folgt, dass auch $b \subseteq a$, womit nach Def. (1) dann die Gleichung $a = b$ bewiesen erscheint. Die Subsumtion hat also auch die Gleichung zur Folge, q. e. d.

Ein anderer Beweis ist ganz mechanisch führbar, indem man Subsumtion wie Gleichung gemäss den Theoremen $38_\times$) und 39) rechterhand auf 0 bringt.

σ) Aufgabe. Man zeige, dass wenn

$$a \subseteq b_1 c_1 \quad \text{und} \quad bc = 0$$

ist, auch

$$b \subseteq c_1 a_1 \quad \text{und} \quad ca = 0$$

sowie

$$c \subseteq a_1 b_1 \quad \text{und} \quad ab = 0$$

sein muss.

Gilt z. B.: ein Fisch ist weder Vogel noch Säugetier, während kein Vogel ein Säugetier ist, so haben wir auch die Folgerungen: ein Vogel ist weder Fisch noch Säugetier, und kein Säugetier ist ein Fisch, sowie: ein Säugetier ist weder Fisch noch Vogel, desgleichen kein Fisch ein Vogel.

τ) Ebenso zeige man, dass wenn gleichzeitig:

$$a \subseteq bc_1 + b_1 c, \quad b \subseteq ca_1 + c_1 a, \quad c \subseteq ab_1 + a_1 b$$

ist, dann diese Subsumtionen als Gleichungen gelten müssen, nämlich

$$a = bc_1 + b_1 c, \text{ etc.}$$

sein wird.

Ausführung — gleichwie bei σ) — dem Leser überlassen — vergl. π).

v) Dem Anfänger, wie dem Dozenten wird auch die Zusammenstellung einer Anzahl *rein rechnerischer* Übungen willkommen sein, die wir in mehrere Gruppen verteilen.

Die Aufgaben zielen zumeist auf die Vereinfachung eines gegebenen Ausdruckes hin, und werden wir sie alsdann dadurch darstellen, dass wir den „gegebenen“ und den resultirenden vereinfachten Ausdruck, der zu entdecken gewesen, d. i. den „gesuchten“ Ausdruck, ohne weiteres einander gleich setzen. In andern Fällen handelt es sich von vornherein nur um den Nachweis der Identität einander gleich gesetzter Ausdrücke; in manchen auch darum, aus einer gegebenen Voraussetzung rechnerisch eine angegebene Folgerung zu ziehen.

Allemal machen die Angaben den Anspruch, allgemeingültig zu sein bei beliebiger Deutung der vorkommenden Buchstabensymbole als Gebiete oder als Klassen. Jede so ein Problem nebst seinem Endergebniss statuirende Angabe bringt mithin ein eigenes Theorem des identischen Kalkuls zum Ausdruck. Natürlich muss jedoch bei unsrer beabsichtigten mehr nur miscellenhaften Zusammenstellung solcher Theoreme auf strenge Systematik und Vollständigkeit Verzicht geleistet werden.

Nur gelegentlich geben wir auch eine Andeutung über die bequemste Art der Lösung, und muss der Leser resp. Löser eben die wichtigsten Sätze des Kalkuls, vor allem die Regeln für's Ausmultipliziren und Ausscheiden, das Tautologie- und das Absorptionsgesetz, die Theoreme 30), und Zusatz zu 33_+), etc. beständig vor Augen haben.

Als Theorem φ) stellen wir die Formel voran:

$$\varphi) \qquad (a + b)(b + c)(c + a) = ab + bc + ca,$$

welche dadurch bemerkenswert erscheint, dass sie *vollkommen zu sich selbst dual* ist.

Dieselbe kann auch in der Gestalt geschrieben werden:

$$a(b + c) + bc = (a + bc)(b + c)$$

und lässt sich analog in der Form:

$$a(b + c + d \cdot\cdot) + bcd \cdot\cdot = (a + bcd \cdot\cdot)(b + c + d \cdot\cdot)$$

auch auf beliebig viele Terme $a, b, c, d, \cdot\cdot$ ausdehnen, wo sie dann noch zu sich selbst dual, aber nicht mehr — wie bei dreien — in Bezug auf *alle* diese Terme symmetrisch ist.

Für drei Symbole kann man dem Satze auch noch andere zu sich selbst duale Formen geben, und zwar symmetrisch als:

$$(a + bc)(b + ac)(c + ab) = a(b + c) + b(a + c) + c(a + b),$$

desgleichen unsymmetrisch, aber einfacher, als:

$$(a+bc)(b+ac) = a(b+c) + b(a+c), \quad \text{etc.}$$

— indem diese Ausdrücke alle durch Ausmultipliziren, nach dem Absorptionsgesetze auf $ab+ac+bc$ hinauskommen. —

$\chi)$ $(a+bc)b = (a+c)b$; $a(ab+bc) = ab$;
$(ab+ac+bc)abc = abc$; $(b+ac)(c+d) = ac+bc+bd$;
$a+b(c+d)+(a+bx)c = a+b(c+d)$; $(a+b)(b+ac) = b+ac$;
$(a+b)(b+a) = a+b$; $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) = ac+bd$;
$(a+b)(b+c) = b+ac$; $(a+b)(b+c)(c+d) = ac+cb+bd$;
$(a+b)(b+c)(c+d)(d+e) = bd+c(ad+ae+be)$;
$(a+b)(b+c)(c+d)(d+e)(e+f) = acdf+ace+bce+bde+bdf$;
$(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d) = abc+abd+acd+bcd$;
$(a+b)(b+c)(c+d)(d+e)(e+a) = adb+bec+cad+dbe+eca$;
$(a+b+c)(a+b+d)(a+c+d)(b+c+d) = ab+ac+ad+bc+bd+cd$;
$a(b+c)c(a+b) = ac$;

$$(a+bc)(b+ac) = ab+ac+bc = (a+b)(ab+ac+bc);$$

$(ab+cd)(a+b)(c+d) = ab(c+d)+(a+b)cd$.

$a(b+c)+c_1 = a+c_1$; $a(b+c)(a_1+b_1)c_1 = 0$; $a_1bc(b_1+ac+a_1c_1) = 0$;
$(a+b)(a_1+b_1) = ab_1+a_1b$, $(a+b_1)(a_1+b) = ab+a_1b_1$;
$(a+b_1c)(b+a_1c_1) = ab$, $(a_1x+b)(a+b_1x_1) = ab$; $a(b+c)+a_1+b_1c_1 = 1$;
$(a+b_1c_1)(ac+b_1) = ac+b_1c_1$; $a(b_1+cd)b(c_1+d) = abcd$;
$(ab_1c+a_1bc_1)(abc_1+a_1b_1c) = 0$; $(a_1+bc)(a+b_1c_1) = abc+a_1b_1c_1$;
$(a_1+b_1)(ab+ac+bc) = c(ab_1+a_1b)$; $(a_1+b_1)a(bc_1+b_1c) = ab_1c$;
$a(b+c)(c_1+ab+a_1b_1) = ab$; $a+b_1+c_1+b(ac_1+a_1c) = 1$;
$\{ab_1c+(a_1+c_1)b\}\{ab_1c_1+a_1(b+c)\} = a_1b$; $ab+ab_1c = a(b+c)$;
$a(a_1+b_1c)(a_1+bc) = ac(a_1+b_1)(a_1+b) = a(b_1+a_1c)b(a_1+c_1) = 0$;
$a_1(b_1+c_1)(b+ca)(c+ab) = 0$; $(x+y)(x_1+yz_1)(y_1+xz) = 0$;
$xy(a+x_1)(a_1+y_1)(b+y_1)(b_1+x_1) = 0$; $a_1+b_1+c_1+ab+ac+bc = 1$;
$(x+y)(x_1+z_1)(y_1+z)(x_1+y+z)(x+y_1+z_1) = 0$; $a_1+b_1+c(ab_1+a_1b) = a_1+b_1$;
$(a+b)(ab_1+a_1b) = ab_1+a_1b = (a_1+b_1)(ab_1+a_1b)$;

$$ab(ab_1+a_1b) = 0 = a_1b_1(ab_1+a_1b);$$

$(bc_1+b_1c)(ca_1+c_1a)(ab_1+a_1b) = 0$; $(bc_1+b_1c)+(ca_1+c_1a)+(ab_1+a_1b) =$
$= (ca_1+c_1a)+(ab_1+a_1b) = (ab_1+a_1b)+(bc_1+b_1c) = (bc_1+b_1c)+(ca_1+c_1a) =$
$= (a+b+c)(a_1+b_1+c_1) = a(b_1+c_1)+a_1(b+c) =$ etc.

