

dem allgemeinen Urteil erhoben, dass die Berührung mit Feuer brennenden Schmerz verursacht. Und jener Art des Schliessens vom Besondern auf's Besondere — des „*Analogieschlusses*“ — ist schon das Tier fähig; auch der „*asinus ad lapidem non bis offendit eundem*“, selbst der Esel stösst nicht zwei mal an denselben Stein. Mit dem allgemeinen Satze aber, wie ihn der Induktionsschluss liefert, erhebt sich der menschliche Intellekt über den des Tieres. Dieser Satz ist das wirksamste und sicherste Mittel, aus bisherigen Erfahrungen für weitere Fälle Nutzen zu ziehen, dieselben zu verwerten. Derselbe entlastet das Gedächtniss von der Anforderung, die Einzelwahrnehmungen selbst (in ihrer vielleicht grossen Anzahl) mit all' ihren Nebenumständen und Details zu behalten; er gewährt die Erleichterung, gestattet, alles Nebensächliche zu vergessen; indem durch ihn diese Einzelwahrnehmungen gleichsam summarisch gebucht, nur das Facit aus denselben gezogen wird, bildet er die bequemste Form, dieselben zur Nutzanwendung auf weitere Einzelfälle in der Erinnerung aufzuspeichern und im Geiste zurecht zu legen. Er bildet dann die Vermittelung, das Band, die Brücke, über die von jenen vielleicht schon im Gedächtniss gelöschten zu diesen neuen Fällen der Subsumtionsschluss uns hinüberführt.

Den Satz „Alle Menschen sind sterblich“ auf die bereits gestorbenen Menschen anzuwenden würde freilich ein ziemlich unnützes Beginnen sein. Aber wenden wir nicht diesen Satz (als Obersatz in Verbindung mit dem Untersatz „N. N. ist ein Mensch“ und der Konklusion: „ergo ist N. N. sterblich“) fortwährend an auf uns und unsre noch lebenden Mitmenschen? Und wie anders würde es in der Welt aussehen, wenn nicht unsre ganze Lebensführung unter der Herrschaft dieses Syllogismus stünde? Dass man kein Logiker zu sein braucht, um ihn zu machen, nimmt ihm nichts von seiner Wichtigkeit. (Wundt l. c.)

Oft auch handelt es sich darum mit Hilfe der Konklusion festzustellen, ob eine Prämisse zulässig ist — wie dies schon S. 11 angedeutet wurde — eine Prämisse, die zunächst noch einen provisorischen oder hypothetischen Charakter hat. Der Chemiker z. B., der eine Substanz zu verbrennen versucht, um zu ermitteln, ob sie organischen Ursprungs sei, steht unter der Herrschaft eines Syllogismus, dessen Obersatz lautet: „Alle organischen Körper sind verbrennlich“, dessen Untersatz: „Diese Substanz ist organisch“ aber erst durch das tatsächliche Eintreffen oder Nichteintreffen des Schlusses: „Diese Substanz ist verbrennlich“ als eine zulässige (und dann noch weiter zu verfolgende, vollends ausser Zweifel zu setzende) oder aber als eine

fortan zu verwerfende Hypothese erkannt wird (vergl. Wundt ibidem).

Wesentlich sind es übrigens *andere* Formen des Syllogismus (als der bisher besprochene einfache Subsumtionsschluss II), welche in dieser Hinsicht in Betracht kommen, weshalb die weitere Ausführung der angeregten Bemerkung auf die 20. Vorlesung zu versparen wäre.

Es gibt auch *scheinbare* Ausnahmen zu dem Prinzip II. Ohne die Vollständigkeit der Aufzählung garantiren zu wollen, bemerke ich deren von dreierlei Art. Als mehr nur auf ein Spiel mit Worten hinauslaufend will ich dieselben im Nebentexte behandeln.

Zur Verdeutlichung der *ersten* Art von solchen Ausnahmen diene das Beispiel (aus Jevons⁶):

„Hans ist kein Narr. Kein Narr eignet sich zur Bekleidung hoher Staatsämter. Ergo: Hans eignet sich zur Bekleidung hoher Staatsämter.“

Was hier als Mittelbegriff erscheint hat den verbalen Ausdruck „kein Narr“. Wir haben aber schon in § 2 hervorgehoben, dass „kein-a“ überhaupt nicht eine Klasse ist. Das wahre Subjekt des scheinbaren Obersatzes bildet die Klasse: „Jeder Narr“, sein Prädikat: „ist ungeeignet zur Bekleidung hoher Staatsämter“. Was ferner als Untersatz erscheint, würde für die Zwecke der Logik korrekter darzustellen sein, sei es in Gestalt von: Hans »ist nicht« ein Narr, als die Verneinung des Satzes: Hans ist ein Narr, sei es als negativ prädicirendes Urteil in Gestalt von: Hans ist (ein) Nicht-Narr (d. h. bei gesundem Verstande). Welche von diesen beiden Auffassungen maassgebend sein solle für das verneinende Urteil, bildet eine bekannte Streitfrage unter den Philosophen, zu der wir erst in § 15 Stellung nehmen werden. Jedenfalls aber wird der Schluss nach Schema II hiemit hinfällig; derselbe fällt auch nicht etwa unter das Schema irgend eines andern gültigen Syllogismus. Bei der zweiten Auffassung sieht man augenblicklich, dass gar kein Mittelglied vorhanden. Hier ist die Klasse „Narr“ Subjekt des einen, die Klasse „Nicht-Narr“ Prädikat des andern Satzes und statt dreien gehen also vier Glieder in die Prämissen ein (sogenannte „*quaternio terminorum*“).

Auch eben hierauf, auf die „*fallacia falsi medii*“, den „*Trugschluss*“ (das „*Sophisma*“) oder „*Fehlschluss*“ (die „*Paralogie*“, den „*Paralogismus*“) des falschen Mittelgliedes — Trugschluss oder Fehlschluss, je nach der Absichtlichkeit oder Unabsichtlichkeit des unrichtigen Verfahrens — läuft auch die *zweite* der gedachten scheinbaren Ausnahmen hinaus.

Z. B. Aus dem Untersatz: „Rappen sind Pferde“ und dem Obersatz: „Pferde sind auf dem Rennplatze“, folgt *nicht* mit Denknotwendigkeit der Schluss: „Rappen sind auf dem Rennplatze“.

Denn während der Untersatz dasselbe besagt, wie „Alle Rappen sind Pferde“, m. a. W. die (ganze) Klasse der Rappen ist enthalten in der Klasse der Pferde, während also der Untersatz ein wirklich „universales“ Urteil ist, trifft solches bei dem vermeintlichen Obersatze nicht zu. Vielmehr ist der Sinn dieses in der That unvollständigen Ausspruches eigentlich nur der: „*Gewisse* (oder *Einige*) Pferde sind auf dem Rennplatze“, und dieser

Sinn würde ihm auch nur zukommen, wenn er selbst ausdrücklich gelautet hätte: „Alle Pferde sind auf dem Rennplatze“, indem unter „alle Pferde“ dann doch wieder nur diejenigen eines gewissen Besitzers, einer bestimmten Gruppe gemeint sein konnten, nicht aber die Klasse der Pferde überhaupt. Der angebliche Obersatz ist in Wahrheit ein „partikulares“ Urteil.

Im vorliegenden Beispiele entsprang der Fehler aus der Unvollständigkeit des Ausdrucks, der durch seine Lückenhaftigkeit bedingten Ungenauigkeit desselben, wodurch das (unzulänglich beschriebene) Subjekt des zweiten Satzes dem Namen nach zur Deckung kam mit dem Prädikat des ersten. Dergleichen „elliptische“ Redeweisen, welche man in der Wortsprache bequemlichkeitshalber sich ungemein häufig gestattet, sind die Hauptquelle für die logischen Paradoxa, d. h. die scheinbaren Widersprüche zur Theorie des exakten Denkens.

Die leicht in's Endlose zu vermehrenden Beispiele zeigen, dass Nachlässigkeit im Ausdruck für das exakte Denken seine Gefahren birgt, und dass man sich, unbekümmert um den Sinn, mechanisch, nach den Schemata oder Prinzipien des Kalküls behuf Schliessens zuwerke zu gehen, erst gestatten darf, wenn die Prämissen in der Zeichensprache des Kalküls bereits ihren vollständigen und angemessenen Ausdruck gefunden haben.

Indessen, auch wenn die Prämissen im Geiste der Wortsprache beide korrekt ausgedrückt erscheinen, kann man noch zufolge einer (alsdann also *berechtigt* zu nennenden) Doppelsinnigkeit des Mittelbegriffs in den Fehler der fallacia falsi medii verfallen.

Dies werde illustriert durch: Einige Herren sind Grundbesitzer. Herr Meier, Herr Müller, Herr Schmidt und Herr Schulze sind einige Herren. Ergo sind dieselben Grundbesitzer.

Das Mittelglied „einige Herren“ hat im (hier vorangestellten) Obersatz eine möglicherweise ganz andere Bedeutung als im (darauf folgenden) Untersatz.

Allgemein merke man: das Mittelglied b des Syllogismus II darf nicht bloß durch einen sprachlichen Ausdruck von der Form „einige x “ gegeben erscheinen; solche Beschreibung würde nicht genügen, um die Bedeutung desselben unzweideutig zu erklären.

Diese Unbestimmtheit entspringt aber nicht allein aus derjenigen des angewendeten „unbestimmten Zahlwortes“: „einige“, sondern sie ist schon durch die Anwendung eines *Zahlwortes* überhaupt bedingt.

Sagten wir: A, B und C sind drei Personen. Drei Personen sind an dem Morde beteiligt. Ergo sind A, B und C an dem Morde beteiligt — so wäre es ja ein vollkommen bestimmtes Zahlwort „drei“, welches zur Charakterisierung des Pseudo-Mittelgliedes mit verwendet worden. Und doch kann der Schluss nicht verbindlich sein, solange nicht als Subjekt des Obersatzes: „Diese selben drei Personen“ zu setzen ist.

Die Verbindung eines Zahlwortes mit einem substantivischen Begriffe ist *nicht* ausreichend, ist unzulänglich, um eine wohldefinierte Klasse unzweideutig zu erklären. Dieselbe kann daher auch keinen Mittelbegriff liefern, der als solcher anzuerkennen wäre.

[Man könnte freilich auch: „drei Personen“ als eine wohldefinierte Klasse hinstellen, welche dann zu umfassen hätte jedes erdenkliche Tripel,

jede Zusammenstellung von irgend dreien Personen aus der Vergangenheit, Gegenwart wie Zukunft des Menschengeschlechtes. Diese Klasse ist es aber nicht, von der die Wortsprache auszusagen beabsichtigt, sobald schlechtweg von drei Personen die Rede ist; sie meint dabei immer „gewisse drei Personen“, d. i. nur ein nicht näher bestimmtes Individuum der vorhin beschriebenen Klasse.]

Das Nämliche was vorhin für das Beispiel der Zahl drei durchgesprochen ist, würde sich auch auf die Zahl eins übertragen lassen, da wo sie als der „unbestimmte Artikel“: „ein“ mit einem Substantiv verknüpft wird.

Um Fehlschlüsse der erläuterten Art, wie sie aus dem *Doppelsinn des Mittelgliedes* entspringen, zu vermeiden, lege man sich jeweils die Frage vor, ob unbeschadet der Gültigkeit der Prämissen das fragliche Mittelglied im Obersatz auch wirklich genau in demselben Sinne (als dasselbe) verstanden werden dürfe und müsse, wie im Untersatz.

Im Anschluss an die letzten Betrachtungen des Nebentextes konstatieren wir übrigens eine wichtige Verhaltensmassregel, deren Befolgung sich die Wortsprache keineswegs stets zur Richtschnur nimmt, wogegen die exakte Logik sich vor der verbalen durch ihre Befolgung hervorthun muss. Es ist der Grundsatz, die *Maxime*: *Verschiedenes niemals mit demselben Zeichen darzustellen* im Laufe einer Untersuchung — ein Grundsatz, der als die Forderung der *Einsinnigkeit* aller etwa verwendeten Zeichen schon in B der Einleitung seine Rechtfertigung fand.

Die Unerlässlichkeit dieser Vorschrift kann eben durch das Prinzip II dargethan werden.

Sind a, b, c Gebiete oder Klassen derart, dass etwa $a \not\subseteq b$ ist, so gibt es auch immer ein solches x , dass $x \not\subseteq c$ ist (man braucht z. B. unter x sich nur c selber vorzustellen kraft I). Erlaubten wir uns nun etwa, das x (welches im allgemeinen von b verschieden ist) ebenfalls mit dem Namen b zu bezeichnen, so erhielten wir zu Prämissen $a \not\subseteq b$ und $b \not\subseteq c$ und kämen folgerichtig gemäss II zu dem Schlusse: $a \not\subseteq c$ — als einer Folgerung aus der einzigen Annahme $a \not\subseteq b$, bei ganz beliebigem c ! Und die fallacia falsi medii wäre fertig und legitimirt.

Dass die Verwendung einunddesselben Zeichens als Name für verschiedene Denkbjekte (im Zusammenhange einer Überlegung) wie im vorstehenden Beispiel sich immer rächen *muss*, lässt sich allerdings nicht beweisen. Um aber die konsequente Durchführung unsrer Prinzipien unbehelligt von allen Nebenrücksichten zu ermöglichen, dürfen wir uns auch einer solchen Gefahr nicht aussetzen. Es muss demnach für den Kalkül wie für die exakte Logik maassgebend sein, dass man immer nur Identisches mit demselben Buchstaben benenne, oder die Bedeutung eines Zeichens, so wie sie einmal festgesetzt worden, unverbrüchlich festhalte, bis die Untersuchung über das damit Bezeichnete zum Abschluss gekommen. Es ist darauf zu halten ver-

pflichtet, wer immer dem dictum des „quidquid valet etc.“ allgemeine Geltung zuerkennen will.

Als eine Nutzenanwendung hievon bemerkten wir schon in § 2 S. 150, dass wenn ein Ausdruck wie „einige b “ in verschiedenen Sätzen vorkommt, diese Klasse nicht immer mit demselben Zeichen b , sondern allemal wieder mit einem neuen b' , b'' , etc. im allgemeinen darzustellen sein wird. Und ähnliches gilt, wo „ein b “ als Subjekt eines „unbestimmten“ Urteils auftritt. Der identische Kalkül wird ja übrigens zur Darstellung partikularer sowol als unbestimmter Urteile, über bessere als dieses provisorische Auskunftsmittel späterhin verfügen.

Eine dritte Art von scheinbaren Ausnahmen zu Prinzip II möge verdeutlicht werden an dem Beispiele von Jevons:

Alle Werke (Schriften, Stücke) Shakespeare's können (von einer Person) nicht in einem Tage durchgelesen werden. Hamlet ist ein Werk von Shakespeare. Ergo kann Hamlet nicht in einem Tage durchgelesen werden. Für eine deutsche Schule mag man Goethe's Iphigenie als Paradigma vorziehen.

Der Untersatz und Schluss kann nicht bemängelt werden, wofern es mit dem Obersatze seine Richtigkeit hat.

Das Subjekt dieses — oben vorangestellten — Satzes: „Alle Werke.“ steht hier nicht „distributiv“ als eine Klasse, sondern „kollektiv“ als eine Menge; es steht für „die Gesamtheit der Werke“, für „alle Werke zusammengekommen“ (cuncti, nicht omnes) und wäre besser durch „Sämtliche Werke“ auszudrücken gewesen.

Das Urteil ist gar kein *generelles* (abgesehen von der Unbestimmtheit der durchlesenden Person); es ist kein *im engeren Sinne „universales“*. Ein „universales“ (im weiteren Sinne, schlechtweg) kann es nur genannt werden, insofern es ein „singulares“ Urteil ist und die singularen Urteile mit zu den universalen gerechnet werden.

Wofern der Untersatz nicht gerade Identität zwischen seinem Subjekt und seinem Prädikate aufweist, wird er — wie dies oben der Fall — eine wirkliche *Unterordnung* dieses Subjekts unter die Klasse seines Prädikatbegriffes ausdrücken. Sein Prädikat muss dann also ein *allgemeiner* oder *Gattungsbegriff* sein. Dieses Prädikat des Untersatzes muss aber, als der Mittelbegriff, zugleich Subjekt des Obersatzes sein (wenn anders ein Subsumtionsschluss nach dem Schema II sich soll anbringen lassen) — was oben nicht zutrifft; und deshalb war der Schluss hinfällig.

Es sind also bloß Unvollkommenheiten unsrer modernen Sprachen gewesen, die zu den Fehlschlüssen verleitet haben und damit Ausnahmen zum Prinzip II zu begründen schienen.

Zusatz zu II. Die Ausdehnung des Satzes II auf mehr als zwei als Prämissen angenommene Subsumtionen, welche sich so anordnen lassen, dass bis zur letzten hin das Prädikat einer jeden mit dem Subjekt der auf sie folgenden übereinstimmt, ist naheliegend. Wenn $a \in b$, $b \in c$ und $c \in d$, so folgt auch $a \in d$ und so weiter.

Der Beweis ist auf Grund von II selbst — durch mehrmalige An-

wendung ebendieses Prinzips — zu leisten. So folgt hier aus den beiden ersten Prämissen nach II schon, dass $a \in c$ sein muss, und hieraus in Verbindung mit der dritten Prämisse $c \in d$ folgt abermals nach II, dass $a \in d$ sein muss, wie behauptet worden.

Wir haben damit das Verständniss der einfachsten Form des von der alten Logik sogenannten *Kettenschlusses* (sorites) gewonnen.

Anmerkung 1 zu Prinzip II.

Auf dem Anwendungsfelde δ) des § 3, d. i. im „*Aussagenkalkül*“ — vergleiche die Anmerkung auf S. 161 sq. — wird dem Prinzip II die Bedeutung zukommen: Wenn c aus b folgt und b aus a folgt, so folgt auch c aus a — unter a, b, c irgend welche Annahmen oder Behauptungen, irgend welche „Aussagen“ (Urteile) verstanden.

Wir werden von diesem „Prinzip“ bei den Beweisen unsrer Theoreme fortgesetzt — und, als von etwas Selbstverständlichem, stillschweigend Gebrauch machen. Damit aber der Leser alsdann auch dessen inne werde, sei hier im voraus schon darauf aufmerksam gemacht.

Unter den Prinzipien des Gebietekalküls aber darf solches „Prinzip“ offenbar nicht aufgezählt werden, da es ersichtlich oder wenigstens anscheinend gar nicht von Gebieten handelt. Jedenfalls in der That betrifft es nicht die Gebiete unsrer hier „bevorzugten“ Mannigfaltigkeit.

Anmerkung 2 zu Prinzip II.

Ähnlich wie mit dem letzten verhält es sich mit noch einem Grundsatz, den wir fortgesetzt bei unsern Schlussfolgerungen im Gebietekalkül bethätigen werden.

In die fundamentalen Sätze und Formeln des Kalküls gehen Buchstaben ein als *allgemeine* Symbole, in solcher Weise, dass denselben aus der Mannigfaltigkeit unsrer Gebiete je ein beliebiges als „Wert“ oder Bedeutung soll untergelegt werden dürfen.

Der Grundsatz, den wir meinen, ist nun dieser: Jedes allgemeine Symbol (dessen Bedeutung unsrer Mannigfaltigkeit angehört) darf durch jedes beliebige (andre) Symbol (dessen Bedeutung derselben Mannigfaltigkeit angehört) durchweg ersetzt werden — einerlei ob das letztere wiederum als ein (natürlich ebenso) „allgemeines“ aufgefasst wird, oder ob es beliebt wird, dessen Bedeutung irgendwelche Beschränkungen aufzuerlegen, oder ob endlich dasselbe ein ganz spezielles Gebiet bezeichnet.

Auch von dieser Erlaubniss machen wir demnächst fortgesetzt Gebrauch; wir substituieren bei den Beweisführungen — geradeso, wie es auch in der Mathematik geschieht — alle Augenblick für ein allgemeines (Gebiete-, Klassen-, oder Aussagen-)Symbol irgend ein anderes. Aber nicht nur bei den *fundamentalen*, sondern auch bei den mittelst Beweises auf diese zurückgeführten, den aus ihnen gefolgerten oder *abgeleiteten* Sätzen, in den „Theoremen“.

Bei den Definitionen und Postulaten sowie den Axiomen oder „Prinzipien“ — bei allem was willkürlich ausgemacht, allgemein angenommen, konventionell festgesetzt wird — konstatiert obiger Grundsatz lediglich Dasjenige, was im Begriffe des „allgemeinen“ Symbols liegt. Eine in Betreff sol-

cher Symbole getroffene *Übereinkunft* soll ja immer den Sinn haben, dass sie zu gelten habe, was immer für besondere (sogenannte „Werte“) oder wiederum allgemeine Symbole für die Buchstaben in ihr substituiert werden, und dasselbe gilt auch in Betreff solcher Sätze oder Behauptungen, die man *übereinkommt*, ohne jeden Beweis als allgemeingültige schlechtweg zu adoptieren.

Dagegen für die aus solchen Grundlagen als Folgerungen *abgeleiteten* Theoreme die gleiche Erlaubniss in Anspruch zu nehmen ist nicht mehr blos durch den Sinn der Worte verbürgt, sondern erscheint als ein wirkliches Prinzip, wenn auch zunächst nicht als ein dem Gebietekalkul eigen-tümliches.

Auch die Berechtigung zu diesem Verfahren wird aber sich nicht als Ausfluss, Wirkung eines ganz neuen Prinzipes, sondern lediglich als eine Bethätigung unsres Prinzips II selber, und zwar auf dem Anwendungsfelde ϵ) des § 3 späterhin erkennen lassen.

Nunmehr verleihen wir auch das *Gleichheitszeichen* dem Lehrgebäude der Algebra der Logik ein, indem wir auf den als allein bekannt vorausgesetzten Begriff der Subsumtion eine Begriffserklärung der durch jenes Zeichen auszudrückenden Beziehung gründen.

Definition (1) der identischen Gleichheit (Identität).

(1). { Wenn $a \in b$ und zugleich $b \in a$ ist, so werde gesagt, es sei:
 $a = b$ (gelesen *a gleich b*).

Dass ein Ausspruch von dieser Form $a = b$ eine *Gleichung*, a die linke, b die rechte *Seite* derselben genannt wird, haben wir schon S. 128 angeführt.

Da Vorstehendes eine Definition ist, so muss (wie schon auf S. 134 hervorgehoben wurde) die Festsetzung auch umgekehrt gelten: Es kann die Gleichung $a = b$ nichts anderes aussagen, als dass die vorerwähnten Subsumtionen gleichzeitig bestehen, m. a. W.:

(1)". { Wenn $a = b$ gilt, so muss $a \in b$ und $b \in a$ sein.

Wollten wir die beiden Teile (1)' und (1)" der Definition (1) ausdrücklich auf einmal aussprechen, so wäre in (1)' die Partikel „so“ durch „immer dann und nur dann“ zu ersetzen gewesen.

Zusatz zu Def. (1). Weil alsdann (nach I, für Aussagen in Anspruch genommen — vergl. die Anmerkung zu Prinzip I)

$$b \in a \text{ und zugleich } a \in b$$

sein wird, so folgt nach Def. (1), dass auch:

$$b = a$$

zu gelten habe. Dies heisst:

Jede Gleichung darf auch rückwärts wiederum als solche gelesen werden, m. a. W.: Die beiden Seiten einer Gleichung dürfen (in derselben)

miteinander vertauscht werden, oder: Die identische Gleichheit ist eine „symmetrische“ Beziehung — ein Satz, der sich, wie wir soeben sahen, ganz streng beweisen lässt.

Stellen a und b Gebiete vor, so müssen sie, wenn das erste im zweiten und zugleich das zweite im ersten enthalten sein soll, einander decken, in eines zusammenfallen, koincidieren. Identisch gleiche Gebiete bezeichnen wir demnach als „*einerlei*“.

Man ersieht hieraus, dass — wie schon in der Einleitung betont — der Begriff der Gleichheit im identischen Kalkul weit enger gefasst ist, als in der Grössenlehre. Dort, wo von Maassbestimmungen absolut nicht die Rede sein soll, dürfen wir zwei Kreise oder Flächen, wenn sie etwa nur „gleich gross“ (inhaltsgleich, sogar, wenn sie auch kongruent) sein sollten, durchaus nicht als (identisch) „gleich“ gelten lassen.

Ungeachtet dieser verschiedenen Interpretation des Gleichheitszeichens in den beiden Disziplinen ist es doch unbedenklich, sich des nämlichen Zeichens = für beiderlei Beziehungen zu bedienen selbst dann, wenn Anwendungen des identischen Kalkuls auf das Gebiet der mit Zahl und Maass operirenden Mathematik beabsichtigt sein sollten. Und zwar aus zwei Gründen.

Erstens deshalb, weil auch in der Mathematik nicht mit den Grössen selbst, sondern nur mit deren Maasszahlen, weil darin allgemein nur mit abstrakten Zahlen gerechnet zu werden pflegt. Jede abstrakte Zahl betrachtet man aber daselbst als ein nur einmal existirendes Individuum, versinnlicht etwa durch einen bestimmten Punkt der Zahlenlinie resp. Zahlenebene, und bei dieser Auffassung kommt die Gleichheit zweier Zahlen auch auf ein Zusammenfallen derselben, auf deren Identität hinaus — wie schon S. 146 angedeutet.

Zweitens würden gedachte Anwendungen des identischen Kalkuls auf das Gebiet der rechnenden Analysis doch vor allem angezeigt erscheinen — und könnten in der That von grossem Nutzen werden — da, wo man mit *vieldeutigen Ausdrücken* zu thun bekommt, wo nämlich mit Zahlzeichen zu operiren ist, die nicht notwendig je eine einzige Zahl, sondern eventuell eine ganze Klasse oder Gattung von Zahlen vorstellen. Von zwei solchen Zahl-gattungen würde nun eine, A , „untergeordnet oder gleich“ einer andern B zu nennen, es würde $A \in B$ zu schreiben sein, wenn alle Werte, die A umfasst, unter den Werten von B zu finden sind, und „gleich“ würden die beiden vieldeutigen Ausdrücke A und B heissen müssen, wenn dies gegenseitig ist, d. h. wenn sie beide ganz die nämlichen Werte umfassen. Sobald aber diese identisch gleichen Ausdrücke A und B eindeutige Zahlzeichen würden, nämlich die unter A und B verstandenen Zahlengattungen etwa nur je aus einem Zahlindividuum bestehen sollten, die Klasse A in den einen Wert a , die B zu der Zahl b zusammenschumpfte, dann würde die vorhin statuierte identische Gleichheit $A = B$ der Klassen doch in der That zusammenfallen mit der arithmetischen Gleichheit $a = b$ zwischen diesen ihren einzigen Zahlwerten.

So wenig sich auch, wie S. 136, 139 dargelegt, das Zeichen $<$ zur

Verwendung in der Logik empfahl, würde es nach dem soeben Auseinandergesetzten doch nur eine unnütze Weitläufigkeit sein, wenn wir für die identische Gleichheit ein anderes als das arithmetische Gleichheitszeichen einführen, ein apartes, komplizierteres Zeichen für dieselbe hier benutzen wollten.

Bedeutend a und b Klassen, und ist $a = b$, so werden a und b nur (verschiedene) Namen für einund dieselbe Klasse vorstellen. Beispielsweise werde angeführt:

Pferd = Ross, Neger = Mohr,
 Erdtrabant = Mond (im engeren Sinne), = der Mond.

1) Theorem. *Stets ist $a = a$.*

Jedes Gebiet ist sich selbst identisch gleich.

Beweis. Die Voraussetzungen $a \in b$, $b \in a$, der Def. (1) für die Gleichheit $a = b$ treffen nach Prinzip I zu, wenn a selber unter b verstanden, für b gesetzt wird; folglich ist in diesem Falle die Definition auch anwendbar. Aus $a \in a$ und $a \in a$ folgt nach (1): $a = a$.

2) Theorem. *Wenn $a \in b$ und $b = c$, so ist $a \in c$.*

Beweis. Dann ist auch $b \in c$ nach der zweiten Prämisse auf Grund des Teils (1)'' der Def. (1). Und hieraus, in Verbindung mit der ersten Prämisse folgt nach II, dass $a \in c$.

3) Theorem. *Wenn $a = b$ und $b \in c$, so ist auch $a \in c$.*

Beweis. Nach der ersten Prämisse und Def. (1) Teil (1)'', ist auch $a \in b$ und hieraus in Verbindung mit der zweiten Prämisse folgt nach II: $a \in c$, wie zu beweisen war.

Die beiden letzten Theoreme zusammenfassend können wir also sagen:

Zusatz. *Als Prädikat sowol, wie als Subjekt, darf Gleiches für Gleiches gesetzt werden.*

In der That geht die Konklusion bei Th. 2) hervor aus der ersten Prämisse, indem man deren Prädikat b durch das ihm gleiche c ersetzt, bei Th. 3) aus dessen zweiter Prämisse, indem man deren Subjekt b durch das ihm gleiche a ersetzt.

4) Theorem. *Wenn $a = b$ und $b = c$, so ist auch $a = c$.*

Oder: *Wenn zwei Gebiete mit einem dritten identisch gleich sind, so sind sie auch unter sich identisch.*

Es sind dann alle drei Gebiete „einander gleich“ — vergl. die nachherige Zusatzdefinition.

Beweis. Nach Def. (1), Teil (1)'', ist mit den beiden Voraussetzungen des Satzes einerseits gegeben, dass $a \in b$ und $b \in c$ sei, und hieraus folgt $a \in c$ nach II. Ebenso ist andererseits gegeben:

$c \in b$ und $b \in a$, also nach II auch $c \in a$. Die gefolgerten beiden Ergebnisse $a \in c$ und $c \in a$ lassen sich aber nach Def. (1) Teil (1)' zusammenfassen zu der Gleichung $a = c$, womit der Satz bewiesen ist.

Die Theoreme 2), 3), 4) finden bereits unter Prinzip II sich durch Figuren erläutert, vergl. Fig. 3... 6.

Zusatz zu Th. 4). Die Ausdehnung des Satzes von zweien auf eine beliebige Menge als erfüllt voraussetzender Gleichungen, welche sich so anordnen lassen, dass sie eine stetige Kette bilden, d. h. dass die einander zugewendeten Seiten benachbarter Gleichungen jeweils übereinstimmen, ist naheliegend, und kann durch wiederholte Anwendung des Th. 4) unschwer bewiesen werden.

Wenn $a = b$, $b = c$ und $c = d$ ist, so folgt aus den zwei ersten Gleichungen nach 4) zunächst $a = c$ und hieraus, in Verbindung mit der dritten Gleichung folgt ebenso: $a = d$. Daneben folgt auch aus den beiden letzten Gleichungen $b = d$, sodass hier jede zwei vorkommende Symbole als gleich nachweisbar sind.

Zusatzdefinition zu (1). Nunmehr kann auch der Begriff der identischen Gleichheit von zweien auf eine beliebige Menge von Gebieten ausgedehnt werden. Die Gebiete der Menge sind „einander gleich“ zu nennen, wenn (d. h. immer dann und nur dann, wenn) je zwei derselben einander gleich sind.

Dass solches stattfindet, wird ausgedrückt, indem man die Namen der Gebiete in irgend einer Folge auf der Zeile durch Gleichheitszeichen verbindet, z. B. schreibt:

$$a = b = c = \dots$$

Tritt zu einer Menge von unter sich gleichen Symbolen ein weiteres Symbol hinzu, welches einem von jenen gleich ist, so bilden die bisherigen Symbole zusammen eine neue Menge von unter sich gleichen Symbolen.

Denn ist $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \dots = a_n$ die erstgedachte Menge und tritt $a_{n+1} = a_n$ hinzu, so ist für $\lambda = 1, 2, \dots, n$ auch leicht zu beweisen, dass das neuhinzugekommene $a_{n+1} = a_\lambda$ sein muss, in Anbetracht dass $a_n = a_\lambda$ schon laut Voraussetzung gilt. Ein beliebig aus der neuen Menge herausgehobenes Paar von Symbolen enthält entweder das neu hinzugekommene Symbol a_{n+1} oder nicht. Im ersten Falle enthält es neben jenem Symbole noch ein solches a_λ der alten Menge, und ist die Gleichheit beider Symbole des Paares soeben bewiesen. Im zweiten Falle muss das Paar aus zwei Symbolen a_λ und a_μ der alten Menge bestehen und ist deren Gleichheit bereits in der Voraussetzung gefordert, dass sämtliche Symbole dieser letztern einander gleich seien.

In beiden Fällen sind also die zwei Symbole des aus der neuen Menge herausgehobenen Paares in der That einander gleich.

Was in logischer Beziehung davon zu halten sei, dass bei vorstehender Beweisführung im Grunde der Schluss der „vollständigen Induktion“, „Schluss von n auf $n + 1$ “ angewendet werden musste, darüber sei auf Anhang 3 und auf § 51 verwiesen.

Ist nun irgend ein System von Gleichungen als zwischen Gebieten bestehend gegeben, so werden diese Gebiete unter sich gleich sein müssen, wenn es gelingt, die gegebenen Gleichungen so in einer Reihe anzuordnen, dass beim Durchgehen derselben in einem bestimmten Sinne — etwa von links nach rechts fortschreitend — man in jeder neu ins Auge gefassten Gleichung auf ein Gebiet stösst, welches bereits in wenigstens einer der vorhergehenden Gleichungen als linke oder rechte Seite vorgekommen war. Um dies zu entscheiden, kann man eine beliebige von den Gleichungen als erste herausschreiben, darauf als zweite eine solche folgen lassen, welche eines der in der ersten stehenden Gebiete enthält, als dritte dann aus dem Reste eine solche Gleichung herauslesen, welche abermals die Forderung erfüllt mindestens eines der bisher schon vorgekommenen Gebiete zu enthalten, und so weiter bis zu Ende. Ist es auf *eine* Art möglich, in dieser Weise mit den Gleichungen zu Ende zu kommen, so würde sich nachweisen lassen, dass dies auf jede Art eintreffen muss, mit welcher Gleichung des Systems man auch beginnen und wie man auch mit der Auslese der immer mindestens ein früheres Symbol enthaltenden Gleichungen fortfahren mag. —

Es sollen jetzt noch *zwei spezielle Gebiete* in die Algebra der Logik eingeführt werden, für welche als Namen, wie unter Th. 22) dargelegt wird, die Zahlzeichen 0 und 1 sich empfehlen. Auch diese wollen wir vermittelt des Beziehungszeichens der Einordnung erklären, und zwar erfolge die

Definition (2_x) der „identischen Null“

dadurch, dass wir die Subsumtion

$$0 \in a$$

als eine *allgemeingültige*, nämlich für jedes Gebiet a unsrer Mannigfaltigkeit anzuerkennende hinstellen. Dies will sagen:

0 nennen wir ein Gebiet, welches zu jedem Gebiete a in der Beziehung der Einordnung steht, welches in jedem Gebiete der Mannigfaltigkeit enthalten ist.

Die Symbole 0 und 1, denen wir diese Eigenschaft zuschreiben,

Definition (2_+) der „identischen Eins“

$$a \in 1$$

1 nennen wir ein Gebiet, zu welchem jedes Gebiet a in der Beziehung der Einordnung steht, in welchem jedes Gebiet der Mannigfaltigkeit enthalten ist.

zählen wir jedenfalls hinfort mit zu den „Gebieten“ unsrer Mannigfaltigkeit. Eventuell, möglicherweise, werden es „uneigentliche“ Gebiete sein, d. h. sie bleiben leere Namen, wenn unter den bisher als solche angesehenen wirklichen oder „eigentlichen“ Gebieten, die mit der Mannigfaltigkeit zugleich uns virtuell, fakultativ gegeben erscheinen, sie sich nicht nachweisen lassen sollten — eine Frage, auf die wir im System uns erst an einer späteren Stelle einlassen wollen.

Auch die Beweggründe, welche uns zur Einführung ebendieser Symbole bestimmen, das Willkürliche, welches in ihrer Definition zu liegen scheint, erklärend rechtfertigen, können wir erst unter Def. (3) in § 5 auseinandersetzen.

Lediglich aus didaktischen Gründen — damit der Leser, falls er nicht will, niemals den Leitfaden der Anschauung zu verlassen braucht — sei indess die Bedeutung welche den Symbolen 0 und 1 zukommen wird, voreilend schon hier kurz angegeben: Die 0 wird uns ein *leeres* Gebiet vorstellen, welches *keinen* Punkt der Mannigfaltigkeit enthält, und wenn von Klassen die Rede ist, dem Begriffe des „Nichts“ entspricht. Die 1 dagegen wird die ganze Mannigfaltigkeit vorstellen, hier, im bevorzugten Falle, also die ganze Fläche der Schultafel. Und falls $a, b, c, \dots$ uns Klassen vorstellen, wird 1 die umfassendste Klasse bedeuten, welche alle die Klassen und Individuen, von denen in der Untersuchung die Rede ist, in sich vereinigt. Vergleiche § 7.

Es wird sich zeigen, dass die hier vollzogene Aufnahme, Einverleibung, Adjungirung der identischen Null unter die Gebiete (der leeren Klasse unter die Klassen, des Begriffs des „Nichts“ unter die Begriffe) unsrer ganzen Disziplin ihren eigenartigen Charakter aufprägt. Die Tragweite dieser unscheinbaren Übereinkunft (2_x) ist kaum mit Geringerem zu vergleichen, als mit den Wirkungen der Einführung der *arithmetischen* Null, der Aufnahme dieser unter die Ziffern und Zahlen. Letztere war eine That, in Bezug auf die mich Herr Hermann Schubert's interessante Studie „Zählen und Zahl“ (Hamburg 1887, 36 Seiten) belehrt (pag. 34), dass sie ungeachtet ihres heute allgemein anerkannten Wertes seinerzeit hartnäckige und heftige Opposition hervorgerufen.

Zusatz 1 zu Def. (2). Es kann nicht mehr als *ein* Gebiet von der in Def. (2_x) resp. (2_+) geforderten Eigenschaft geben.

Denn gäbe es ausser 0 resp. 1 auch noch ein zweites Gebiet $0'$ resp. $1'$ von jener gedachten Eigenschaft, dass nämlich

$$0' \in a$$

$$a \in 1'$$

allgemein sein müsste, so hätten wir auch

$$0 \in 0' \text{ nebst } 0' \in 0$$

$$1' \in 1 \text{ nebst } 1 \in 1'$$

[indem wir uns *hier* unter dem a auch 0 resp. 1, *dort*, in Def. (2), auch 0' resp. 1' vorstellen dürfen], und damit folgte nach Def. (1):

$$0' = 0 \quad | \quad 1' = 1,$$

d. h. die gedachten beiden Gebiete wären bezüglich einerlei, wären eines.

Zusatz 2 zu Def. (2). Insbesondere gilt auch

$$0 \in 1.$$

In dieser Subsumtion fallen die beiden Subsumtionen (2_x) und (2_+) in eine einzige zusammen, welche als ein unter beiden zugleich begriffenes Beispiel erscheint. In der That kann man sich unter a

$$\text{in } (2_x) \text{ auch } 1 \quad | \quad \text{in } (2_+) \text{ auch } 0$$

denken. Zum Überflus aber folgt obige Subsumtion aus (2_x) und (2_+) zusammen auch noch nach Prinzip II, wofern man sich in beiden unter a den nämlichen Wert vorstellt.

5) Theorem.

5_x) Wenn $a \in 0$ so ist $a = 0$. | 5₊) Wenn $1 \in a$ so ist $1 = a$.
m. a. W.

Einordnung eines Gebietes unter 0 ist Gleichheit (mit 0), bedingt „Verschwinden“ des betreffenden Gebietes.

Beweis. Da nach Def. (2_x) ohnehin $0 \in a$ ist, so folgt hiermit aus der Voraussetzung $a \in 0$ unsres Theorems kraft Def. (1)' die Gleichheit: $0 = a$.

Die fakultative Überordnung eines Gebietes über 1 ist Gleichheit (desselben mit 1).

Beweis. Da nach Def. (2_+) ohnehin $a \in 1$ ist, so gibt dies in Verbindung mit der vorausgesetzten Subsumtion $1 \in a$ nach Def. (1)' die Konklusion: $a = 1$.

Unerledigt ist noch die Frage, auf welche Weise nun solche Subsumtionen, wie die mit Def. (2) eingeführten, in denen als Subjekt oder Prädikat die Symbole 0 oder 1 auftreten, mit Hilfe der Kopula „ist“ in der Wortsprache darzustellen sein werden? Um die uns zunächst obliegenden Betrachtungen nicht zu überladen, wollen wir der gleichen Fragen vorerst noch zurückstellen, unser Augenmerk eine Zeitlang bloß dem Gebietekalkül als solchem zuwenden — und dessen Anwendungen auf die Wortsprache hernach im Zusammenhange (in der vierten Vorlesung) durchgehen. Was da die Def. (2) im Gefolge hat, ist unter φ , σ , τ , ν des § 9 entwickelt. —

Dritte Vorlesung.

§ 5. Die identische Multiplikation und Addition.

Peirce's analytische Definition von Produkt und Summe.

Wir müssen uns nunmehr mit *Operationen* bekannt machen, durch welche aus (zunächst) zwei Gebieten a , b jeweils ein drittes Gebiet abgeleitet werden kann, aus zwei Klassen eine dritte (später dann auch aus mehreren solchen eine neue). Zwei wichtigste von solchen Operationen bezeichnen wir als *identische Multiplikation* und als *identische Addition*, und entlehnen — der Einfachheit wegen — Namen und Bezeichnungsweise für die Operationsergebnisse und die dazu verknüpften Operationsglieder aus der Arithmetik von den gleichnamigen arithmetischen Operationen.

Erfahrungsmässig hat dies Verfahren einen gewissen Widerstand zu gewärtigen; dasselbe wird nicht von jedermann ohne weiteres gebilligt und acceptirt. Es werden deshalb einige Worte zu seiner Rechtfertigung am Platze sein, sowie Fingerzeige, wie dasselbe da wo es ungeeignet erscheinen sollte, zu modifiziren sei.

Mit dem Malzeichen, z. B., und dem Namen „Produkt“ die Vorstellung einer *arithmetischen* Multiplikation zu verknüpfen, ist durch jahrhundertelangen Gebrauch sanktionirt, und von dieser langgewohnten und berechtigten Gedankenverbindung zwischen Namen und dem durch sie Benannten sich hier stets frei zu halten wird in der That dem Leser zugemutet erscheinen, wenn wir wirklich jene Namen und Zeichen aus der Arithmetik in unsre Disziplin herübernehmen. Bedeuteten die zu einem Produkt $a \cdot b$ oder ab zu vereinigenden Symbole a und b hier Zahlen oder auch Klassen, Gattungen von Zahlen, so wäre die Zumutung allenfalls eine harte zu nennen.

Solches ist nun aber *nicht* der Fall. Freilich, da uns a und b Klassen von *irgendwelchen Dingen* oder Objekten des Denkens vorzustellen haben werden, so ist ihre Interpretation als *Klassen von Zahlen* nicht gerade prinzipiell ausgeschlossen. Doch bildet letztere gegenüber den sonst hier im allgemeinen beabsichtigten Deutungsweisen ein Anwendungsfeld von sehr speziellem Charakter und verhältnissmässig untergeordneter Wichtigkeit. Für dieses, wenn es überhaupt in Betracht gezogen werden sollte, kann man sich leicht gewisse Kautelen, eine besondere Behutsamkeit in der Verwendung der Namen und Zeichen, als logischer (identischer) oder aber

arithmetischer, zur Pflicht machen, auf das wir nachher noch näher zu sprechen kommen.

Lassen wir die etwa möglichen Anwendungen des identischen Kalküls auf arithmetische Untersuchungen vorerst beiseite, so wird aber der obige Vorwurf einer ungebührlichen Zumutung von selbst hinfällig, indem es ganz unmöglich wird, dem Malzeichen die gewohnheitmässige Bedeutung unterzulegen. Man versuche doch einmal, wenn a die Klasse derjenigen Dinge vorstellt, welchen das Epitheton „schwarz“ zukommt, und b die Klasse der „Pferde“, das Produkt $a \cdot b$ im arithmetischen Sinn zu verstehen! Abzustehen aber von einem ohnehin unmöglichen Vorhaben — dies lässt sich doch nicht als eine ungebührliche Zumutung hinstellen!

Bei dem Versuch, ihn im herkömmlichen, arithmetischen Sinn zu deuten, gibt sich in unserm Beispiel der Name $a \cdot b$ als ein ganz und gar sinnloser sofort zu erkennen. Daher ist dieser Name als ein solcher, der überhaupt eine vernünftige Erklärung noch nicht gefunden hat, zunächst zu jeder beliebigen Verwendung disponibel. Welche Bedeutung wir ihm hinfort auch beilegen mögen — was wie gesagt in unserm Belieben, Arbitrium steht — so kann dies zu Missverständnissen überhaupt nicht führen, ist unbedenklich und unverfänglich.

Das gleiche gilt, wenn a und b Punktgebiete, Flächen, — und zwar diese selbst, nicht aber deren Maasszahlen oder Inhalte, vorstellen (vergl. S. 158). Es ist noch unausgemacht und kann deshalb beliebig ausgemacht werden, was in diesem Falle $a \cdot b$ bedeuten solle.

Dass eine herkömmliche Verwendung von Namen und Zeichen auf einem bestimmten Anwendungsfelde durchaus nicht deren selbständige Verwendung auf andern, neuen Anwendungsgebieten präkludirt oder von vornherein ausschliesst, dafür gibt es Präcedenzfälle genug in den Wissenschaften.

Es ist dem Chemiker auch nicht verboten worden, mit CO das Kohlenoxydgas zu bezeichnen, weil etwa durch den schon zwei Jahrtausende älteren Usus des Geometers es sanktionirt war, unter CO die Verbindungsstrecke zweier Punkte C und O zu verstehen. Um beide Deutungen zu verwechseln, müsste man im Unklaren darüber sein, ob es sich um Punkte handelt, oder um chemische Elemente, und füglich ist dem Leser eines Buches doch wenigstens zuzutragen, dass er wisse und sich im Bewusstsein lebendig erhalte, wovon in dem Buch die Rede ist!

Was nun dem Einen Recht ist, das ist dem Andern billig. Um arithmetisches und identisches Produkt zu verwechseln, müsste man auch nicht wissen, ob die Rede ist von Zahlen, oder ob von Klassen, Gebieten.

Jedenfalls kann es nicht untersagt werden, unter einer besondern Überschrift eine aparte — sei es Bezeichnung bekannter Dinge, sei es Interpretation bekannter Zeichen — zu verwenden, und zwar immer demjenigen Verfahren den Vorzug zu geben, welches sich dem zu betrachtenden Gegenstande am besten anbequemt.

Einfacher aber, übersichtlicher, kürzer und zweckmässiger, als mit ab , lässt das Ergebniss der Operation, die wir identische Multiplikation der Klassen a und b zu nennen haben, sich überhaupt nicht darstellen — im Hinblick auf die Anforderung, dass der Name dieses identischen Produktes,

um hinreichend ausdrucksvoll und durch sich selbst verständlich zu sein, die Symbole a und b , denen es entstammt, doch selber enthalten, sie irgendwie miteinander verknüpfen muss. Die simpelste Verknüpfung von Zeichen ist eben das Nebeneinanderstellen derselben auf der Zeile, und der Vorteile, die aus solcher Einfachheit erwachsen, sind wir nicht gesonnen, uns unnötigerweise hier zu entschlagen. Zudem stellt auch die Wortsprache selbst (wie in § 8 zu sehen) die Namen der als identische Faktoren zu einem Produkt zu verknüpfenden Klassen in der Regel ohne weiteres Verknüpfungszeichen oder Bindewort nebeneinander.

Ähnliches aber, wie oben in Bezug auf das Produkt ausgeführt ist, liesse sich grösstenteils auch hinsichtlich der Summe sagen.

Nur dann, wenn Anwendungen des identischen Kalküls auf die Arithmetik selbst beabsichtigt sein sollten — dergleichen uns hier meistens ganz ferne liegen — wird es ratsam die „arithmetischen“ und die „identischen“ Operationen, Operationsglieder und Operationsergebnisse jeweils im Texte durch die kursiv gedruckten Beiwörter sorgfältigst zu unterscheiden, eventuell auch mittelst verschiedener Knüpfungszeichen die einen und die andern zu kennzeichnen. Ganz unerlässlich würde letzteres erscheinen, wenn etwa im selben Ausdruck oder in der nämlichen Formel die beiderlei Operationen gleichzeitig vorkommen sollten.

Hier aber ist es leicht, gedachte Unterscheidung der arithmetischen und der gleichnamigen identischen Knüpfungszeichen irgendwie, in einer ad hoc konventionell festzustellenden Weise, zu bewirken. Man klammere etwa die Zeichen der seltener vorkommenden Sorte von Operationen ein: $(\cdot)$, $(+)$, oder drucke sie hohl, fett, kursiv und dergleichen.

Bei der Multiplikation ist man in der günstigen Lage, ohnehin über zwei Knüpfungszeichen zu verfügen. Man reservire z. B. den Punkt, $\cdot$, für die identische, das liegende Kreuz, $\times$, für die arithmetische Multiplikation und beobachte die Rücksicht, dass alsdann nur das eine von diesen beiden Zeichen auch ungeschrieben bleiben, bequemlichkeitshalber unterdrückt werden darf, nicht aber auch das andere — indessen, je nachdem es zweckmässig erscheinen mag, durchweg das erste oder durchweg das zweite.

Für identische Addition wird man praktisch auch ein stehendes Kreuz $\dagger$ gegenüber dem arithmetischen $+$ in solchen Fällen verwenden, wie uns denn hier — dank der Liberalität des Verlegers — kleinere $+$ Zeichen $+$ und $+$ zu gebote stehn.

Überdies ist zu beachten, dass wo immer Anwendungen der geschilderten Art beabsichtigt sein sollten, auch die „identische“ Null und Eins — etwa durch kursiven Druck als 0 , 1 oder aber mittelst Apostrophirung etc. — von den Zahlindividuen 0 , 1 unterschieden werden müssen — vergl. § 9, ω). —

In einem seiner Aufsätze ^{1a} verwendet Herr Peirce durchweg einmal als Malzeichen das Komma, für identische Gleichheit ein Gleichheitszeichen mit darunter gesetztem Komma, und für identische Addition ein $+$ mit in den Winkelraum rechts unten eingefügtem Komma $\dagger$. Das ganze Bezeichnungssystem erscheint schon ein bischen schwerfällig, das erstere aber auch höchst bedenklich, weil man in Text wie in Formeln [z. B. bei

$f(a, b, c, \dots)$] dann nie unterscheiden kann, ob $a, b, c, \dots$ eine Gruppe, ein System von mehreren Symbolen, oder aber ein einziges Symbol — das Produkt der letztern — vorstelle. Von diesem System der Schreibung kommt Peirce auch selbst wieder in seinen späteren Aufsätzen — und wie es scheint, definitiv — zurück. Im schriftlichen Arbeiten mag aber das Zeichen $+$, sich zuweilen empfehlen.

Neue Zeichen und Namen zu erfinden ist ja in der That nicht schwer, und was die Namen betrifft, so hat gerade die Philosophie hierin die Welt schon mit grossartigen Leistungen beglückt.

Wollten wir vor der bei der Arithmetik zu machenden Namenanleihe zurückschrecken, so würden auch wir genötigt sein, ein ganzes Heer von neuen Namen zu erfinden. Es würde bei weitem nicht genügen, neben eigenen Zeichen zur Vertretung unsrer (von Boole schon eingeführten) 0 und 1, etwa blos für „Multiplikation, Faktor, Produkt“ und „Addition, Summand, Summe“ neue Namen zu schaffen. Als solche wurden — nebenbei gesagt — bereits „Composition, Componenten, Compositum („compound“)“ und „Aggregation, Aggreganten, Aggregat“*) von Augustus de Morgan^{2,3} verwendet. — Es würde überdies die Folge sein, dass wir das Summenzeichen Σ , das Produktenzeichen Π durch andere Zeichen ersetzen müssten, dass wir zeitweilig neue Namen einzuführen hätten auch eventuell für „Potenz“, für „Division, Quotient, Dividend und Divisor“, für „Subtraktion, Differenz, Minuend und Subtrahend“, für „Abziehen“ und „Vermindern“, für „mal, plus, durch und minus“, und ausserdem noch für eine Menge anderer Kunstaussdrücke. Ich erinnere an: „Monom, Binom, Trinom, Polynom“, an „Koeffizient“, an „Ausmultiplizieren“ (nach der Multiplikationsregel für Polynome) und „Ausscheiden“ (eines gemeinsamen Faktors), an die Benennungen „Funktion“ und „Argument“, an „linear“ und „homogen“ (in ihrer Anwendung auf den Funktionsbegriff), u. s. w.

Ein Blick auf den weiterhin dichter werdenden Formelinhalt dieses Buches wird schon erkennen lassen, wie viel umständlicher und schwerfälliger derselbe sich darstellen müsste, wollten wir nur überall da, wo ein Malzeichen steht oder gesetzt zu denken, zu unterstellen ist, ein ausdrückliches Knüpfungszeichen anbringen!

Erstrebenswerter als solche Neuerungen scheint es doch zu sein, mit einer schon vorhandenen Nomenklatur, die sich auch unsern eigenartigen Zwecken vorzüglich anpasst, haushälterisch auszukommen. Weigerten wir uns dessen, so würde aber die schlimmste Wirkung die sein, dass wir genötigt wären, eine Menge aus der Arithmetik der vier Spezies allbekannter Sätze in dem fremdartigen Gewand, das sie alsdann notwendig zeigen müssten, vollständig neu zu lernen. Bei dem Plan, den wir hier lieber befolgen, haben wir dagegen den Vorteil, nicht nur, dass die zahlreichen Analogieen und die minder zahlreichen Gegensätze zwischen dem identischen und dem arithmetischen Kalkül auf das klarste zutage treten, sondern dass wir auch einen ansehnlichen Teil unsrer Übung aus der allgemeinen Arithmetik (freilich nur von der Tertia eines Gymnasiums her) hier ohne weiteres

*) Indess der letztere Name ist ja auch in der Arithmetik bereits vergeben!

zu verwerten in der Lage sind und diesen Vorteil blos erkaufen müssen durch rege Aufmerksamkeit auf die Punkte, wo jene Analogieen aufhören.

Eine gewisse Leichtigkeit, nicht blos Bezeichnungen zu wechseln, sondern mehr noch, solche *umzudeuten*, sie vom Einen auf's Andere zu übertragen, ist auch anderwärts förderlich oder unentbehrlich gewesen, und nirgends in der Mathematik darf man an der Bezeichnung kleben. Es genügt zu erinnern, an die Streckenrechnung, z. B., überhaupt an die zahlreichen „symbolischen“ Rechnungsmethoden, welche Analysis und Geometrie bereits aufweisen. —

Die identische Addition hat mit der arithmetischen, ihrem Wesen nach, noch einige *Verwandtschaft*, die identische Multiplikation aber mit der arithmetischen gar keine [vergl. § 9, ω].

Gleichwol rechtfertigt sich die übereinstimmende Bezeichnung von beiderlei Operationen durch die *durchgängige Übereinstimmung ihrer formalen Eigenschaften*: alle Gesetze, welche von der Addition und Multiplikation in der allgemeinen Arithmetik als allgemeine Formeln gelten (also ohne Rücksicht auf die Natur der zu verknüpfenden Zahlen, im ganzen Zahlengebiete) — sei es in Bezug auf jene Operationen für sich, sei es auch für ihre Verbindungen miteinander — alle diese Gesetze werden sich auch für die identischen Operationen als allgemein gültig erweisen, und — *dazu noch einige mehr!*

Nur wo die „umgekehrten“ oder *inversen* Operationen von jenen beiden, also die Subtraktion und Division mit in Betracht kommen, hört die formale Übereinstimmung zwischen den arithmetischen und den identischen „vier Spezies“ zumeist auf.

Wir werden uns mit der identischen Subtraktion und Division erst spät — in der 12. Vorlesung — beschäftigen, und zwar, um sie dort für immer abzuthun, nämlich zu erkennen, dass diese Operationen im identischen Kalkül definitiv entbehrt werden können, indem sie ausreichend und am zweckmässigsten zu vertreten sind durch eine einfachere dritte Operation, die *Negation*, welche als ein gemeinsamer Spezialfall jener beiden erscheint.*

Auch im identischen Kalkül mögen wir Addition und Multiplikation zu zwei verschiedenen (Operations-)Stufen rechnen. Während aber in der Arithmetik die Addition als die ursprünglichere oder *erste* Stufe vorangeschickt werden muss, um das Verständniss der Multiplikation als der *zweiten* Stufe vorzubereiten und zu erschliessen, steht im identischen Kalkül die Reihenfolge der beiden Operationen in unserm Belieben. Beide sind hier unabhängig von einander einzuführen; sie sind gewissermassen ebenbürtig oder von gleichem Range. Schon um dies zum Bewusstsein zu bringen, werde ich der Multiplikation hier

den Vortritt geben. Ausserdem aber bestimmt mich hierzu die Rücksicht, dass auf einem der Hauptanwendungsgebiete des identischen Kalküls — auf dem Anwendungsfelde δ) des § 3, im sog. „Aus-sagenkalkül“ — die Multiplikation in der That als die bei weitem wichtigere und häufigere, wo nicht ursprünglichere Operation erscheinen wird. Demungeachtet mögen aber nach wie vor die Addition und Subtraktion ihre Bezeichnung als Operationen der ersten Stufe beibehalten.

Wir werden das *identische Produkt* $a \cdot b$ oder ab , desgleichen die *identische Summe* $a + b$ zweier Gebiete a und b hier je gesondert definieren in ihrer Anwendung als Subjekt (terminus minor) und in ihrer Anwendung als Prädikat (terminus major) von Subsumtionen.

Man wird jedoch sehen, dass diese beiden Definitionen eines und desselben Symbols ab resp. $a + b$ keineswegs von einander unabhängig sind, sondern derart in einander übergreifen, dass durch die eine notwendig auch schon die andre gegeben erscheint. Eine bestimmte von ihnen muss als die des einfacheren Ausdrucks fähige an die Spitze gestellt werden. Und zwar die

Definition (3 _x).		Definition (3 ₊).
Wenn es für gegebene Gebiete a, b und c zutrifft, dass zugleich		
$c \in a$ und $c \in b$		$a \in c$ und $b \in c$
ist, so soll — kürzer — gesagt werden, es sei:		

$c \in ab.$		$a + b \in c.$
-------------	--	----------------

Mit dieser Festsetzung haben wir definiert:
das identische *Produkt als Prädikat*. | die identische *Summe als Subjekt*.

Hiedurch werden nämlich — zunächst lediglich als Bestandteile oder Elemente einer gewissen Redensart*), als Prädikat resp. Subjekt — die Symbole

ab		$a + b$
------	--	---------

eingeführt, welche wir auch „Gebiete“ nennen werden. Auf unserm gegenwärtigen Standpunkt müssen wir noch darauf gefasst sein, dass diese — je nach den Bedeutungen von a und b — sich als eigentliche Gebiete vielleicht nicht nachweisen lassen, sondern eben als „uneigentliche“ unsrer Mannigfaltigkeit zuzuschlagen, zu adjungiren sind.

*) id est: der Redensart: „ein Gebiet c ist in ab enthalten“, resp. „ $a + b$ ist in einem Gebiet c enthalten“.

Da obiges Definitionen sein sollen, so gelten die Festsetzungen auch *umgekehrt*, und *sagen die Subsumtionen*

$c \in ab$		$a + b \in c$
hinfort nichts anderes aus, als dass		
$c \in a$ und zugleich $c \in b$		$a \in c$ sowie $b \in c$

sei.

Um uns unzweideutig darauf zurückbeziehen zu können, wollen wir die beiden in jeder dieser Begriffserklärungen liegenden fundamentalen Festsetzungen nochmals (mit äusserster Sparsamkeit an Textesworten) übersichtlich rekapituliren, indem wir sie mit unterscheidenden Chiffren versehen, welche sich im bisherigen Texte nicht wol anbringen liessen. Unsre Konventionen sind:

(3 _x) { Wenn $c \in a, c \in b,$ so gilt $c \in ab.$		(3 ₊) { Wenn $a \in c, b \in c,$ so gilt $a + b \in c.$
(3 _x)'' { Wenn $c \in ab,$ so gilt $c \in a, c \in b.$		(3 ₊)'' { Wenn $a + b \in c,$ so gilt $a \in c, b \in c.$

Die einzeln stehende Subsumtion soll jeweils das nämliche ausdrücken, besagen, wie die zwei nebeneinander stehenden Subsumtionen zusammengenommen. Dies ist es, was ausgemacht wurde.

Zusatz 1) zur Definition (3).

Es gibt mindestens ein Gebiet c , welches den Voraussetzungen der Def. (3) genügt, indem nach Def. (2_x) resp. (2₊) jedenfalls

0		1
---	--	---

ein solches c ist. Wie immer die Gebiete a und b auch gegeben sein mögen, so ist es also jedenfalls zulässig, von

einem Produkte ab		einer Summe $a + b$
---------------------	--	---------------------

zu reden, nämlich von ihnen zu sagen, es sei $0 \in ab$, und $a + b \in 1$.

Hier tritt zum ersten mal ein *Beweggrund* zutage, der für die Einführung der Symbole 0 und 1 spricht, wie sie mittelst Def. (2) vollzogen worden. Die Zuziehung dieser Symbole zu der Mannigfaltigkeit der Gebiete hat nämlich, wie soeben erkannt, den Erfolg und rechtfertigt sich eben hiedurch, dass nun von $a \cdot b$ und $a + b$ stets gesprochen werden kann. In Bezug auf das Produkt ab wird dies durch die Einführung der 0 in der That *erst* hingebracht, wie wir in § 7 noch genauer sehen werden: hätten wir nicht die 0, so wäre es nicht der Fall; es ist die Mission und das Verdienst der Null, dass sie dies bewirkt. Nur durch ihre Zuhülfenahme lässt es sich erreichen,

dass hinfort identische Multiplikation und Addition für ganz beliebige Faktoren resp. Summanden a, b auch *ausführbar* werden.

Ohne diesen Umstand würde aber eine *allgemeine Buchstabenrechnung* nach einheitlichen Regeln nicht möglich sein.

Hätte z. B. das identische Produkt $a \cdot b$ sehr häufig keinen Sinn, so könnte man keinen irgend Produkte enthaltenden Buchstaben Ausdruck, unbekümmert um die Bedeutung oder die Werte der in ihm vorkommenden Operationsglieder nach den Regeln des Kalküls umformen. Man müsste vielmehr jedesmal erst zusehen, ob die etwaigen Teilausdrücke (Ausdruckteile), sowie ob der ganze Ausdruck überhaupt einen Sinn hat, und wäre genötigt, die Bedingungen dafür jederzeit im Auge zu behalten, sie immerfort als „Gültigkeitsbedingungen“ weiterzuschleppen.

Ein eklatantes, und — wie ich denke — hinreichend abschreckendes Beispiel einer derartigen unerquicklichen Sachlage wird uns weiter unten der Kalkül der inversen Operationen, werden uns die Gesetze der identischen Subtraktion und Division in § 23 liefern, deren Befolgung aber, wie schon erwähnt, zum Glück entbehrlich bleibt.

Wenn nun also durch eine so einfache Übereinkunft, als welche die Def. (2) erscheint, wenn namentlich durch die Einführung der identischen Null mittelst Def. (2_x), ein derartiger Erfolg sich erzielen lässt, dass durch sie erst ein einheitliches Schliessen und Rechnen nach unumschränkt allgemein gültigen Regeln ermöglicht wird — so ist dieser Umstand ein hinreichendes Motiv dafür, diese Einführung zu vollziehen, so rechtfertigt dieser Erfolg wenigstens nachträglich die seiner Zeit bei Aufstellung der Def. (2) anscheinend bethätigte Willkür.

Damit der Leser auch bei den im nächsten Paragraphen folgenden teilweise subtileren Betrachtungen die Veranschaulichung durch die beigegebenen Figuren alsbald verstehen könne, sei wiederum vorgreifend gleich hier bemerkt, dass ab das den Gebieten a und b *gemeinsame* Gebiet vorstellen wird, dass aber, wenn ein solches nicht vorhanden, dem Produkt ab der Wert 0 zuzuschreiben ist; desgl. wird $a + b$ dasjenige Gebiet bedeuten, in welches a und b *zusammenfließen* — so wie es, weiter unten § 7, für Kreisflächen a und b die Figuren 9_x und 9₊ schraffirt aufweisen. Es *braucht* hienach der Leitfaden der Anschauung nirgends verlassen zu werden.

Wir bringen aber *im Systeme* die Veranschaulichungen absichtlich erst später, um eben die Anschauung nicht sofort zur Führerin bei den grundlegenden Betrachtungen werden zu lassen, vielmehr derselben die Herrschaft vorzuenthalten und den rein analytischen Charakter, die formelle Strenge der auszuführenden Schlüsse in den Vordergrund der Aufmerksamkeit des Lesers zu rücken, um diesen die ihnen gebührende Beachtung zu sichern.

Die ganz wenigen und unbedeutenden Wiederholungen, zu denen uns die befolgte Taktik nötigt, mögen entschuldigt sein mit dem Hinweis, dass man eben beim Gehen zuweilen auch den Blick vorausseilen lassen muss nach Punkten hin, zu welchen selbst man erst etwas später gelangt.

6) Theorem. *Die beiden Subsumtionen*

$$6_x) ab \in a, ab \in b \quad | \quad 6_+) a \in a + b, b \in a + b$$

gelten für alle denkbaren Werte von a und b , sie *gelten als allgemeine Formeln*.

Beweis. Nach Prinzip I müssen wir zugeben, dass

$$a) \quad I_x. ab \in ab. \quad | \quad I_+. a + b \in a + b.$$

Dies ist zunächst zweifellos, wenn a und b wirkliche Gebiete vorstellen, weil wir ja für alle denkbaren Gebiete den Satz I als Grundsatz angenommen haben.

Führen wir zuvörderst unter dieser Annahme unsern Beweis zu Ende.

Wenn man nun in vorstehender Subsumtion $a)$

$$\text{das } ab \text{ linkerhand} \quad | \quad \text{das } a + b \text{ rechterhand}$$

mit dem c in (3_x)" resp. (3₊)" identifiziert, d. h. sich ebendieses Gebiet unter dem dortigen c vorstellt, so erkennt man, dass die Subsumtion $a)$ nach (3)" nichts anderes aussagt, als dass zugleich

$$ab \in a, ab \in b \quad | \quad a \in a + b, b \in a + b$$

ist, wie zu beweisen war.

Sollte es nun aber kein eigentliches Gebiet geben, welches unter dem Symbol

$$ab \quad | \quad a + b$$

zu verstehen wäre — eine Frage, deren völlige Erörterung wir bewusst auf eine spätere Stelle im System der Theorie verlegten, so ist folgendes zu bemerken.

Wir nehmen den Satz der Identität „ a ist a “ nicht bloß für die Gebiete — etwa unsrer „bevorzugten“ speziellen Mannigfaltigkeit — sondern wir nehmen ihn auch für diejenigen jeder denkbaren Mannigfaltigkeit, ja sogar für alles zu denken Mögliche überhaupt in Anspruch. Auch für irgendwelche Klassen von irgendwelchen Individuen muss er anerkannt werden. Jedes Ding oder Objekt des Denkens ist es selber, ist das, was es ist.

Wir dürfen demnach verlangen, dass unser Prinzip I auch für *Namen* anerkannt werde, und zwar ohne Rücksicht darauf, ob dieselben einen Sinn haben, oder nicht. Dasselbe gilt uns auch für sinnlose

Namen. Auch „nichts ist nichts“, $0 \notin 0$, ein rundes Quadrat ist ein rundes Quadrat — dürfen wir sagen.

Auch wer solche Behauptung nicht als selbstverständlich hinnehmen möchte, wird wenigstens zugeben müssen, dass dieselbe *unbedenklich* ist: es kann durch sie kein Irrtum erzeugt werden, gerade weil es „nichts“ ist, worauf sich die Aussage bezieht; über „nichts“ will sie eine Information erteilen und charakterisiert sich somit als eine inhaltsleere.

Nun haben wir mittelst der in den Definitionen (2) und (3) getroffenen Übereinkunft ausgemacht, die Symbole 0 , 1 , $a \cdot b$ und $a + b$ unter allen Umständen zu den „Gebieten“ unsrer Mannigfaltigkeit zu rechnen, sie nötigenfalls, wenn es keine *eigentlichen* Gebiete geben sollte, welche die ihnen beigelegten Eigenschaften besitzen, als „uneigentliche“ Gebiete — meinetwegen sinnlose Namen — dieser Mannigfaltigkeit zuzuschlagen.

Nach dem Vorausgeschickten können wir also auch für diese „Gebiete“ den Satz der Identität in Anspruch nehmen und darauf die Überlegung gründen, durch welche sich oben der Beweis der Theoreme 6) ergab.

In § 7 wird sich übrigens herausstellen, dass der Fall, wo jenen Symbolen der Wert 0 zukommt, in der That der einzige Fall ist und bleibt, in welchem sie uneigentliche Gebiete vorstellen. Dies ist zudem auch a priori klar. Denn entweder gibt es ein wirkliches Gebiet, welches die Bedeutung des Symbols ab ausmacht, oder nicht. Im letztern Falle ist das als Gebiet hingestellte Zeichen ab sinnlos, bedeutet nichts und kann 0 genannt werden. Analog $a + b$, falls es ausarten sollte.

Dass nun auf die identische Null ebenfalls das Prinzip I anwendbar ist, also $0 \notin 0$ sein muss, ist — zum Überfluss — schon in der Def. (2_x) der identischen 0 enthalten, indem die Formel $0 \notin a$ als eine allgemeingültige auch für ein die 0 bedeutendes a in Anspruch genommen werden darf. Auch unter diesem Gesichtspunkt also erscheinen die Subsumtionen α), auf die unser Beweis der Theoreme 6) sich gründete, selbst dann zulässig, wenn ab oder $a + b$ uneigentliche Gebiete sein sollten, d. i. eben 0 bedeuten.

Endlich würden für $ab = 0$ die Subsumtionen 6_x) sich auf Grund der Def. (2_x) auch unmittelbar verifizieren lassen — vergl. § 9, q) — wogegen für den Fall $a + b = 0$ zur Bewahrheitung der Subsumtionen 6₊) das Theorem 24₊) könnte herangezogen werden.

Nach Th. 6) muss im identischen Kalkül mit Gebieten nun — *umgekehrt wie in der Arithmetik und Zahlentheorie* — gesagt werden: *das Produkt sei stets in seinem Faktor* (dem ersten oder auch dem zweiten) *enthalten*; und es muss auch gesagt werden: *der Summand, das Glied, sei in der Summe enthalten*. —

Mit dem Bisherigen haben wir bereits die *formale Grundlage* für einen bedeutenden (ersten) Teil des Gebäudes unsrer Disziplin gewonnen.

Mit den gegebenen Prinzipien I, II, den Definitionen (1) bis (3) und den Theoremen 1) bis 6) kommt man bereits bei den deduktiven Schlussfolgerungen, welche uns obliegen, bis incl. der Theoreme 25) aus.