$(ab+a_1b_1)(bc+b_1c_1)(ca+c_1a_1) = abc+a_1b_1c_1$;

$$(bc+b_1c_1)(ab_1+a_1b)(ac_1+a_1c) = a_1bc+ab_1c_1;$$

$(a_1bc+ab_1c+abc_1)(a_1b_1+a_1c_1+b_1c_1) = 0$;

$$ab+a_1b_1+a_1c_1+b_1c_1 = c_1+ab+a_1b_1;$$

$a_1+b_1+a(bc_1+b_1c) = a_1+b_1+c_1 = a_1bc+ab_1c+abc_1+a_1b_1+a_1c_1+b_1c_1$;
$(a+b_1+c_1)(ab+ac+bc) = a(b+c)$; $a(b+c)+b(ac_1+a_1c) = ab+ac+bc$;
$a(b+c)+c_1+ab+a_1b_1 = a+b_1+c_1 = a(bc_1+b_1c)+c_1+ab+a_1b_1$;
$a(b+c)+a_1b_1+a_1c_1+b_1c_1 = a+b_1+c_1 = abc+a_1b_1+a_1c_1+b_1c_1+a(bc_1+b_1c)$;
$a_1(bc_1+b_1c)+ab+ac+bc = b+c$; $ab+ac+bc+a_1b_1+a_1c_1+b_1c_1 = 1$;
$(a_1+c_1+e_1)(b_1+c_1+e_1)(b_1+d_1+e_1)(b_1+d_1+f_1)acdf = ab_1cde_1f$,

Anleitung: man lasse in den Summen die Glieder fort, deren Negation als Faktor aussen steht, und erhält: $e_1(b_1+e_1)(b_1+e_1)b_1acdf$, etc.;

$$(a_1+b+c)(a+b_1+c)(a+b+c_1) = ab+ac+bc+a_1b_1c_1;$$

$$(a_1b_1+bc_1)_1 = ab_1+bc; \quad \{(a_1x+b_1x_1)c\}_1 = c_1+ax+bx_1.$$

Zeige, dass wenn $x = a(b+c)+bc_1+b_1c$ ist, dann $x_1 = a_1bc+b_1c_1$ sein muss. Ebenso dass wenn bezüglich:
$x = a_1bc+a(b+c)$, $bc+ca+ab$, $b_1(c_1+a)+c_1a$, $a(bc_1+b_1c)+b_1c_1$,
so
$x_1 = ab_1c_1+a_1(b_1+c_1)$, $b_1c_1+c_1a_1+a_1b_1$, $b(c+a_1)+ca_1$, $a_1(b_1c+bc_1)+bc$;

$$ab_1+b_1c+abc_1 = ac_1+b_1c.$$

$\psi)$ $a_1b_1+ac+bc = c+a_1b_1$; $(a+b)c_1+(c+a_1b_1)a_1+bc = 1$;

$$a_1bc+ab+ac+b_1c = ab+c;$$

$$a_1b+ac_1+a_1c+bc+ab_1 = a+b+c,$$

Anleitung: $a_1(b+c)+a(b_1+c_1)+bc = a_1(b+c)+a(bc)_1+bc =$
$= a_1(b+c)+a+bc = b+c+a+bc =$ etc.;

$$ab+bc_1+cd+bd_1 = b+cd,$$

Anleitung: $ab+b(cd)_1+cd = ab+b+cd =$ etc.;

$$a+b+c_1+a_1b_1c = 1,$$

Anleitung: Nach Th. 33_+) Zusatz ist die linke Seite

$$= a+b+c_1+a_1b_1 = a+b+c_1+a_1 = 1+b+c_1 = 1,$$

oder auch nach Th. 36_+) und 30_+), weil $a_1b_1c = (a+b+c_1)_1$;

$$ab+a_1c+bc+cd_1+ab_1cd = ab+c,$$

Bemerkung: das Glied ab könnte auch beiderseits fortgelassen werden;
$a(cd+abcd_1+b_1cd_1+ac_1+ab_1d) = a$;
$(ab_1c_1+bc)(bc_1a_1+ca)(ca_1b_1+ab) = abc$;

$(ab + a_1 b_1)(cd + c_1 d_1)\{(a + d) b_1 c_1 + a_1 d_1 (b + c)\} = 0;$

$\{a + c_1 (b + d_1)\}\{b + d_1 (a + c_1)\}(a + bd_1) c_1 (b + ac_1) d_1 = (a + b) c_1 d_1;$

$(a + b + c + d)(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) = a (b_1 + c_1 + d_1) + a_1 (b + c + d).$

Anleitung: man zeige, dass der beim Ausmultipliziren eigentlich noch hinzutretende Term $(b + c + d)(b_1 + c_1 + d_1)$ von den beiden übrigen absorbirt wird, indem man ihn mit $a + a_1$ multiplizirt;

$(a + b + c)(a + b_1 + c_1)(a_1 + b + c_1)(a_1 + b_1 + c) = 0;$

$a_1 bc + a (b + c) = a (b + c) + bc; \qquad a (b + c) + bc_1 + b_1 c =$

$= abc + bc_1 + b_1 c = ab + bc_1 + b_1 c = ac + bc_1 + b_1 c;$

$ab_1 c_1 + a_1 bc_1 + a_1 b_1 c + a_1 bc + a (b + c) = a + b + c;$

$abx + a_1 x_1 + a_1 b = bx + a_1 x_1; \qquad a_1 x_1 y_1 + xy_1 + axy = ax + a_1 y_1;$

$ay + bx + a_1 b_1 xy = ay + bx + xy$

wol am bequemsten nachzuweisen; indem man das xy rechts mit $1, =$ $= a + b + a_1 b_1$ multiplizirt;

$abx_1 y_1 + ay + bx + a_1 b_1 xy = (a + x)(b + y);$

$ab_1 + bc_1 + ca_1 = a_1 b + b_1 c + c_1 a = (a + b + c)(a_1 + b_1 + c_1);$

$(a + b_1)(b + c_1)(c + a_1) = (a_1 + b)(b_1 + c)(c_1 + a) = abc + a_1 b_1 c_1;$

$ab + ab_1 x + a_1 bx_1 = ax + bx_1;$

$abcd + a (b_1 + c_1 + d_1) xy + b (a_1 + c_1 + d_1) xy_1 + c (a_1 + b_1 + d_1) x_1 y +$
$+ d (a_1 + b_1 + c_1) x_1 y_1 = axy + bxy_1 + cx_1 y + dx_1 y_1,$

wie zu zeigen, indem man $abcd$ mit $1, = xy + xy_1 + x_1 y + x_1 y_1$ multiplizirt, sodann die gleichnamigen Glieder zusammenzieht. —

ω) Wenn

$$c = ax + bx_1$$

bedeutet, so zeige man, dass

$$ab + c (a + b) = c$$

sein muss.

Desgleichen, wenn

$$c = axy + bxy_1 + cx_1 y + dx_1 y_1$$

bedeutet, dass

$$abcd + c (a + b + c + d) = c.$$

Wenn

$$abc = 0$$

ist, so muss

$$abd (x + c_1) = abd$$

sein. —

Unter der Voraussetzung, dass

$$abcd = 0$$

ist, sollen die folgenden Reduktionen gerechtfertigt oder als zulässige entdeckt werden:

$a (bc_1 + d_1) = a (b + d_1); \qquad (a_1 + b_1 + d) c = (a_1 + b_1) c;$

$a (b + c_1 + d_1) = a (c_1 + d_1); \qquad ad + ac_1 + ab_1 cd_1 = a (b_1 + c_1);$

$a_1 + bc + cd_1 = a_1 + bc; \qquad a_1 + b_1 c + cd = a_1 + b_1 c;$

$a_1 + bd + abc_1 d_1 = a_1 + bc_1; \qquad abc + (b_1 + c_1) d_1 = (a + b_1 + c_1) d_1;$

$a_1 + b (c_1 + d) = a_1 + bc_1; \qquad a (b_1 + cd_1) = a (b_1 + c);$

$ab + (a + b_1 + c_1) d_1 = ab + (b_1 + c_1) d_1.$

Anleitung zur ersten Aufgabe. Die linke Seite lässt sich schreiben:

$$a(bc_1 d + d_1) + abcd = abd(c_1 + c) + ad_1 = a(bd + d_1) = a(b + d_1).$$

Anleitung zur zweiten dieser Aufgaben. Die linke Seite ist

$$\{a_1 + b_1 + d(a_1 + b_1)_1\} c = (a_1 + b_1 + abd)c = (a_1 + b_1)c,$$

weil der letzte Term, ausmultiplizirt, Null gibt. Etc.

Anleitung zur letzten Aufgabe: Da bc die Negation von $b_1 + c_1$, so darf man für $a + b_1 + c_1$ schreiben $abc + b_1 + c_1$; hievon der erste Term, ausmultiplizirt, gibt $abcd_1$ (und kann um $abcd$, welches 0 ist, vermehrt werden; dadurch entsteht abc) welches dann in das schon vorhandene Glied ab eingeht, von diesem verschlungen wird.

Hier würde die Gleichung falsch, wenn man das Glied ab beiderseits fortlassen wollte. Zu ihrer Geltung bedarf sie aber der Voraussetzung nicht.

α_1) Man vereinfache eine jede der nachfolgenden acht Subsumtionen:

$$ab_1 ⋹ b, \quad a ⋹ a_1 + b, \quad ab_1 ⋹ a_1, \quad b_1 ⋹ a_1 + b,$$
$$a ⋹ ab, \quad a + b ⋹ b, \quad b_1 ⋹ a_1 b_1, \quad a_1 + b_1 ⋹ a_1.$$

Auflösung: $a ⋹ b$ — wie vermittelst des Th. $38_\times$) zu zeigen. —

Nach dem dritten der obigen Schemata könnte beispielsweise dem Satze: „Alle Sünden sind verzeihbar (können Vergebung finden)“ als eine logisch vollkommen äquivalente — psychologisch aber so sehr davon verschiedene — auch die Fassung gegeben werden: „Unverzeihliche Sünden sind keine Sünden“ — welche De Morgan von dem das Beispiel herrührt nicht ganz mit Unrecht als „ungeschickt“, tölpelhaft oder abgeschmackt („awkward“) hinstellt.

Dagegen muss man sich hüten, dergleichen an einem Beispiel zu machende Wahrnehmungen sogleich auf die ganze Urteilsform auszudehnen. Zum Beispiel: „Falsche lateinische Deklinationen sind gar keine lateinischen Deklinationen ...“ hatte ich einst zu entgegnen, als mir ein philologischer Kollege meine Einteilung der numerischen Gleichungen in richtige und falsche[1] p. 359 durch den Vergleich mit einer Einteilung der lateinischen Deklinationen in richtige und falsche lächerlich zu machen suchte. In der That: wirklich lateinische Deklinationen sind immer richtige. „... dagegen: falsche Gleichungen sind wirklich Gleichungen (d. i. Behauptungen einer

Gleichheit)." So erwies sich jene „ungeschickte" Urteilsform hier als eine geschickte zur Entkräftung des Einwandes.

β_1) Man bringe die Gleichung $a + b = a$ rechts auf 0 nach Th. 39).

Auflösung: $a_1 b = 0$, was mit $b \subseteq a$ äquivalent. *Notwendige und hinreichende Bedingung dafür dass ein Summand b im andern eingehe und unterdrückt werden dürfe, ist also: dass er diesem eingeordnet sei.* Darnach erscheint das Absorptionsgesetz 23_+) als spezieller Fall und Korollar der Theoreme 6).

Man verfahre ebenso mit der Gleichung $ab = a$ und untersuche die Bedingung für das Eingehen eines Faktors b im andern a. Dieselbe ist $ab_1 = 0$ oder $a \subseteq b$.

Wenn $x = ab_1 + a_1 b + a_1 c_1 + b_1 c_1$ bedeutet, so untersuche man nach Vorstehendem systematisch, welches von den vier Gliedern rechts unterdrückt werden darf — McColl[3]. Da

$$ab_1(a_1 b + a_1 c_1 + b_1 c_1)_1 = ab_1(a + b_1)(a + c)(b + c) = ab_1(ab + c) = ab_1 c$$

und

$$a_1 b(ab_1 + a_1 c_1 + b_1 c_1)_1 = a_1 bc$$

von 0 im allgemeinen verschieden, so sind die zwei ersten Glieder beizubehalten. Dagegen ist:

$$a_1 c_1(ab_1 + a_1 b + b_1 c_1)_1 = 0 \quad \text{und} \quad b_1 c_1(ab_1 + a_1 b + a_1 c_1)_1 = 0;$$

wir können also nach Belieben das dritte oder vierte Glied weglassen. Aber nicht beide zugleich, denn nachdem nun

$$x = ab_1 + a_1 b + b_1 c_1 \quad \text{resp.} \quad x = ab_1 + a_1 b + a_1 c_1$$

geschrieben ist, wird:

$$b_1 c_1(ab_1 + a_1 b)_1 = a_1 b_1 c_1 \quad \text{und} \quad a_1 c_1(ab_1 + a_1 b)_1 = a_1 b_1 c_1$$

nicht verschwinden — so lange die Gebiete a, b, c als *allgemeine* gedacht, so lange nicht besondere Beziehungen zwischen denselben bestehend vorausgesetzt werden.

Natürlich wird man zur Anwendung des hier erläuterten systematischen Verfahrens nur zu schreiten haben, sofern sich nicht die überflüssigen Glieder („redundant terms") schon beim blossen Anblick, bei Durchsicht des Ausdrucks (by mere inspection) als andere zum Faktor habend entdecken lassen — vergl. das Beispiel:

$$a_1 bc + a_1 c + abc_1 + bc_1 = a_1 c + bc_1.$$

Bei der Untersuchung, ob ein $a + b = a$, d. h. $a_1 b = 0$ ist, kann übrigens zur Vereinfachung der Rechnung, wie McColl hervorhebt, von einem späteren Satze, vergl. Anm. 2 zu Th. 44_+) mit Vorteil Gebrauch gemacht werden.

γ_1) Nunmehr noch einige Übungen im rechnerischen Ziehen von Schlüssen. Man beweise den Sorites:

$$a \subseteq b, \quad b \subseteq c, \quad c \subseteq d, \quad d \subseteq e, \quad \text{ergo} \quad a \subseteq e,$$

indem man die Prämissen in der Form darstellt:

$$a = ab, \quad b = bc, \quad c = cd, \quad d = de.$$

(Jevons[2] p. 31.)

Auflösung. Durch Rückwärtseinsetzung folgt:

$$a = (abcd)\,e.$$

δ_1) Man zeige dass wenn den Prämissen eines (bejahenden) Kettenschlusses noch eine Subsumtion hinzugefügt wird, welche sozusagen die Kette *schliesst*, durch welche nämlich der major seiner letzten dem minor seiner ersten Prämisse subsumirt wird, dann sämtliche termini einander gleich sein müssen. Z. B. ist:

$$a \subseteq b, \quad b \subseteq c, \quad c \subseteq d, \quad d \subseteq e \quad \textit{und} \quad e \subseteq a,$$

so folgt $a = b = c = d = e$. (Jevons[9] p. 212.)