Gleichwol wollen wir an das bisherige noch einige — etwas subtilere — Betrachtungen unter der Überschrift des nächsten Paragraphen anreihen, welche die Bestimmung haben, eine berechnete Anforderung zu erfüllen, einem Erkenntnisbedürfnis zu genügen, das meines Erachtens beim Anblick der Definition (3) von ab und $a + b$ sich aufdrängen muss. Es handelt sich um die Frage, ob die in (3) anscheinend nur für die *einseitige* Verwendung dieser Symbole als Prädikat, respektive Subjekt, gegebene Vorschrift auch deren umgekehrte Verwendung regelt, inwiefern sie also wirklich verdiente, als die *vollständige* Definition von Produkt und Summe hingestellt zu werden.

Es werden diese Betrachtungen noch einige an sich nicht uninteressante Theoreme und neue Formen von Definitionen liefern, die aber, wie angedeutet, späterhin nicht wesentlich citirt zu werden brauchen, die im Lehrgebäude nicht gerade als unentbehrliche Stütze erscheinen.

Anfänger mögen also ohne Schaden den § 6 überschlagen und werden dennoch in der Lage bleiben, die letzten Ziele dieses Buches erreichen zu können.

Ich denke hiebei speziell an den immerhin möglichen und für eine fernere Zukunft zu erhoffenden Fall einer *Verwertung* unsres Lehrganges für den Logikunterricht in Gymnasialprima. Dasselbst *eingeführt* zu werden ist das Buch nicht bestimmt, vielmehr wird dasselbe seinen Zweck erreichen, wenn Lehrer, Philosophen und Mathematiker, es würdigen.

§ 6. Kritische Untersuchungen über die gegebene Definition.

(Überschlagbar.)

Zusatz 2 zur Def. (3). Unter den Voraussetzungen der Definition (3) hat *jedes* Gebiet x , derart, dass

$x \notin c$		$c \notin x$
ist, die gleiche Eigenschaft wie c , dass nämlich auch		
$x \notin a$ nebst $x \notin b$		$a \notin x$ nebst $b \notin x$
sowie		
$x \notin ab$		$a + b \notin x$

ist. Dies ergibt sich einerseits nach (3)' unter zweimaliger Anwendung des Prinzips II, und andererseits, in Übereinstimmung damit, auch nach (3)" durch einmalige Anwendung von II; nämlich, um es genauer — z. B. links vom Mittelstriche — darzulegen: Aus $x \notin c$ und $c \notin a$

folgt $x \in a$, desgleichen aus $x \in c$ und $c \in b$ folgt $x \in b$, und aus diesen beiden Ergebnissen muss nach $(3_x)'$ selbst (für x statt c in Anspruch genommen) folgen: $x \in ab$.

Andrerseits folgt aus $x \in c$ und $c \in ab$ sogleich direkt: $x \in ab$ und damit nach $(3_x)''$ auch $x \in a$ und $x \in b$.

Mit diesem Zusatze können wir nun die Definition (3) zu folgender, nur äusserlich etwas komplizierter erscheinenden Formulierung zusammenfassen, bei der wir ebenfalls von vornherein sicher sind, dass das definierte Gebilde als „Gebiet“ existiert:

7) Theorem, als neue Fassung der Def. (3), auch zu citiren als Definition (4), und zwar

7_x) Th. = Def. (4_x)

7₊) Th. = Def. (4₊).

Wenn für gegebene a, b ein c existiert derart, dass für jedes x , für welches

$$x \in c$$

$$c \in x$$

ist, auch

$$x \in a \text{ nebst } x \in b$$

$$a \in x \text{ nebst } b \in x$$

sein wird, dann und nur dann ist man berechtigt zu sagen, es sei:

$$c \in ab.$$

$$a + b \in c.$$

Beweis. Da nach I $c \in c$ ist, so ist c selber ein zulässiger Wert des x und muss jedenfalls auch

$$c \in a \text{ nebst } c \in b, \\ \text{somit nach } (3_x)' \quad c \in ab$$

$$a \in c \text{ nebst } b \in c, \\ \text{somit nach } (3_+) \quad a + b \in c$$

sein. Die Umkehrung ist der Inhalt des vorigen Zusatzes.

Der Sachverhalt sei einstweilen schon durch die Figur veranschaulicht:

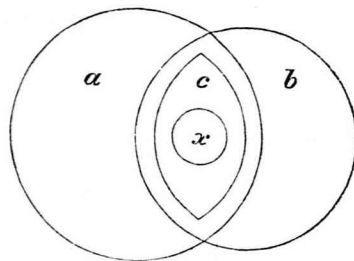


Fig. 7_x.

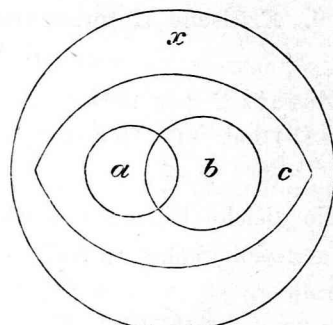


Fig. 7₊.

Zusatz zu Th. 7). Unter den Bedingungen des Satzes hat wieder jedes y derart, dass

$$y \in c$$

$$c \in y$$

ist, durchaus die gleiche Eigenschaft, wie c , wie leicht mittelst II zweifältig zu beweisen ist.

Anmerkung zu Th. 7). Daneben mag es noch solche x geben, für welche zwar

$$x \in a \text{ nebst } x \in b$$

$$a \in x \text{ nebst } b \in x$$

ist, ohne dass doch zugleich

$$x \in c$$

$$c \in x$$

wäre. Im allgemeinen lassen sich in der That Gebiete x derart angeben, welche zu c in einer andern als der durch vorstehende Subsumtion ausgedrückten Beziehung stehen, und wird es der Phantasie des Lesers nicht schwer fallen, sich in obige Figuren solche Gebiete x eingetragen zu denken, z. B.

links einen über das Zweieck c hinausragenden oder auch ganz ausserhalb desselben liegenden, jedoch noch in den Kreis a sowol als den b ganz hineinfallenden kleinen Kreis x

rechts einen die Kreise a und b zwar ganz in sich schliessenden, jedoch von der Zweieckfläche c noch teilweise überragten, vielleicht sogar selbst in das Zweieck c hineinfallenden Kreis x .

Wir mussten die Def. (4) als ein Theorem — Th. 7) — hinstellen, weil dieselbe keine willkürliche Festsetzung mehr den Grundlagen unsrer Disziplin hinzufügte, sondern auf Grund namentlich der bereits getroffenen Festsetzung (3), sich als eine *notwendig* mitgeltende, gleichberechtigte Form ebendieser Def. (3) nachweisen liess.

Diese Form ist freilich weniger einfach als die frühere, und es hätte keinen Wert, die einfachere Fassung der Definition in eine verwickeltere, kompliziertere umzuwandeln, wenn diese nicht durch ihre Analogie mit den noch fehlenden, den ausstehenden beiden Definitionen uns das Material zu interessanten Vergleichen lieferte.

Inzwischen verlohnt es noch, zu sehen, dass und wie man von Def. (4) zur Def. (3) auch zurückgelangen kann.

Ich will dies nur für die Sätze *links* vom Mittelstriche zeigen. Wir mögen die Def. (4_x) auch so in Worte fassen: Die Redensart „ c sei in ab enthalten“, m. a. W. die Subsumtion „ $c \in ab$ “ heisst: jedes in c enthaltene x ist auch in a und in b enthalten.

Da nach I c selbst ein solches x ist, muss nun die Annahme $c \in ab$ auch die beiden Subsumtionen $c \in a$ und $c \in b$ nach sich ziehen, womit $(3_x)''$ gewonnen ist.

Bleibt nur noch das Umgekehrte zu zeigen, d. h. $(3_x)'$ abzuleiten. Sind die Voraussetzungen $c \in a$ und $c \in b$ gleichzeitig erfüllt, so muss nach der erstern jedes in c enthaltene x (für welches also $x \in c$ ist) nach II auch in a enthalten sein (für dasselbe auch $x \in a$ sein). Ebenso muss nach der zweiten Voraussetzung jedes in c enthaltene x

auch in b enthalten, für $x \in c$ auch $x \in b$ sein. Nach beiden Voraussetzungen zusammen wird also jedes in c enthaltene x zugleich auch in a und in b enthalten sein, wonach die Def. (4_x) ersichtlich anwendbar ist, und nach dieser $c \in ab$ zu sagen sein wird. Damit ist dann auch (3_x)' und sohin die ganze Def. (3) gewonnen.

Mit Def. (3) sowol als Def. (4) erscheint auf den ersten Blick immer noch

das Produkt nur als Prädikat | die Summe nur als Subjekt
allgemein defint. Gleichwol zeigt sich leicht, dass damit doch auch für die Verwendung

des Produkts als Subjekt | der Summe als Prädikat
schon in gewissem Grade präjudiziert ist.

In der That ist dies wenigstens in den Beispielen der Subsumtionen α) des vorigen Paragraphen, sowie des Theorems 6), also bei:

$$ab \in \left\{ \begin{array}{l} ab \\ a \\ b \end{array} \right\} \quad \left| \quad a+b \in \left\{ \begin{array}{l} a+b \\ a \\ b \end{array} \right\} \right.$$

augenscheinlich der Fall. Und diese Beispiele bleiben auch nicht die einzigen; vielmehr könnten wir sogleich den Zusatz beifügen: So oft etwa noch

$$\begin{array}{l} a \in y \text{ oder } b \in y \\ ab \in y \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} y \in a \text{ oder } y \in b \\ y \in a+b \end{array} \right.$$

gelten, und diese Subsumtionen würden ebenfalls die umgekehrte Verwendung exemplifizieren.

Dass aber auch ganz allgemein die Definition

des Produkts als Subjekt | der Summe als Prädikat
zurückgeführt werden kann auf die für die frühere (hiezum umgekehrte) Verwendung bereits gegebene Def. (3), dass sie durch diese völlig mitgegeben ist, ergibt sich aus folgender Betrachtung, die wir in die Form zweier Lehrsätze kleiden.

$$\begin{array}{l} (8_x)' \text{ Theorem. Soll} \\ ab \in c \\ \text{gelten, so muss für jedes } x, \text{ für welches} \\ x \in ab \\ \text{ist, auch sein:} \\ x \in c. \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (8_+)' \text{ Theorem. Soll} \\ c \in a+b \\ a+b \in x \\ c \in x. \end{array} \right.$$

Beweis direkt aus II durch nur einmalige Anwendung dieses

Prinzips, das in der That aus den beiden Voraussetzungen — linkerhand z.B. aus $x \in ab$ und $ab \in c$ — unmittelbar uns die Behauptung liefert.

8_x)' Theorem. Wenn für jedes x , für welches $x \in ab$ ist, auch $x \in c$ sein muss, so wird
8₊)' Theorem. Wenn für jedes x , für welches $a+b \in x$ ist, auch $c \in x$ sein muss, so wird

$$ab \in c$$

$$c \in a+b$$

zu gelten haben.

Beweis. Nach I, nämlich wegen

$$ab \in ab,$$

$$a+b \in a+b,$$

ist ja dann ab resp. $a+b$ selber ein zulässiger Wert des x . —

Hienach ist klar, dass wir definitionsweise zu sagen haben werden, es sei

$ab \in c$, wenn für jedes x , welches $x \in ab$ ist, auch $x \in c$ sein wird. | $c \in a+b$, wenn für jedes x , wo für $a+b \in x$ ist, auch $c \in x$ sein muss.

Ersetzen wir hierin die Forderung $x \in ab$ resp. $a+b \in x$ durch dasjenige, was sie nach Def. (3) bedeutet, so erhalten wir folgende Fassung der noch ausstehenden Definition, die, wenn man sie auch selbständig als eine solche von vornherein hätte hinstellen können, doch dermalen wesentlich wieder als Theorem zu bezeichnen ist.

9_x) Theorem, auch zu citiren | 9₊) Theorem, auch zu citiren
als Definition (5_x). | als Definition (5₊).

Wenn für gegebene a, b ein solches c existirt, dass für jedes die Bedingungen

$$x \in a, x \in b \quad \left| \quad a \in x, b \in x \right.$$

bezüglich gleichzeitig erfüllende x auch stets

$$x \in c$$

$$c \in x$$

ist, so (d. h. immer dann und nur dann) ist zu sagen, es sei:

$$ab \in c.$$

$$c \in a+b.$$

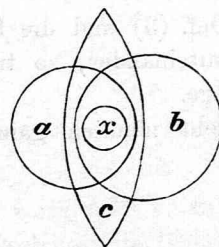


Fig. 8_x.

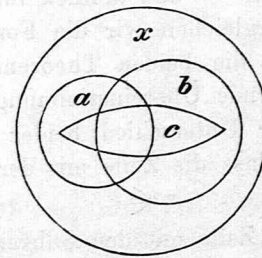


Fig. 8₊.

Der Sinn auch dieser Erklärung mag durch eine Figur erläutert werden, in welcher sich die vorausgesetzten Bedingungen hinsichtlich der Gebiete a, b, c und wenigstens eines bestimmten x verwirklicht zeigen (Fig. 8_x u. Fig. 8₊). Es bedeuten a, b, x Kreisflächen und c das „Bilineum“, die von den zwei Kreisbogen begrenzte Fläche.

Zusatz 1 zu Th. 9). Unter diesen Bedingungen hat jedes y derart, dass

$$c \in y \quad | \quad y \in c$$

ist, durchaus die gleiche Eigenschaft wie c , wie leicht nach II auf zwei Arten zu beweisen.

Zusatz 2 zu Th. 9). Nach Def. (2) existiert in Gestalt von 1 resp. 0 sicher mindestens ein c , welches den Voraussetzungen der Def. (5) genügt, gleichwie auch in Gestalt von 0 resp. 1 mindestens ein x der daselbst verlangten Art angebar ist.

Anmerkung 1 zu Th. 9). Daneben mag es noch solche x geben, für welche zwar

$$x \in c \quad | \quad c \in x$$

ist, ohne dass jedoch zugleich

$$x \in a, x \in b \quad | \quad a \in x, b \in x$$

wäre, und in der That wird in die Figur die Phantasie des Lesers mit Leichtigkeit solche Flächen x einzeichnen.

Anmerkung 2 zu Th. 9). Sehr wichtig ist die Bemerkung: Das Theorem 6) des vorigen Paragraphen folgt ebensogut aus der Def. (5), wie aus der (3).

Denn für jedes x , für welches

$$x \in a \text{ nebst } x \in b \quad | \quad a \in x \text{ nebst } b \in x$$

ist, gilt selbstverständlich doch

$$x \in a \quad | \quad a \in x$$

— im Grunde nach I, für Aussagen in Anspruch genommen, vergl. Anmerkung zu I. Indem man also unter dem c der Def. (5) sich a vorstellt, erkennt man, dass nach dieser

$$ab \in a \quad | \quad a \in a + b$$

sein muss — und ähnlich für b . —

Vergleichen wir die Formen (4) der Def. (3) und die Def. (5), nämlich die beiden Theoreme 7) und 9) miteinander, so tritt eine weitgehende Übereinstimmung derselben zutage.

Der Unterschied beider Theoreme besteht nämlich ganz allein darin, dass die Zeile mit der Subsumtion

$$x \in c \quad | \quad c \in x$$

und die Zeile mit den Subsumtionen

$$x \in a, x \in b \quad | \quad a \in x, b \in x$$

im einen Theorem dem andern gegenüber vertauscht erscheint; d. h. in der zusammengesetzten Voraussetzung eines jeden der beiden Theoreme, welche selbst die Erfüllung einer Bedingung an das Erfülltsein einer zweiten Bedingung knüpft, muss man jenes Bedingte mit dieser Bedingung vertauschen, um das andre Theorem daraus zu erhalten — man muss nicht das Theorem, wohl aber dessen Voraussetzung „umkehren“.

Wir hätten nun allerdings anstatt der Definitionen (3) oder (4) auch die Definition (5) als solche an die Spitze der ganzen Theorie stellen können, woraus sich sofort auch das Th. 6) — wie in Anm. 2 zu Th. 9) gezeigt — mitergeben haben würde.

Es wäre dann ab und $a + b$ auch wieder nur für die einseitige Verwendung definiert erschienen, aber diesmal für die umgekehrte wie früher, zunächst nämlich wäre ab nur als Subjekt und $a + b$ als Prädikat erklärt.

Für die andersseitige Verwendung dieser beiden Symbole (nämlich für die von ab als Prädikat und $a + b$ als Subjekt) könnte dann die Begriffserklärung wieder leicht auf die vorhergehende zurückgeführt werden kraft zweier Theoreme — naheliegender Analoga zu Th. 8)' und 8)'' — die wir zunächst aussprechen und beweisen wollen.

$$10_x)' \text{ Theorem. Soll} \quad | \quad 10_+' \text{ Theorem. Soll}$$

$$c \in ab \quad | \quad a + b \in c$$

gelten, so muss für jedes x , für welches

$$ab \in x \quad | \quad x \in a + b$$

ist, auch sein:

$$c \in x. \quad | \quad x \in c.$$

Beweis direkt aus Prinzip II.

Und umgekehrt:

$$10_x)'' \text{ Theorem.} \quad | \quad 10_+)'' \text{ Theorem.}$$

Wenn für jedes x , für welches

$$ab \in x \quad | \quad x \in a + b$$

ist, auch

$$c \in x \quad | \quad x \in c$$

sein muss, so wird zu sagen sein, es sei

$$c \in ab. \quad | \quad a + b \in c.$$

Beweis nach I, da alsdann auch ab resp. $a + b$ selbst ein solches x ist, welches die Bedingung und folglich auch die Behauptung der Voraussetzung erfüllt.

Hienach würden wir also *definitionsweise* zu sagen haben, es sei $c \in ab$ allein dann, wenn jedes ab enthaltende x auch c enthalten muss.

$a + b \in c$ dann allein, wenn jedes in $a + b$ enthaltene x auch in c enthalten sein muss.	
--	--

Ersetzen wir nunmehr in diesen Festsetzungen die Bedingung $ab \in x$ resp. $x \in a + b$ durch dasjenige, was sie nach Def. (5) oder Th. 9) bedeutet, wobei indess in letzterem an Stelle des dortigen x zur Unterscheidung ein anderer Buchstabe, wie y , verwendet werden müsste (weil x bereits mit einer andern Bedeutung vorgekommen, nicht mehr verwendbar erscheint), so erhielten wir endlich die noch ausstehenden beiden Definitionen.

Diese aber — obwol im Grunde notwendig äquivalent der Def. (3) und dasselbe leistend, nämlich mit Hülfe des Subsumtionsbegriffs die Bedeutung von ab als Prädikat und von $a + b$ als Subjekt erklärend — würde sich doch dem Wortlaut nach mit Def. (3) durchaus nicht decken. Bei weitem nicht so einfach wie letztere würde sie sogar noch erheblich verwickelter sich darstellen als die Def. (4) in Th. 7), indem sie noch weitere bedingte Bedingungen in ihre Bedingungen eingefügt zeigte. Wir wollen sie hier gar nicht in Worte fassen, sondern sie höchstens in der konziseren Formelsprache des Aussagenkalküls — als ein Kuriosum — darstellen (§ 32, $\pi \dots \sigma$).

Ihrerseits müsste sie, als die ursprüngliche Definition zugrunde gelegt, kraft Th. 10) uns noch eine abermals erheblich verwickeltere Fassung der Def. (5) liefern; diese wieder könnte in demselben Sinne weiter verwendet werden und so ohne Ende fort immer verwickelter.

Wir müssen ja nun im Gegenteil nach möglichster Vereinfachung der grundlegenden Begriffserklärungen streben.

Da haben wir denn als eine bemerkenswerte Tatsache zu konstatieren, dass die Def. (5) [von ab als Subjekt, etc.] — ungeachtet ihrer Analogie zur Def. (4) [von ab als Prädikat etc.] — durchaus nicht einer analogen Vereinfachung fähig zu sein scheint, wie die letztere (4), [welche wir ja in die einfachere Fassung, Def. (3), zusammenziehen konnten] — wenigstens nicht, ohne ihren Charakter [dass sie ab als Subjekt definire, etc.] dabei zu verlieren.

Wollte man gleichwol das Th. 9) als Def. (5) an die Spitze stellen, so würde sich zwar sehr leicht der eine Teil (3)'' unsrer früheren Def. (3) — nunmehr als Lehrsatz — auf Grund des bereits aus jener deduzierten Theorems 6) beweisen lassen. In der That aus:

$c \in ab$ und $ab \in a$ folgte	$a + b \in c$ und $a \in a + b$ folgte
$c \in a$ und ähnlich auch $c \in b$.	$a \in c$ und ähnlich auch $b \in c$.

Dagegen würde die Ableitung von (3)' aus Def. (5) eine etwas höhere Anforderung an das abstrakte Denken stellen.

Ich will diese Ableitung nur für die Sätze zur Linken des Mittelstriches darlegen.

Wir können die Def. (5_x) auch so in Worte fassen: Die Redensart: „ c enthält ab “ — in Formel: „ $ab \in c$ “ heisst: jedes in a und b zugleich enthaltene x ist auch in c enthalten.

Auf diese Def. ist nun die Erklärung der andern Redensart: „ c ist in ab enthalten“ oder „ $c \in ab$ “ zurückzuführen mittelst des Th. 10_x) — wonach ebendieses heissen wird:

jedes ab enthaltende x (jedes x , welches ab enthält) muss auch c enthalten.

Fügt man in diese Erklärung ein, was die (in der Klammer wiederholte) Voraussetzung „ $x \in ab$ “ nach der vorhergehenden Erklärung (5_x) bedeutet, indem man das dortige c mit x identifiziert, und für den hier bereits anderweitig vergebenen Buchstaben x einen andern, y , gebraucht, so ergibt sich als die auf Def. (5_x) zu gründende Erklärung von ab als Prädikat die folgende:

„ $c \in ab$ “ heisst: jedes x , welchem jedes in a und b enthaltene y eingeordnet ist, muss auch c enthalten.

Auf Grund dieser Definition ist nun zu zeigen, dass wenn $c \in a$ und $c \in b$ ist, auch $c \in ab$ sein muss.

Gesetzt nun, es sei wirklich $c \in a$ und zugleich $c \in b$.

Dann ist c selber ein solches in a und b enthaltenes y .

Es ist nun zu zeigen, dass jedes x , welchem jedes in a und b enthaltene y eingeordnet ist, auch c enthält.

Sei x irgend ein Gebiet, welchem jedes in a und b enthaltene y eingeordnet ist. So ist diesem x auch das vorhin erwähnte y , welches einerlei mit c war, eingeordnet, oder es muss dasselbe x auch c enthalten. Unter den genannten Voraussetzungen ($c \in a$ und $c \in b$) trifft demnach die letzte Definition zu und sind wir berechtigt zu sagen, es sei $c \in ab$ — womit nun auch (3_x) gewonnen und die ganze Def. (3_x) aus der (5_x) abgeleitet ist.

Aus alledem geht hervor, dass es zwar praktikabel, doch jedenfalls nicht vorteilhaft ist, den von uns zurückgelegten Weg im entgegengesetzten Sinne zu durchlaufen.

Allerdings, sobald für ab resp. $a + b$ die Art und Weise der Verwendung — sei es als Subjekt, sei es als Prädikat — vorgeschrieben ist, erscheint damit von selbst auch die Verwendung in dem umgekehrten Sinne geregelt. Welche von den beiden Verwendungsweisen

wir aber als die ursprüngliche Definition zuerst festlegen, ist deshalb doch nicht gleichgültig, sondern das in § 5 eingeschlagene Verfahren vorzuziehen.

11_x) Theorem.

Es gibt nun ein „Gebiet“ c , welches die Forderung der Definitionen
(3_x) oder (4_x) und (5_x), d. i. | *(3₊) oder (4₊) und (5₊), d. i.*
7_x) und 9_x) | *7₊) und 9₊)*

gleichzeitig erfüllt für dieselben (irgendwie) gegebenen Gebiete a, b .

Da für dieses

$c \Leftarrow ab$ und $ab \Leftarrow c$ | $a + b \Leftarrow c$ und $c \Leftarrow a + b$
 zugleich sein wird, so ist dasselbe
 $c = ab$ | $c = a + b$

selbst zu nennen.

Zusatz. *Es kann jedenfalls nur ein solches c geben.*

Denn wäre auch noch c' ein solches, so folgt ebenso:

$c' = ab$ | $c' = a + b$
 und damit nach Th. 4) $c' = c$.

Beweis des Theorems. Dieser besteht in der Verbindung zweier Überlegungen, von denen die eine — allerdings modifiziert — unter Th. 6) schon einmal angestellt worden ist. Er möge demungeachtet hier ganz zum Bewusstsein gebracht werden. — Wie schon erwähnt, sind nach I die Formeln

a) $ab \Leftarrow ab$ | $a + b \Leftarrow a + b$

als gültige anzuerkennen. Nach

Th. 9_x) wenn das ab rechts in a) | Th. 9₊) wenn das $a + b$ links mit c in Gedanken identifiziert wird, erkennt man aber, dass die obige Aussage a) den Inhalt hat, dass jedes x , für welches

$x \Leftarrow a$ nebst $x \Leftarrow b$ | $a \Leftarrow x$ nebst $b \Leftarrow x$

ist, auch die Forderung erfüllen muss:

$x \Leftarrow ab$ | $a + b \Leftarrow x$.

Dagegen nach

Th. 7_x) wenn das ab linkerhand | Th. 7₊) wenn das $a + b$ rechterhand in a) mit dem c daselbst identifiziert wird, sagt ebendieser Satz a) aus, dass umgekehrt jedes x , für welches

$x \Leftarrow ab$ | $a + b \Leftarrow x$
 ist, auch die Bedingung erfüllen wird
 $x \Leftarrow a$ nebst $x \Leftarrow b$ | $a \Leftarrow x$ nebst $b \Leftarrow x$.

Dies alles ist auch direkt nach Def. (3) ersichtlich. — Das Symbol ab resp. $a + b$ ist demnach in der That selbst dasjenige „Gebiet“ c , welches die Voraussetzungen der als Theoreme 7) und 9) ausgesprochenen Definitionen gleichzeitig erfüllt.

Auf Grund der vorstehenden Überlegungen können wir nun sagen:

Die Operationen der identischen Multiplikation und Addition sind niemals undeutig und niemals mehrdeutig, vielmehr unbedingt ausführbar und eindeutig — oder, wie ich zusammenfassend es ausdrücken will: sie sind „vollkommen eindeutig“ innerhalb der durch Zuzug der Symbole 0, 1, ab , $a + b$ vielleicht erweiterten Mannigfaltigkeit von „Gebieten“.

Dass ab in der That eines Wertes nie ermangeln kann, wenn man schon den Namen ab selber als „Wert“ gelten lässt, erscheint selbstverständlich: eine solche Definition verbürgt zugleich die Existenz des Definirten. Dass ab nicht mehrere Werte haben kann, zeigte der Zusatz zu Th. 11). Analog bezüglich des $a + b$.

Worauf es hier besonders ankam, war: zu sehen, dass die Aufnahme der neuen Symbole unter die „Gebiete“ im Grunde schon dadurch vollzogen wurde, dass man das Identitätsprinzip I auf sie anwendete, beziehungsweise ausdehnte.

Indem man nunmehr für c sogleich den Namen ab resp. $a + b$ gebrauchte, würden die beiden Theoreme 7) und 9) augenscheinlich zu einem Satze zusammenfließen, der sich völlig deckt mit der alten Definition (3) — nur dass es jetzt „jedes x “ anstatt des dortigen „gewissen“ c hiesse.

Dergestalt im Ringe herum gegangen kämen wir somit wieder zu unserm Ausgangspunkte zurück.

Diesen Satz, Def. (3), stellt Herr Peirce einfach als „Definition“ von ab resp. $a + b$ hin.

Dass er aber solche Definition nicht bloß für die einseitige Verwendung (als major resp. minor) sondern in der That vollständig enthält — dies durch die hier gegebene Zergliederung nachgewiesen zu haben, dürfte wol nicht überflüssig gewesen sein. —

§ 7. Deutung von 0, 1, ab , $a + b$ als Gebiete nebst zugehörigen Postulaten. Konsistente Mannigfaltigkeit.

Wir schreiten jetzt dazu, das im Bisherigen abstrakt Definirte zu veranschaulichen, zu deuten.

Solange es ununtersucht gelassen wird, ob es „eigentliche“ Gebiete gebe, welche die von den Symbolen 0, 1, ab , $a + b$ geforderten Eigenschaften besitzen, konnten wir sagen, dass unsre Definitionen die

Existenz des Definirten insofern verbürgen, als sie es gewissermassen selber erzeugen oder schöpferisch einführen.

Sobald wir aber jenen unter die „Gebiete“ aufgenommenen Symbolen eine Bedeutung unterlegen, behaupten, dass es der Anschauung zugängliche, wirkliche Gebiete gebe von den bezüglichen Eigenschaften, fügen wir unsern Definitionen gewisse *Postulate hinzu*, wir stellen Forderungen über Gebietnachweise als allgemein erfüllbare hin, bezüglich deren wir uns lediglich auf die Anschauung zu berufen vermögen.

Ganz allein bezüglich der Null werden wir solchen Nachweis als nicht ausführbar erkennen, und darf ich die Konstatirung des Gegenteils wol für den Augenblick als ein „negatives“ Postulat bezeichnen.

((1_x)) Negatives Postulat.

Es gibt kein eigentliches Gebiet von den Eigenschaften, welche Def. (2_x) dem Symbole 0 auferlegt. Es lassen sich nämlich Gebiete angeben, die einander ausschliessen*), sogenannte „disjunkte“ Gebiete, die kein Element gemein haben. Da die 0 in jedem Gebiet enthalten, allen gemeinsam sein soll, so kann sie nur ein „leeres“ Gebiet sein, welches kein Element der Mannigfaltigkeit enthält. Trotzdem als ein „Gebiet“ derselben charakterisirt, kann die Null auch nichts, was etwa ausserhalb der Mannigfaltigkeit läge, enthalten, sie kann nur dem Begriffe des „Nichts“ entsprechen. Nach Adjungirung des letzteren ist in der That dem Sprachgebrauch entsprechend zu sagen: Jedes Gebiet enthält seine eigenen Teile sowie Elemente und sonst „nichts“. Das Nullgebiet wird so von den eingeführten das einzige uneigentliche oder fingirte, eingebildete, angebliche Gebiet bleiben.

*) Die hier kursiv gedruckten Worte bilden den positiven Inhalt auch dieses Postulates, sie sprechen die Forderung aus, der man eben faktisch genügen kann.

((1₊)) (Positives) Postulat.

Die Elemente (und Gebiete) der Mannigfaltigkeit [seien resp.] sind miteinander alle verträglich, sodass wir vermögen, die Mannigfaltigkeit als ein Ganzes zu denken. In dieser ist dann jedes Gebiet derselben enthalten — einschliesslich des adjungirten Nullgebietes — gemäss den Anforderungen (2₊); und hindert nichts, sie selbst als das grösste der in ihr enthaltenen Gebiete, als ein wirkliches Gebiet zu bezeichnen. Dieses bildet nun die dem Symbole 1 zukommende Bedeutung, welches sonach dem Begriffe „des Ganzen“ oder „Alles“ innerhalb der vorausgesetzten Mannigfaltigkeit entspricht.

Als *Postulat* ist ((1₊)) eigentlich nur dann zu bezeichnen, wenn der Satz für eine bestimmte Mannigfaltigkeit in Anspruch genommen wird — wie z. B. für diejenige der Punkte der Tafelfläche. Es gibt nämlich auch Mannigfaltigkeiten, bei denen das Postulat ((1₊)) nicht erfüllbar ist, und solche finden wir ausschliesslich auf geistigem Gebiete, im Bereich der Lehren, Meinungen und Behauptungen. Es gibt Meinungen und Behauptungen, auch Anforderungen oder Bedingungen, die miteinander unvereinbar sind.

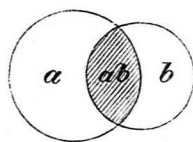
Beispielsweise der Satz: „die Funktion $f(x, y)$ ist symmetrisch“ lässt sich mit dem Satze: „die(selbe) Funktion $f(x, y)$ ist nicht symmetrisch“ unmöglich zu einer Mannigfaltigkeit der früher gedachten Art vereinigen, oder mit vielleicht noch anderen Sätzen in einer als Ganzes denkbaren Mannigfaltigkeit zusammenfassen, gemeinsam unterbringen. Da diese beiden Sätze — jeder einzelne als gültig oder erfüllt angenommen, als glaubhaft hingestellt — einen Widerspruch involviren, da sie m. a. W. miteinander „unverträglich“ erscheinen, vermag der menschliche Geist nicht, sie zu vereinigen; wir können immer nur den einen oder aber den andern dieser beiden Sätze gelten lassen.

A priori, von vornherein, ist ((1₊)) daher nicht sowol als ein „Postulat“ sondern vielmehr als eine Voraussetzung oder Annahme zu qualifiziren, durch welche die zu betrachtende Mannigfaltigkeit charakterisirt wird als eine „konsistente Mannigfaltigkeit“, deren Elemente sämtlich miteinander verträglich sind — im Gegensatz zu den „inkonsistenten Mannigfaltigkeiten“, deren Elemente nicht alle verträglich sind miteinander. Auf diesen Sachverhalt sollte oben schon das in eckige Klammer gesetzte [seien resp.] vorsichtig hinweisen. (Vergl. hiezu § 31, Fussnote.)

Um das Gebiet 1 zu veranschaulichen, müssten wir die ganze Bild- oder Tafelfläche schraffiren; die Veranschaulichung des Nullgebietes ergäbe sich, wenn wir sie ganz leer liessen, nichts, auch nicht einen Punkt in sie einzeichneten und sagten, das Eingezeichnete eben sei das Nullgebiet.

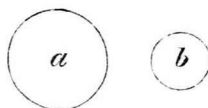
Die Symbole 0 und 1 erscheinen als die beiden Extreme, als die äussersten Werte unter den denkbaren Gebieten der Mannigfaltigkeit, und zwar ist das Nullgebiet als das minimale, das Gebiet 1 als das Maximalgebiet zu bezeichnen. Ebenso stellen 0 und 1 die entgegengesetzten Extreme (Grenzfälle, limits) unter den Klassensymbolen vor, indem keine Klasse weniger als keines und keine mehr als alle Individuen einer vorausgesetzten Mannigfaltigkeit (wo nicht von Objekten des Denkens überhaupt) enthalten kann.

Wie es ferner die Figur veranschaulicht, in welcher wir a und b als Kreisflächen angenommen und die zugehörigen Gebiete $a \cdot b$ resp. $a + b$ durch Schraffiren hervorgehoben haben:

Fig. 9_x.

ist zu konstatieren, dass

$a \cdot b$ das Gebiet vorstellt, welches den Gebieten a und b gemeinsam ist, in welchem sie sich gegenseitig durchdringen (schneiden), und — falls sie keinen Punkt gemein haben (Fig. 10_x) — das Nullgebiet.

Fig. 10_x.

Hier ist $a \cdot b = 0$

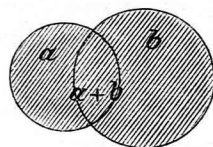
Solche Gebiete, deren Produkt 0 ist, nannten wir bereits *disjunkt*.

Wir mögen die vorstehenden Sätze etwa selbst bezeichnen als

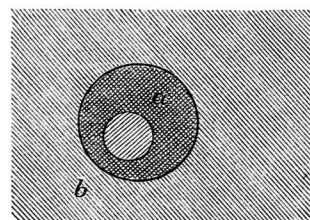
Postulat ((2_x))

weil sie wesentlich auf der Erfüllbarkeit der Forderung beruhen und diese in sich schliessen:

wenn zwei Gebiete gegeben sind, dasjenige Gebiet nachzuweisen, resp. herzustellen und im Geiste zu isolieren, welches die den beiden gemeinsamen Punkte ausschliesslich enthält.

Fig. 9_x.

$a + b$ das Gebiet vorstellt, zu welchem a und b einander gegenseitig ergänzen, [und zwar, falls dann innerhalb der Mannigfaltigkeit nichts mehr übrig bleibt, diese selbst, das Gebiet 1 — vergl. Fig. 10₊, worin b die Aussenfläche des innern Kreises bedeutet].

Fig. 10₊.

Hier ist $a + b = 1$.

Analog mögen solche Gebiete, deren identische Summe 1 ist, *supplementär* genannt werden.

Postulat ((2₊)),

ein Gebiet zu bilden, welches nur diejenigen Punkte enthält, die dem einen oder auch dem andern der beiden gegebenen Gebiete angehören.

Vermögen wir nun dieses, so stimmt für die Anschauung die Probe des Teils (3)' sowol als die Probe des Teils (3)'' der Definition (3):

Zu Fig. 9_x. Wenn irgend ein Gebiet c zugleich in a und b enthalten ist, so ist es auch in dem angeblichen Gebiet ab enthalten. Desgl. umgekehrt: Wenn ein c in dem fraglichen ab enthalten ist, so ist es auch zugleich in a und in b enthalten.

Zu Fig. 9₊. Wenn a und zugleich b ganz in einem Gebiete c enthalten sind, so ist auch das angebliche Gebiet $a + b$ in diesem c enthalten. Und umgekehrt, wenn das problematische $a + b$ in einem Gebiete c enthalten ist, so ist auch sowol a als b in diesem c enthalten.

Vergl. auch Prinzip II und das hier unmittelbar evidente Theorem 6).

Zu Fig. 10_x, wo a und b keinen Punkt gemein haben, ist noch zu bemerken: Ausser dem Nullgebiete ist kein Gebiet c denkbar, welches zugleich in a und in b enthalten wäre; dies Gebiet 0 ist aber auch in ab (welches = 0 behauptet ist) enthalten — cf. I sowie Def. (2_x), nach welchen beiden ja $0 \in 0$ gilt. Wenn umgekehrt ein c in dem ab , welches 0 ist, enthalten sein soll, so muss es nach Th. 5_x) selbst 0 sein, und ist dasselbe nach Def. (2_x) dann auch in a sowie in b enthalten.

Man sieht: der Satz der Arithmetik, wonach ein Produkt nicht anders gleich 0 sein, verschwinden kann, als indem einer seiner Faktoren selbst 0 ist — ein Satz, der dort übrigens auch für Produkte von unbegrenzter Faktorenzahl schon nicht mehr gilt — dieser Satz trifft im identischen Kalkül überhaupt nicht zu. Hier kann vielmehr leicht $a \cdot b$ verschwinden, ohne dass a oder b selbst gleich 0 wäre, verschwände. Es ist dies aber auch ein Satz, der wesentlich nicht auf die Multiplikation, sondern auf die Division sich bezieht, indem bei ihm der Produktwert (= 0) als *gegeben* erscheint. Der Satz kommt in der That auf die Gleichung $\frac{0}{a} = 0$ (für a ungleich 0) hinaus, und dass die auf *Division* bezüglichen Sätze der Arithmetik sich zumeist *nicht* auf den identischen Kalkül übertragen, wurde bereits hervorgehoben.

In gleicher Weise stimmt die Probe für jede andere der in § 6 abgeleiteten Formen der Def. (3).

Die angegebenen Gebiete genügen also der Def. (3) *wirklich* und nach Vorangegangem [cf. Th. 11) Zusatz] auch *einzig*. Zum Überfluss vermöchte man bei jedem andern als ab resp. $a + b$ vermuteten Gebiete leicht solche x nachzuweisen, für welche die Forderungen der

bezüglichen Definitionen des vorigen Paragraphen nicht mehr alle zutreffen.

Hiermit aber haben wir den Boden der Realitäten betreten. Wir können aus dem anschaulichen Substrat die Gewissheit schöpfen, dass das System unsrer grundlegenden Definitionen und Prinzipien ein in sich konsistentes ist, dass dasselbe Widersprüche nicht in sich bergen kann, seine Teile miteinander verträglich sein müssen.

Vierte Vorlesung.

§ 8. Interpretation für Klassen.

Bei dem Kalkül mit *Klassen* enthalten die letzten Postulate die Forderungen:

von einer gegebenen Klasse von Individuen diejenigen abzusondern, welche zugleich einer andern Klasse angehören	zwei gedachte Klassen in eine einzige zu verschmelzen, welche die Individuen der beiden sämtlich enthält
---	--

— Forderungen, denen der menschliche Geist gewachsen erscheint.

Man sieht: *die identische*

Multiplikation

Addition

läuft auf eine

Absonderung, Selektion

Zusammenfassung, Kollektion

hinaus; bei

ersterer werden aus der einen Klasse die Individuen der andern „(her)ausgelesen“.

letzterer werden die Individuen der beiden Klassen zu einer einzigen Klasse gesammelt, „zusammengelesen“.*)

Allemaal entsteht hiebei aus den gegebenen Klassen eine neue, welche zu jenen in einer bestimmten Beziehung steht, und zwar in einer ganz fundamentalen Beziehung, welche erscheint als eine der denkbar einfachsten und am nächsten liegenden oder ursprünglichsten Beziehungen, die sich naturgemäss zu allererst der Beachtung darbieten. Indem nun die *Wortsprache* gedachte Klassen von Dingen in der Regel mit Gemeinnamen benennt, wie sie ja von Urbeginn hauptsächlich mit Gemeinnamen operirt, die auf ganze Klassen von Dingen oder Verhältnissen passen, wird sie durch die Darstellung mittelst Worten, verbale Einkleidung der obigen Prozesse ein paar der wich-

*) Letzteres unbeschadet des etwaigen Zweckes einer *distributiven* Verwendung des Zusammenfassungsergebnisses behufs Bildung oder Abgabe auch von generellen Urteilen.

bezüglichen Definitionen des vorigen Paragraphen nicht mehr alle zutreffen.

Hiermit aber haben wir den Boden der Realitäten betreten. Wir können aus dem anschaulichen Substrat die Gewissheit schöpfen, dass das System unsrer grundlegenden Definitionen und Prinzipien ein in sich konsistentes ist, dass dasselbe Widersprüche nicht in sich bergen kann, seine Teile miteinander verträglich sein müssen.

Vierte Vorlesung.

§ 8. Interpretation für Klassen.

Bei dem Kalkül mit *Klassen* enthalten die letzten Postulate die Forderungen:

von einer gegebenen Klasse von Individuen diejenigen abzusondern, welche zugleich einer andern Klasse angehören	zwei gedachte Klassen in eine einzige zu verschmelzen, welche die Individuen der beiden sämtlich enthält
---	--

— Forderungen, denen der menschliche Geist gewachsen erscheint.

Man sieht: *die identische*

Multiplikation

Addition

läuft auf eine

Absonderung, Selektion

Zusammenfassung, Kollektion

hinaus; bei

ersterer werden aus der einen Klasse die Individuen der andern „(her)ausgelesen“.

letzterer werden die Individuen der beiden Klassen zu einer einzigen Klasse gesammelt, „zusammengelesen“.*)

Allemaal entsteht hiebei aus den gegebenen Klassen eine neue, welche zu jenen in einer bestimmten Beziehung steht, und zwar in einer ganz fundamentalen Beziehung, welche erscheint als eine der denkbar einfachsten und am nächsten liegenden oder ursprünglichsten Beziehungen, die sich naturgemäss zu allererst der Beachtung darbieten. Indem nun die *Wortsprache* gedachte Klassen von Dingen in der Regel mit Gemeinnamen benennt, wie sie ja von Urbeginn hauptsächlich mit Gemeinnamen operirt, die auf ganze Klassen von Dingen oder Verhältnissen passen, wird sie durch die Darstellung mittelst Worten, verbale Einkleidung der obigen Prozesse ein paar der wich-

*) Letzteres unbeschadet des etwaigen Zweckes einer *distributiven* Verwendung des Zusammenfassungsergebnisses behufs Bildung oder Abgabe auch von generellen Urteilen.

tigsten Mittel an die Hand bekommen resp. in Gestalt derselben bereits besitzen, um aus vorhandenen Gemeinnamen in's Unbegrenzte neue Gemeinnamen zusammenzusetzen oder abzuleiten — wodurch sie in den Stand gelangt, mit einem noch verhältnismässig geringen Namen-vorrat haushälterisch auszureichen zur Bezeichnung von *Vielem*.

Es verdient deshalb sorgfältig untersucht zu werden, auf welche Weise die Wortsprache unser Mal- und Plus-Zeichen wiedergibt; es muss in's Auge gefasst und konstatiert werden, wie, wenn $a, b, c, \dots$ in Worten charakterisirte Klassen vorstellen, deren identisches Produkt und Summe ihren *verbalen Ausdruck* finden.

Für das Nämliche bieten oft sich mehrere Ausdrucksmöglichkeiten dar, mitunter aber — werden wir sehen — auch gleiche Ausdrucksweisen für Verschiedenes! — Ein bedenklicher Umstand, der gelegentlich die Gefahr von Missverständnissen hervorruft und der Wortsprache den Vorwurf mangelhafter Präzision zuziehen muss, von welchem unsre Formel- oder Zeichensprache frei bleibt.

Um alles auf Interpretation unsrer identischen Operationen, deren Vor- und Rückübersetzung aus der Wort- in die Zeichensprache Bezügliche sogleich vollständig erledigen zu können, setzen wir, ein wenig vorgreifend, hier schon als bekannt voraus einige Grundeigenschaften dieser Operationen, die ohnehin unmittelbar einleuchten, aber allerdings erst im nächsten Paragraphen formell bewiesen werden — so namentlich die in den Theoremen 12) und 13) ausgesprochenen, desgleichen die Ausdehnung der Def. (3) auf beliebig viele Klassensymbole, wie sie in Zusatz 2 zu Th. 13) geleistet wird.

a) Was die Wiedergabe des *identischen Produktes* $a \cdot b$ oder ab (wovon wir also beiläufig wissen, dass es auch einerlei mit ba ist) mit Worten betrifft, so kann, wenn die Klassen a und b mit Substantiven benannt sind, ab unter Umständen durch ein *zusammengesetztes Hauptwort* ausgedrückt werden. Z. B. a = Neger, b = Sklave, ab = Negersklave, d. i. ein Neger, welcher ein Sklave, oder ein Sklave, der Neger ist. So auch „Gold-Münze“, „Marmor-Platte“, etc.

a') Umgekehrt jedoch lässt sich *durchaus nicht*, ja bei weitem nicht, jedes zusammengesetzte Hauptwort in dieser Weise deuten, als identisches Produkt hinstellen. Schon bei „Tischler-Meister“ könnte man darüber streiten, ob darunter bloß ein Tischler zu verstehen sei, der zugleich Meister ist, ein „Meister unter den Tischlern“ oder aber ein Meister von Tischlern, „Meister der Tischler“, der über andre Tischler als Befehlender und Meister gesetzt ist. Eine Rede aber,

bei Tische gehalten, eine „Tischrede“, soll jedenfalls nicht dasjenige bedeuten, „was zugleich ein Tisch und eine Rede ist“ — und Ähnliches mehr.

β) Wohl am häufigsten wird der eine Faktor eines identischen Produktes durch ein Substantiv, der andre, oder die übrigen, in Form von *Adjektiven* ausgedrückt.

Schon S. 152 wurde ausgeführt, dass wir die Beiwörter ganz ebenso wie die Hauptwörter als Klassen auffassen, z. B. mit

„ a = schwarz“ (= schwarzes Ding = etwas Schwarzes) kurz ausdrücken, dass a die Klasse derjenigen Dinge bezeichnen solle, denen das Epitheton „schwarz“ zukommt, die wir etwa „schwarze“ nennen würden. Bedeutet nun in diesem Sinne a = „schwarz“, b = „Pferd“, so wird ab = „schwarzes Pferd“ die Klasse der Rappen bezeichnen.

Bedeutet d = „jung“ und c = „normannisch“, so ist $dcab$ = „junges normannisches schwarzes Pferd“ ein gewisser Teil jener Klasse. Etc.

β') Umgekehrt auch liefern ein Hauptwort mit seinen Beiwörtern, wenn sämtlich als Klassen mit Buchstaben bezeichnet, allemal die Faktoren zu einem identischen Produkte.

Allerdings kann man nicht sagen, dass jedes Adjektiv einen Faktor vorstelle, sondern es steht dieser Verwendung der Adjektiva im Sinne solcher Faktoren bereits gegenüber deren (schon S. 152 von uns abgehandelte) Verwendung als *Prädikat* (vergl. „Dieses Pferd ist schwarz“). Und auch wenn ein Beiwort attributivisch mit einem Hauptwort verbunden ist, zeigt sich, dass manchmal noch eine „prädikative“ Deutung desselben nebenher läuft, die wir unter ε) zu besprechen haben werden. Von dieser Nebenbedeutung abgesehen hat aber in ihrer attributiven Verwendung die „Adjektiv“ genannte Wortart die ausschliessliche Mission den Zwecken der identischen Multiplikation zu dienen.

Da vor, dort hinter das von ihm regirte Substantiv gestellt gibt das Adjektiv in manchen Sprachen durch seine nach Numerus und Kasus mit ihm übereinstimmende Beugung, Flexion seine Zusammengehörigkeit mit dem Substantive zu erkennen, in allen Sprachen aber wenigstens durch seine (mit eventuell noch seinesgleichen) demselben benachbarte Stellung.

γ) Immer steht zur Übersetzung des identischen Produktes in die Wortsprache ein Relativsatz zur Verfügung, eingeleitet, konstruiert mit dem beziehenden Fürwort, Relativpronomen „welcher, welche, welches“

etc. $a \cdot b$ heisst: „die a welche b sind“, oder — mit Rücksicht auf das Th. 12.) des nächsten Paragraphen — auch „die b , welche a sind“.

So bezeichnet auch der Ausdruck: „die Pferde, welche schwarz sind“, desgleichen „Etwas schwarzes, das ein Pferd ist“ die Klasse der Rappen.

γ') Auch diese Regel gilt wiederum *umgekehrt*. Es handle sich darum die weitläufigeren Ausdrücke der Wortsprache in die übersichtlicheren des Kalküls zu übersetzen. Indem wir dann suchen müssen, alle in Betracht kommenden Klassen mit Buchstaben zu bezeichnen, werden wir einen Relativsatz mit einem Prädikate zu identifizieren haben; ihn nämlich auffassen als die Klasse derjenigen Dinge, welchen das Prädikat desselben zukommt. In diesem Sinne kann — gleichwie jedes Adjektiv — so auch *jeder Relativsatz als der eine Faktor mit dem Substantiv auf das er sich bezieht als dem andern Faktor zu einem identischen Produkte vereinigt werden*.

Und die besprochenen Übertragungsweisen gelten ebensowol, wenn $a \cdot b$ als Subjekt, wie wenn es als Prädikat steht.

Exempel: $ab \leq c$, wo $c =$ „selten“ bedeutet, heisst: „Schwarze Pferde sind selten“, oder auch: „Pferde, welche schwarz sind, sind selten“. $c \leq ab$, wo c ein spezielles Pferd „Favorite“ bedeutet, heisst: „Favorite ist ein schwarzes Pferd“ oder: „Favorite ist ein Pferd, welches schwarz ist“.

δ) Dagegen *nur, wenn $a \cdot b$ als Prädikat steht, ist das Malzeichen auch durch die Partikel „und“ übertragbar*.

$c \leq ab$, übersetzt mit „Favorite ist ein Pferd und schwarz“ wird uns, genau wie die vorhergehenden Sätze darüber informiren, dass (das Rennpferd) Favorite ein Rappe sei.

Das diesem vorhergehende Beispiel jedoch, für $ab \leq c$, würde sich — wie man sogleich übersieht — durchaus nicht mit „Schwarze Dinge und Pferde sind selten“ übersetzen lassen.

Sagten wir aber: „Was schwarz und ein Pferd ist, ist selten“, so stünde „schwarz und ein Pferd“ wieder nicht als Subjekt da, sondern als Prädikat des Relativsatzes (zu dem Relativpronomen „Was“, = „Dasjenige, welches“) der das Subjekt des ganzen Satzes vertritt.

Auf diese Eigenschaft der Partikel (Konjunktion) „und“, im Subjekt gebraucht eine andere logische Bedeutung zu erlangen als wie im Prädikate, werden wir weiterhin noch näher einzugehen haben (vergl. κ).

ϵ) Als eine besondere Anwendungsweise der identischen Multipli-

kation erscheint die von der alten Logik so genannte Operation der „*Determination*“. Durch Determination wird der Umfang eines Begriffes allemal vermindert, sein Inhalt vermehrt, und ist der Grund für diese Benennung darin zu erblicken, dass, wenn wir z. B. unter den „Pferden“ die „schwarzen“ hervorheben, wir zu dem Begriff des Pferdes, welcher zwar das Merkmal „eine Farbe zu besitzen“ in sich schliesst, in welchem aber die Beschaffenheit dieser Farbe *unbestimmt*, offen gelassen ist, nunmehr noch das Merkmal der schwarzen Farbe hinzufügen und jenen Begriff dadurch noch *näher bestimmen*.

Das Wesen des Determinirens ist zu erblicken in der Einschränkung der freien Wahl, in der Verengerung, Verminderung des Spielraumes, der für unsre Willkür, Phantasie, oder den Zweifel gelassen ist, unter Vermehrung vielleicht der Information.

Verlangen wir im Kaufladen etwa Perlen a , so ist die Klasse der Objekte, die wir verlangen, durch ihren mit dem Namen „Perlen“ verflochtenen Begriff charakterisirt. Begriff und Klasse erfahren eine nähere Bestimmung, wenn wir Glasperlen verlangen. Was von Glas ist, „gläsern“, möge b genannt werden. Dann ist durch die Forderung von ba (oder ab) schon weniger Spielraum gelassen in Bezug auf dasjenige, was der Kaufmann uns vorlegen mag, und dieser Spielraum wird immer weiter eingeschränkt, das Verlangte immer genauer bestimmt (determinirt), wenn wir weisse Glasperlen, runde weisse Glasperlen u. s. w. verlangen. Jeder neue, durch ein Adjektiv (eventuell durch einen Relativsatz) ausgedrückte Faktor, wie „rund“ c , „weiss“ d , fügt hier wirklich eine weitere Bestimmung für die Klasse, die wir meinen, hinzu.

Solches ist aber durchaus nicht überall der Fall, wo Faktoren in Gestalt von Adjektiven oder Relativsätzen auftreten. Sagen wir z. B.

„Das mächtige (a) deutsche (b) Reich $c \dots$ “ so ist Subjekt des hiermit begonnenen Satzes das identische Produkt abc .

Hier aber bewirkt nur der Faktor b eine Determination des c . Sagen wir bc , so wird gefordert und hinzugebracht, dass der Hörer sich aus der Klasse der „Reiche“ das „deutsche“ isolire, es absondere, hervorhebe und vorstelle. Es wird durch das Adjektiv „deutsch“ angegeben, bestimmt, von welchem Reich die Rede sein soll.

Ganz anders der Faktor a . Derselbe sagt nicht etwa aus, dass man unter „den deutschen Reichen“ gerade das „mächtige“ meine; das „mächtige deutsche Reich“ ist (sofern wir die Gegenwart im Auge haben) ganz dasselbe als wie „das deutsche Reich“. Schon als bc ist das Subjekt vollkommen bestimmt, es ist hier geradezu $a \cdot bc = bc$.

Mit dem Faktor a legen wir dem bereits determinierten Subjekte bc ein Prädikat bei, dem „deutschen Reiche“ das Prädikat „mächtig zu sein“, indessen nur beiläufig, anmerkungsweise, in der Voraussetzung, dass ihm dieses Prädikat anerkanntermassen zukomme oder wenigstens in der Erwartung, dass diese Prädikation nicht bestritten werde (ansonst wir vor dem beabsichtigten Satze ein eigenes Urteil: „das deutsche Reich ist mächtig“ formuliert haben würden, um zunächst diese Position gegen etwaige Einwände zu verteidigen). Wir bezwecken durch die Hinzufügung des Attributs „mächtig“, die Aufmerksamkeit des Hörers besonders auf dieses Merkmal (der Macht) zu lenken, das Vorhandensein dieses Merkmals in dem Begriffe des deutschen Reichs in Erinnerung zu rufen, es als ein besonders wichtiges im Bewusstsein aufzufrischen. Wir vermehren durch solchen Gebrauch eines Adjektivs wol mitunter den Vorstellungsinhalt der Hörer oder Leser, wir steigern die Intensität der Vorstellung in einer bestimmten Richtung, ohne jedoch die Klasse, welche vorgestellt wird, zu beeinflussen, ohne den Umfang des vorgestellten Begriffs zu verengern.

Die Philologie bezeichnet solche Verwendung eines Attributs (eines Beiwortes oder auch Relativsatzes) passend als die *prädikative*, im Gegensatz zu der früher besprochenen, die wir eine *determinative* nennen werden.

Sagen wir (mit J. St. Mill): „der Vater des jungen Mannes, der ihm jenes verboten hatte...“, so ist der Relativsatz „der... verboten hatte“ ein anderes Beispiel prädikativer Verwendung. Über das Subjekt a = Vater des jungen Mannes — eine Klasse, die hier naturnotwendig aus nur *einem* Individuum besteht — und (vorausgesetzt, dass man wisse, von welchem jungen Mann die Rede) bereits vollkommen bestimmt erscheint, über dieses Subjekt erteilt der Relativsatz eine beiläufige Information, sagt aus, dass es $\Leftarrow$ (vielleicht identisch =) sei der (wol auch nur aus *einem* Individuum bestehenden) Klasse derjenigen Personen, welche dem jungen Manne jenes verboten hatten. Jedenfalls aber bezweckt und vermag dieser Relativsatz *nicht*, das Subjekt des Satzes näher zu bestimmen, auszudrücken, dass „derjenige unter den Vätern des jungen Mannes, welcher ihm jenes verboten hatte“ gemeint gewesen.

Man sieht hier auch das Mittel, die beiden Verwendungsweisen attributiv gebrauchter Adjektive als solche zu erkennen, zu discerniren. Ist in ab oder in dem Ausdruck „die a , welche b sind“, der Relativsatz „welche b sind“, resp. der Faktor b , von determinativem Charakter, so muss der Ausdruck: „diejenigen unter den a 's, welche b sind“ den-

selben Sinn geben; im gegenteiligen Falle aber wird der letztere unzulässig, nicht selten lächerlich erscheinen.

Ist b in ab ein „prädikativer Faktor“, so kann der Sinn des Produktes ab auch mit „die a (welche, nebenbei gesagt, $\Leftarrow b$ sind)“ oder mit „ a (welches ja $\Leftarrow b$)“ vollkommen ausgedrückt werden. Dann ist in der That $a \Leftarrow b$, sowie $ab = a$; und diese beiden Aussagen sind solche, die wir in der Theorie des Gebietekalküls auch wirklich als äquivalente, einander gegenseitig bedingende nachweisen, die wir durch Rechnung aus einander ableiten können, vergl. Th. 20).

Dass aber $ab = a$ hier ist, lässt erkennen, dass man einen Faktor b , sofern er prädikativ ist, auch ganz unterdrücken, die mit ab bezeichnete Klasse kürzer durch a allein darstellen kann.

Prädikative Faktoren sind also in der rechnenden Logik ohne Belang, im Gegensatz zu den determinativen.

So wenigstens, wenn sie wirklich nur eine beiläufige Information geben. Es kommt jedoch auch vor, dass eine Behauptung $a \Leftarrow b$ eine folgenschwere Prämisse für weitere Untersuchungen bildet und sich keineswegs von selbst verstand. Mit dieser selbständig hinstellenden Aussage $a \Leftarrow b$ ist dann ein etwa prädikativ mit a verknüpfter Faktor b als gleichwertig zu erachten, welcher letztere nun aber eine neue und wesentliche Information enthält. In diesem Falle können wir ihm erst im „Aussagenkalkül“ volle Gerechtigkeit widerfahren lassen.

Mit prädikativ erteilten Attributen wird unbewusst oder bewusst im gemeinen Leben, in Journalistik, Kritik, rhetorischen und polemischen Schriften ein weit verbreiteter Missbrauch getrieben, darauf gerichtet, im minder wachsamem Leser Voreingenommenheit zu erzeugen, irrige Ansichten einzuschmuggeln, die Zustimmung zu denselben, deren Annahme gewissermassen zu erschleichen, um unversehens unberechtigte Denkgewohnheiten zu begründen, die sich der wahren Erkenntnis hinderlich erweisen. Wird z. B. gesagt: „der feige Gegner wich dem Kampfe aus“ und dann gleich mit der Erzählung fortgefahren, so bleibt dem Hörer meist nicht die Zeit zu überlegen, ob auch das Epitheton „feig“ berechtigt gewesen, ob nicht vielleicht gerade das Gefühl der Überlegenheit, eventuell Klugheit, Schonung oder Friedensliebe Motiv jenes Ausweichens war. Und dadurch dass mit verschiedenen Variationen des Ausdrucks dergleichen Imputationen möglichst oft in jener rasch darüber hingleitenden Form wiederholt zu werden pflegen, gelingt es, in der unkritischen Menge verhängnisvolle Ideenassoziationen zu festigen. Auch dem Logikkalkül widerfuhr bereits beinahe ein derartiges Schicksal, indem der Verfasser eines wol besser ungeschriebenen gebliebenen Buches kaum anders, als mit dem Epitheton „der unfruchtbare“ von demselben spricht. —

Herr Wundt will die „Determination“ anders aufgefasst wissen, als — so viel ich sehen kann — alle übrigen Schriftsteller über diesen Gegen-

stand, insbesondere alle Diejenigen, welche ausser ihm die — neuerdings von Prantl so genannte — „mathematisierende Logik“ kultiviren — (Sitzungsberichte d. Kgl. Bairischen Akademie der Wissenschaften von 1886).

Durch Determination des Begriffes „Schaf“ mittelst des Begriffes „weiss“ ergibt sich ihm ¹ pag. 224 sq., gleichwie auch uns, der Begriff „weisses Schaf“, dessen Umfang die Klasse der weissen Schafe, d. i. der weissen (Dinge) unter den Schafen.

Dagegen gelangt Herr Wundt, indem er den Begriff „Weiss“ determinirt, mittelst des Begriffes „Schaf“ zu dem Begriffe: „die Weisse des Schafes“ — anstatt, wie wir, zu dem Begriffe „weisses Schaf“ wie oben, indem wir einfach unter den weissen Dingen die Schafe hervorheben. Für Herrn Wundt ist also, wie er selbst betont, die Determination im allgemeinen eine *nicht* kommutative Operation.

Meiner Meinung nach findet bei den Überlegungen, die Herrn Wundt zu der angegebenen Ansicht führen, eine *Vermengung* statt zwischen Prozessen, die sich auf den Umfang und solchen, die sich auf den Inhalt der fraglichen Begriffe beziehen.

Hielten wir uns streng in dem Rahmen einer „Logik des Umfanges“, so konnten wir jedenfalls der Wundt'schen Auffassung nicht beipflichten.

Wir können es aber auch nicht, wenn wir uns *streng* in dem Rahmen einer „Logik des Inhaltes“ halten.

Bei den Umfängen oder Klassen lief die Determination hinaus auf eine *Sonderung*, ein Hervorheben von der, den determinirenden Faktoren*) gemeinsamen Unterklasse.

Nicht zu übersehen ist, dass aber bei den Inhalten oder Begriffen die Determination wesentlich eine Knüpfung ist, auf eine *Verbindung* der gegebenen Begriffe hinausläuft:

Wir erhalten den Begriff „weisses Schaf“, indem wir mit den sämtlichen im Begriff Schaf bereits enthaltenen Merkmalen verbinden den Begriff „weiss“, d. i. das Merkmal der weissen Farbe. Und dasselbe Ergebniss erhalten wir notwendig auch, wenn wir mit dem Merkmal der weissen Farbe verbinden die sämtlichen Merkmale des Begriffes Schaf.

Unter den letzteren ist — wohl bemerkt — das Merkmal der „Weisse“ oder weissen Farbe gar nicht enthalten: es gibt ja auch schwarze Schafe! Und der Begriff Schaf soll doch nur die *allen* Schafen gemeinsamen Merkmale enthalten, auch hätten wir nicht nötig, erst zu verbinden, was schon verbunden gewesen wäre. Man kann also eventuell wohl reden von der Weisse eines bestimmten Schafes, oder auch einer Gruppe von solchen, nämlich von der „Weisse“ der *weissen* Schafe. Dagegen ist — bei der allgemeinen Auffassung des Begriffes „Schaf“ — die „Weisse des Schafes“ überhaupt ein Unding, sie postulirt nämlich die „Weisse“ auch für die schwarzen Schafe.

*) Wundt bezeichnet diese als „Determinator“ und „Determinand“, durch welchen letzteren Namen jedoch unliebsame Gleichklänge mit dem längst anderweitig eingebürgerten Namen der „Determinanten“ herbeigeführt würden. Eine unterscheidende Benennung beider Faktoren erscheint auf unserm Standpunkt unnötig.

Zu diesem Begriff der „Weisse des Schafes“ kann nun aber Wundt nur gelangen, indem er — anstatt zu verknüpfen — das Merkmal der weissen Farbe *absondert*, hervorhebt — faktisch aus dem Begriffe „weisses Schaf“, vermeintlich indess wol aus dem zur Determination herbeigezogenen Begriff „Schaf“, der jenes Merkmal aber, wie gezeigt, überhaupt nicht enthält.

§) Um demnächst auch den verbalen Ausdruck für die identische Summe $a + b$ zu gewinnen, müssen wir uns vor allem über die logische Bedeutung der Partikel „oder“ orientiren.

Es ist in logischer Hinsicht entschieden als ein Misstand zu beklagen, dass die modernen Kultursprachen je nur *ein* Wort für „oder“ besitzen, während doch zur unterscheidenden Darstellung der wesentlich verschiedenen Verhältnisse, welche wir mit dieser einen Konjunktion unterschiedslos anzudeuten pflegen, mindestens *drei* Partikeln erforderlich sein würden. Die lateinische Sprache hat in diesem Betreff feiner empfunden, schärfer unterschieden.

Ein *erstes* ist das „*erklärende*“ (auch gleichsetzende, identifizierende, wiederholende, iterative) „oder“ = „oder mit andern Worten“ (lateinisch: *sive, seu*), welches Namen, Redeteile verknüpft, deren zweiter noch einmal das nämliche besagt wie der erste, indess zum Zweck der Verdeutlichung, eventuell schärferen Präzisierung des ersten: in neuer Ausdrucksweise.

Sagen wir z. B.: „Der Bauer *oder* Landmann“ . . ., so ist das angewendete das obige „oder“, wofern wir nur die Klassen „Bauer“ und „Landmann“ als identisch ansehen. Die Wiederholung mit dem andern Worte mag hier den Zweck haben, dem vorzubeugen, dass etwa der Hörer entgegen unsrer Absicht an einen Bauer im Schachspiel, einen Vogelbauer oder anderes denke.

Wie man an dem Beispiel sieht, ist dieses „oder“ schon deshalb Bedürfniss, weil die Sprache manche Homonyme enthält, gleichlautende Namen für ganz Verschiedenes, welche häufig eine unabhängige Entstehungsgeschichte und etymologische Zusammensetzung besitzen, nur zufällig gleich lauten. Je vollkommener eine Sprache, desto weniger freilich dürfte solches in ihr vorkommen.

Aber auch wenn Homonyme gar nicht vorkämen, würde das genannte „oder“ — beziehungsweise ein Äquivalent dafür — doch bleiben müssen, um Bedürfnissen der Wissenschaft zu genügen. Dieses „oder“ dient dazu, eine als Einschaltung, in Parenthese, anzumerkende Definition mit dem begrifflich zu erklärenden nomen zu verbinden und als solche zu kennzeichnen, z. B. „die Kugelfläche *oder* der Ort der Punkte gleichen Abstands von einem festen Punkte“, . . . Am häufigsten kommt

es bei wissenschaftlichen Untersuchungen vor, dass einunddasselbe Objekt als ein, zwei verschiedenen Objektreihen $a_1, a_2, a_3, \dots$ und $a', a'', \dots$ zugleich angehöriges auch zwei verschiedene Namen erhalten hat: a_1 und a' , sodass $a_1 = a'$ bedeutet, während etwa die übrigen accentuirten und mit Suffixen behafteten a lauter verschiedene Objekte bedeuten mögen, und dieser oft folgenschwere Umstand wird, indem man von jenem erstern Objekte als von „ a' oder a_1 “ spricht, in dem Bewusstsein aufgefrischt erhalten. Es erscheint sonach dieses „oder“ als nahe synonym mit d. i. (das ist), d. h. (das heisst), i. e. (id est) — englisch „viz. (gesprochen: namely)“ — und kommt demselben logisch die Bedeutung =, nämlich die Kraft einer in Parenthese ausgesprochenen Identität, identischen Gleichheit zu.

Es wäre vielleicht, weil denn doch „oder m. a. W.“ als zu lang erscheint, ganz angemessen und empfehlenswert, für dieses erste „oder“ das lateinische „sive“ zu verwenden und in die modernen Sprachen einzuführen.

η) Ein zweites ist das „gegensätzliche“, „ausschliessende“, „exklusive“ (auch „disjunktive“) „oder“ = „oder aber“ (lateinisch: aut, englisch: or else).

„ a oder aber b “ will sagen: *entweder a und dann nicht b , oder b und dann nicht a .*

Wie dieses „oder“ im identischen Kalkül auszudrücken ist, werden wir in § 18, ε) sehen.

θ) Das dritte ist das „einschliessende“, „inklusive“ (auch „konjunktive“) „oder“ = „oder auch“ (lateinisch: vel).

„ a oder auch b “ will sagen: *entweder a , oder b , oder beides zugleich.*

Mit diesem letzteren „oder“ werden wir es bei der Übersetzung des Zeichens $+$ der identischen Addition zunächst allein zu thun haben.

Es würden bei den zwei letzten Gattungen von „oder“ sich noch weitere Nüancen unterscheiden lassen, je nachdem es nur unbekannt, jedoch (an sich) bestimmt ist, welcher von den zwei oder drei Fällen eintritt, stattfindet, zwischen denen die Alternative zu stellen ist, d. i. „oder vielleicht“, — oder aber völlig unbestimmt gelassen, ganz (oder auch nur teilweise, bedingt, innerhalb gewisser Grenzen) in unser Belieben gestellt, willkürlicher Wahl anheimgegeben ist, für welchen Fall man sich entscheide, d. i. „oder wenn man will“ — eine Auffassung, auf die gerade „vel“ etymologisch besonders hinweist. Indessen will ich mich begnügen, diese Unterscheidungen nur angedeutet zu haben.

In Bezug auf „oder auch“ scheint freilich der Sprachgebrauch sich nicht genau an die obige Erklärung zu halten, vielmehr dessen Bedeutung

noch über die oben stipulirte hinauszugehen, nämlich oft auch für „oder aber, wenn man will“ herhalten zu müssen.

Der Ausdruck „ a oder auch b “ wird gleichbedeutend mit dem „ a oder aber b “, das inklusive „oder“ deckt sich mit dem exklusiven, und begreift auch dieses mit, in dem Falle wo die dritte Alternative „ a und b zugleich“ ohnehin undenkbar ist, oder aus sachlichen Gründen fortfallen muss. So ist

„Silber oder auch Gold“ = „Silber oder aber Gold“ und wird besser dargestellt durch das kürzere „Silber oder Gold“, weil es nichts gibt, was Silber und Gold zugleich sein könnte, weil die Begriffe „Silber“ und „Gold“ ohnehin „konträre“ Gegensätze vorstellen, einander von selbst ausschliessen, disjunkt sind.