In der That hat man $a \subseteq e$ nebst $e \subseteq a$, somit $e = a$, ebenso $a \subseteq d$ nebst $d \subseteq a$, somit $d = a$, etc. —

ε_1) „Jedes a ist b", dargestellt als „Jedes a ist b, oder b", gibt durch Konversion den Schluss: „Jedes a, welches nicht b ist, ist b" — als scheinbare „contradictio in adjecto".

In Formeln kann man noch etwas einfacher so zu diesem Schluss gelangen: Wenn $a \subseteq b$, so ist nach Th. $15_\times$) $ab_1 \subseteq bb_1$, aber $bb_1 \subseteq b$ nach Th. $6_\times$), ergo $ab_1 \subseteq b$. Am einfachsten nach Th. 41_+), $c = b$ setzend.

Man löse diesen Widerspruch. (Jevons[9] p. 202.) Der scheinbare Widerspruch schwindet bei dem Hinweis darauf, dass $ab_1 \subseteq 0$, oder also $ab_1 = 0$ sein muss, d. h. es gibt keine a, welche nicht b sind; die Klasse dieser ist eine leere, und somit auch in der b mitenthalten! —

ζ_1) Wenn kein a ein bc (d. h. b und c zugleich) ist, was folgt bezüglich der b und der ac? (Jevons[9] p. 200.)

Beantwortung: die Prämisse $a \subseteq (bc)_1$ lässt sich umschreiben in $abc = 0$, und dieses ebenso wieder in $b \subseteq (ac)_1$, d. h. kein b ist ein ac. —

η_1) Jevons[9] p. 189.

Was ist der wahre Sinn der Redensart: „Alle Räder, welche nach Croyland kommen, sind mit Silber beschlagen"?

Bezeichnet r die Klasse der nach Croyland kommenden Räder und $s =$ silberbeschlagen, so soll $r \subseteq s$ sein.

Die Unterstellung ist: dass es silberbeschlagene Räder überhaupt nicht gebe, d. h. dass $s = 0$ sei.

Hiernach folgt gemäss Th. 2) und 5_+), dass auch $r \subseteq 0$ somit $r = 0$ sei, das heisst also: es kommen keine Räder nach Croyland (einer gebirgig entlegenen, früher schwer zugänglichen Abtei).

Aufgaben von einer ähnlichen Leichtigkeit der Behandlung, indessen gleichwol nicht immer von unzweifelhafter Klarheit der Fragestellung und unanfechtbarer Lösung, gibt Jevons in [9] in ungeheurer Menge.

ϑ_1) Beobachtet sei, dass die Phänomene a, b, c nur in den Kombinationen abc_1, a_1b_1c und $a_1b_1c_1$ vorkommen. Was sind die einfachsten Aussagen, die über a, b, c gemacht werden können? (Jevons[9] p. 219.)

Beantwortung. Der Ansatz:

$$abc_1 + a_1b_1c + a_1b_1c_1 = 1, \quad \text{oder} \quad abc_1 + a_1b_1 = 1$$

gibt erschöpfend die Mannigfaltigkeit 1 der wirklichen Fälle an. Durch beiderseitiges Negiren folgt:

$$(a_1 + b_1 + c)(a + b) = 0 \quad \text{oder} \quad ab_1 + a_1b + (a + b)c = 0.$$

Das Verschwinden der beiden ersten Terme zeigt an, dass $a = b$ ist, und kann hienach das Verschwinden des letzten Terms kürzer durch

$$(a + a)c = 0 \quad \text{oder} \quad ac = 0$$

ausgedrückt werden. Faktisch bedingen also die Phänomene a und b einander gegenseitig (die Klassen der Fälle wo das eine oder wo das andere von ihnen vorliegt, sind identisch) und wo eines von ihnen vorliegt, da fehlt c. —

ι_1) Gesetzt: Jedes s ist a oder b, aber jedes a ist p, und jedes b ist p. Zu folgern: jedes s ist p. (De Morgan [2] p. 123.)

Ist $s \subseteq a + b$, dazu $a \subseteq p$, $b \subseteq p$, so folgt nach Def. (3) aus dem System der letzteren Prämissen: $a + b \subseteq p$, und hieraus in Verbindung mit der ersten Prämisse nach Prinzip II:

$$s \subseteq p,$$

wie zu zeigen war.

Nach De Morgan wäre dieser Schluss eine gewöhnliche Form des „*Dilemma*". —

$\varkappa_1$) Gesetzt: Jedes a ist entweder b, c oder d, ferner kein b ist a und kein c ist a, so folgt: jedes a ist d. (De Morgan[2] p. 122.)

Beweis. Von den Prämissen

$$a \subseteq b + c + d, \quad ab = 0, \quad ac = 0$$

kann man die erste nach Th. 20) schreiben:

$$a = a(b + c + d) = ab + ac + ad,$$

was sich mit Rücksicht auf die folgenden vereinfacht zu:

$$a = ad \quad \text{oder} \quad a \subseteq d.$$

λ_1) Gesetzt: Jedes a ist b, c oder d; jedes b ist e, jedes c ist e, jedes e ist d. So folgere man: jedes a ist d. (De Morgan[2] p. 123.)

Prämissen: $a \subseteq b + c + d$, $b \subseteq e$, $c \subseteq e$, $e \subseteq d$.

Ergo: $b \subseteq d$, $c \subseteq d$, $b + c \subseteq d$,

und da ohnehin $d \subseteq d$, so ist auch $b + c + d \subseteq d$, woraus in Verbindung mit der ersten Prämisse a fortiori folgt: $a \subseteq d$. —

μ_1) Angenommen: Jedes a ist b, jedes c ist d aber kein b ist d. Zu beweisen, dass auch kein a ein c sein wird. (De Morgan[2] p. 123.)

Prämissen: $a \subseteq b$, $c \subseteq d$, $bd = 0$.

Aus den ersten beiden folgt nach Th. $15_\times$): $ac \subseteq bd$, sonach $ac \subseteq 0$, was auf $ac = 0$ nach Th. 5) hinausläuft. —

ν_1) Man vereinfache die Aussage:

$$(c + a)b_1 + ac = (a + b)c_1 + ab.$$

Auflösung. Bringt man rechts auf 0, so entsteht: $bc_1 + b_1c = 0$, das heisst: $b = c$.

ξ_1) Ist $x = ax + bx_1$, so soll bewiesen werden, dass $bx_1 = 0$ sein muss.

Am einfachsten geschieht dies mittelst Durchmultiplizirens der Prämisse mit x_1.

o_1) Wenn $a = ab + x(a + b)$, so ist $b = ab + x_1(a + b)$, und umgekehrt. Dies zu beweisen, wird man beide Gleichungen rechts auf 0 bringen, wodurch sich $a_1bx + ab_1x_1 = 0$ übereinstimmend ergibt.

π_1) (Jevons[9], p. 239.) Zu zeigen, dass die Aussage: „Alle a sind sowol b als c" äquivalent ist dem Systeme der beiden Aussagen: „Was nicht b ist, ist auch nicht a" und „Was nicht c ist, ist nicht a", mithin

$$a \Subset bc \quad \text{äquivalent} \quad \begin{cases} b_1 \Subset a_1 \\ c_1 \Subset a_1 \end{cases}.$$

Auflösung: Erstere Subsumtion, rechts auf 0 gebracht gibt:

$$ab_1 + ac_1 = 0$$

und dies ist auch die vereinigte Gleichung der beiden letztern Subsumtionen. Zudem geben diese nach (3): $b_1 + c_1 \Subset a_1$, was die Konversion durch Kontraposition der erstern Subsumtion nach 37) und 36) ist.