ι) Nach diesen Vorbemerkungen wird es verständlich sein, wenn wir nunmehr konstatiren, dass die identische Summe $a + b$ sich in der Wortsprache stets durch „was a oder auch b ist“ ausdrücken lässt. Durch „ a oder auch b “ selber kann die Summe auch in jedem Zusammenhange übersetzt werden mit Ausnahme des Falles, wo sie als Subjekt steht; in diesem wäre solches nicht unbedenklich, weil dadurch (vergl. § 15, Schlussanmerkung) eine Verwechselung des Urteils mit einem „disjunktiven“ nahe gelegt würde; ganz unbedingt wird dann auch die Partikel „oder“ viel besser durch die Partikel „und“ ersetzt. Also: *Steht $a + b$ als Subjekt, so lese man das Pluszeichen als „und“; andernfalls als „oder“, genauer: „oder auch“.*

Wo $a + b$ als Prädikat steht indessen — und dies bildet eine bemerkenswerte Eigentümlichkeit der Wortsprache — ist die Ersetzung des Bindewörtchens „oder“ durch „und“ nicht zulässig, wie sich demnächst und unter κ) unzweifelhaft herausstellen wird.

Die Proposition $c \Leftarrow a + b$ lässt sich übersetzen mit „ c ist a oder auch b “, resp. mit „alle c sind a oder (auch) b “.

Und ferner ist $a + b \Leftarrow c$ in Worten darzustellen mit „ a und b ist c “, „alle a und b sind c “.

[Nicht angängig wäre, dafür zu sagen: „(entweder) a oder b ist c “ und mindestens gewagt: „alle a oder b sind c “, „jedes a oder auch b ist c “.]

Beispiele zu $a + b \Leftarrow c$: „Canadier und Indianer sind Amerikaner“, auch: „Canadier sowie Indianer etc.“ Die Klassen a und b in dem gewählten Beispiel sind nicht disjunkt, schliessen einander nicht aus, es ist ab hier nicht gleich Null, weil es auch canadische Indianer gibt. Ähnlich noch in diesem Beispiel:

„Adelige und Besitzende werden zur Aristokratie gerechnet“.

Anders dagegen im folgenden, wo $ab = 0$ gelten müsste, die Begriffe a und b disjunkt zu nennen wären:

„Gold und Silber sind Edelmetalle“.

Es wäre zur Not wol angängig, zu sagen:

„Silber, oder auch Gold, ist Metall“,

„Adelige, oder auch Begüterte, gehören zur Aristokratie“, und ganz gut jedenfalls: „Wer adelig oder auch begütert ist gehört dazu“, „Was Silber oder Gold ist, ist Metall“. Desgleichen allenfalls, weil von dem adjektivischen Zahlwort, numeralen Adjektiv „alle“ regirt: „Alles Gold oder Silber ist Edelmetall“. Besser aber: „Alles Gold und Silber etc.“ Unzulässig dagegen wäre es oder wenigstens von geringerem logischen Gehalte, zu sagen: Entweder Gold oder Silber ist Edelmetall, und darum: „Gold oder Silber, das Gold oder das Silber, ist Edelmetall“, eine entschieden schlechte Ausdrucksweise, weil das „und“ soviel deutlicher.

Beispiele zu $c \in a + b$.

„Jene Familien sind adelige oder auch wohlhabende.“ Hier können einzelne von den genannten Familien auch zu den unbemittelten Adeligen gehören, andere wohlhabend aber bürgerlich sein.

Einen wesentlich hievon verschiedenen Sinn würde aber die Behauptung darbieten: „Jene Familien sind adelig(e) und wohlhabend(e)“. Dies würde bedeuten, dass sie sämtlich beides zugleich sind, und wäre mittelst $c \in ab$ auszudrücken, vergl. δ).

Anderes Exempel: „Diese Behauptungen sind richtige oder auch falsche“. Als Übersetzung von $c \in a + b$ hingestellt, wird dieser Satz besser mit „richtige oder falsche“ darzustellen sein, mit Unterdrückung des „auch“, weil hier a und b einander ausschliessen, $ab = 0$ ist. So aufgefasst ist das Urteil ein rein „analytisches“, welches denknotwendig gelten muss von jeder beliebigen Gruppe von Behauptungen: Alle Behauptungen sind entweder richtige oder falsche.

Dagegen würde es mindestens eine Nachlässigkeit des Ausdrucks sein, hiefür zu sagen: „diese Behauptungen sind richtige und falsche“.

Dergleichen „Nachlässigkeiten“ kommen allerdings nicht nur ungemein häufig in der Sprache des gemeinen Lebens, sondern auch bei den besten Schriftstellern vor, und sie entschuldigen sich zu einem Teile durch die Sitte, nach welcher im Verkehr zwischen Personen vorausgesetzt zu werden pflegt, dass der Andere keinen Unsinn rede und man selbst auch dies nicht zu thun beabsichtige. Wenn also eine Äusserung von einer der Parteien, die miteinander in geistigem Verkehr stehen, bei korrekter Deutung nach den Regeln der Schule sowie des überwiegenden Sprachgebrauchs ein offener Unsinn ist, Widersprüche in sich schliesst — vielleicht auch, wenn sie dabei nur als allzu selbstverständlich, „nichtsagend“ und darum zwecklos erscheint — so pflegt der andern Partei zugemutet zu werden, dass sie die nächstliegende unter den möglichen ver-

nünftigen Deutungen herausfühle und als den beabsichtigten Sinn jener Äusserung unterlege.

So würde ein Ausspruch: „Diese Behauptungen sind richtige und falsche“, wenn wirklich gebraucht, zu verstehen sein in dem Sinne: „einige (die einen) von diesen Behauptungen sind richtige, einige (die andern) sind falsche“ — ein Urteil, welches wir an dieser Stelle noch nicht in der Lage sind, in der Zeichensprache des Kalküls darzustellen.

Man könnte sogar sagen: „diese Behauptungen sind richtig und falsch (zugleich)“, wenn der Sinn derselben nicht unzweifelhaft feststeht: richtig in dem einen Sinne und zugleich falsch in dem andern Sinne, der ihnen etwa untergelegt werden kann. Im Grunde ist dann aber das Subjekt c des Satzes beidemal nicht dasselbe und der Ausspruch nur eine abkürzende Zusammenfassung der beiden Aussagen: „diese Behauptungen (auf die eine Art gedeutet) sind richtig“; „ebendiese Behauptungen (auf die andre Art gedeutet) sind falsch“.

Kraft des oben Bemerkten würde das eingangs gewählte Exempel, i. e. die Aussage: „diese Behauptungen sind richtige oder auch falsche“, im Verkehr gebraucht, auch nicht die oben ihr gegebene Bedeutung $c \in a + b$ als ein „nichtssagender“ Ausspruch haben, sondern — mit einem Stich in's Ironische — die Aufforderung an den Gegenpart enthalten, zu prüfen, ob nicht unter seinen Behauptungen doch wol einige falsche sein möchten! Auf diese Interpretation aber würde dabei das „auch“ in „oder auch“ jetzt wesentlich mit hinwirken.

Von solcher Gepflogenheit, von solchen Freiheiten, Lizenzen der Verkehrssprache aber müssen wir hier, um nicht in übergrosse Weitläufigkeiten verwickelt zu werden, nach Möglichkeit absehen. Es wäre überhaupt besser, wenn man sich korrekter Ausdrucksweisen befeissigte. Zudem würden wir sonst genötigt sein, auf die Eigentümlichkeiten und Feinheiten der speziellen Sprache, in welcher wir unsre logischen Untersuchungen führen, in einem Umfange einzugehen, welcher sich mit den allgemeineren Zwecken dieses Buches nicht vertrüge, vielmehr einer spezifisch „deutschen“ Sprachlehre anheim fiele. In Bezug auf die Übertragung irgendwelchen sprachlichen Textes in die Zeichensprache der Logik wird darum noch Manches dem Takt und Sprachgefühl des Studirenden zu überlassen sein.

κ) Wir haben im Bisherigen — unter δ) und ι) — bereits gesehen, dass der Partikel „und“ im Subjekt und im Prädikat eine logisch durchaus verschiedene Bedeutung zukommt.

Der Gegensatz möge noch an einem prägnanten Beispiel sichtbar gemacht werden, welches uns zugleich die vier Schemata der Definitionen (3) illustriren wird. Sagen wir:

„Betrüger (a) und*) Betrogene (b) sind auf dem Holzwege, ver-

*) Ohne die Tragweite des Ausspruchs zu verändern, kann man dieses „und“ auch durch „oder“ ersetzen, wenn man sich zu der Umschreibung bequemt: Wer ein Betrüger oder ein Betrogener ist, ist etc. Dagegen würde: „Betrüger oder Betrogene sind etc.“ undeutlich sein.

dienen Tadel“, oder dergleichen, so will dies freilich sagen einerseits: „Betrüger sind auf unrechtem Wege, sind tadelnswert“ und andererseits: „Betrogene sind auf unrichtigem Wege, verdienen einigen Tadel“ — entsprechend dem Schema (3_+) “ oder dem zweiten Teil der Definition (3_+) für $a + b \in c$; entsprechend — können wir auch sagen — der ganzen Definition (3_+) von $a + b$ als Subjekt, sofern die zwei letzten Sätze auch umgekehrt wieder in den ersten zusammengezogen werden dürfen, als mit ihm gleichbedeutend hingestellt werden.

Sagen wir desgleichen:

„Jene Herren sind Betrüger und Betrogene“ so heisst dies ganz analog: „Jene Herren sind Betrüger“ und zugleich: „Jene Herren sind Betrogene“ — in Illustration des Schema's (3_x) “ für $c \in a \cdot b$, sowie auch der ganzen Definition (3_x) von $a \cdot b$ als Prädikat, indem wieder für die zwei letzten Sätze auch umgekehrt der erste eintreten kann, dieser mit jenen gleichbedeutend ist.

Das beidemal völlig gleichlautende „Betrüger und Betrogene“ ist nun aber als Klasse im erstern Fall mit $a + b$, im letztern doch mit $a \cdot b$ zu übersetzen gewesen!

Im Subjekt hat die Konjunktion „und“ die Kraft des Plus-, im Prädikat die des Malzeichens.

Es erscheint uns so, wenn wir dieses nun einheitlich zusammenfassen, als die *Hauptaufgabe des Bindewortes „und“*: die *Operationsglieder innerhalb der Definitionen (3) miteinander zu verknüpfen*, Glieder, welche eben bei (3_+) , wo sie im Subjekt stehn, additive oder Summanden, bei (3_x) wo sie im Prädikat stehn, multiplikative, oder Faktoren sind.

2) Ähnliches gilt auch in Bezug auf die nahe liegende Ausdehnung der Schemata unsrer Def. (3) auf mehr als zwei Operationsglieder (cf. Zusatz 2 zu Th. 13):

$a \in bcd$		$a + b + c \in d$
sagt nicht mehr und nicht weniger, wie:		
$a \in b, a \in c, a \in d$		$a \in d, b \in d, c \in d.$
Etc. Wir können auch diese Theoreme für die Wortsprache in Anspruch nehmen. Darnach lassen sich beliebig viele Sätze vom selben Subjekt aber mit verschiedenen Prädikaten mit demselben Prädikat aber verschiedenen Subjekten		
jeweils zusammenziehen in einen einzigen Satz mit ebendiesem Subjekt resp. Prädikate und mit einem neuen, <i>zusammengesetzten</i> Prädikate Subjekte.		

Desgleichen können umgekehrt Sätze der letztern Art, d. i. Sätze mit einem auf gewisse Art zusammengesetzten

Prädikat		Subjekte
immer aufgelöst werden in eine Anzahl von als gleichzeitig gültig anzuerkennenden Sätzen vom nämlichen Subjekt resp. Prädikate und den Elementen jenes zusammengesetzten		

Prädikats als einzelnen Prädikaten | Subjekts als einzelnen Subjekten — eine Zerfällung durch welche der Sinn jener Sätze seine Erklärung findet, dieselben „auseinandergesetzt“ werden.

Die „Zusammensetzung“ erfolgt beidemal (sowol bei dem linkerhand als bei dem rechterhand Gesagten) mittelst der Konjunktion „und“, wozu nur zu bemerken ist, dass letztere nicht immer ausdrücklich gesprochen wird. Vielmehr pflegt bekanntlich statt „a und b und c und d“ in der Regel bloß gesagt zu werden:

„a, b, c und d“, indem man alle Bindewörter, mit Ausnahme des letzten, durch Kommata (Pausen) ersetzt — und zwar sowol wenn a, b, c, d Adjektive (oder auch Relativsätze) als wenn sie Substantive bedeuten. Ähnlich später bei Adverbien. *Exempel:*

„Die Löwen sind Raubtiere, vom Katzengeschlecht und im Oriente heimisch“ heisst: „Die Löwen sind Raubtiere“, „Die Löwen sind vom Katzengeschlecht“, „Die Löwen sind Orientbewohner“ — ein sog. (bejahendes) „*konjunktives*“ Urteil.

„Säuren, Basen und Salze sind chemische Verbindungen“ heisst: „Säuren sind chemische Verbindungen“, „Basen sind chemische Verbindungen“ und „Salze sind chemische Verbindungen“ — sogenanntes „*kopulatives*“ Urteil.

Der Sinn des erstern Satzes wird durch die drei letzten „auseinandergesetzt“; die drei letztern Sätze ziehen sich in den ersten zusammen.

Es beherrscht, regulirt unser Schema im Grossen und Ganzen den Gebrauch von „zusammengesetzten“ nämlich aus andern abgeleiteten Klassen in Subjekt und Prädikate, führt ihn zurück auf den schon bekannten Gebrauch der sie zusammensetzenden einfachen Klassen.

Indessen sind sowol in Bezug auf das Schema linker- als in Bezug auf dasjenige rechterhand auch Ausnahmen zu konstatiren.

μ) Links tritt eine Ausnahme zutage da, wo das Subjekt konstruiert erscheint mit einem der sog. „unbestimmten Zahlwörter“: „*einige*, *etliche*, *manche*, *gewisse*, *wenige*, *viele*“ — auch „*kein* oder *keine*“, desgleichen schon, wo es versehen ist mit dem unbestimmten Artikel „*ein*“, oder mit einer Zahlbestimmung überhaupt — vergl. S. 180.

Z. B. die drei Sätze: „Einige Substanzen sind (in Wasser) löslich“, „Einige Substanzen sind (an der Luft) verbrennlich“ und „Einige Substanzen sind (in der Hitze) verflüchtigend“ sagen zusammen doch *weniger* aus, als der eine Satz: „Einige Substanzen sind löslich, verbrennlich und flüchtig“, mit welchem sie ja nach dem allgemeinen Schema ganz gleichbedeutend sein müssten. In jenen drei Sätzen wird nämlich nur gesagt, dass es Substanzen gibt, welche eine beliebige der drei erwähnten Eigenschaften für sich (vielleicht nur getrennt von den übrigen) besitzen. In diesem einen Satze dagegen wird konstatiert, dass es auch Substanzen gibt, die alle drei Eigenschaften auf sich vereinigen (wie dies in der That manchmal, sogar bei Salzen, z. B. beim salzsauren Anilin der Fall ist).

Ähnliches liesse sich bei den folgenden Aussagen durchsprechen:

„Gewisse Pflanzen sind Fleischfresser, Dicotylen und Bewohner tropischer Moore“. „Manche Menschen sind unklug und leichtsinnig“. „Wenige Menschen sind arm und zufrieden“. „Viele sind unwissend und leichtgläubig“. Etc. „Zwei Mann wurden verwundet und gerieten in feindliche Gefangenschaft“ heisst nicht: Zwei Mann wurden verwundet, und zwei Mann gerieten in Gefangenschaft; vielmehr bezieht sich letzteres auf *dieselben* zwei Mann, wie erstres, und weil eben der Name „zwei Mann“ das Subjekt nur unzulänglich bezeichnet, reicht die Wiederholung des Namens nicht aus, es als dasselbe zu kennzeichnen, und muss formell die Ausnahme Platz greifen.

Statt „Einige *a* sind *b* und *c*“ zu sagen: „Einige *a* sind *b* oder (auch) *c*“ würde dem Inhalt der beiden Sätze: „Einige *a* sind *b*“ und: „Einige *a* sind *c*“ zwar etwas näher kommen, sich aber auch nicht mit ihm decken. Es wird nicht mehr nötig sein, hierauf zurückzukommen, nachdem diese sog. „*partikularen*“ Urteile im Zusammenhange behandelt sein werden. Lassen wir auch dieselben bis dahin noch möglichst zurücktreten, so durfte doch hier der Hinweis auf die Thatsache nicht unterbleiben, dass sie eine Ausnahme für das linksseitige Schema begründen.

Und ein analoges Verhalten nehmen wir uns hier auch zur Richtschnur in Bezug auf die später ebenfalls allgemein zu behandelnden verneinenden Urteile.

Ein „*negatives*“ Urteil, wie: „Kein Mensch ist fehlerfrei *und* allwissend“ behauptet wiederum weniger, als wie die beiden Sätze: „Kein Mensch ist fehlerfrei“ und „Kein Mensch ist allwissend“ zusammen — welche nur in den Satz: „Kein Mensch ist fehlerfrei *oder* allwissend“ ohne Änderung (Erweiterung oder Einschränkung) des Sinnes zusammengezogen werden könnten.

ν) Eine Ausnahme von unserm Schema rechterhand unter λ) ist formell zu statuieren in folgendem Falle: Wenn das Prädikat eine *Beziehung zwischen* den Individuen der Subjektklasse, oder auch zwischen Unterklassen derselben, konstatiert, so darf $a + b \not\subseteq c$ nicht ohne weiteres in $a \subseteq c$ und $b \subseteq c$ zerfällt werden (und analog bei mehr als zwei

Termen). Z. B. „Buschmänner (Hottentoten, Namaqua) und Neger (Damra, Herero's) befehlen einander“ will nicht sagen: „Buschmänner befehlen einander“ und „Negere befehlen einander“, sondern: „Die Buschmänner befehlen die Neger“ und „Die Neger befehlen die Buschmänner“.

„*a* und *b* sind *einander gleich*“ heisst natürlich nicht: „*a* ist *einander gleich*“ und „*b* ist *einander gleich*“, sondern: „*a* ist gleich *b*“ und „*b* ist gleich *a*“. Analog: „Der Kläger und der Beklagte verglichen sich“. Etc.

„Die Herren A und B schliessen einen Kauf ab“ heisst: „Herr A schliesst einen Kauf ab“ und „Herr B schliesst einen Kauf ab“, und lässt es offen, ob sie dies *miteinander* thun, wobei der eine Herr als Käufer der andere als Verkäufer erscheinen würde, oder aber *mit dritten Personen*. Im ersten Falle würde das Prädikat zwar eine *Beziehung* zwischen den beiden Individuen der Subjektklasse involviren, und doch die erwähnte Ausnahme *nicht* Platz greifen, weil die gedachte Beziehung im Prädikat *nicht* ausdrücklich *erwähnt* ist.

In allen Beispielen überträgt sich doch wesentlich das Prädikat („befehlen“, „gleich sein“, „Kauf abschliessen“ etc.) auch auf die Unterklassen und Individuen der Subjektklasse, und in gewissem Sinne bleibt es immer wahr, dass, was von der Gattung ausgesagt wird, auch von deren Arten und Individuen gelten, ausgesagt sein soll; nur die *Beziehung*, welche dem Prädikat beigefügt ist, das „einander“ oder „mit, gegen, durch, etc. einander“ muss bei den Einzelübertragungen des Prädikats auf jene Unterklassen jeweils modifizirt, verschieden ausgedrückt, oder — um einen bei Nicht-Mathematikern in diesem Sinne beliebten Ausdruck zu gebrauchen — muss dabei „differenziert“ werden.

Regeln aufzustellen, nach welchen in dergleichen Fällen die Zerspaltung des zusammengesetzten Urteils in einzelne einfachere, oder umgekehrt die Zusammenfassung solcher zu einem einzigen korrekt zu erfolgen hätte, liegt uns hier noch ferne. Es wären diese Regeln in die *Logik der Beziehungen überhaupt* zu verweisen. Diese aber, als eine allgemeine Disziplin, stellt einen höheren Teil der Logik vor, dem gegenüber wir es hier nur mit den *allerelementarsten* Beziehungen zwischen Klassen oder Begriffsumfängen zu thun haben, nämlich mit jener besonderen Gruppe von Beziehungen, deren Erklärung ganz auf den Begriff der Einordnung gegründet werden kann, und bei welchen, wenn von Individuen einer Klasse etwas ausgesagt wird, die übrigen Individuen dieser Klasse dem Geist nicht gegenwärtig zu sein brauchen.

§) Die nämliche Bedeutung, wie im Prädikat — nämlich die Kraft des *Mal*-Zeichens — kommt der Partikel „und“ auch in *Appositionen* zu, d. h. zwischen Adjektiven (ev. auch Relativsätzen) die vom nämlichen Substantiv regiert sind, sowie zwischen Umstandswörtern (Adverbien) die sich auf das nämliche Verbum beziehen. Z. B. „Umsichtige und wohlmeinende Freunde rieten ihm ...“ = „Freunde, umsichtig und wohlmeinend, rieten ...“ Der Satz hat zum Subjekt $(a \cdot b) \cdot c$, d. i. „Freunde c , die umsichtig (a) und wohlmeinend (b) zugleich sind (resp. waren)“, nicht aber $(a + b) \cdot c = c \cdot (a + b)$, das ist „Freunde, die umsichtig oder aber wohlmeinend, oder vielleicht beides zugleich sind“. Der Deutlichkeit zuliebe würde allerdings das „und“ besser unterdrückt und gesagt: „Umsichtige, wohlmeinende Freunde“ ... Indess wird des Wohlklangs wegen, bei einer Aufzählung von mehreren Eigenschafts- oder aber Umstandswörtern, die Sprache ungern auf das deren letzte verknüpfende Bindewort verzichten. Z. B. „Opferwillige, reiche und verschwiegene Freunde halfen ihm aus seiner Geldverlegenheit“. Es muss gemeint sein: Freunde, die alle jene Eigenschaften zugleich besaßen; hätte z. B. auch nur einer derselben geplaudert, so würde die Diskretion der Übrigen nichts genützt haben!

„(Gewohnheitsmässiger) Haschisch(genuss) tötet schnell, elegant und sicher“ besagt wieder, dass die Tötung in jeder der genannten Weisen *zugleich* erfolge. Etc.

Als fernere Beispiele mögen noch angeführt sein: „Ein marktschreierisches und schwindelhaftes Unternehmen florirte daselbst“. „Die arglosen und unbewaffneten Eingeborenen erschrecken sehr“. „Gewissenhafte und pflichttreue Beamte werden geschätzt“. „Gezogene und weittragende Geschütze ...“ „Seltene und teure Mineralien ...“ Etc.

Wie *schwankend* übrigens der Gebrauch bei derartigen Sätzen ist, zeigen Urteile wie:

„Taugliche und untaugliche Militärdienstpflichtige haben sich einzufinden“. „Unsre aktiven und passiven Mitglieder sind eingeladen“ etc. — wo die in die Apposition eingehenden beiden Klassen a und b sich nicht zu $a \cdot b$ sondern zu $a + b$ zusammensetzen. Es wäre hiezu wieder auf das unter ι) Ausgeführte zu verweisen. Ob eine aus den Teilen a und b zusammengesetzte Apposition mit ab oder mit $a + b$ zu übersetzen, ihrem Sinne nach logisch darzustellen ist, würde *ohne sachliche Nebetrachtungen* in der That oft dunkel bleiben; über den Sinn von einigen Appositionen wird man wirklich streiten können.

Man lege sich bei dergleichen Übertragungen stets die Frage vor, ob beabsichtigt sei, dass die durch die Appositionsglieder ausgedrückten

Eigenschaften gleichzeitig oder nur einzeln dem regirenden Substantiv (oder Verbum) zugeschrieben werden: im erstern Fall wird ab , im letztern $a + b$ die richtige Übersetzung sein.

Wir haben es in der Wortsprache, wie man sieht, fast immer nur mit *Regeln* zu thun, welche auch Ausnahmen zulassen. Erst im Kalkül werden wir *Gesetze* haben, bei denen Ausnahmen nicht vorkommen.

Im logischen Interesse haben wir vorstehend den Begriff der „Apposition“ etwas weiter gefasst, als es in der Grammatik üblich ist, wo derselben zugemutet zu werden pflegt, dass sie — wie bei „Dionysius, der Tyrann von Syrakus“, „Polykrates, Herrscher von Samos“, etc. — in der Form von Substantiven auftrete.

o) Wir lernten für identische Produkte und Summen verschiedene Weisen der Übertragung in die Wortsprache kennen.

Die Operationszeichen $\cdot$ und $+$ dürfen aber als *mal* und *plus* nur gelesen werden, wenn die Klassen, welche sie verknüpfen, durch Buchstaben dargestellt sind: Es soll hier nicht dafür plädiert werden, dass man sage: „schwarz mal Pferd gleich Rappe“ oder „Pferd mal weiss gleich Schimmel“!

Wird das Malzeichen gar nicht gesprochen, so werden die Sätze wieder legitim, und machen — *im Deutschen* — wegen mangelnder Flexion des Eigenschaftswortes und eventuell dessen hier nicht üblicher Hintansetzung hinter das Hauptwort, nur den Eindruck, von einem Kinde oder etwa einem Böhmken, einem auf tiefer Kulturstufe stehenden, oder der deutschen Sprache nicht recht mächtigen Ausländer, halbwildem Eingebornen, etc. herzurühren:

„Schwarz(es) Pferd (black horse) ist (=) Rappe“

„Pferd weiss(es) (cheval blanc) = Schimmel“ —

— im übrigen vollkommen entsprechend der Schreibung: $ab = c$.

Desgleichen soll nicht „Herren plus Damen“ für „Herren und Damen“ gesagt werden. Etc.

π) Als Exempel zu Th. 6) führen wir an:

$ab \in \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$. „Gebildete Adelige sind gebildet“.

„Besitzende Adelige sind adelig (Adelige).“

„Schwarze Pferde sind schwarz“ [oder „Rappen sind schwarz“; „sie sind auch Pferde“, etc.].

Hier gibt es nun sowol schwarze als auch nicht schwarze Pferde. Man beachte in dieser Hinsicht den Gegensatz des Beispiels zu den beiden folgenden:

„Der weisse Schnee ist weiss“,

„Alle runden Quadrate sind rund“ —

welche indess ebenso berechtigt sind, das Th. 6_x) zu exemplifizieren.

Das zweite Beispiel fordert die Bemerkung heraus, dass *aller* Schnee weiss sei*), die versuchte Determination des Subjekts „Schnee“ durch das Adjektiv „weisse“ mithin überflüssig. Es gibt hier ab — d. h. b welche a sind — aber keine b , welche nicht a wären.

Das dritte Beispiel provoziert den Einwurf, dass es runde Quadrate überhaupt nicht gebe. [Da es zu einer Kontroverse Anlass geben kann, werden wir auf dasselbe unter ϱ) des § 9 implicite nochmals zurückkommen.]

Die drei kursiv gedruckten Exempel können als *typische* bezeichnet werden, indem — wie leicht zu sehen — jede denkbare Anwendung des Satzes 6_x) von der Art eines dieser drei Exempel in beregter Hinsicht sein muss.

$\left. \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\} \in a + b$. „Die Adeligen sind Adelige oder auch Besitzende [gehören zur Aristokratie]“. „Die Besitzenden ebenfalls“.

„Gleich ist untergeordnet oder gleich“, vergl. den § 1.

Der Satz: „Norddeutsche sind Deutsche“ kann angesehen werden als eine Exemplifikation von 6_x) sowol als von 6_+). Ersteres, indem man „Norddeutsche“ versteht als die Klasse derjenigen Deutschen, welche aus dem Norden stammen, resp. nördlich der Mainlinie wohnen. Letzteres, insofern man die Klasse der Deutschen ansehen kann als die identische Summe aus den Klassen der Nord- und der Süddeutschen (einschliesslich der durch die Kolonialerwerbungen hinzugekommenen Reichsangehörigen).

Alle diese Sätze dürften einfach als Selbstverständliche zu bezeichnen sein. — Wir müssen hier eben auch die verschiedenen Arten des Selbstverständlichen registrieren. Und dieses hat verschiedene Grade! Wo ist die Grenze des unmittelbar Selbstverständlichen für den einen, wo für den andern Denker oder Studirenden? Im Grunde wird — so hoffen wir — Alles in diesem Buch behauptete als *selbstverständlich* richtig zu bezeichnen sein — nicht minder wie diese elementarsten Betrachtungen so auch die komplizirtesten Theoreme und Lösungen verwickelter Aufgaben, in welche vielleicht schon der begabteste menschliche Intellekt ohne die Technik unsres oder eines ihm gleichwertigen Kalküls nicht mehr Einsicht zu gewinnen vermöchte.

Zur Entschuldigung dafür, dass wir jeweils auch bei dem einfacheren, dem unmittelbar Selbstverständlichen verweilen, sei der Ausspruch aus Goethe's Wahlverwandtschaften citirt:

*) Der sog. „rote Schnee“ ist es bekanntlich nur *zum Scheine* zufolge der eingestreuten *Protococcus nivalis* — Algen.

„Es klingt freilich wunderlich, wenn man etwas ausspricht, das sich ohnehin versteht; doch nur indem man sich über das Bekannte völlig verständigt, kann man miteinander zum Unbekannten fortschreiten“.

Andernfalls nämlich trennen sich alsbald die Wege und wird offenbar, dass es doch von einer nicht zu unterschätzenden erziehlischen Wirkung gewesen wäre, dass es geradezu unerlässlich ist, sich erst um die Sicherung von gemeinsamen Ausgangspunkten und Richtungen des Fortschreitens zu bemühen, selbst auf die Gefahr hin, dem Vorwurf der Trivialität zu begegnen.

§ 9. Fortsetzung. Konsequenzen der Adjungirung einer Nullklasse. Reine Mannigfaltigkeit.

ϱ) Die Betrachtungen unter π) würden nicht vollständig sein, wenn wir nicht bei Th. 6_x) den Fall noch eingehender erörterten, wo $ab = 0$ ist.

Ich wähle dazu ein gewisses typisches Beispiel, ein Beispiel, welches sich zu einem Vorbild für alle Fälle dieser Art besonders gut eignet. Sagen wir:

„Alle gleichseitigen rechtwinkligen Dreiecke sind gleichseitig“
so gibt dies, wenn als Klasse „gleichseitig“ mit a bezeichnet und „rechtwinkliges Dreieck“ oder „Rektangel“ = b genannt wird, eine Illustration zu dem Satze 6_x) $ab \in a$.

Sind nun die Dreiecke, von welchen wir sprechen, solche auf der Kugelfläche, sind es „sphärische“ Dreiecke, so *gibt es**) Individuen der Klasse $a \cdot b$, welche ja die „gleichseitigen rechtwinkligen (Kugel-)Dreiecke“, oder kürzer gesagt, die „gleichseitigen (sphärischen) Rektangel“ bedeuten soll. Aus der Sphärik nämlich gleichwie aus der Anschauung ist es bekannt, dass jedes dreieckwinklige Dreieck als der achte Teil der ganzen Kugelfläche zugleich auch ein gleichseitiges (nämlich dreieckseitiges) ist. Hier ist dann $a \cdot b$ nicht gleich 0, und haben wir ein Beispiel, welches sich den früher unter π) angeführten als gleichartig an die Seite stellt.

Sprachen wir dagegen von geradlinigen oder *ebenen* Dreiecken, so wird $a \cdot b$ jetzt ein Name sein, welcher „nichts“ bedeutet; es ist ein sinnloser oder leerer Name geworden, eine Klasse vorstellend, welche *kein* Individuum in sich schliesst, sintemal es gleichseitige rechtwinklige ebene Dreiecke bekanntlich nicht geben kann.

Ob man nun auch für ebene Dreiecke den obigen Ausspruch

*) Es ist hier nebensächlich, ob wir diesen Ausspruch auf die Mannigfaltigkeit 1 des Wirklichen, Realen, oder auf die noch umfassendere des überhaupt zu denken Möglichen beziehen.

gelten lassen wird?? Man könnte darüber streiten, und es wäre das buchstäblich ein Streit „um nichts und wieder nichts“, denn auch die fragliche Aussage ist nichtssagend, sie bezieht sich auf nichts.

Wie man solches im gemeinen Leben halten mag, ist uns gleichgültig; ich meine, man sollte (auch da) sie gelten lassen, man sollte ihr wenigstens eine sozusagen „formale Gültigkeit“ zuerkennen, in Anbetracht, dass in ihr dem Subjekt, den gleichseitigen ebenen Rechtecken, nur eine bei demselben schon vorausgesetzte Eigenschaft (der Gleichseitigkeit) zugesprochen, beigelegt wird.

Hier aber, in dem Rahmen unsrer Disziplin der Algebra der Logik, sind wir jedenfalls verpflichtet, die gedachte Aussage als richtig anzuerkennen.

Diese — ja eine noch viel weitergehende — Verpflichtung ist eine Wirkung, notwendige Folge der seiner Zeit von uns vollzogenen und durch die Vorteile, die sie gewährt, ja bereits motivierten Adjungierung der Null zu unsrer Mannigfaltigkeit, Folge der Aufnahme des Nullgebietes unter die Gebiete, der Zulassung einer Nullklasse zu den Klassen, der Hinzuziehung des Begriffs des „Nichts“ zu den sonstigen Begriffen des Menschengenies.

Nach Def. (2_x) ist $0 \in a$, was auch a für ein Gebiet, für eine Klasse bedeuten möge. Wenn also ab die 0 bedeutet, so ist in der That $ab \in a$.

Das „Nichts“ ist sogar Subjekt zu jedem Prädikate: das Nichts ist schwarz; das Nichts ist zugleich auch nicht schwarz; denn die Nullklasse ist in jeder Klasse mit enthalten. Wenn sie „nichts“ betrifft, kann eine Aussage niemals falsch sein, und wenn sich Aussagen auf gar nichts beziehen, so ist auch kein Widerspruch zwischen diesen Aussagen möglich.

Den in diesem Absatze ausgesprochenen allgemeinen Sätzen wird später doch eine gewisse Einschränkung nachträglich zu geben sein; indem es nötig fällt, die Mannigfaltigkeit 1, aus welcher jene Gebiete, Klassen oder Prädikate nach Belieben herausgehoben werden dürfen, in gewissem Sinne nach oben zu beschränken, indem sich herausstellt, dass diese Mannigfaltigkeit eine „reine“ bleiben, d. i. eine gewisse Beschaffenheit bewahren muss, worüber ψ , χ zu vergleichen.

In Bezug auf unser typisches Exempel kann man sich nunmehr auch vorstellen, dass etwa die Natur zu untersuchender Dreiecke — ob sie ebene, ob sphärische — von vornherein unbekannt sei. Die in dem Exempel als gültig hingestellte Aussage mag dann vielleicht ein Glied bilden in einer Kette von Überlegungen, die den Zweck haben, zu ermitteln, von welcher Natur die fraglichen Dreiecke wirklich sein müssen. Wird dabei nach hier

entwickelten logischen Prinzipien konsequent verfahren, so kann die erwähnte Aussage als Prämisse zu weiteren Schlussfolgerungen nun ganz unbedenklich mitverwendet werden, und ist kein Grund ersichtlich, weshalb gedachte Untersuchungen nicht ihren Zweck erreichen dürften.

So kann man z. B. auf die Behauptung, dass gedachte Dreiecke gleichseitig sind, nach bekanntem Satze den Schluss gründen, dass sie auch gleichwinklig sein, ihre Winkelsumme mithin drei Rechte betragen müsse, womit dann die Frage entschieden ist und die ebenen Dreiecke ausgeschlossen erscheinen.

6) Es wurde in § 1 ausgeführt, dass das Subsumtionszeichen $\in$ der Kopula entspricht, und, wenn a und b Klassen vorstellen, die Subsumtion $a \in b$ mit „ a ist b “ resp. „alle a sind b “ wiederzugeben sei.

Die seitdem mit Def. (2_x) von uns vollzogene Zuziehung, Adjungierung der „Null“ zu den Gebieten und Klassen hat nun im Gefolge, dass auch diese Bemerkung eine Modifikation nachträglich erfahren muss, wenigstens für die Sprache des gemeinen Lebens.