ϱ_1) De Morgan[3] p. 14 empfiehlt einem Jeden, der sich oder seine Bekannten auf die Probe zu stellen wünscht, in wie weit Zergliederung (Analyse) der Formen des Aussagens (of enunciation) für ihn von Wert sein würde, die Vorlage dieser Frage, deren Beantwortung sofort gegeben *und begründet* werden soll: ob die beiden folgenden Behauptungen (oder welche von ihnen) richtig seien:

Erstens. Alle Engländer, welche nicht schnupfen, sind zu finden unter den Europäern, welche keinen Tabak konsumiren.

Zweitens. Alle Engländer, welche keinen Tabak konsumiren, finden sich unter den Europäern, welche nicht schnupfen?

Bedeutet a = Engländer, b = Europäer, c = Schnupfer, d = Konsument von Tabak, so ist behauptet: $ac_1 \Subset bd_1$, sodann $ad_1 \Subset bc_1$, und gilt als selbstverständlich, dass $a \Subset b$ und $c \Subset d$ ist. Während also

$$ab_1 = 0 \quad \text{und} \quad cd_1 = 0$$

ist, sagt die erste Behauptung, dass

$ac_1b_1 + ac_1d = 0$

$$ac_1(b_1 + d) = 0, \quad \text{die zweite, dass} \quad ad_1(b_1 + c) = 0$$

$ad_1b_1 + ad_1c = 0$

sei; die zweite ist mithin offenbar richtig; von der ersten aber verschwindet zwar auch der Term $ac_1b_1 = c_1 \cdot 0$ identisch; dagegen bleibt die Behauptung übrig:

$$ac_1d = 0, \quad \text{oder} \quad ad \Subset c,$$

welche unrichtig, sintemal es auch Engländer gibt, die Tabak konsumiren ohne zu schnupfen (indem sie eben rauchen oder Tabak kauen, priemen). —

σ_1) Venn[1] p. 264.

Drei Personen A, B, C sind beschäftigt, einen Haufen Bücher in einem Antiquariat zu sortiren. A soll alle deutschen politischen Werke und die gebundenen ausländischen Novellen herauslesen, dem B sind die gebundenen politischen Werke und die deutschen Novellen, falls sie nicht politischen Inhaltes, zugewiesen, endlich dem C die gebundenen deutschen Werke und die ungebundenen politischen Novellen. [Statt „politisch" würden wir vielleicht besser „historisch" nehmen.]

Welche Werke werden von zweien der drei Personen beansprucht, und werden es gewisse Werke von allen dreien?

Auflösung. Es bedeute a = deutsch, b = politisch, c = gebunden, d = Novelle, und bei der Rechnung A die Klasse der der gleichnamigen Person zugewiesenen Werke, desgl. B etc., so ist gegeben:

$$A = ab + a_1cd, \quad B = bc + b_1ad, \quad C = ac + c_1bd$$

und hieraus folgt:

$$AB = bc(a + d), \quad AC = ab(c + d), \quad BC = ac(b + d),$$
$$ABC = abc,$$

womit die Antworten auf die gestellten Fragen gefunden sind und z. B. die letzte besagt, dass die gebundenen deutschen politischen Werke und nur diese (falls solche vorhanden) von allen drei Personen beansprucht werden.

In den Mathematical Questions with their solutions from the „Educational Times" (edited by W. J. C. Miller), Vol. 33, 1880, pag. 99 und 100 sind auch noch in andrer Manier die Lösungen der vorstehenden Aufgabe gewonnen von den Herrn C. J. Monro, R. R. Grey, und andern, sowie von H. McColl. In Bezug auf des letztern Manier vergleiche der weiter vorgeschrittene Leser den § 46, 18. Studie.

τ_1) Aufgabe, McColl, Math. Questions, Vol. 34, 1881, p. 85, gelöst von W. B. Grove, Elizabeth Blackwood, u. a.

Was ist der geringste Zusatz, der zu den Prämissen: $a \Subset \alpha$, $b \Subset \beta$, $c \Subset \gamma, \cdots$ gemacht werden muss, damit sie den Schluss gestatten: $x \Subset \xi$?

Auflösung. Mit Rücksicht auf Th. $38_\times$), 24_+) und $5_\times$) lässt das ursprüngliche Prämissensystem sich zusammenziehen zu der Subsumtion: $a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 + \cdots \Subset 0$, und da der gewünschte Schluss ist: $x\xi_1 \Subset 0$, so ist den Prämissen allermindestens hinzuzufügen die Annahme, dass

$$x\xi_1 \Subset a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 + \cdots$$

sei. Dieses setzt weniger voraus, der Zusatz ist *schwächer*, („weaker"), als wenn etwa das Subjekt nur in einzelnen Gliedern der Summe rechterhand enthalten gedacht werden müsste oder in einer echten Teilsumme der letztern, in einer Unterklasse, die nicht das Ganze wäre („short of the whole").

υ_1) Aufgabe (W. B. Grove, Math. Questions Vol. 35, 1881, p. 29 — hier leicht abgeändert).

In einer gewissen Schule hat jeder Schüler, der Englisch und Französisch, oder keines von beiden lernt, keine Algebrastunden; jeder an dem Unterricht in der Algebra Teilnehmende lernt sowol Englisch als Deutsch oder keines von beiden; jeder der Französisch aber nicht Deutsch lernt, hat entweder Englisch oder nicht Algebra. Man ersetze die Angaben durch eine einzige ihrem System äquivalente einfachere Angabe *und zeige*, dass die *Anzahl* derer, die Algebra haben, die Zahl der Englisch Lernenden nicht überschreiten kann.

Mit der letzteren Forderung treten wir eigentlich aus dem Rahmen der uns hier gesteckten Kategorieen von Aufgaben heraus; doch mag die Lösung als eine so naheliegende hier mit in Kauf genommen werden.

Auflösung (von McColl, Elizabeth Blackwood, u. a.). Es bezeichne a, d, e, f die Gattung der bezüglich Algebra, Deutsch, Englisch, Französisch lernenden Schüler.

So lauten die Data:

$$ef + e_1 f_1 \mathrel{\underline{\in}} a_1, \quad a \mathrel{\underline{\in}} ed + e_1 d_1, \quad d_1 f \mathrel{\underline{\in}} a_1 + e,$$

und ist die vereinigte Gleichung derselben:

$$a(ef + e_1 f_1 + ed_1 + e_1 d + d_1 e_1 f) = 0$$

oder, da der Koeffizient von e_1 in der Klammer sich auf 1 reduzirt, hernach das Th. 33_+) Zusatz anwendbar wird:

$$a(f + d_1 + e_1) = 0,$$

das heisst:

$$a \mathrel{\underline{\in}} def_1.$$

Da nun die Klasse a einem Teil der Klasse e schon eingeordnet, und a fortiori $a \mathrel{\underline{\in}} e$ ist, so muss Num. $a \leq$ Num. e sein, wenn wir mit „Numerus a" die Anzahl der Individuen der Klasse a bezeichnen — wie zu beweisen war. —

Die einfachste Formulirung der Data würde übrigens das System der beiden Aussagen:

$$af = 0 \quad \text{und} \quad a \mathrel{\underline{\in}} de$$

vorstellen, also: Wer Algebra hat, hat kein Französisch, dagegen sicher Deutsch sowol als Englisch.

φ_1) (Jevons[8] p. 283 und Miss Ladd[1] p. 51.)

Was sind, genau präzisirt, die Punkte, in welchen zwei Disputanten übereinstimmen, und die, in welchen sie differiren, wenn der eine (Henrici) behauptet:

Der Raum (a) sei „die dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit" (b) mit Punkten als Elementen (c),

der Andere der Meinung ist, dass der Raum die dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit sei und dass zugleich der Raum Punkte zu Elementen habe?

Auflösung. Henrici's Behauptung ist: $a = bc$, oder

$$ab_1 + ac_1 + a_1 bc = 0.$$

Der Andere behauptet erstens, dass $a = b$, mithin $ab_1 + a_1 b = 0$, oder

$$ab_1 + a_1 bc + a_1 bc_1 = 0$$

sei, und zweitens, dass $a \mathrel{\underline{\in}} c$, das heisst $ac_1 = 0$ sei.