Hat a den Wert 0, so gilt die Subsumtion $a \in b$ ohnehin, was auch für eine Klasse b immer bedeuten möge. Diese Subsumtion $0 \in b$ lehrt uns dann nichts besonderes, sie wird (hinsichtlich des b) zu einer geradezu „nichtssagenden“.

Der Fall $a = 0$ ist nun der, wo die Klasse a überhaupt keine Individuen enthält, eine leere ist, was die Sprache mit: „Es gibt keine a “ ausdrücken wird.

Diesen Fall muss man nunmehr, wenn ausgesagt wird, dass $a \in b$ sei, stets mit als möglich zugelassen denken; daher ist die Subsumtion:

$$a \in b$$

fortan zu lesen:

„Alle a , sofern es welche gibt, sind b “
sie ist m. a. W. zu interpretieren als:

Entweder: es gibt keine a ,

Oder, wenn es welche gibt, so sind sie alle b .

Im Rahmen der gegenwärtigen Disziplin wird es zwar [mit einem kleinen unter ψ) zu erwähnenden Vorbehalt] ganz unbedenklich sein, auch bei der einfacheren Fassung zu bleiben und nur zu sagen: „ a ist b “ resp. „alle a sind b “, wie früher.

Für die Verkehrssprache aber wäre hiezu nicht zu raten! Indem hier stillschweigend die Unterstellung hinzutritt, dass Derjenige, der etwas sagt, auch wirklich (über) etwas aussagen wolle, so wird eine auf „alle a “ bezügliche Aussage allgemein so aufgefasst, dass sie das Subjekt als existierend annehme oder hinstelle.

Wird etwa gemeldet: „Alle Versuche seien fehlgeschlagen“, so wäre in der Auffassung des Publikums damit implicite auch gesagt, dass wirklich Versuche gemacht worden. Und wenn jemand, der niemanden beraubte, etwa von sich sagen wollte: „alle von ihm Beraubten seien wohlhabend gewesen“, der würde sich einer argen Selbstverleumdung schuldig machen. Etc. Vergl. hiezu noch weiter unten φ).

Immerhin beruht auf diesem Umstand eine Art von Witz, eventuell bewusster Täuschung oder Lüge, welche vor dem logischen Gewissen noch am ehesten zu entschuldigen (auch vor dem mathematischen, sofern eben in der Mathematik eine Anzahl, die der a , auch gleich 0 gedacht werden darf).

Wer sich im Alltags-Leben die Subsumtion $0 \in a$ zur Verhaltensregel wählen wollte, würde sicherlich bald der Wortklauberei, Sophistik, Spitzfindigkeit geziehen werden, und dieser wollen wir hier nicht das Wort reden.

Aber „Eines schickt sich nicht für Alle“. In der Wissenschaft ziemt es sich, schärfer zu unterscheiden, stillschweigende Voraussetzungen jeweils zu ausdrücklichen zu erheben, dann aber, was gar nicht gesagt worden, auch nicht als behauptet hinzustellen.

Auch die gewöhnliche Verkehrssprache kann den Begriff des „nichts“ oft nicht entbehren; sie zieht ihn zeitweilig allerdings heran, ohne jedoch auf sein Mitunterlaufen immer und überall gefasst zu sein. Sie verhält sich in dieser Beziehung der identischen Null gegenüber ungefähr so, wie die arithmetische Analysis sich verhält gegenüber der „absoluten Unendlichkeit“, welche hier ebenfalls zeitweilig herangezogen wird, um den Mangel eines Zahlenwertes äusserlich zu verdecken, den Ausfall einer Zahl zu maskieren, welche m. a. W. hier wesentlich die Rolle eines Lückenbüssers („stopgap“) spielt, und dennoch nie als eine wirkliche Zahl angesehen und behandelt werden darf, dem Zahlengebiete schon darum nicht einverleibt werden kann, weil sie die Regeln der Arithmetik über den Haufen werfen würde.

Im identischen Kalkül dagegen wird die identische Null in ähnlicher Weise überall zugelassen erscheinen, wie in der Mathematik bei allgemeinen Untersuchungen im Zahlengebiete die arithmetische Null von vornherein mitbegriffen zu werden pflegt.

Dieser Umstand begründet einen Hauptunterschied zwischen der Sprache der Logik und der des gemeinen Lebens.

τ) Es hat die Zuziehung der Null auch noch die weitere Folge, dass wir die sog. „Existenzialurteile“, Sätze wie „Es gibt a “ nicht mehr (wie in § 2 noch provisorisch geschah) vermittelst einer Subsumtion darzustellen in der Lage sein werden. Man kann freilich eine Klasse bilden: r , die Klasse des Realen, die alles umfassen soll, was in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft (oder, wenn man will, auch

in der Gegenwart allein) dem Bereich der Wirklichkeit angehört, was existiert. Wenn es a 's gibt, so ist dann $a \in r$. Das letztere aber ist, kraft Def. (2_x), auch richtig, wenn es keine a 's gibt; es schliesst die Subsumtion den Fall $a = 0$ nicht aus.

Wie Existenzialurteile selbst in unsrer Zeichensprache angemessen darzustellen sind, werden wir später sehen (§ 33).

Einstweilen sind wir nur im Stande die Verneinung eines Existenzialurteils darzustellen, indem, wie gezeigt, die Gleichung $a = 0$ [oder, nach Th. 5_x) auch die Subsumtion $a \in 0$] ausdrücken wird: „Es gibt keine a “s“. Dies wäre z. B. richtig, wenn a die Klasse der „Zauberer, Hexen und Gespenster“, oder auch wenn es die der „runden Quadrate“ bedeutete.

ν) Zur Stelle ist über die verbale Einkleidung der mit Def. (2) als allgemeine Formel eingeführten Subsumtionen:

$$(2_x) \quad 0 \in a \text{ und } a \in 1 \quad (2_+)$$

überhaupt noch einiges zu bemerken.

Wir sahen: 0 bedeutet „nichts“; das Zeichen $\in$ entspricht der Kopula, und muss mit „ist“ in die Wortsprache übertragen werden; endlich a mag jedes beliebige*) Prädikat sein — sagen wir beispielsweise „schwarz“.

Die Subsumtion $0 \in a$ ist unzweifelhaft richtig, weil die Klasse aller der Dinge, welche wir „schwarz“ nennen würden, ausser diesen nichts enthält, also wie ich sagen darf, noch obendrein auch „nichts“ enthält.

Wenn wir diese Subsumtion aber, dem vorausgehenden gemäss, mit „Nichts ist schwarz“ übersetzen wollten, so würden wir gleichwol eine falsche Aussage erhalten. Denn letztere würde ja den Sinn haben: „Es gibt nichts Schwarzes“; sie würde die Verneinung eines der oben erwähnten Existenzialurteile sein, welche in Formeln nicht die Subsumtion, sondern nur die Gleichung $0 = a$ oder $a = 0$ ausdrückt.

Die Subsumtion hatten wir demnach falsch übersetzt, und dieses weist darauf hin, dass für unsre „extremen“ Fälle die Übersetzungsregeln eine Ausnahme haben, und haben müssen, indem über den Sinn des regelrechten Übersetzungsergebnisses die Wortsprache bereits anderweitig verfügt hat.

Dies aber lässt sich nicht nur erklären sondern auch rechtfertigen. Bei der Aufstellung ihrer Regel, nämlich indem sie es zur Gewohnheit

*) Wie schon angedeutet, mit einer Einschränkung, welche unter ψ) auseinanderzusetzen wird.

werden liess, mittelst der Kopula die *Einordnung* des Subjekts unter das Prädikat auszudrücken, hat die Wortsprache auf jene äussersten Fälle (des Subjekts 0 oder Prädikates 1) überhaupt nicht ihr Augenmerk gerichtet. Indem sie die Kopula die logische Bedeutung „ $\Leftarrow$ “ gewinnen liess, durfte sie jene Fälle beiseite lassen.

Sie musste ja in der That darauf bedacht sein, die Mittel auszubilden, vermöge deren sich von irgend etwas (nicht aber von nichts) etwas aussagen lasse, und zwar etwas Bedeutsames, nicht aber etwas Selbstverständliches und vollkommen Belangloses.

Als ebenso zweck- und nutzlos, wie selbstverständlich, erscheint aber für das gemeine Leben sowol, wie für die verschiedensten Spezialwissenschaften jegliche Äusserung von dem Sinne oder der Form einer der beiden Subsumtionen der Def. (2). Dass in irgend einer Klasse unter Anderem auch „nichts“ mitenthalten sei, oder dass irgend eine Klasse von Dingen in Allem mitenthalten sei, dieses hervorzuheben dürfte nicht leicht irgendwo von Wert sein. Und zwar kann dies zugegeben werden ganz unbeschadet dessen, dass für die Technik des Kalküls jenen Subsumtionen (2) doch eine ganz wesentliche Mission zufällt, dass ihre Unentbehrlichkeit hiefür bereits erkannt wurde, und wir allmählig vollends sehen werden, wie sie ihre Mission daselbst glänzend erfüllen (die: Ausnahmslosigkeit zu ermöglichen).

Für die gedachten beiden Grenzfälle nun, wo die Einordnung also selbstverständlich und darum nichtssagend sein würde, hat die Wortsprache sich vorbehalten, der Kopula die Kraft des *Gleichheitszeichens* zu verleihen.

In Bezug auf (2_x) — dass eine Aussage „Nichts (0) ist schwarz (a)“ sagen will: $0 = a$ und nicht $0 \Leftarrow a$ — haben wir dies bereits auseinandergesetzt.

Dasselbe trifft auch bezüglich (2₊) zu. Geben wir etwa am Ende einer Aufzählung eines Berichtes die Versicherung ab: „Dies (das Bisherige, Aufgezählte, Referirte a) ist Alles“, so wollen wir damit sicherlich nicht blos aussprechen, dass das Bisherige (a) in allem Denkbaren (1) mitenthalten sei neben — Gott weiss noch was — Anderem, also dass $a \Leftarrow 1$ sei, sondern wir wollen versichern, dass die fragliche oder erwartete Klasse resp. Mannigfaltigkeit von Objekten oder Ereignissen, umfassend z. B. alles Dasjenige, dessen Kenntniss für die richtige Beurteilung der Sachlage wesentlich ist, durch das Aufgezählte, Referirte gerade erschöpft sei — in unsrer Zeichensprache also, dass $a = 1$ sei, wenn wir in der That jene ganze Mannigfaltigkeit mit 1 bezeichnen.

Bedeutet nun also a irgend eine Klasse, wie „schwarz“ oder „Gold“, etc., so dürfen wir Subsumtionen wie

$$0 \Leftarrow a, \quad a \Leftarrow 1$$

jedenfalls nicht mit:

„Nichts ist Gold“ resp. „Gold ist Alles“

übersetzen, obgleich 0 nichts und 1 alles Denkbare bedeutet, resp. auf unserm gegenwärtigen Standpunkte noch bedeuten kann.

Die Übersetzung dieser Subsumtionen in die Wortsprache ist überhaupt *unnötig*.

Will man sie aber dennoch ausführen, so ist etwa, wie oben (unter φ), die erstere mit „Das Nichts ist Gold, ist schwarz, etc.“ wiederzugeben — vergleiche „das goldene Nichtschen und das silberne Warteeinweilen“ des Volkswitzes im deutschen Sprichwörterschatze.

Bei geeigneter Betonung würde sich sogar die oben zurückgewiesene, refutirte Aussage aufrecht erhalten lassen. Falsch ist sie nur in der *gewöhnlichen* Betonung: „Nichts ist schwarz“, welche an den Tonfall des Daktylus: - u u wenigstens erinnert. Richtig dagegen (in unserm Sinne) wäre sie mit der *ungewöhnlichen* Betonung: „Nichts...ist schwarz“ (es ist ja ebensogut auch weiss) mit dem Tonfall des Amphimacer oder Kretikus: - u -, und einer Pause hinter der ersten Länge.

Wird 0 anstatt durch „nichts“, durch ein Produkt dargestellt, das 0 zum Werte hat, so kann die gewöhnliche Ausdrucksweise wieder Platz greifen. Da z. B. die Klasse „rundes Quadrat“ $= 0$ ist, so wäre es wenigstens unverfänglich zu sagen: „alle runden Quadrate sind schwarz“ und dergl.

Am besten sage man etwa: das Nichts ist in Allem, so auch in der Klasse a noch mitenthalten.

Die zweite Subsumtion: $a \Leftarrow 1$ liesse sich übersetzen mit: „Gold ist etwas“, „Schwarze Dinge sind etwas“, etc. indem das unbestimmte Pronomen „etwas“ die Klasse vorstellt, die alles Denkbare unter sich begreift, *alles, wovon man überhaupt zu reden vermöchte*.

Es würde diese allumfassende Klasse entsprechen dem von Boole in die Logik eingeführten „Universum des Diskussionsfähigen“ (universe of discourse), Jevons' und R. Grassmann's „Totalität“ oder „All“.

Ob es aber angängig ist, eine so umfassende Klasse überhaupt zu bilden, die unter anderm auch die Ablehnung ihrer eigenen Zulässigkeit, die Verneinung ihrer Existenz mitenthalten müsste, ob wir diese hier als Bedeutung unsrer identischen 1 (Peirce's ∞) beilegen dürfen, soll gleich nachher noch eingehender untersucht werden.

φ) Nach dem Bisherigen dürfte es beinahe überflüssig sein, noch besonders darauf hinzuweisen, dass auch die Subsumtion

$$0 \Leftarrow 1$$

nicht mit „Nichts ist Alles“ in die Wortsprache übertragen werden darf, und zwar aus doppeltem Grunde. Desgleichen darf sie nicht mit „Nichts ist etwas“ wiedergegeben werden (aus einfachem Grunde), weil hier wenigstens noch das Subjekt „nichts“ — wie vorhin noch obendrein das Prädikat „alles“ — bewirkt, dass der Kopula „ist“ die assertorische Kraft des Gleichheitszeichens nach dem Sprachgebrauch zukommt, statt derjenigen der Einordnung.

Will man jene Subsumtion durchaus in Worte fassen, so sage man etwa: „Das Nichts ist auch in der Gesamtheit mitenthaltend“.

Wir glaubten mit den Betrachtungen unter ρ), ν) und φ) so eingehend bei einer verhältnissmässigen Kleinigkeit, anscheinenden Bagatelle verweilen zu sollen, weil in Bezug auf sie und ihre Auffassung ein schroffer Gegensatz der Meinungen unter den Anhängern verschiedener philosophischer Systeme zutage getreten ist und noch immerfort gestritten wird.

Von Herbart, dem auch Sigwart beitrifft, ist in Abrede gestellt, dass die Wortsprache die Existenz des Subjektes unterstelle, und wird von letzterem als Beleg das Urteil angeführt: „Der Pegasus ist geflügelt“. Allerdings will mit diesem und in vielen ähnlichen Urteilen nicht ausgesprochen sein, dass es in der Mannigfaltigkeit des Wirklichen überhaupt Individuen der Subjektklasse gebe, hier also: dass wirklich ein Pegasus existire. Dennoch aber wird mit dem Urteile ein Subjekt als wirklich vorhanden gesetzt.

Das logische Subjekt fällt nur hier nicht zusammen mit dem grammatischen Subjekte. Wir haben den logischen Gehalt des als Beispiel hervorgehobenen Urteils schon in § 2 dahin erläutert, dass dasselbe lediglich behaupte: die Vorstellung des Pegasus ist enthalten in der Klasse der Vorstellungen von geflügelten Wesen, und jene Vorstellung ist eine wirkliche, hat eine historische Existenzberechtigung in einer gegebenen Mannigfaltigkeit von mythischen Wesen.

Wer diese Wirklichkeit leugnen, die Subjektklasse hier als eine leere hinstellen wollte, der müsste als einen vollberechtigten Ausspruch auch das Urteil zugeben: „Der Pegasus ist ungeflügelt“ — oder, sagen wir z. B. auch „grün“ — kurzum mit jedem beliebig gewählten Prädikate!

Auch der Umstand bildet nur eine Bestätigung unsrer Thatsache: dass der Glaube an die Existenz so mancher Subjekte oder auch Objekte — sagen wir z. B. des leibhaftigen Teufels, eines tierisch-magnetischen Fluidums etc. — eben dadurch erzeugt und gefestigt zu werden pflegt, dass von früh auf in der Umgebung des heranwachsenden Menschen vielfach über dieselben ausgesagt, prädicirt wird — ein Verfahren, das als ein weitverbreiteter Missbrauch dem Aufmerksamen nicht entgehen kann.

Sehr Treffendes über die hier berührte noch nicht abgeschlossene Kontroverse sagt auch Venn¹ p. 126 sqq., welcher, die Frage wol am gründlichsten behandelnd, derselben ein eignes Kapitel widmet. — Aussagen, Prädikationen über gar nicht existirende Subjekte spielen gerade in den Wissen-

schaften eine höchst hervorragende Rolle — wie z. B. in der Mechanik die Sätze über die „vollkommen“ starren Körper. Solche Sätze haben wesentlich die Bedeutung von Schlüssen, welche an die Voraussetzung der absoluten Starrheit eines Körpers die betreffenden Behauptungen als Folgerungen knüpfen; ihr logisches Subjekt ist eben diese Hypothese (der vollkommenen Starrheit eines Körpers) und erscheinen damit auch sie als Urteile über Urteile, und somit über Existirendes.

Wenn es demnach mit der Wortsprache sich doch so, wie wir oben sagten, verhält, so sind wir aber an deren Brauch in unsrer Disziplin nicht gebunden.

χ *) Am letzten Beispiel, der Subsumtion $0 \in 1$, lässt sich übrigens schon darthun, dass es in der That unzulässig ist, unter 1 eine so umfassende, sozusagen ganz offene Klasse, wie das oben geschilderte „Universum des Diskussionsfähigen“ (von Boole) zu verstehen.

Wie ausgemacht ist, sollte nämlich 0 in jeder Klasse, welche aus der Mannigfaltigkeit 1 herausgehoben werden kann, mitenthaltend sein, sodass $0 \in a$ gilt, 0 sollte Subjekt zu jedem Prädikate sein.

Verstünden wir nun unter a die Klasse derjenigen Klassen der Mannigfaltigkeit, welche gleich 1 sind, [und dies wäre ja, wenn wir alles Denkmögliche in die Mannigfaltigkeit 1 hereinziehen dürfen, gewiss erlaubt], so umfasste diese Klasse wesentlich nur ein Objekt, nämlich das Symbol 1 selbst, beziehungsweise das Ganze der Mannigfaltigkeit, die seine Bedeutung ausmacht — ausserdem aber auch „nichts“ mit-hin 0. Da nun also 1 und 0 die Klasse derjenigen Objekte aus-machten, welche gleich 1 zu gelten haben, so müsste nicht nur: $1 = 1$, sondern auch: $0 = 1$ anerkannt werden. Denn ein Prädikat, welches einer Klasse zukommt (hier das Prädikat, identisch gleich 1 zu sein), muss auch jedem Individuum dieser Klasse zukommen, gemäss Prinzip II.

In einer solchen Mannigfaltigkeit, wo $0 = 1$ gälte, würde jede Möglichkeit der Unterscheidung zweier Klassen oder auch Individuen von vornherein ausgeschlossen sein; hier wäre dann alles „wurst“.

Indem man die Gleichung $0 = 1$ nach später bewiesenen Regeln beider-seits mit a , daneben auch mit b multiplizierte [gemäss Th. 16_x), 21_x) und 22_x)] sodann die Ergebnisse $0 = a$ und $0 = b$ [gemäss Th. 4)] miteinander vergliche, würde sich die Gleichung $a = b$ als allgemeine Formel ergeben, gültig, was auch a und b für Klassen oder Individuen vorstellen mochten! Als allgemeine Formel hingestellt ist solche Gleichung jederzeit ein Unsinn.

Wir werden die Gleichung:

$$0 = 1$$

*) Was unter χ) hier folgt ist wol als zu subtil für den ersten Unterricht weniger geeignet; es wäre mit jugendlichen Anfängern — in der Schule z. B. — zu überspringen.

nur anzuerkennen vermögen für eine *völlig leere* Mannigfaltigkeit 1, eine Mannigfaltigkeit, welche selbst *gar kein* Element oder Individuum enthält — und eine solche schliessen wir von unsern Betrachtungen grundsätzlich aus.

Die vorstehende Überlegung würde — *mutatis mutandis* — auch statt-haft gewesen sein, wenn man in ihr das Symbol 1 von Anfang an durch den Namen irgend einer speziellen Klasse b der erstbetrachteten Mannigfaltigkeit ersetzt hätte; sie würde ebenso auf die absurde Gleichung $0 = b$ geführt haben. Und zwar wie folgt: Es gelte $0 \in a$ für jede Klasse a . Versteht man unter a die Klasse derjenigen Gebiete, welche gleich b sind, so muss diese neben b (welches ja von allen Gebieten ganz allein gleich b ist) auch die identische 0 enthalten, was eben die Subsumtion $0 \in a$ behauptet. Dann muss also auch 0 ein solches Gebiet sein, welches gleich b ist; es folgt (im Widerspruch mit Obigem) so: $0 = b$ — für jedes b !

Diese Überlegungen zeigen, dass *Boole's universelle Interpretation der 1 in der That eine zu weitgehende gewesen.**)

Im eigentlichen Gebietekalkul, für die Gebiete a einer Mannigfaltigkeit 1 von Punkten z. B., lässt sich die Subsumtion $0 \in a$, wie wir schon sahen, ganz unumschränkt aufrecht erhalten.

Doch ist nun die Frage zu beantworten, inwiefern sich die Gesetze des Kalkuls auch auf die Mannigfaltigkeit, gebildet aus *allen möglichen* Klassen, aus *irgendwelchen* Objekten des Denkens werden übertragen lassen.

Es ist gezeigt, dass es unzulässig ist, diese Mannigfaltigkeit 1 vollkommen bestimmungslos, sie gänzlich uneingeschränkt oder offen zu lassen, indem sich gewisse denkmögliche Formulierungen der Prädikatklasse a schon in (2_x) als unzulässig erwiesen. Wie muss sie nun aber beschaffen sein, damit auf sie angewendet, die Regeln des Kalkuls, insbesondere die Def. (2_x) , zu Widersprüchen in sich nicht mehr führen können?

Ich will die Antwort auf diese schwierige Frage zu geben versuchen.

Wir haben es zunächst zu thun mit einer Mannigfaltigkeit von irgend welchen „Dingen“ — Objekten des Denkens überhaupt — als „Elementen“ oder „Individuen“. Diese mögen (sämtlich oder auch zum Teil) von vornherein gegeben, oder aber (zum andern Teil oder sämtlich) nur begrifflich irgendwie bestimmt sein. Denn völlig bestimmungslos dürfen sie, wie schon gezeigt, nicht bleiben.

Damit die Symbole 0 und 1 etc. nach den Regeln des Kalkuls in dieser Mannigfaltigkeit verwendbar seien, wird dieselbe hinsichtlich

*) Bei Abfassung meines „Operationskreis etc.“ hatte ich diesen Umstand noch nicht beachtet.

der Art, wie ihre Elemente gegeben oder auch begrifflich bestimmt sein dürfen, gewisse Anforderungen zu erfüllen haben.

Als eine erste Anforderung haben wir schon in § 7 unter Postulat (1_+) die namhaft gemacht: dass die Elemente der Mannigfaltigkeit sämtlich *vereinbar*, miteinander „*verträglich*“ sein müssen. *Nur in diesem Falle bezeichnen wir die Mannigfaltigkeit mit 1.* Im andern dagegen ziehen wir für dieselbe den Namen ∞ vor als des einzigen (Zahl?)-Zeichens aus dem Bereich der Arithmetik, welches daselbst eine *definitiv* unerfüllbare Forderung (die: mit 0 multipliziert 1 zu geben) ausdrückt (wogegen die anfängliche Unmöglichkeit andrer Symbole, wie -1 , $i = \sqrt{-1}$, etc., sich bekanntlich durch Erweiterung des Zahlengebiets beheben liess), als des spezifischen *Symboles*, also, der *Unmöglichkeit*. [Ein Exempel für letztere wird in Gestalt einer Mannigfaltigkeit von miteinander unverträglichen Funktionalgleichungen in Anhang 5 gegeben.] Eine Mannigfaltigkeit, welche demnach ∞ zu nennen wäre, lassen wir im „*identischen*“ Kalkul ausser Betracht.

Sind die Elemente der Mannigfaltigkeit vereinbar, so lassen sich in derselben kollektiv nach *Belieben* Systeme, „*Gebiete*“ aus ihren Elementen zusammensetzen, in ihr abgrenzen, es lassen sich m. a. W. auch zwecks distributiver Verwendung irgendwie *Klassen* von Individuen aus ihr hervorheben.

Und insbesondere gehören auch ihre Individuen selbst mit zu den Klassen, welche wir dann, wenn sie eben zu nur *einem* Individuum zusammenschrumpfen, als „*monadische*“ oder „*singuläre*“ Klassen bezeichnen mögen.

Durch jenen Prozess der beliebigen Hervorhebung von Klassen von Individuen der ursprünglich gedachten Mannigfaltigkeit wird nun (im Allgemeinen) eine *neue*, noch viel umfassendere Mannigfaltigkeit entstehen, geschaffen, nämlich die der Gebiete oder Klassen der vorigen.

So ist die *Mannigfaltigkeit der Punktgebiete* der Tafelfläche eine viel umfassendere als die *Mannigfaltigkeit ihrer Punkte*; denn während die letztere als Gebiete, Punktklassen, nur irgend welche Flächen enthält, umfasst die erstere ausser diesen selben Flächen (als ihren „*singulären*“ Klassen) auch noch alle denkbaren Gattungen von Flächen, z. B. die Gattung der kreisförmigen Flächen, als Klassen in sich. Jedes Individuum der letztern Mannigfaltigkeit ist ein *Punktgebiet*, eine Fläche, die auch in Linie, Punktgruppe oder Punkt zusammenschrumpfen kann. Jedes Individuum der erstern ist eine *Gattung von Punktgebieten*, die ebenso auch in ein einzelnes Punktgebiet schrumpfen kann und notwendig auch alles vorige mit in sich schliesst.

Die neue Mannigfaltigkeit könnte man als die „zweite Potenz“ der vorigen — besser wohl als deren „erste abgeleitete oder derivirte Mannigfaltigkeit“ bezeichnen.

Von ihr liesse sich abermals eine (eventuell) neue, noch umfassendere Mannigfaltigkeit „ableiten“, welche als die derivirte der ersten derivirten oder als die zweite abgeleitete Mannigfaltigkeit der ursprünglichen zu bezeichnen wäre. Und so fort.

Wie aus den vorausgeschickten Überlegungen zu ersehen ist, darf nun die Bedeutung der identischen 1 sich von der ersten jedenfalls nicht über die zweite, deren „abgeleitete“ Mannigfaltigkeit, mit erstrecken, noch weniger also über noch höhere von den abgeleiteten Mannigfaltigkeiten.

Und damit auch in der ursprünglichen Mannigfaltigkeit die Subsumtion (2_+) aufrecht erhalten werden könne, ist von vornherein erforderlich (und hinreichend), dass unter ihren als „Individuen“ gegebenen Elementen sich keine Klassen befinden, welche ihrerseits Elemente derselben Mannigfaltigkeit als Individuen unter sich begreifen.

Bildete man auch nur eine singuläre „Klasse“ in ebendieser und liesse solche als ein neues Individuum derselben zu, so drängte augenblicklich wieder die identische Null sich zu ihr hinzu, schlüpfte sozusagen durch die Thür der Def. (2_x) in sie ein.

Ich werde eine Mannigfaltigkeit der genannten Art eine „reine“ nennen — im Gegensatz zu einer „gemischten“, bei welcher obige Anforderung nicht durchaus erfüllt ist, also wenigstens einzelne ihrer Elemente Klassen sind, die schon andere Elemente derselben als Individuen enthalten.

Damit der identische Kalkül auf eine Mannigfaltigkeit anwendbar sei, muss sie eine reine Mannigfaltigkeit sein von vereinbaren Elementen.

ψ) Auch auf die derivirte einer solchen Mannigfaltigkeit ist der identische Kalkül wiederum anwendbar, nur muss die Null in dieser unterschieden werden von der Null in jener, der ursprünglichen Mannigfaltigkeit. Ebenso auch selbstverständlich die Eins, indem ja die eine Mannigfaltigkeit als Ganzes nicht identisch war, sich nicht deckte mit der andern; überhaupt werden in ihr sämtliche Ausdrücke, Operations- und Beziehungszeichen eine neue, eigenartige Bedeutung beanspruchen.

Ein Gebiet 0, welches die fundamentale Eigenschaft: $0 \in a$ nicht nur in der ursprünglichen, sondern zugleich auch in der abgeleiteten zweiten Mannigfaltigkeit besässe, kann es, wie wir gesehen, jedenfalls nicht geben; ein solches zu fingiren wäre nicht zulässig, man könnte,

ohne sich in Widersprüche zu verwickeln, es nicht einführen. M. a. W. Man darf die Betrachtungen innerhalb der ersten mit denjenigen innerhalb der zweiten Mannigfaltigkeit nicht vermengen.

Schon das Subsumtionszeichen gibt zwischen Gebiete gesetzt einen ganz anderen Sinn, als wenn es Klassen von Gebieten verknüpft.

Zur Unterscheidung wollen wir die Klassen der ursprünglichen Mannigfaltigkeit — also etwa Punktgebiete unsrer Tafel — wie früher mit kleinen, dagegen die Klassen ihrer derivirten Mannigfaltigkeit, d. i. also Gattungen von Punktgebieten, oder Klassen jener Klassen, mit grossen lateinischen Buchstaben darstellen.

Was dann eine Subsumtion $a \in b$ ausdrückt, haben wir längst erörtert. Auch fahren wir fort, die identische Null dieser ursprünglichen Mannigfaltigkeit mit 0, die ganze mit 1 zu bezeichnen. Es mögen uns $a', a'', a''', \dots$ noch spezielle Punktgebiete oder Klassen der ursprünglichen Mannigfaltigkeit vorstellen.

Wenn nun in der zweiten oder derivirten Mannigfaltigkeit eine Subsumtion

$$A \in B$$

gelten soll, so müssen alle in A zu einer Gattung zusammengefassten Punktgebiete auch vorkommen unter den in B zusammengefassten.

Das Gebiet 0 kann dabei zu jenen gehören oder auch nicht.

Wenn etwa:

$$A = \begin{cases} 0 \\ a \\ a' \end{cases}, \quad B = \begin{cases} 0 \\ a \\ a' \\ a'' \\ a''' \\ 1 \end{cases}$$

gerade die rechts angemarkten Gebiete umfasst, so ist die Subsumtion $A \in B$ beispielsweise erfüllt. Und zwar ist hier $A \subset B$. Hielten wir aber die Bedeutung von A fest, so wäre $A = B$ nur dann zu nennen, wenn auch B nur die drei angeführten Gebiete 0, a , a' enthielte.

Ich verbinde die zu einer Klasse A oder B zusammengefassten Gebiete rechts hier nicht durch Pluszeichen, weil solche als Gebiete-verknüpfende bereits einen abweichenden Sinn erhalten haben, und ihre Anwendung bei B , z. B., bewirken würde, dass wir von den angeführten Gebieten nach Th. 22 $_+$) nur mehr das eine 1 behielten.

Auch in unsrer zweiten Mannigfaltigkeit ist der Fall zulässig, dass die Klassen (Gebietgattungen) A , B als singuläre zu verstehen

sind, nämlich je in ein individuelles Gebiet ausarten. Es mag einmal $A = a$, und vielleicht ebenso $B = b$ je nur ein Gebiet vorstellen.

Im Allgemeinen wird dann nicht mehr $A \subseteq B$ sein. Dass aber trotzdem vielleicht noch $a \subseteq b$ sein kann, vermöchten wir in dieser zweiten Mannigfaltigkeit nun überhaupt nicht auszudrücken — jedenfalls nicht mittelst des bisherigen Subsumtionszeichens.

Hieran wird auch die Möglichkeit ersichtlich, dass AB von ab verschieden; es muss z. B. das erstere Produkt unter den angegebenen Voraussetzungen, sobald nur b mit a nicht gerade zusammenfällt, *verschwinden*, ohne dass doch ab , welches $= a$, gleich 0 zu sein brauchte.

Das angeführte Beispiel, wo etwa $A = a$, $B = b$, $a \subseteq b$ und doch nicht $A \subseteq B$ augenscheinlich ist, lässt erkennen, dass es beim Übergang von Betrachtungen innerhalb der ersten zu solchen innerhalb der zweiten Mannigfaltigkeit nicht einmal erlaubt sein wird, zu beiden Seiten einer Subsumtion *Gleiches für Gleiches zu setzen*, und zwar aus dem Grunde, weil bei Ausführung der Substitution auch das Subsumtionszeichen seine Bedeutung notwendig ändert!

Sollte $A \subseteq B$ sein während $A = a$ und $B = b$ singuläre Klassen von Gebieten, also Einzelgebiete selber vorstellen, so wäre der Fall $A \subset B$ undenkbar, indem ja B dann ausser dem A (welches einerlei mit a ist) noch mindestens ein zweites Gebiet enthalten müsste, im Widerspruch zu der Annahme, dass es auch nur ein Gebiet, b , umfasse. Es bliebe nur die Möglichkeit $A = B$ übrig, und wäre es so nach *dasselbe* Gebiet $a, = b$, das beide Klassen ausschliesslich enthielten. —

Wir hätten nun in der zweiten Mannigfaltigkeit A gleich 0 („gross Null“) zu nennen, wenn A eine leere Klasse ist, welche gar kein Gebiet der ersten Mannigfaltigkeit enthält, also jedenfalls auch deren Nullgebiet (klein) 0 nicht — auch nicht einmal dieses.

Hieraus erhellt, dass in der That die Nullklasse der zweiten Mannigfaltigkeit, 0, eine ganz andere Bedeutung hat, als diejenige 0 der ersten, dass sogar erstere die letztere auch nicht unter sich begreift. Das Nullgebiet der ersten Mannigfaltigkeit ist, als ein „Gebiet“, doch gewiss ein ordentliches, legitimes Individuum der zweiten; *das „Nichts“ in jener ist „Etwas“ in dieser.*

Zu dem absurden Ergebniss $0 = 1$ waren wir aber oben, bei χ), im Grunde nur gelangt, indem wir beide Nullen verwechselten, auch die andre, 0, mit 0 bezeichneten. —

Lag hienach eine Mannigfaltigkeit ursprünglich vor, auf welche die Postulate unsres Kalküls anwendbar waren, so durfte die Bedeutung der 1 schon nicht über die Ableitung oder Derivirte dieser Mannig-

faltigkeit mit erstreckt, und jedenfalls also auch nicht über alles Denkmögliche überhaupt ausgedehnt werden!

Es ist indess auch *gar nicht wünschenswert*, die Bedeutung der 1 in solch' abstrakter Allgemeinheit, wie Boole sie anstrebt, zu fassen.

Jede Untersuchung dreht sich doch nur um gewisse Dinge. Diese werden als eine „reine“ Mannigfaltigkeit sich ansehen lassen, insofern es eben möglich und geboten sein wird, von den Untersuchungen über irgendwelche Klassen dieser Dinge getrennt zu halten alle etwaigen Untersuchungen über die *Klassen der Klassen* von ebendiesen Dingen!

Man strebt, bei den Untersuchungen folgerichtig denkend zuwerke zu gehen. Will man die Schlüsse, die auszuführen sind, sich in der knappsten Form, wie sie allein die algebraische Zeichensprache gewähren kann, zum Bewusstsein bringen, sie nach den Methoden der logischen Theorie kontrolliren, oder auch sogleich von der Technik des Kalküls für die Probleme der Untersuchung Nutzen ziehen, so empfiehlt es sich, und *genügt es*, nur eben jene Dinge, um welche die Untersuchung sich dreht, zu einer umfassendsten Klasse zusammenzufassen, und sie als „die ganze Mannigfaltigkeit“ oder „identische Eins“, als den „Denkbereich“, mit der Ziffer 1 zu bezeichnen.

ω) Zum Schlusse wollen wir noch, obwol es nicht mehr ganz unter die Überschrift dieses Paragraphen gehört, die identischen Operationen und Symbole in Vergleichung ziehen mit den gleichnamigen arithmetischen, mit den sonstigen mathematischen.

Die durchgängige Übereinstimmung ihrer formalen Eigenschaften, welche aufseiten der identischen Operationen nur noch ein kleines Mehr aufweist, rechtfertigte bereits ihre übereinstimmende Benennung und Bezeichnung mit den arithmetischen Operationen, wenigstens für ein selbständiges (mit arithmetischen Untersuchungen nicht vermengtes) Studium des identischen Kalküls, wie es hier dargestellt ist.

Im übrigen aber zeigt ihrer Bedeutung nach die identische Multiplikation *gar keine*, die Addition nur eine *bedingte Verwandtschaft* mit der arithmetischen Operation gleichen Namens. Letzteres insofern:

Ist die identische Summe $a + b$ zweier Gebiete eine „reduzierte“, sodass $ab = 0$ ist, mithin kein Teil des einen Summanden als ein auch im andern versteckter, implicite in diesem tautologisch wiederholt erscheint, so wird die Maasszahl jener Summe $a + b$ auch die arithmetische Summe $a' + b'$ der Maasszahlen a' und b' ihrer Glieder a und b sein. In diesem Falle lässt sich dann also das Pluszeichen ohne weiteres beibehalten, wenn man unter a , b und $a + b$, statt diese Ge-

biete selber, nur ihre Maasszahlen verstehen will, und die identische Addition geht bei solchem Wechsel der Deutung in die arithmetische über, fällt völlig mit ihr zusammen.

Anders, wenn das identische Produkt ab nicht 0 ist, wenn a und b einen Teil ab gemeinhaben. Hier würde, wie leicht zu sehen, das arithmetische Aggregat:

$$a' + b' - (ab)'$$

als die Maasszahl der identischen Summe $a + b$ anzusetzen sein, wenn darin $(ab)'$ diejenige des identischen Produktes ab bedeutet. Dem Umstande, dass in $a' + b'$ der beiden Gliedern gemeinsame Teil $(ab)'$ doppelt in Anrechnung gebracht ist, müsste dann eben durch einmaliges Subtrahiren des letztern nur einfach abgeholfen werden.

Es begreift dieser Ansatz auch den vorhin besprochenen Fall mit unter sich, und ist derselbe also als allgemeingültig anzusehen, indem für $ab = 0$ auch $(ab)' = 0$ sein muss (was aber nicht umgekehrt zu gelten braucht*), nämlich die Maasszahl eines Gebietes welches als identische Null verschwindet, sicher die arithmetische Null sein wird.

Bei gemischten Untersuchungen ist aber, was beachtenswert und vielleicht für den Anfänger überraschend, auch die identische Null, das logische „Nichts“ von dem Zahlindividuum 0 sorgfältig zu unterscheiden. Ein einfaches Beispiel schon vermag dies darzuthun. Das identische Produkt $2 \cdot 3$, z. B., (im Gegensatz zum arithmetischen 2×3 verstanden) ist „nichts“, nämlich der identischen Null gleichzusetzen, weil es Nichts geben kann, was zugleich 2 und 3 wäre. Würde man es aber der arithmetischen Null gleichsetzen, so hiesse das: behaupten, dass das Zahlindividuum 0 einerlei sei mit den Zahlindividuen 2 und 3, was absurd.

Bei der Rechnung mit vieldeutigen arithmetischen Ausdrücken muss demnach nicht nur das identische vom arithmetischen Produkt mittelst konsequenter Anwendung verschiedener Malzeichen, sondern es muss auch die identische Null von der arithmetischen etwa durch kursiven Druck der erstern oder einen über sie gesetzten Punkt, Accent oder dergleichen unterscheidbar gemacht werden. Ebenso würde die identische Eins hier das ganze Zahlengebiet, auf welchem die Untersuchungen sich bewegen, vorzustellen haben und erscheint es über-

*) Das gemeinsame Gebiet, identische Produkt zweier Flächengebiete z. B. kann falls diese etwa aneinander grenzen, sich berühren, aus getrennten Punkten und Linien bestehen, welche zum Flächenmaasse null haben werden, ohne doch ein leeres Gebiet zu sein, ohne auch im logischen Sinne zu verschwinden.

flüssig zu betonen, dass sie von der arithmetischen 1 unterscheidend bezeichnet werden müsse.

Sind a, b lineare oder Flächen- oder Raumgebiete und als solche durch ihre Begrenzung gegeben, so würde es nach den in Herrn Otto Bödicker's „Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen“ etc. (Stuttgart, Spemann 1876, 68 Seiten) entwickelten Methoden nicht schwer fallen, die Maasszahlen $(a+b)'$ und $(ab)'$ ihrer identischen Summe und desgl. Produktes durch Integrale darzustellen, erstreckt über die Gebiete a, b selbst oder ihre Umgrenzungen.

Wenn sonach die Analogie der identischen beiden Grundoperationen mit ihren arithmetischen Namensverwandten keine tiefgehende ist, so tritt dafür eine sehr weitgehende Analogie jener beiden mit gewissen komplizirteren arithmetischen Operationen zutage, die wir nur kurz anführen wollen: die identische *Multiplikation* verhält sich ihrem ganzen Wesen nach durchaus ähnlich, wie die Operation der *Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Divisors* oder Teilers gegebener Zahlen und die identische *Addition* entspricht ebenso der *Aufsuchung ihres kleinsten gemeinschaftlichen Multiplums* oder Vielfachen.

In der That könnte man hinstellen: das *identische Produkt* von Gebieten als das *grösste* denselben *gemeinsame Gebiet*, als das umfassendste von all' den Gebieten, welche ihnen *gemein sind*; desgleichen die *identische Summe* von Gebieten als das *kleinste* von all' den Gebieten, die ein jedes von den gegebenen in sich enthalten, als das mindest umfassende also von denen, die diese alle *gemein haben*.

Die Wahrnehmung dieser auch Herrn Georg Cantor nicht entgangenen Analogie hat in der That Herrn Dedekind veranlasst, in seiner schon erwähnten Abhandlung¹ unser identisches Produkt ab , welches er die „*Gemeinheit*“ von a und b nennt, mit $\mathfrak{G}(a, b)$, unsre von ihm die „*Zusammensetzung*“ genannte identische Summe $a+b$ mit $\mathfrak{M}(a, b)$ darzustellen. Da diese Bezeichnung unstreitig etwas schwerfälliger erscheint, wie die unsrige, so möchte ich, sogar bei logisch-arithmetischen Untersuchungen gemischter Art, unterscheidenden Knüpfungszeichen, z. B. für die identische Addition einem erheblich kleineren Pluszeichen im allgemeinen den Vorzug geben. Eventuell, namentlich für schriftlichen Gebrauch, dürfte es sich in solchen Fällen auch empfehlen gemäss Herrn Peirce's zeitweiliger Übung eines Pluszeichens mit in die Ecke rechts unten gesetztem Komma $+$, als identischen Knüpfungszeichens sich zu bedienen zur Unterscheidung vom einfachen als dem arithmetischen $+$ -Zeichen — wobei dann auch die Summen und Produktzeichen Σ, Π , wenn als identische (nicht arithmetische) zu deuten, mit einem Komma als Apostroph nur zu versehen wären, gleichwie erforderlichenfalls die 0 und 1 — vergl. S. 193 sq.

Fünfte Vorlesung.

§ 10. Die nicht von Negation handelnden Sätze. Reine Gesetze, von Multiplikation und Addition je für sich.

12) Theorem. Für die identischen Operationen gilt das „Kommutationsgesetz“:

$$12_{\times}) \quad ab = ba. \quad | \quad 12_{+}) \quad a + b = b + a.$$

Nach diesem dürfen die beiden

Faktoren eines identischen Produktes | Glieder einer identischen Summe

miteinander *ausgetauscht* werden — ohne dass dies von Einfluss auf die Bedeutung, den Wert des Ausdrucks wäre. Die identische Multiplikation resp. Addition — können wir auch sagen — ist eine „kommutative“ Operation; ihr Ergebniss ist „symmetrisch“ in Bezug auf die (beiden) Operationsglieder.

Beweis des Satzes. Nach den Formeln des Th.

$$6_{\times}) \quad ab \in b, \quad ab \in a \quad | \quad 6_{+}) \quad b \in a + b, \quad a \in a + b$$

von welchen ja nach Anmerkung zu Pr. I, S. 170, eine beliebige zuerst statuiert werden durfte, folgt gemäss Def. (3_x)' resp. (3₊)':

$$ab \in ba \quad | \quad b + a \in a + b$$

und in dieser hiemit allgemein bewiesenen Formel darf man auch *a* und *b* vertauschen und erhält:

$$ba \in ab \quad | \quad a + b \in b + a$$

was mit dem vorigen Ergebniss nach Def. (1) zusammenfliesst zu

$$ab = ba, \quad | \quad a + b = b + a,$$

welches zu beweisen war.

[Das zweite Ergebniss hätte auch, analog wie das erste, direkt aus den vom Th. 6) gelieferten Subsumtionen:

$$ba \in a, \quad ba \in b \quad | \quad a \in b + a, \quad b \in b + a$$

nach Def. (3)' abgeleitet werden können; doch wäre diese Variante des Beweises augenscheinlich etwas weniger einfach gewesen.]

Exempel. *a* = Adelige, *b* = Besitzende.

Die Besitzenden unter den Adeligen sind einerlei mit den Adeligen unter den Besitzenden.

Anderes Beispiel: *a* = weiss, *b* = Pferd. Etwas weisses, was ein Pferd ist, muss ein Pferd sein, welches weiss ist, und vice versa.

Sei *a* = Europäer, *b* = Russe, so gilt: Europäer und Russen sind Russen oder Europäer. Die Europäer nebst den Russen sind die Russen oder Europäer.

Es bedeute *a* das, was einem andern (einer bestimmten Klasse) untergeordnet ist; *b* das, was ebendiesem gleich ist, so gilt: gleich sowie untergeordnet ist untergeordnet oder gleich.

13) Theorem. Für die identischen Operationen gilt auch das „Assoziationsgesetz“:

$$13_{\times}) \quad a(bc) = (ab)c. \quad | \quad 13_{+}) \quad (a+b) + c = a + (b+c).$$

Wenn man in bestimmter Folge, sei es

ein Symbol mit dem Produkt zweier andern Symbole, | ein Symbol zu einer Summe zweier andern Symbole,

sei es

ein Produkt zweier Symbole mit einem dritten (Symbol) multipliziert | eine Summe zweier Symbole zu einem dritten Symbol addirt

so ist es nach dem angegebenen Satze für den Wert des Ergebnisses *gleichgültig*, ob sich der in seinem Ausdruck in die Mitte tretende

Faktor | Term oder Summand

(hier *b*) mit dem ersten (*a*) oder ob er sich mit dem letzten (*c*) der drei genannten Symbole „vergesellschaftet“ oder „assoziiert“, nämlich ob er mit diesem oder mit jenem vermittelt einer Klammer zusammengeschlossen und dadurch zu

einem Teilprodukte | einer Teilsumme

des ganzen Ergebnisses vereinigt wird — unter

Teilprodukt ein solches Produkt | Teilsumme eine solche Summe verstanden,

welches selbst wieder Faktor eines andern Produktes ist. | welche ihrerseits als Term einer andern Summe erscheint.

Es erscheint hienach der Name des „Assoziationsgesetzes“ gerechtfertigt.

Man sieht, wie viel einfacher in Formeln, als in Worten, sich ein solches Gesetz darstellt.

In dem formalen Ausdruck des letzteren treten *Klammern* auf, und ist dies in unserm Lehrgebäude hier wesentlich zum ersten mal

der Fall. Über Zweck, Sinn und Verwendungsweise dieses Elementes der Zeichensprache, welches für die Erzielung knapper Ausdrucksformen so hoch wichtig ist, im Grunde jedoch — zur Not — entbehrt werden könnte, möge auf den Exkurs über Klammern in Anhang 2 verwiesen sein.

Beweis des Theorems. Nach 6_x) resp. 6_+) ist:

$bc \in c$ und $a(bc) \in bc$,
folglich nach II:

$$a(bc) \in c.$$

Ebenso ergibt aus

$bc \in b$ und $a(bc) \in bc$
sich auch:

$$a(bc) \in b.$$

Endlich ist nach 6_x) unmittelbar:

$$a(bc) \in a.$$

Aus dieser letzten und der vorhergehenden Subsumtion folgt nach Def. $(3_x)'$: $a(bc) \in ab$ und hieraus, in Verbindung mit der vorher erwiesenen Subsumtion $[a(bc) \in c]$ folgt ebenso:

$$a(bc) \in (ab)c.$$

Analog zeigt man, dass umgekehrt:

$$(ab)c \in a(bc)$$

ist, womit sich dann die Gleichheit der beiderseitigen Ausdrücke nach Def. (1) bewiesen findet.

In der That ist nach 6_x):

$(ab)c \in ab$, desgl. $ab \in a$
folglich a fortiori:

$$(ab)c \in a.$$

Aus

$(ab)c \in ab$ und $ab \in b$
folgt ebenso:

$$(ab)c \in b.$$

Endlich ist nach 6_x) direkt:

$$(ab)c \in c.$$

$c \in b+c$ und $b+c \in a+(b+c)$
somit nach II:

$$c \in a+(b+c).$$

Ebenso ist:

$b \in b+c$, $b+c \in a+(b+c)$,
somit:

$$b \in a+(b+c).$$

Endlich ist nach 6_+) unmittelbar:

$$a \in a+(b+c).$$

Aus dieser und der vorhergehenden Subsumtion folgt nach $(3_+)'$:

$$a+b \in a+(b+c)$$

und hieraus, in Verbindung mit der zuerst konstatierten Subsumtion $c \in a+(b+c)$ folgt ebenso:

$$(a+b)+c \in a+(b+c).$$

$$a+(b+c) \in (a+b)+c$$

Man hat nämlich nach 6_+):

$a \in a+b$, $a+b \in (a+b)+c$,
folglich

$$a \in (a+b)+c.$$

Ebenso

$b \in a+b$, $a+b \in (a+b)+c$,
woraus:

$$b \in (a+b)+c.$$

Endlich nach 6_+) direkt:

$$c \in (a+b)+c.$$

Aus den zwei letzten Subsumtionen folgt nach $(3_x)'$: $(ab)c \in bc$, und hält man mit dem vorhergehenden Ergebniss $(ab)c \in a$ dies letztere zusammen, so ergibt sich wiederum nach $(3_x)'$

$$(ab)c \in a(bc).$$

Hienach haben wir, kraft $(3_+)'$:

$$b+c \in (a+b)+c,$$

und da oben bereits

$$a \in (a+b)+c$$

gefunden ist, folgt endlich nach $(3_+)'$ weiter:

$$a+(b+c) \in (a+b)+c.$$

q. e. d.

Die vorstehenden Beweise der Assoziationsgesetze bilden meines Erachtens eine der schönsten Leistungen des Herrn Peirce.

Exempel zu dem Satze. Die Gebildeten (a) unter den adeligen Grundbesitzern (bc) sind die gebildeten Adligen (ab) unter den Grundbesitzern (c) .

Gebildete oder auch Adelige $(a+b)$ nebst den Besitzenden (c) sind dieselbe Klasse von Personen, wie Gebildete (a) nebst den Adeligen oder auch Besitzenden $(b+c)$.

Exemplifikationen zu 13_+) sind in der Wortsprache nicht leicht ausdrucksvoll darzustellen, weil in dieser ja Klammern nicht verwendet werden und, wo sie doch der Deutlichkeit wegen erforderlich wären, deren mentale Ergänzung höchstens durch die Betonung nebst geeigneten Pausen, durch den Rythmus der Rede angedeutet zu werden vermag. Im vorliegenden Falle jedoch pflegt die Wortsprache — ohnehin gerechtfertigt durch die Theoreme 13) selbst, vergl. die nachfolgenden Zusätze und Zusatzdefinitionen — bei der additiven Vereinigung oder kollektiven Zusammenfassung von drei oder mehr Klassen dieselben stets unterschiedslos, eventuell durch Konjunktionen wie „und“, „sowie“, „oder“ verknüpft hintereinander aufzuzählen; sie pflegt die Theoreme 13) allgemein dahin zu verwerten, dass sie es sich erspart, sich schenkt, Ausdrucksformen für Unterschiede aufzustellen, die ohnehin belanglos sind.

Zusatz 1) und Zusatzdefinition.

Die konsequente Ausdehnung der vorstehenden *speziellen* Kommutations- und Assoziationsgesetze zu den gleichnamigen *allgemeinen* Sätzen, welche sich auf beliebig viele Operationsglieder beziehen, ist nun geradeso, wie in der Arithmetik, zu leisten.

Es würde in diesen Prozess der Verallgemeinerung, hier wie dort, nur das Th. 16) noch mit hereinzuziehen sein.

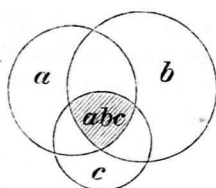
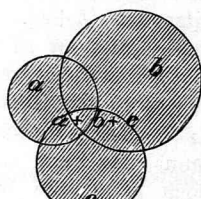
Die verallgemeinerten Sätze lassen sich zu dem Ausspruche zusammenfassen, dass bei der Verknüpfung beliebig vieler Symbole durch lauter Multiplikationen resp. lauter Additionen die Reihenfolge oder „*Ordnung*“ und die „*Gruppierung*“ oder Zusammenfassung dieser Operationsglieder *gleichgültig* ist, insbesondere also auch Klammern nach Belieben gesetzt oder unterdrückt werden dürfen.

Auf diese Sätze ist endlich auch die Begriffserklärung
 eines Produktes | einer Summe
 von beliebig vielen Faktoren | Gliedern

genau wie in der allgemeinen Arithmetik zu gründen.

Die Ausführung dieses Programmes kann nur eine Wiederholung desjenigen sein, was manchen Lesern aus den Werken von wissenschaftlicher Tendenz über letztere Disziplin bereits bekannt ist. Zudem wird durch dieselbe in logischer Hinsicht nichts Wesentliches hinzugefügt, und sei sie darum ebenfalls in den Anhang verwiesen (Anhang 3).

Es lässt sich nun auch ein Produkt, eine Summe von drei oder mehr Gebieten wieder als ein solches zur Anschauung bringen, wie es für drei Operationsglieder die Figuren zeigen:

Fig. 11_x.Fig. 11₊.

Man nehme sich die Mühe, an diesen Figuren die Gültigkeit des Assoziationsgesetzes 13) wirklich nachzusehen, indem man

einmal die Zweieckfläche, das Bilineum ab mit der Kreisfläche c , das andere mal die Kreisfläche a mit der Zweieckfläche bc vor dem geistigen Auge zum Schnitt bringt.

einmal die (ebenfalls von zwei Kreisbogen begrenzte) hier in Gestalt eines liegenden Achters sich darstellende Fläche $a+b$ mit dem Kreis c , das andre mal den Kreis a mit der Achterfläche $b+c$ zu einem Gebiet vereinigt.

Beidemale erhält man in der That dieselbe schraffierte Figur als die Bedeutung von

abc

$a+b+c$.

Zusatz 2), auch gehörig zur Def. (3).

Die beiden Teile (3)' und (3)'' der Def. (3) lassen sich nunmehr leicht von zweien auf beliebig viele Subsumtionen ausdehnen, nämlich:

$$(3_x)''' \left\{ \begin{array}{l} \text{Wenn zugleich} \\ x \in a, x \in b, x \in c, \dots \\ \text{ist, so muss auch} \\ x \in abc \dots \\ \text{sein.} \end{array} \right. \quad \left| \quad (3_+)''' \left\{ \begin{array}{l} \text{Wenn zugleich} \\ a \in x, b \in x, c \in x, \dots \\ \text{ist, so muss auch} \\ a+b+c+\dots \in x \\ \text{sein.} \end{array} \right.$$

Und umgekehrt:

$$(3_x)'''' \left\{ \begin{array}{l} \text{Wenn} \\ x \in abc \dots \\ \text{ist, so muss auch sein:} \\ x \in a, x \in b, x \in c, \dots \end{array} \right. \quad \left| \quad (3_+)'''' \left\{ \begin{array}{l} \text{Wenn} \\ a+b+c+\dots \in x \\ \text{ist, so muss auch sein:} \\ a \in x, b \in x, c \in x, \dots \end{array} \right.$$

Der Beweis ist naheliegend, nämlich z. B. linkerhand so zu leisten.

Ad (3_x)'''. Aus $x \in a$ nebst $x \in b$ folgt nach (3_x)', dass $x \in ab$; hieraus aber in Verbindung mit $x \in c$ folgt abermals nach (3_x)', dass $x \in (ab)c$, oder, weil die Klammer weggelassen werden darf, dass $x \in abc$. Hieraus dann und aus der Voraussetzung $x \in d$ folgt wieder nach (3_x)', dass $x \in (abc)d$ sein muss, wo nun abermals die Klammer wegzulassen ist, u. s. w.

Ad (3_x)'''' kann man in der Voraussetzung auch unter Anbringung einer Klammer die rechte Seite als ein Produkt von nur zwei Faktoren schreiben, sodass sie sich darstellt als: $x \in a(bcd \dots)$. Hieraus folgt aber nach (3_x)'', dass $x \in a$, sowie $x \in bcd \dots$ sein muss. Letzteres kann wieder geschrieben werden: $x \in b(cd \dots)$ und zerfällt nach (3_x)'' abermals in $x \in b$ nebst $x \in cd \dots$. Indem man so weiterfährt, gewinnt man fortschreitend die verschiedenen Subsumtionen, welche die Behauptung ausmachen. —

Exempel zum Vorstehenden haben wir schon in § 8 unter 1) gebracht.

Es könnten vorstehende Sätze auch als selbständige Definition von Produkt und Summe aus beliebig vielen Operationsgliedern (Faktoren resp. Summanden) hingestellt werden, während im gegenwärtigen Lehrgang wir vorgezogen haben, diese Begriffe rekurrierend auf diejenigen der „binären“ (d. h. immer nur zwei Symbole auf einmal verknüpfenden) Multiplikation und Addition zurückzuführen.

14) Theoreme. („Tautologiegesetze“) Allgemein ist:

$$14_x) \quad aa = a. \quad | \quad 14_+) \quad a+a = a.$$

Beweis. Nach Th. 6_x) resp. 6₊), wenn darin a für b genommen wird, ist einerseits:

$$aa \in a. \quad | \quad a \in a+a.$$

Andrerseits treffen die Voraussetzungen der Def. (3) nach I zu, wenn unter c und b dort ebenfalls a verstanden wird, und ist darnach auch:

$$a \in aa, \quad | \quad a + a \in a,$$

sodass nach Def. (1) nun unser Lehrsatz bewiesen erscheint.

Während die vorhergehenden Theoreme Eigenschaften ausdrückten, welche den arithmetischen Operationen ganz ebenso wie den identischen zukommen, ist dies mit den Theoremen 14) nicht der Fall. Wir mögen letztere deshalb als die *spezifischen* Gesetze des identischen (sowie auch des logischen) Kalküls hinstellen.

In der Arithmetik würde Gleichung 14₊) nur für den Wert 0, Gleichung 14_x) nur für die Werte 0 und 1 von a erfüllt sein; ausserdem könnte man beide Gleichungen noch für $a = \infty$ in Anspruch nehmen, welches letzteres Symbol aber nicht zu den Zahlen gehört.

In Worten lassen sich die beiden Sätze wie folgt fassen:

Identische	
Multiplikation	Addition
eines Gebietes	
mit sich selbst	zu sich selbst

lässt dasselbe unverändert — doch ist der Formelausdruck als der übersichtlichere dem verbalen vorzuziehen.

Die Anschauung lässt beide Sätze als ganz selbstverständlich erscheinen. Das Gebiet welches a mit sich selbst gemein hat | zu welchem a sich selbst ergänzt ist eben a selber. Entsprechend für Klassen:

Ein Mensch, welcher ein Mensch ist, ist ein Mensch, und umgekehrt darf man auch sagen: ein Mensch ist ein Mensch *und* ein Mensch, ist ein Mensch, welcher ein Mensch ist. Was Gold *oder auch* Gold ist, ist eben Gold — sowie umgekehrt.

Freilich ist die Bemerkung am Platze, dass man durch solche Urteile sich einer unnötigen Wiederholung, einer „*Tautologie*“, eines „*Pleonasmus*“ schuldig mache. Es wird auch in der That kaum jemals einem Vernünftigen einfallen solchergestalt in unverhüllter Form, sozusagen nackt zu sagen: „die Pferde, welche Pferde sind“, „die Neger-Mohren-Neger“ und ebensowenig „die Menschen und die Menschen und die Menschen“ oder dergleichen.

In verhüllter Form dagegen — *implicite* — wird solches, wie sich zeigen lässt, in den Wissenschaften sowol wie im gemeinen Leben, ungemein häufig gethan. Ein paar Beispiele werden genügen, dies zum Bewusstsein zu bringen.

Zum Zwecke einer zahlentheoretischen Untersuchung mögen wir etwa aus der Mannigfaltigkeit der positiven ganzen Zahlen diejenigen hervor-

heben, „welche nur durch 1 und durch sich selber teilbar sind“. Die so charakterisirte Klasse wird dann bestehen aus den *Primzahlen* (d. i. den Zahlen die *zwei* Teiler haben) und aus der bekanntlich *nicht* zu diesen gehörigen *Eins* (die ja nur *einen* Teiler hat). Für letztere aber ist es oben doppelt gesagt, dass sie durch 1 teilbar, denn bei ihr heisst eben „durch sich selber“ ebenfalls „durch eins“ teilbar. Von ihr sagten wir also in versteckter Form aus, dass sie „durch 1 und durch 1“ teilbar sei — eine *ausserhalb des Zusammenhanges* jedenfalls überflüssige Wiederholung, die aber innerhalb des Zusammenhanges ganz unerlässlich ist, um die verbale Charakterisirung der Klasse so kurz wie oben zu gestalten.

Verfügt man bereits über den Namen „Primzahlen“, sind diese schon eingeführt, ist ihr Begriff bereits erklärt, so kann man freilich die hervorzuhebende Klasse von Zahlen ungefähr ebenso kurz bezeichnen als die der „Primzahlen nebst der Eins“; jedoch tritt hier erstlich der Gesichtspunkt, unter dem man die Zahlen hervorheben will, nicht so deutlich zutage, und zweitens mochte ja auch die ganze Untersuchung der Einführung des Primzahlbegriffs *vorangegangen* sein.

Sprechen wir einmal von „den Besitzenden und den Adeligen“, so sind die besitzenden Adligen augenscheinlich doppelt aufgeführt, nämlich einerseits unter den Besitzenden, dann nochmals unter den Adeligen. Die Beschreibung der Klasse fällt aber jedenfalls so einfacher aus, als wenn man diesen Umstand vermeiden wollte.

In Bezug auf weitere Beispiele möge noch auf die Betrachtungen unter § 18, $\alpha \dots \delta$) verwiesen sein.

Was nun aber (beim Beschreiben, Charakterisiren von Klassen) in verhüllter Gestalt *implicite*, ganz allgemeine Praxis ist, *muss im System der Wissenschaft auch unverhüllt, ausdrücklich, explicite eine Stelle finden*.

Zusatz 1 zu Th. 14). Die Ausdehnung dieser spezifischen Gesetze des identischen Kalküls auf beliebig viele unter sich gleiche Operationsglieder ist naheliegend. Wir haben hier auch als allgemeingültige Formeln:

$$aaa \dots = a. \quad | \quad a + a + a + \dots = a.$$

Behufs Beweises hätte man — unter Vorausbeziehung auf Th. 16) — z. B.:

$$aaa = (aa) a = aa = a,$$

sodann

$$aaaa = (aaa) a = aa = a,$$

u. s. w.

Die erste lässt erkennen, dass eine Operation des „*Potenzirens*“ im identischen Kalkül *nicht* vorkommt. Die „*Potenzexponenten*“ der Arithmetik bleiben hier als *obere Indices* für uns verfügbar, und werden wir speziell unter a^1 hier im allgemeinen nicht a selber, sondern irgend ein zweites von a vielleicht verschiedenes Gebiet verstehen; *ebenso wird uns*

$$a, a^0, a^1, a^2, a^3, \dots$$

weiter nichts als eine Reihe von einander vielleicht durchweg verschiedener Gebiete oder Klassen vorstellen.

Die zweite Formel zeigt, dass der Zusammenhang, wie er zwischen Addition und Multiplikation in der Arithmetik besteht — allerdings nur für den Fall eines positiven ganzzahligen Multiplikators, ein Zusammenhang, der aber gerade die Multiplikation zur Operation der zweiten Stufe dort der Addition gegenüber stempelt — hier im identischen Kalkül kein Analogon hat. Das Fehlen solchen Analogons zu der gedachten Gleichung der Arithmetik:

$$\frac{a}{1} + \frac{a}{2} + \dots + \frac{a}{n} = a \times n$$

thut unsrer Bemerkung keinen Eintrag, dass die identischen Operationen sämtliche formalen Eigenschaften der gleichnamigen arithmetischen besäßen. Denn eben weil diese Gleichung nicht allgemein, nicht im komplexen Zahlengebiete für ein ganz beliebiges n Sinn hat oder gültig ist, gehört sie nicht zu den „formalen“ Eigenschaften — im vollen Sinne dieses Wortes.

Während so von den wirklich formalen Eigenschaften der beiden direkten Operationen der arithmetischen vier Spezies im identischen Kalkül in der That keine fehlt, sehen wir hier noch die spezifischen Gesetze 14) als weitere Eigenschaften hinzutreten, und zu diesen werden ferner noch — im Grunde als eine Folge derselben — die beiden Theoreme 23) kommen. Wir müssen demnach die identischen Operationen der Multiplikation und Addition den arithmetischen gegenüber als die an formalen Eigenschaften *reicheren* hinstellen.

Zusatz 2 zu Th. 14). Wenn nun überhaupt in einem Produkte, einer Summe, Faktoren resp. Glieder *wiederholt* auftreten, sei es auch nicht durchweg als successive oder einander benachbarte, sondern vielleicht getrennt durch noch andre Operationsglieder, so wird man praktisch von den Theoremen 14) Gebrauch machen im Sinne einer Vereinfachung dieser Ausdrücke, indem man von jeder Sorte Faktoren resp. Summanden immer nur *einen* beibehält (etwa den ersten), die übrigen ihm identisch gleichen aber fallen lässt. So wird man z. B. für

$$abcaabdacdc \quad | \quad a+b+c+a+a+b+d+a+c+d+c$$

in Hinkunft kürzer sagen

$$abcd. \quad | \quad a+b+c+d.$$

Man kann nämlich wegen der Kommutativität der Operationen die Operationsglieder zunächst so umordnen, dass die übereinstimmenden zusammenkommen, alsdann kann man die Gruppen der letztern wegen der Assoziativität jener Operationen jeweils zu einem einzigen Operationsgliede zusammenschließen, und endlich sie nach Th. 16) — auf

das wir vorverweisen müssen — ersetzen durch den einfacheren Ausdruck, dem sie nach Th. 14) äquivalent sind. So wäre vorstehend:

$$(aaaa)(bb)(ccc)(dd) \quad | \quad (a+a+a+a)+(b+b)+(c+c+c)+(d+d)$$

als eine Zwischenstufe der Rechnung zu denken gewesen.

Den hier gegebenen Wink darf der Rechner nie aus den Augen verlieren.

Analog wird man für: „die leichtgläubigen, guten, leichtgläubigen Kinder“ kürzer bloß sagen: „die leichtgläubigen guten Kinder“, und für: „Mohammedaner und Briten sowie Russen und Mohammedaner“ bloß sagen „Mohammedaner, Briten und Russen“. —

Für das Th. 14_x) gebrauchte Boole⁴ den mit Recht allerwärts als ungeeignet qualifizierten Namen des „law of duality“, wofür Jevons¹ den „law of simplicity“ vorschlägt. Indem Boole eine Addition nur für einander gegenseitig ausschliessende Summanden zuließ, konnte er auch nicht das Th. 14₊) aufstellen oder zugeben. Von Neueren pflichtet ihm hierin nur Herr Venn¹) noch bei, auf dessen Einwände wir in § 18, α) .. δ) ausführlichst eingehen werden.

Das Th. 14₊) ist zuerst von Jevons¹) ausgesprochen, welchem auch bezüglich Gebrauchs der hier adoptirten Addition die Priorität zukommen dürfte, soweit sie nicht etwa von De Morgan anticipirt erscheint. Th. 14₊) nennt Jevons das „law of unity“, indem er darauf hinweist, dass die Nichtbeachtung des Satzes beim Zählen zu falschen Ergebnissen des Zählens führe. Eine schon einmal gezählte Einheit darf nicht wiederholt gezählt werden. Sind $M', M'', M''', \dots$ individuell verschiedene Münzen, z. B. Markstücke, so gäbe eine Zählung, wie $M' + M'' + M''' + M'''' + \dots$ ein falsches Resultat; es muss beachtet werden, dass $M' + M'$ weiter nichts ist, als M' etc.

Am geeignetsten würde mir die Bezeichnung der Theoreme 14) als „Tautologiegetze“ (der identischen Multiplikation resp. Addition) erscheinen, indem sie ausdrücken, dass es belanglos ist, das nämliche, was man bereits genannt hat, nochmals zu nennen, mag es mit simultanen oder unter alternativen Termen aufgeführt sein.

15_x) Theorem.

Wenn $a \in b$ so ist $ac \in bc$.

Beweis. Nach 6_x) ist $ac \in a$, wegen $a \in b$ also, nach II: $ac \in b$. Ebenso ist nach 6_x): $ac \in c$. Aus den beiden letzten Subsumtionen folgt aber nach (3_x)':

$$ac \in bc.$$

In einer Subsumtion darf man also beiderseits mit demselben Symbol multiplizieren | dasselbe Symbol addiren

15₊) Theorem.

Wenn $a \in b$ so ist $a+c \in b+c$.

Beweis. Nach 6₊) ist $b \in b+c$, nach II also um so mehr: $a \in b+c$, und da ohnehin $c \in b+c$ nach 6₊) ist, so haben wir nach Def. (3₊)' auch:

$$a+c \in b+c.$$

und muss man wiederum eine gültige Subsumtion hierdurch erhalten.
An der Figur

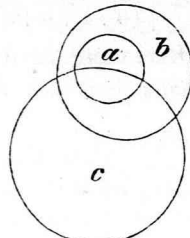
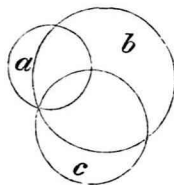
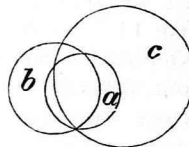


Fig. 12.

lassen beide Sätze sich durch Anschauung kontrolliren. Dass aber diese Sätze *nicht umgekehrt* werden dürfen, nämlich, dass aus $ac \subseteq bc$ resp. $a + c \subseteq b + c$ nicht $a \subseteq b$ folgen kann, offenbaren die Figuren:

Fig. 13_x.Fig. 13₊.

bei denen für die Kreise a, b, c die angegebene Voraussetzung sich je als erfüllt, die fragliche Folgerung aber sich als nicht erfüllt zeigt.

Exempel:

Rappen sind Pferde, ergo: englische Rappen sind englische Pferde.
Blau ist farbig, ergo: blaue Salze sind farbige Salze.

Schweden sind Europäer, ergo:
Schweden und Russen sind Europäer oder Russen.

Dagegen:

Die europäischen Vulkane*) sind italienische Vulkane. Gleichwol ist „europäisch“ nicht notwendig „italienisch“.

Russen und Asiaten sind Europäer oder Asiaten, ohne dass doch Russen auch Europäer sein müssten.