Die vereinigte Gleichung dieser beiden Aussagen:

$$ab_1 + ac_1 + a_1 bc + a_1 bc_1 = 0$$

geht über diejenige Henrici's um das zu den vorhergehenden disjunkte letzte Glied $a_1 bc_1$ hinaus. Mithin stimmen Beide in dem was Henrici behauptete überein, während der Opponent desselben obendrein behauptet, dass

$$a_1 bc_1 = 0,$$

m. a. W.

$$bc_1 \mathrel{\underline{\in}} a$$

sei, d. h. dass eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, welche *nicht* Punkte zu Elementen hat, Raum sein müsse.

Wie schon das Beispiel der (Einzel-)Töne zeigt, welche nach Höhe, Stärke und Dauer eine dreifach ausgedehnte Mn. vorstellen, ist also jedenfalls der Opponent im Unrecht. Dies schliesst nicht aus, dass auch Henrici's angebliche Behauptung falsch ist. Beide Disputanten hätten nicht „*die*", sondern nur „eine" dreifach ausg. Mn. sagen dürfen, wo dann ihre beiderseitigen Aussagen: $a \mathrel{\underline{\in}} bc$ und: $a \mathrel{\underline{\in}} b$, $a \mathrel{\underline{\in}} c$ auf genau dasselbe hinausgelaufen wären — cf. Def. ($3_\times$). —

Die bisherigen Anwendungsbeispiele und Aufgaben schon lassen wol erkennen, dass wo man über so viele Methoden verfügt, wie im identischen Kalkul, wo man freie Wahl hat unter so vielen Mitteln, von welchen sich ein mehr oder minder indiziöser Gebrauch machen lässt — da jedenfalls von einem „toten Formalismus" nicht zu sprechen sein wird. —

Zehnte Vorlesung.

§ 19. Funktionen und deren Entwickelung.

Nachdem wir Operationen kennen gelernt haben, dienlich um aus gegebenen Gebieten oder Klassen deren neue abzuleiten, müssen wir uns über die Eigenschaften der Ausdrücke orientiren, welche mittelst dieser Operationen aufgebaut oder zusammengesetzt werden können. Auf dieses Ziel steuern wir nunmehr hin.

42_+) Theorem.

Jedes Gebiet y lässt sich durch jedes andre Gebiet x und dessen Negation x_1 „linear und homogen" ausdrücken in der Form:

$$y = ax + bx_1.$$

Beweis. Geometrisch wäre dies zwar evident für die Bedeutungen von $a = A$, $b = B$ der Fig. 19 in welcher x und y die Kreisflächen, dagegen A und B die Bilineums- oder Bogenzweieckflächen, in welche diese Buchstaben eingeschrieben sind, vorstellen. Offenbar ist nämlich hier: $Ax = A$, $Bx_1 = B$, $y = A + B$.

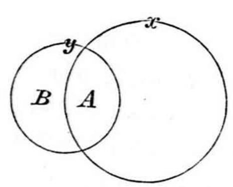

Fig. 19.

Indessen soll ohne Not nicht auf die Anschauung rekurrirt, zurückgegangen werden oder Berufung erfolgen.

Wir beweisen daher unsre Behauptung rein „analytisch". Und dies gelingt bereits — und auf die einfachste Weise — durch die nach bisherigem [Th. $21_\times$), 30_+) und $27_\times$)] leicht erweisliche Identität:

$$y = yx + yx_1,$$

welche mit obiger Behauptung zusammenfällt, sobald man unter a und b das Gleiche, und zwar y selbst, versteht.

Noch besser, nämlich — wie man bald in der Lage sein wird, darzuthun — auf die allgemeinste Weise, wird der Satz erwiesen durch die ganz unumschränkt gültige Gleichung:

$$y = (xy + ux_1)\,x + (x_1 y + vx)\,x_1,$$

in welcher, auch bei gegebenen Gebieten x, y, die Symbole u, v noch völlig beliebige, willkürliche oder *arbiträre* Gebiete vorstellen. Auch diese Gleichung wird man durch Ausmultipliziren rechterhand und mit Rücksicht auf bekannte Theoreme leicht verifiziren.

Die in unserm Theorem behauptete Gleichung ist demnach auch wahr, wenn

$$a = xy + ux_1, \quad b = x_1 y + vx$$

erklärt wird, d. h. unter a, b die angegebenen Werte verstanden werden.

Die *„Koëffizienten"* a und b der als zulässig behaupteten homogen linearen Darstellung des y durch x und x_1 sind demnach *nicht völlig bestimmt*, wenn auch x und y gegebene Werte (Bedeutungen) haben. Mögen sie doch sogar, wie gezeigt, je einen willkürlichen also vollkommen unbestimmten Bestandteil enthalten! Auch werden diese Koeffizienten im Allgemeinen ihre Bedeutung ändern, wenn man dem x andre und andre Werte beilegt (m. a. W. Bedeutungen unterlegt).

Auch für Klassen ist unser Satz unmittelbar einleuchtend: Die Individuen einer Klasse y müssen solche sein, welche x sind, oder solche, welche nicht x sind. Die Salze z. B. sind teils verbrennliche Salze, teils unverbrennliche.

Es versteht sich, dass auch eine dieser beiden Teilklassen eine leere sein kann, in welchem Falle der betreffende Term der Darstellung $ax + bx_1$ gleich 0 zu denken ist, und zwar *genügt* es, um das Verschwinden dieses Terms zu bewirken, dass man dessen Koeffizienten gleich 0 nehme. Verstünden wir z. B. unter y die Klasse der Menschen und unter x die Klasse der sterblichen Wesen (die Klasse „sterblich"), so wäre $b = 0$ zu denken. Die Klasse der Menschen besteht aus derjenigen der sterblichen Menschen, wozu aus der Klasse der unsterblichen Wesen *nichts* hinzuzunehmen ist; hier ist schon $y = ax = yx$ — vergl. auch Th. $20_\times$).

Entsprechend der schon erwähnten Unbestimmtheit der Koeffizienten a, b dürften wir freilich in unserm Beispiel unter b auch verstehen: die Klasse der Bäume — in Anbetracht, dass es auch keine unsterblichen Bäume gibt, also bx_1 doch $= 0$ wäre.

Die in dem Theorem gebrauchten Ausdrücke „linear", sowie „homogen" sind aus der mathematischen Terminologie herübergenommen; sie finden in der Mathematik ihre Erklärung, auch die Benennungen dort ihre Motivirung. Auf letztere wollen wir hier gar nicht, auf erstere nur so weit eingehen, als für unsre Zwecke unerlässlich ist. Für den Augenblick genügt die Bemerkung, dass man eben einen Ausdruck von der Form $ax + bx_1$ — und nur einen solchen — in Bezug auf x und x_1 „linear und homogen" zu nennen hat. Die allgemeinste lineare aber nicht homogene Funktion von x und x_1 hätte die Form:

$$ax + bx_1 + c;$$

sie enthielte nämlich ausser einem mit dem Faktor x und einem mit dem x_1 behafteten Gliede auch noch einen von x und x_1 freien Term, das sogenannte *„Absolutglied"* c.

Allerdings gebraucht die Mathematik diese Benennungen nur, sofern die Koeffizienten a und b (beziehlich auch c) von x und x_1 „unabhängig", bezüglich ebendieser Variabeln „konstant" sind, nämlich stets dieselben Werte behalten, welche Werte man auch dem x oder x_1 in Gedanken unterlegen mag. Diese Anforderung ist im obigen Theorem anscheinend nicht immer erfüllt. Es werden aber die demnächst folgenden Sätze von 44) an zeigen, dass und wie sie sich in weitestem Umfange realisiren lässt; auch oben waren schon bei der Annahme $a = b = y$ diese Koeffizienten für jede Deutung von x die gleichen.

43) Theoreme.

Die Subsumtion $a \in b$ *ist auch äquivalent der Gleichung:*

$43_\times$) $a = ub,$ | 43_+) $b = a + v,$

in welcher u *resp.* v *ein gewisses, ein unbestimmtes Gebiet vorstellt.*

Beweis. Da

$$ub \in b \quad | \quad a \in a + v$$

nach Th. 6), so folgt nach Th. 2) oder 3) aus der Gleichung jedenfalls die Subsumtion, was immer u und v bedeutet haben mochten, und muss nur noch gezeigt werden, dass auch das Umgekehrte für gewisse u, v der Fall ist.

Letzteres mag auf zwei Arten geschehen. Einmal selbständig: Hier genügt es, darauf aufmerksam zu machen, dass falls $a \in b$ ist, die Gleichung $43_\times$) schon für $u = a$, ebenso die 43_+) wenigstens für $v = b$ in der That erfüllt sein wird kraft Th. 20).

Sodann auch mittelst Berufung auf Th. 42). Nach diesem Satze kann stets:

$$a = ub + vb_1 \quad | \quad b = ua + va_1 = (u + a_1)(v + a)$$

geschrieben werden, indem man das eine der beiden Gebiete a, b linear und homogen durch das andre und seine Negation ausdrückt und die in Betracht kommenden Koeffizienten (die rechts vom Mittelstrich ganz andre sein mögen, als links von demselben) zunächst u und v nennt. Da nun, laut Voraussetzung, nach Th. 38):

$$ab_1 = 0 \quad | \quad a_1 + b = 1$$

ist, so folgt aus vorigem durch beiderseitiges Multipliziren mit b_1 resp. Addiren von a_1:

$$ab_1 = vb_1 = 0 \quad | \quad a_1 + b = ua + va_1 + a_1 = \\ = ua + a_1 = u + a_1 = 1$$

wonach sich die obige Gleichung vereinfacht zu

$$a = ub + 0 = ub \quad | \quad b = 1 \cdot (v + a) = a + v$$

wie zu zeigen war.

Zusatz zu Th. 43). Im Hinblick auf Th. 38) können wir also jetzt sagen, dass auch die Gleichungen:

$$ab_1 = 0 \text{ und } a = ub \quad | \quad a_1 + b = 1 \text{ und } b = a + u$$

oder, wenn man will, auch die:

$$ab = 0 \text{ und } b = a_1 u \quad | \quad a + b = 1 \text{ und } b = a_1 + u$$

einander äquivalent sind.

Es wird der Satz links (indem man x für b sagt) als ein spezieller Fall eines späteren Hauptheorems 50_+) erscheinen.

Anmerkung 1. Man hat wohl zu unterscheiden zwischen *unbestimmten* und *willkürlichen* Gebieten. Die letztern gehören zu den erstern, aber nicht umgekehrt.

Ist b gegeben und a | Ist a gegeben und b

lediglich durch die Anforderung bestimmt, dass es die Subsumtion

$$a \in b$$

erfülle, so kann man in der Gleichung

$43_\times$) das u | 43_+) das v

als ein vollkommen *willkürliches* oder arbiträres Gebiet ansehen.

Anders aber, wenn überdies auch das andre der beiden Gebiete a, b gegeben, oder überhaupt nur, falls es auch nicht gegeben ist, noch andern Anforderungen ausser jener Subsumtion unterworfen sein sollte.

Für *gegebene* a *und* b, z. B., dürfen u und v nicht ganz beliebig angenommen werden.

Vielmehr müssen sie alsdann von der Form sein:

$$u = a + wb_1 \quad | \quad v = (a_1 + r)\, b$$

wo nur mehr w resp. r ein beliebiges Gebiet vorstellt — wie wir durch ein späteres Theorem 50_+) in die Lage gesetzt sein werden zu beweisen, indem wir die Gleichung 43) nach der Unbekannten u resp. v auflösen.

Ebenso mag überhaupt jede fernere an a und b gestellte Anforderung eine Einschränkung des Willkürlichkeitsbereichs, der Variabilität von u oder v involviren, gewisse Gebieteklassen als unzulässige Bedeutungen für u oder v ausschliessen.

Ähnlich, wenn man etwa die beiden die Subsumtion $a \in b$ nur umschreibenden Gleichungen $43_\times$) und 43_+) als gleichzeitig geltende in's Auge fasst, können u und v nicht völlig unabhängig von einander angenommen werden. Vielmehr, wenn eines von diesen beiden Gebieten (eventuell im Einklang mit den für dasselbe angeführten Bestimmungen) festgelegt, gegeben oder irgendwie angenommen ist, muss das andre die Form haben:

$$u = a + sv_1, \qquad \Big| \qquad v = b(u_1 + t),$$

wo nur mehr s, resp. t willkürlich bleibt.

Auch dieses nachzuweisen ist weiter nichts, als eine hier vorgreifend angeführte und als Übungsexempel zu empfehlende Anwendung des weiter unten vorgetragenen Theorems 50_+). Zur Erleichterung von deren Lösung und um auf dieselbe nicht mehr zurückkommen zu müssen, führen wir hier nur noch an, dass u resp. v die Gleichung erfüllen muss:

$$ua_1v + u_1a = 0 \qquad \Big| \qquad vb_1 + v_1bu_1 = 0$$

welche sich ergibt, indem man den Wert von b oder a aus der einen von den beiden Gleichungen 43) in die andre substituirt und dann rechts auf 0 bringt, kurz indem man eines der Symbole a, b aus den Gleichungen 43) eliminirt.

Beispielsweise kann die nach Def. (2) geltende Subsumtion:

$$0 \Subset b \qquad \Big| \qquad a \Subset 1$$

nach Th. 43) umgeschrieben werden in eine Gleichung:

$$0 = ub. \qquad \Big| \qquad 1 = a + v.$$

Doch sind alsdann u und v augenscheinlich nicht vollkommen willkürlich und andrerseits sind sie auch nicht vollkommen bestimmt. Es gelten die Gleichungen (wenn b nicht selbst 0 resp. a nicht selbst 1 ist) nicht für alle, sondern nur für gewisse Gebiete u, v, aber doch für unendlich viele; es muss nämlich u, v von der Form sein:

$$u = wb_1, \qquad \Big| \qquad v = a_1 + r,$$

wo w und r arbiträr bleiben. In der That lag hier ein Fall vor, wo $a = 0$ resp. $b = 1$ völlig bestimmt war, wo es „gegeben" erscheint.

Anmerkung 2. Wir wollen jetzt im Überblick die *zwölf* Arten zusammenstellen, auf welche nach den bisherigen Sätzen eine Subsumtion $a \Subset b$ in Gestalt einer einzigen Beziehung (zumeist Gleichung) angeschrieben werden kann. Die folgenden Aussagen sind einander äquivalent:

$$a \Subset b \quad \text{und nach 37):} \quad b_1 \Subset a_1;$$

nach 20):

$$a = ab, \qquad b = a + b,$$

woraus nach 32) und 36) auch folgt:

$$a_1 = a_1 + b_1, \qquad b_1 = a_1b_1;$$

nach 38):

$$ab_1 = 0, \qquad a_1 + b = 1;$$

nach 43):

$$a = ub, \qquad b = a + v,$$

woraus nach 32) und 36) auch:

$$a_1 = b_1 + u_1, \qquad b_1 = a_1v_1$$

— in welchen letzteren Darstellungen u, v und somit auch u_1, v_1, *gewisse* nicht näher bestimmte Gebiete vorstellen, welche in den oben erläuterten Fällen auch als *arbiträre* auszulegen erlaubt ist.

Wie man leicht erkennt kann man obendrein die Gleichungen auch sämtlich durch Subsumtionen ersetzen in folgender Weise:

$$\begin{array}{ll} a \Subset ab, & a + b \Subset b \\ a_1 + b_1 \Subset a_1, & b_1 \Subset a_1b_1 \\ ab_1 \Subset 0, & 1 \Subset a_1 + b \\ a \Subset ub, & a + v \Subset b \\ b_1 + u_1 \Subset a_1, & b_1 \Subset a_1v_1 \end{array}$$

und mag so die Zahl der verfügbaren Ausdrucksweisen noch um zehn vermehren.

Bei den sechs ersten von diesen gilt nämlich die umgekehrte Subsumtion nach Th. 6) und Def. (2) ohnehin als allgemeine Formel, sodass Gleichheit eintritt. Und bei den vier letzten Subsumtionen, welche ihrerseits aus der ihnen entsprechenden Gleichung nach Def. (1) hervorgingen, folgt auch aus der Subsumtion wieder die Gleichung nach Th. 6), welches uns $ub \Subset b$ resp. $a \Subset a + v$ liefert, etc., darnach gemäss Prinzip II den Schluss $a \Subset b$ zu ziehen gestattet, welcher äquivalent war der Gleichung (in der freilich u, v eine andre Bedeutung haben kann als in der vorausgesetzten Subsumtion).

Wir geben jetzt die Erklärung des *Funktions*begriffes für (und in seiner Beschränkung auf) den identischen Kalkul.

Definition. *„Funktion" von x* oder $f(x)$ — gelesen: f von x — *nennen wir im identischen Kalkul jeden Ausdruck, welcher aus dem Gebietsymbol x* (eventuell auch seiner Negation x_1) *und irgendwelchen andern Gebietsymbolen aufgebaut ist vermittelst der drei Grundoperationen des Kalkuls als da sind: identische Multiplikation, Addition und Negation.*

Beliebig häufige Verwendung eines jeden Symbols ist bei diesem Aufbau selbstverständlich zugelassen. Auch war die in Klammer gesetzte Einschaltung strenge genommen überflüssig, weil wir zu x zunächst durch Negiren ohnehin x_1 ableiten und diese beiden Bausteine beliebig weiter verwenden können. Von den Operationen dürfen einzelne auch unvertreten sein; ebenso mögen andere Symbole fehlen.

Analog ist unter einer *Funktion $f(x, y)$ von x und y*, sowie unter einer *Funktion $f(x, y, z)$ von x, y und z*, u. s. w. irgend ein *Ausdruck* zu verstehen, *der aus den angegebenen Symbolen* x, y resp. x, y, z, etc. *nebst vielleicht irgend welchen andern vermittelst der drei identischen Spezies aufgebaut ist.*

Die angeführten Symbole x, resp. x, y, resp. x, y, z, etc. heissen die „*Argumente*“ der Funktion $f(x)$, resp. $f(x, y)$, resp. $f(x, y, z)$, etc., welche demnach als eine Funktion von nur *einem* Argumente, resp. von zwei, drei oder mehr Argumenten zu bezeichnen — oder, wie man sogleich erkennen wird, besser gesagt — „anzusehen“ ist.

Im Allgemeinen werden hienach in dem Aufbau des eine Funktion darstellenden Ausdruckes die Argumente $x, y, z, \ldots$ der Funktion *nebst ihren Negationen* $x_1, y_1, z_1, \ldots$ vorkommen, unter sich und mit noch andern Gebietsymbolen, wie $0, 1, a, b, c, \ldots a_1, b_1, \ldots$ verknüpft durch identische Multiplikation oder Addition, wobei zwischen die Verknüpfungen hinein, sowie solchen vorangehend oder nachfolgend, auch die Operation der Negation an irgendwelchen Teilen des Ausdrucks vorgeschrieben sein mag.

Jene „andern“ Gebietsymbole, $a, b, c, \ldots$ welche neben den Argumenten vorkommen mögen, werden — wenn mit Buchstaben dargestellt und als allgemeine Gebiete aufgefasst — auch wol „*Parameter*“ der Funktion genannt.

Zu jedem ein Gebiet darstellenden Ausdruck darf man nach Th. $21_\times$) den Faktor 1 so oft es beliebt hinzusetzen, und nach Th. 30_+) für den einen Faktor 1 schreiben $x + x_1$, für einen zweiten Faktor 1 schreiben $y + y_1$, für einen dritten $z + z_1$, etc. und was hier für den ganzen Ausdruck gesagt ist, gilt ebenso auch für irgend einen Term, ein Operationsglied oder einen Teilausdruck desselben.

Hienach ist offenbar, dass man jeden Ausdruck überhaupt nach Belieben ansehen kann als Funktion von x*), oder von x und y, von x, y und z, etc., *auch wenn er diese Argumente von vornherein gar nicht enthalten sollte.* Mit andern Worten: unter der „beliebig häufigen“ Verwendung der Argumentsymbole in dem Aufbau des Ausdruckes ist oben auch die Nicht-Verwendung derselben, die Enthaltung von ihrer Verwendung, mit zugelassen.

Auch die Unterscheidung zwichen den Argumenten und den Parametern der Funktion erscheint hienach als eine willkürliche: Wenn wir einen Ausdruck als Funktion von $x, y, z, \ldots$ hinstellen, so heisst dies weiter nichts, als dass wir beabsichtigen, sein Verhalten für verschiedene Bedeutungen oder Wertsysteme *ebendieser* genannten Argumente zu studiren.

*) In Bezug auf irgend ein Gebiet y folgt dies nebenbei auch schon aus dem Th. 42).

Insofern wir dabei diesen Argumenten andre und andre spezielle Gebiete als Bedeutung unterlegen, ihre Namen festhaltend denselben andre und andre Werte beilegen werden, kann man auch sagen, man lasse die Argumente *sich ändern*, oder sie seien „veränderliche“ Gebiete, *Variable.*

Die Parameter der Funktion dagegen, deren jedem wir — etwa im Laufe einer Untersuchung — stets dieselbe Bedeutung untergelegt wissen wollen, nennen wir „beständige“ Gebiete oder *Konstante.*

Es kann sein, dass wenn die Bedeutung der Argumente wechselt, diese also geändert werden, auch der als Funktion derselben hingestellte Ausdruck seine Bedeutung wechselt, dass also der Funktionswert sich dann ebenfalls ändert. Ebenso kann es aber auch sich ereignen, dass trotzdem man die Argumente alle denkbaren Wertsysteme (aus der Mannigfaltigkeit unsrer Gebiete) durchlaufen lässt, der Wert der Funktion doch stets der gleiche bleibt, dass er als unveränderlich, „*absolut konstant*“ sich herausstellt. Kurz gesagt: die Funktion selbst kann sich als variabel oder aber als konstant erweisen. (Beispiele nachher.)

Im erstern Falle wird die Funktion als die *abhängige* (dependente) Variable bezeichnet, im Gegensatz zu den Argumenten als den *unabhängigen* (independenten) Variabeln — in Anbetracht, dass es bei den letztern in unser Belieben gestellt erscheint, welchen Wertänderungen wir dieselben unterwerfen wollen, wogegen hienach die Veränderlichkeit des Funktionswertes zufolge des für denselben geltenden Ausdruckes sich mit Denknotwendigkeit richtet, mithin als eine durch die Veränderungen, denen man die Argumente einmal unterworfen hat, durchaus „bedingte“ erscheint.

Bleibt der Wert einer Funktion stets der gleiche, wenn man einem bestimmten Argument x alle denkbaren Werte aus der Mannigfaltigkeit unsrer Gebiete als Bedeutung unterlegt während die Bedeutung aller übrigen Symbole festgehalten wird, wogegen er sich ändern würde sobald auch die Bedeutung der übrigen Argumente wechselte, so nennt man die Funktion nur „relativ konstant“ und zwar *konstant in Bezug auf dieses* genannte *Argument* x. Ebenso kann eine Funktion auch *konstant* sein *in Bezug auf eine bestimmte Gruppe von Argumenten*, indem ihr Wert durch alle möglichen Veränderungen, denen man eben diese Argumente unterwirft, sich nicht beeinflusst erweist. Auch hiezu nachher Beispiele.