Anmerkung. In der Wortsprache kann man durch unbedachte Anwendung des Th. 15_x) in Fehler kommen; es ist daselbst auf scheinbare Ausnahmen des Satzes Rücksicht zu nehmen. Ein paar Beispiele werden dies am schnellsten deutlich machen.

*) Sofern Island und der vulkanische Teil des Kaukasus nicht zu Europa gerechnet und von erloschenen Vulkanen in der Eifel, im griechischen Archipel etc. abgesehen wird.

Ein Pistolenschütze ist ein Mensch. Darum muss aber ein vortrefflicher Schütze noch nicht ein vortrefflicher Mensch, der beste Schütze nicht der beste Mensch sein! Ebenso braucht eine grosse Fliege kein grosses Tier, ein kleiner Elephant kein kleines Tier zu sein, eine grosse Hütte kein grosses Gebäude — vergl. Jevons⁶. Pfennige sind Geld, aber viele Pfennige können doch wenig Geld sein. Etc.

Die Ausnahme ist darin begründet, dass hier das Adjektiv c , welches determinirend zum Subjekt und Prädikat tritt, in beiden einen *verschiedenen* Sinn erhält zufolge des Umstandes, dass es als ein relatives verstanden, relativ genommen wird, nämlich eine Beziehung, ein Verhältniss des Substantivs zu andern *seinesgleichen* auszudrücken bestimmt ist. Der Begriff „vortrefflich unter den Schützen“ hat einen andern Inhalt, als der „vortrefflich unter den Menschen, vortrefflich als Mensch“ und dementsprechend ist auch der Umfang beider Klassen nicht derselbe.

Das Th. 15_x) gilt striete nur dann, wenn die Klasse c im Subjekt und Prädikat *in absolut demselben Sinne* verstanden wird.

Dementsprechend würde auch der Schluss: Alles Metall ist Substanz, folglich muss gelten: Das schwerste Metall (Iridium) ist die schwerste Substanz — dieser Schluss würde formell falsch, ein *Fehlschluss* sein, obwohl hier die Prämisse sowol als die Konklusion materiell richtig ist.

Eine ähnliche Bemerkung: dass der Kontrast von Individuen einer Subjektklasse zu ihresgleichen unwillkürlich mit in's Gewicht fällt, trifft nicht selten schon beim Ertheilen solcher Prädikate zu, die sich als absolut bestimmte Attribute darzustellen scheinen. So werden wir vielleicht die gleiche Farbe, die falls von Schafen die Rede ist, noch „weiss“ genannt wird, bei einer chemischen Substanz als grau oder gelblich bezeichnen. Als den Umfang des Begriffes „weiss“ in absolutem Sinne können wir immerhin bezeichnen: die Gesamtheit derjenigen Dinge, welche wir (als solche ihrer Kategorie) eben „weiss“ nennen würden, und bleibt dies unbedenklich, es erscheint der Umfang nämlich als völlig bestimmt, solange nicht Objekte bekannt sind als unter verschiedene Kategorien zugleich fallende, unter deren einer sie als weiss, unter deren andrer sie als nicht-weiss zu bezeichnen wären. — Dass wir nur mit wohldefinierten Klassen zu thun hätten, wurde bereits als eine nicht überall wirklich erfüllte, ideale Voraussetzung der Logik hingestellt.

16_x) Theorem.

Wenn $a = b$, so ist $ac = bc$.

16₊) Theorem.

Wenn $a = b$, so ist $a + c = b + c$.

Man darf also auch beide Seiten einer Gleichung mit demselben Symbol multiplizieren, sowie um Dasselbe vermehren.

Beweis. Die Annahme $a = b$ zerfällt nach Def. (1) in die beiden Subsumtionen $a \subseteq b$ und $b \subseteq a$. Aus der ersten folgt nach Th.

15_x) $ac \subseteq bc$

15₊) $a + c \subseteq b + c$

und ebenso aus der zweiten:

$bc \subseteq ac$

$b + c \subseteq a + c$

womit nach Def. (1) die Behauptung erwiesen ist.

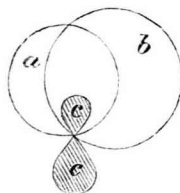
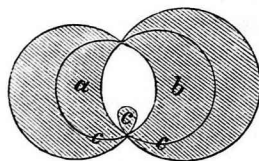
Anmerkung 1. Durch Anwendung des Kommutationsgesetzes 12) auf die Behauptung in den beiden Theoremen 15) und 16) kann man diesen noch verschiedene Formen geben. Z. B. dem Th. 15_x) noch die Formen: Wenn $a \in b$, so ist auch $ac \in cb$, desgleichen $ca \in bc$, desgl. endlich $ca \in cb$. Doch werden wir Sätze, die sich so unwesentlich von den aufgestellten unterscheiden, künftig nicht mehr mit anführen, vielmehr ohne weiteres als zugleich mit jenen gegeben betrachten.

Anmerkung 2. In der Arithmetik dürfen die beiden Sätze bekanntlich auch umgekehrt werden. Man darf daselbst einen übereinstimmenden Faktor der beiden Seiten einer Gleichung, desgleichen einen übereinstimmenden Summanden derselben ohne weiteres „streichen“, den Faktor allerdings nur, wenn er von 0 verschieden ist. Es kommt dies hinaus auf die Division der Gleichung durch den gedachten Faktor resp. auf die beiderseitige Subtraktion des gedachten Summanden, und beruht die Zulässigkeit des Verfahrens auf der Eindeutigkeit der beiden inversen Operationen, nämlich der arithmetischen Division (mit Ausnahme derer durch 0) und der arithmetischen Subtraktion. Da wie schon erwähnt die inversen Operationen des identischen Kalküls mit den gleichnamigen arithmetischen ausser ihrem Gegensatz zu den direkten Operationen nur wenig gemein haben, so lässt sich schon erwarten, dass hier der Rückschluss von

$$ac = bc \quad \text{oder} \quad a + c = b + c$$

auf $a = b$ nicht zulässig sein wird.

Für Gebiete thun dies in der That die Figuren kund, in denen a und b die Kreisflächen, dagegen c das schraffierte Gebiet vorstellt:

Fig. 14_x.Fig. 14₊.

Ebenso offenbaren für Klassen es Beispiele wie folgende:

Die gleichseitigen Dreiecke sind die gleichwinkligen Dreiecke, aber es ist nicht: gleichseitig einerlei mit gleichwinklig — der Rhombus z. B. ersteres ohne das letztere. Die schwerste Substanz ist das schwerste*) Metall, doch ist nicht: Substanz = Metall.

Die Primzahlen nebst den ungeraden Zahlen ist dasselbe wie die Zahl 2 nebst den ungeraden Zahlen. Gleichwol ist die Klasse der Primzahlen nicht identisch mit der Zahl 2, sondern greift noch weit über dieses allerdings in ihr enthaltene Zahlindividuum hinaus. U. a. m.

*) Auch wenn man hier im Prädikat „schwerste“ genau so wie im Subjekte versteht als „schwerer wie die übrigen Substanzen“ und nicht bloß als „schwerer wie die übrigen Metalle“ bleibt dies noch richtig. Vergl. die Anm. zu Th. 15).

Wegen der von der Arithmetik her geläufigen Übung ist es hier am Platze vor dem erwähnten Rückschluss ausdrücklich zu warnen:

In Gleichungen (sowie Subsumtionen) des identischen Kalküls ist es nicht gestattet, übereinstimmende Faktoren oder auch Terme der beiden Seiten zu „streichen“.

17_x) Theorem.

17₊) Theorem.

Wenn $a \in b$ und $a' \in b'$, so ist auch:

$$aa' \in bb'.$$

$$a + a' \in b + b'.$$

Beweis. Nach 15_x*) und 12_x)

Beweis. Nach 15₊) und 12₊)

folgt aus unsern Annahmen:

$$aa' \in ba', \quad ba' \in bb',$$

$$a + a' \in b + a', \quad b + a' \in b + b',$$

woraus die Behauptung a fortiori (d. i. nach II) zu schliessen ist.

18_x) Theorem.

18₊) Theorem.

Wenn $a \in b$ und $a' = b'$ ist, so muss sein:

$$aa' \in bb'.$$

$$a + a' \in b + b'.$$

Beweis aus Th. 17_x) resp. 17₊), da die Annahme $a' = b'$ auch $a' \in b'$ nach Def. (1) in sich schliesst.

19_x) Theorem.

19₊) Theorem.

Wenn $a = b$ und $a' = b'$, so ist auch:

$$aa' \in bb'.$$

$$a + a' = b + b'.$$

Beweis. Nach Def. (1) schliessen die Voraussetzungen in sich, dass sowol $a \in b$, $a' \in b'$, als auch $b \in a$, $b' \in a'$ ist. Aus erstem folgt nach 17_x) resp. 17₊):

$$aa' \in bb'$$

$$a + a' \in b + b',$$

aus letzterem ebenso:

$$bb' \in aa',$$

$$b + b' \in a + a',$$

womit die Behauptung nach Def. (1) erwiesen ist. In Worten kann man sagen:

Gleiches mit Gleichem multipliziert | Gleiches zu Gleichem addirt gibt
gibt Gleiches. | Gleiches.

Zusatz 1. Die Ausdehnung der Sätze 17) bis 19) auf beliebig viele Subsumtionen oder Gleichungen ist naheliegend.

Um die allgemeinsten Sätze, welche sich auf diesem Wege ge-

*) Nämlich: indem man in der ersten Subsumtion $a \in b$ beiderseits mit a' nachmultipliziert, in der zweiten $a' \in b'$ beiderseits mit b vormultipliziert.

winnen lassen, in Worte zu fassen, müssen wir aber ein paar Bemerkungen vorausschicken.

„*Gleichstimmig*“ nennen wir solche Subsumtionen, in deren Subsumtionszeichen der Bogen sich nach derselben Seite hin öffnet; dies sind z. B. alle bisherigen Subsumtionen, in welchen er es nach rechts that. Dagegen nennen wir „*ungleichstimmig*“ zwei Subsumtionen, in denen der Bogen nach verschiedenen Seiten schaut, deren eine also eine eventuelle *Unterordnung*, deren andre eine eventuelle *Überordnung* ausdrückt, wenn beide von links nach rechts gelesen werden.

In der Arithmetik herrscht der Gebrauch, die Anwendung der dort ebenfalls geltenden Theoreme 19) sowie schon 16) als eine Multiplikation resp. Addition der die Voraussetzung bildenden (beiden) Gleichungen schlechtweg zu bezeichnen. Dieses Verfahren ist schon in der Arithmetik nicht ganz korrekt, weil man ja in dieser Disziplin faktisch immer nur *Zahlen*, also niemals *Gleichungen* durch Rechnung verknüpft, und aus diesem Grunde haben auch schon einzelne Lehrer dagegen geeifert.

Die gedachte Ausdrucksweise ist jedoch in der Arithmetik entschuldbar und unverfänglich ja zweckmässig, indem sie in dieser Disziplin durchaus nicht missverstanden werden kann und einen in der Mathematik unbeschreiblich oft auszuführenden Prozess kurz und charakteristisch andeutet. Sie ist daselbst auch, wie gesagt, ganz allgemein üblich, und kein Mathematiker wird, wenn etwa die Gleichungen $a = b$, $a' = b'$, $a'' = b''$ vorausgeschickt sind, Bedenken tragen, zu sagen: *Multiplizieren wir diese Gleichungen* miteinander, so entsteht $aa'a'' = bb'b''$, *summieren wir sie*, so kommt $a + a' + a'' = b + b' + b''$; desgl. zu sagen: *Multiplizieren wir die erste Gleichung mit c*, so erhalten wir $ac = bc$, etc.

Diesen Gebrauch dürfen wir nun aber in den identischen Kalkül nicht unmodifiziert herübernehmen. Insoweit es sich nur um den Gebietekalkül handelt, wäre dies allenfalls noch angängig. Dazu werden wir aber im Aussagenkalkül zu lernen haben, wie Aussagen, Urteile, Behauptungen überhaupt, insbesondere also auch Subsumtionen und Gleichungen durch Multiplikation sowie Addition zu verknüpfen sind, und zwar in einem von dem oben besprochenen wesentlich verschiedenen, nämlich in dem richtigen, korrekten Sinne.

Solche Verknüpfung von Aussagen wird zu den häufigsten in unsrer Theorie vorzunehmenden Prozessen gehören. Da wird denn z. B. eine Gleichung $a = b$ wirklich zu multiplizieren sein mit einer Aussage c , und das Produkt $(a = b) \cdot c$ wird etwas anderes, nämlich *mehr* besagen, als wie die Gleichung $ac = bc$. Ebenso wird uns das Produkt zweier Gleichungen

chungen $(a = b) \cdot (a' = b')$ bedeutend mehr ausdrücken als dass bloß die Gleichung gelte $aa' = bb'$, u. s. w. — worüber des Näheren der Aussagenkalkül selbst zu vergleichen, insbesondere § 33, §).

Es ist deshalb unerlässlich, die mehrerlei Prozesse auch unterscheidend zu benennen. Und dieses geschieht unsres Erachtens am einfachsten und besten, wenn man behufs Beschreibung der früheren in unsern Theoremen als zulässig hingestellten Schlüsse dem Multiplizieren resp. Addiren ein geeignetes Umstandswort, Adverb zugesellt. Das Adverb muss, wie sich zeigt, ein anderes sein, bei den Schlüssen der Theoreme 15) und 16) als bei denen von 17) bis 19). Für jene ist schon „*beiderseits*“ gebräuchlich, für diese schlagen wir „*überschiebend*“ vor (nicht unpassend erschiene auch „*superponierend*“).

Es soll gesagt werden: Subsumtionen, Gleichungen (später überhaupt „*Propositionen*“ — zunächst von einerlei Art) werden durch eine Operation „*überschiebend*“ verknüpft, wenn man aus ihnen eine neue Subsumtion resp. Gleichung (Proposition derselben Art) dadurch ableitet, dass man sowol ihre linken Seiten als auch ihre rechten Seiten durch die gedachte Operation verknüpft.

Darnach dürfen wir nun erstlich die Theoreme 15) und 16) auch (nur wenig abweichend von der früheren Fassung) wie folgt aussprechen: Subsumtionen sowol als Gleichungen dürfen *beiderseits* mit demselben Symbol multipliziert, resp. *beiderseits* um dasselbe Symbol vermehrt werden; es darf *beiderseits* dasselbe Symbol zu ihnen addirt werden; es darf auch ein Symbol mit einer Subsumtion oder Gleichung *beiderseitig* multipliziert, es darf zu jenem diese *beiderseitig* addirt werden. Und zweitens:

Es liefern uns die Theoreme 17) bis incl. 19) darnach den allgemeinsten Satz:

In beliebiger Menge vorhandene sei es gleichstimmige Subsumtionen oder auch Gleichungen dürfen überschiebend mit einander multipliziert, überschiebend zu einander addirt werden, und zwar ist das Ergebniss eine Gleichung nur, wenn unter den verknüpften Propositionen sich keine Subsumtion befindet, dagegen wieder eine mit den gegebenen gleichstimmige Subsumtion im andern Falle, d. i. wenn mindestens eine Subsumtion sich unter den verknüpften Propositionen vorfindet.

Würde man aber eine Gleichung $a = b$ mit einer andern $a' = b'$ *beiderseits* multiplizieren, so erhielte man eine Aussage

$$a \cdot (a' = b') = b \cdot (a' = b')$$

die sich ebenfalls als eine im Aussagenkalkül gültige nachweisen lassen wird, und daselbst einen Sinn hat, der weder sich deckt mit dem des Ergebnisses der überschiebenden Multiplikation beider Gleichungen: $a \cdot a' = b \cdot b'$, noch mit dem des Ergebnisses ihrer Multiplikation (schlechtweg):

$$(a = b) \cdot (a' = b').$$

Man ersieht hieraus, dass auch die Umstandswörter „*beiderseits*“ und „*überschiebend*“ nicht verwechselt werden dürfen, nicht durch ein einziges Um-

standswort ersetzt werden können, und dass in der That in unserer Theorie es geboten erscheint, in beregter Hinsicht mehr als in der Mathematik auf korrekten Ausdruck zu halten!

Notabene: Multipliziert man die Gleichung $a' = b'$ beiderseits mit $a = b$, so entsteht auch etwas anderes, wie wenn man die Gleichung $a = b$ beiderseits mit $a' = b'$ multiplizierte. Vergl. § 33, §) und o).

Zusatz 2. Kombinierte Anwendung der Theoreme 19_x) und 19₊) liefert den Satz, dass es in jedem Ausdruck, welcher nur durch die Operationen der identischen Multiplikation und Addition aufgebaut erscheint, *gestattet ist, Gleiches durch Gleiches zu ersetzen*. Sicherlich wird solche Ersetzung ohne Einfluss auf den Wert des Ausdrucks bleiben, wenngleich die Form desselben dadurch verändert werden mag.

Exempel. Ist $b + c = a$, so ist auch

$$a(b + c) + d + (b + c)c = aa + d + ac = a + ac + d = a + d.$$

Wie Venn¹ p. 146 und anderwärts bemerkt ist das der linkseitigen Kolumne von Sätzen 15) . . 19) zugrundeliegende Th. 15_x) bereits von Leibniz gegeben (Specimen demonstrandi, Erdmann, p. 99), der auch schon die Determination durch Nebeneinanderstellen der Symbole nach Art der Faktoren eines Produktes ausdrückt.

Die Theoreme des gegenwärtigen Paragraphen sind von so ausserordentlich häufiger Anwendung, dass es zu umständlich wäre, sie jedesmal zu citiren. Dieselben müssen in succum et sanguinem, in Fleisch und Blut des Rechners übergegangen sein.

§ 11. Gemischte Gesetze, den Zusammenhang zwischen beiden Operationen zeigend.

20) Theorem. Eine jede von den beiden Gleichungen:

$$a = ab \quad , \quad a + b = b$$

ist nur eine Umschreibung der Subsumtion:

$$a \leq b,$$

dergestalt, dass diese drei Aussagen äquivalent sind, einander gegenseitig bedingen: wenn irgend eine von ihnen gilt, so gelten auch die beiden andern.

Der Beweis besteht aus vier Teilen, indem zu zeigen ist, dass aus jeder der Gleichungen die Subsumtion und umgekehrt aus der Subsumtion eine jede von den Gleichungen folgt.

Ist $a = ab$, so folgt nach Def. (1) auch $a \leq ab$, und weil nach Th. 6_x) auch $ab \leq b$ ist, so folgt a fortiori:

$$a \leq b.$$

Ist $a + b = b$, so haben wir auch $a + b \leq b$, und weil nach 6₊) ohnehin $a \leq a + b$ ist, so folgt nach II:

$$a \leq b.$$

Ist $a \leq b$, so kommt nach 15_x): $aa \leq ab$, oder wegen 14_x): $a \leq ab$. Da nun nach 6_x) ohnehin $ab \leq a$ gilt, so ist nach Def. (1) bewiesen, dass $a = ab$ ist.

Ist $a \leq b$, so kommt nach 15₊): $a + b \leq b + b$, oder wegen 14₊): $a + b \leq b$. Da nun nach 6₊) ohnehin $b \leq a + b$ gilt, so ist $a + b = b$ nach (1) bewiesen.

Für Gebiete wird der vorstehende Satz durch die Figuren 1 und 2 versinnlicht.

Exempel für Klassen. Rappen sind Pferde. Also sind Pferde, welche Rappen sind, nichts anderes als Rappen. Desgl. Rappen oder Pferde sind schlechtweg Pferde. Es versteht sich, dass unsre Exemplifikationen noch in der mannigfaltigsten Weise vermehrt werden könnten.

Zusatz. Im Th. 20) ist mitenthalten das Theorem von Robert Grassmann, dass auch die beiden Gleichungen einander gegenseitig bedingen. Das nämliche gilt von den beiden Subsumtionen:

$$a \leq ab \quad \text{und} \quad a + b \leq b,$$

die ja mit solchen des Th. 6) in jene Gleichungen zusammenfliessen: Auch diese beiden sind mit den drei obigen äquivalente Aussagen. —

Schreiben wir nun die Subsumtionen der Def. (2): $0 \leq a$ und $a \leq 1$ nach Vorbild des Th. 20) in Gleichungen um, so erhalten wir augenblicklich die folgenden Theoreme (die als „reine“ Gesetze erscheinen):

21_x) Theorem. $a \cdot 1 = a$.

21₊) Theorem. $a + 0 = a$.

22_x) Theorem. $a \cdot 0 = 0$.

22₊) Theorem. $a + 1 = 1$.

In Worten bezüglich:

Mit 1 multiplizieren ändert nichts, oder: Der Faktor 1 kann nach Belieben gesetzt oder unterdrückt werden. (Darum heisst 1 der Modul der Multiplikation.)

Null addiren ändert nichts, oder: als Summand kann 0 nach Belieben zugefügt oder weggelassen werden. (Deshalb mag 0 auch der Modul der Addition genannt werden.)

Ein Produkt verschwindet, sobald ein Faktor desselben 0 wird.

Eine Summe nimmt den Wert 1 an, sobald ein Term derselben gleich 1 wird.

Die beiden letzten Sätze sind nämlich auch leicht auf beliebig viele Operationsglieder auszudehnen.

Durch die Voranstellung des Th. 20) haben wir hier die allerdings hübschen vier direkten Beweise, welche Peirce von diesen Sätzen gibt, erspart. Zum Überfluss seien auch diese hier reproduziert.

Beweis von 21_x). Nach 6_x) ist $a \cdot 1 \leq a$. Aus der Subsumtion von I: $a \leq a$ nebst derjenigen (2₊): $a \leq 1$

Beweis von 21₊). Nach I ist: $a \leq a$, und nach (2_x) ist: $0 \leq a$. Hieraus folgt nach dem Schema (3₊):

folgt ferner nach (3_x) : $a \in a \cdot 1$; womit der Satz kraft (1) bewiesen ist.

Beweis von 22_x). Nach (2_x) ist: $0 \in a \cdot 0$; nach 6_x) aber auch $a \cdot 0 \in 0$, also nach (1) der Satz erwiesen.

Für den Gebietekalkül ist die Gültigkeit der Sätze im Hinblick auf die Bedeutung von Produkt, Summe, 0 und 1 auch unmittelbar evident:

Was ein Gebiet der Mannigfaltigkeit mit der ganzen Mannigfaltigkeit gemein hat, ist ebendieses Gebiet selbst.

Was ein Gebiet mit nichts gemein hat, ist nichts.

$a+0 \in a$. Dazu ist nach 6_+): $a \in a+0$, somit nach Def. (1) der Satz erwiesen.

Beweis von 22_+). Nach (2_+) ist, gleichwie jedes Gebiet, so auch das $a+1 \in 1$. Dazu nach 6_+) $1 \in a+1$, somit besteht die Gleichheit.

Dasjenige, wozu ein Gebiet von weiter nichts ergänzt wird, ist dies Gebiet selber.

Dasjenige, wozu ein Gebiet der Mannigfaltigkeit durch die ganze Mannigfaltigkeit ergänzt wird, ist offenbar ebendiese.

Anmerkung 1 zu den Theoremen 21) und 22).

Nach 21_+) kann man jeden Ausdruck darstellen als eine Summe, deren eines Glied er selber, und dessen anderes Glied 0 ist. Auch einen Ausdruck, der gar nicht in Form einer Summe erscheint, ein beliebiges Symbol, kann man hienach jederzeit als eine Summe gelten lassen, dafür ausgeben, als eine solche behandeln, ansehen, betrachten. Insofern man aber den Summand 0 nicht ausdrücklich zu schreiben pflegt, nennt man in solchem Falle den Ausdruck, das Symbol, auch schlechtweg eine *eingliedrige Summe*, ein „*Monom*“. Dies gewährt den erheblichen Vorteil, dass man nun Regeln, die sich auf die Verknüpfung von Summen ebenso beziehen, wie auf diejenige von andern Symbolen (die keine Summen sind) einheitlich zusammenzufassen, für beide Fälle auf einmal darzustellen vermag, worauf wir gelegentlich bereits hinwiesen.

Nach 21_x) kann man ebenso jedes Symbol als ein Produkt hinstellen, dessen anderer Faktor 1 wäre, und da man letztern nicht zu schreiben pflegt, dasselbe als ein *einfaktoriges Produkt* bezeichnen.

Zusatz zu ebendiesen Theoremen 21, 22).

Kommen in einem Ausdruck die Symbole 0 und 1 irgendetwas oft als multiplikative oder additive Operationsglieder vor, verknüpft mit irgendwelchen andern durch Buchstaben dargestellten Gebiets- oder Klassensymbolen, so wird allemal eine Vereinfachung des Ausdruckes

nach den Schemata 21) und 22) möglich und angezeigt erscheinen, und zwar ist leicht einzusehen, dass sich der vorausgesetzte Umstand des Vorkommens von 0 oder 1 — durch das fortgesetzte und nötigenfalls wechselnde Spiel der Berücksichtigung des jeweils einschlägigen von diesen Schemata — immer gänzlich beseitigen lässt, mit einziger Ausnahme des Falles, wo der ganze Ausdruck nach seiner Reduktion schliesslich selbst den Wert 0 oder 1 annimmt (d. h. sich herausstellt, dass er eben diesen Wert besitzen muss).

Es wird nämlich jede als Summand auftretende Null, sowie jede als Faktor auftretende 1 ohne weiteres zu unterdrücken sein. Wo dagegen die 0 als Faktor erscheint, tilge man das ganze Produkt, in welchem sie Faktor ist. Wofern nämlich dieses Produkt nicht etwa selbst der ganze Ausdruck ist (welcher dann vielmehr in 0 zu verwandeln wäre), muss es nämlich Summand sein; denn wenn es Faktor wäre, hätte man nicht das ganze Produkt genommen gehabt. Ebenso wo 1 als Summand auftritt, tilge man alle übrigen mit ihm verbundenen Summanden. Darnach muss diese 1 Faktor geworden sein, wofern sie nicht der resultierende Wert des Ausdrucks selbst ist, denn wenn sie abermals Summand wäre, hätte man ja die übrigen Summanden noch nicht vollständig getilgt gehabt.

In solcher Weise *reduziert* kann ein aus Gebietsymbolen mittelst Addition und Multiplikation aufgebauter Ausdruck, sofern er nicht selbst in den Endwert 0 oder aber 1 sich zusammenzieht, die Symbole 0 und 1 nicht (weiter) enthalten.

Exempel. $(a+b+c)(a+b+d)(a+c+d) \cdot 0 \cdot (1+b+c+d) = 0$,
 $\{a(b+c)+d(a+c)\}(ab+cd)(bf+gh)+(1+ac)(1+gh)+(a+b) \cdot 0 \cdot (c+d)+ad+bcd=1$,
 $a+0+(a+1)(1+1)c(0+1)(1+d)+1 \cdot \{a(bc+d+1) \cdot 1 \cdot d \cdot 0+c \cdot 1\}(1+f+g+0)=a+c+e$.

So wichtig die vier Sätze 21) und 22) für den Kalkül mit Klassen sich erweisen werden, so wenig Wert scheint es zu haben, dieselben in der Wortsprache für solche in Anspruch zu nehmen.

Mit Widerstreben fast bequeme ich mich zu dem Versuche, der mehr nur als eine Übung für den Leser in der verbalen Einkleidung von Formeln sich rechtfertigen dürfte.

21_x) Was schwarz und zugleich irgend etwas ist, das ist schwarz, und vice versa.

22_x) Was schwarz und zugleich nichts ist, muss nichts sein — dies wird allgemein zugegeben werden. Aber auch umgekehrt: Nichts ist nichts und zugleich schwarz — so wenig

21_+) Was schwarz oder nichts ist, ist schwarz (und umgekehrt). Es wird sich freilich entgegen lassen: es könne auch nichts sein. Dieses hebt aber unser Urteil keineswegs auf, da wir übereingekommen sind, unter den schwarzen Dingen auch das Nichts mitzubegreifen.

stens in gegenwärtiger Disziplin, in welcher wir übereingekommen sind, das Nichts in jeder Klasse, so auch in derjenigen der schwarzen Dinge mitenthaltend zu denken.

Das Wort „nichts“ könnte in vorstehenden Sätzen auch teilweise oder durchweg durch „ein rundes Quadrat“ z. B. ersetzt werden.

Wir sehen, dass für die Sprache des gemeinen Lebens höchstens wol die Theoreme 22_x) und 21₊) beanstandet werden können, aber *nur* diese — durchaus nicht 22₊). Jene sind dort in der That cum grano salis zu nehmen.

Dem *Mathematiker* dagegen, der seine bei den Zahlen erworbenen Gewohnheiten in den identischen Kalkül unbesonnen herübernähme, müsste das Theorem 22₊) allein anstössig erscheinen. Die drei andern von den in Rede stehenden Theoremen konstatiren ja Formeln, die auch in der Arithmetik allgemeine Geltung haben.

Und der Umstand, dass die identische 0 die (beiden) Grundeigenschaften $a \cdot 0 = 0$ und $a + 0 = a$ mit der arithmetischen gemein hat, rechtfertigt es zweifellos, dass wir der Arithmetik das Zahlzeichen 0 behufs Darstellung unsres Nullgebietes, des absoluten „Nichts“, entlehnten.

Dagegen vereinigt die „identische 1“ in sich die Grundeigenschaft der arithmetischen 1, dass $a \cdot 1 = a$ ist, mit einer solchen „der absoluten Unendlich“, gemäss welcher in der Mathematik $a + \infty = \infty$ gilt.

In rein formaler Hinsicht würde darnach ein aus 1 und ∞ zusammengesetztes Zeichen, wie etwa:



wol als das geeignetste erscheinen, um Dasjenige vorzustellen, was ich hier „die identische Eins“ nenne.

Will man aber statt eines besondern Zeichens (wie Jevons' „Universe“ U, R. Grassmann's „Totalität“ T) der Einfachheit wegen eines der beiden Zeichen 1 und ∞ selbst hiezu verwenden, so gibt die formale Hinsicht keinen Ausschlag, welches von den beiden etwa vorzuziehen wäre.

Nun haben Boole und Andere stets, auch Herr Peirce früher, nur das Zeichen 1 benutzt. Neuerdings jedoch hat sich letzterer⁵ samt seiner Schule — sekundirt durch Wundt¹ — für das Zeichen ∞ entschieden, sodass den Genannten also $a \cdot \infty = a$ gilt!

In sachlicher Hinsicht mag hiebei wol die Überlegung ausschlaggebend gewesen sein, dass das fragliche Zeichen die ganze Mannigfaltigkeit, auf deren Gebiete die Untersuchungen spielen, vorzustellen hat, und diese häufig „eine unendliche“ ist, nämlich, wenn sie auch nicht immer ein unbegrenztes oder unendlich grosses Gebiet vorstellt, doch wenigstens unbegrenzt viele Elemente enthält. So enthält ja in der That die durchaus endliche und vollkommen begrenzte Fläche der Schultafel (z. B.) gleichwol unendlich viele Punkte.

Demungeachtet muss ich jenen Übertritt*) für einen Rückschritt halten

*) Als eine Wirkung dieser Schwenkung citire ich einen Herrn Peirce zugeschriebenen passus aus der verdienstlichen Abhandlung von Miss Ladd (Frau

22₊) Was schwarz oder irgend etwas ist, muss eben nur irgendetwas sein, und umgekehrt: Alles ist schwarz oder (sonst) irgend etwas.

und scheint mir für den *identischen* Kalkül mit Gebieten und Klassen sowol als mit Aussagen die 1 unbedingt den Vorzug vor der ∞ zu verdienen aus folgenden Gründen:

α) Während die Gleichung $a \cdot 1 = a$ für die Arithmetik eine fundamentale ist, spielt die Gleichung $a + \infty = \infty$ daselbst gar keine Rolle. Grund: die „absolute ∞ “ ist gar keine Zahl, sondern wird nur zeitweilig zum Zahlengebiet herangezogen um in der That den Mangel, das Nichtvorhandensein eines Zahlenwertes zu verdecken. Manche Leser dürften deshalb schon Anstoss daran genommen haben, dass ich überhaupt von „einer Unendlich“ gesprochen. Die ∞ spielt in der Mathematik nur die Rolle eines „Lückenbüssers“ (S. 240).

β) In den Anwendungen auf Wahrscheinlichkeitsrechnung (cf. De Morgan Boole, Peirce, Mac-Farlane, Mc Coll) entspricht die identische Eins immer dem bekannten Symbol, 1, der Gewissheit.

γ) In der Anwendung auf jede *endliche* Mannigfaltigkeit, d. i. auf eine solche, welche nur eine begrenzte Menge von Individuen, Elementen umfasst (Exempel: Feldergebiet eines Bogens karrirten Papiers) muss Denen, die sich aus dem angeführten Grunde für das Symbol ∞ entschieden haben, dieses ganz ebenso unpassend erscheinen, wie ihnen für eine unendliche Mannigfaltigkeit das Symbol 1 erschien.

δ) Zudem dürfte es sich aber auch empfehlen, das Symbol ∞ reservirt zu behalten für andere Zwecke: nämlich als *Symbol des Widerspruchs*, der *Unverträglichkeit*. Schon im identischen Kalkül — doch ist dies hier von geringem Belange — müsste man damit eigentlich die Ausdrücke $\frac{1}{0} = 0 - 1$ [vergl. § 23, σ)] darstellen. In gewissen andern Disziplinen indess, die mit dem identischen Kalkül nur verwandt sind, nicht zusammenfallen, ist es von hohem Werte, das Symbol ∞ zu dem angedeuteten Zwecke verfügbar zu haben. Speziell z. B. um die Unverträglichkeit gewisser Funktionalgleichungen, Algorithmen miteinander in Formeln zu setzen bedürfen wir dieses Zeichens, als des am angemessensten erscheinenden (vergl. Anhang 5, Beleg 7). Im Grunde würde so der Gebrauch von ∞ , statt 1, legitim eingeschränkt auf den Fall, wo die Elemente (und also auch die Gebiete) der ganzen Mannigfaltigkeit nicht alle verträglich sind miteinander.

Dieser Fall aber ordnet sich nicht dem identischen Kalkül unter, sondern gibt mit Veranlassung zur Begründung eines neuen Kalküls, des eigentlich „logischen“ oder Kalküls mit „Gruppen“, in Bezug auf den wir sehen werden, dass er von einer gewissen Stelle an sich vom identischen abzweigt — vergl. § 12 und Anhang 4, 5 und 6.

Franklin) — vergl. Studies in logic, p. 19 —: „In any proposition of formal logic, ∞ represents what is logically possible; in a material proposition it represents what exists.“ Damit scheint mir doch — lucus a non lucendo — der Charakter des Symbols $\frac{1}{0}$ auf den Kopf gestellt zu werden!

Der Anfänger kann hier noch nicht in der Lage sein, die unter δ) rubrizierten Bemerkungen ganz zu verstehen, mithin die angeführten Gründe voll zu würdigen. Anders Derjenige, der schon das Buch durchgearbeitet haben wird. Für diesen müssen wir der Vollständigkeit wegen noch eines bemerken:

Im Aussagenkalkül werden ja auch Aussagen in Rechnung gezogen, die gemeinhin zu reden miteinander „unverträglich“ sind, die mit ihrem Sinne einander „widersprechen“. Es scheint demnach kraft des von mir unter δ) Gesagten das Verfahren des Herrn Peirce, die ganze Mannigfaltigkeit der Aussagen mit ∞ zu bezeichnen, auf den ersten Blick gerade gerechtfertigt zu sein. Und doch bestreite ich eben letzteres! Und dies mein Grund: Der Aussagenkalkül wird — wesentlich ganz in Übereinstimmung mit Peirce — von uns so angelegt werden, dass man die Aussagen (teilweise absehend von deren Sinne) jeweils in Gebiete umschreibt: in Gebiete von Zeitpunkten. Von einer Unverträglichkeit der letzteren miteinander (und in diesem Sinne also auch der zugehörigen Aussagen) kann dann so wenig die Rede sein, wie von einer Unverträglichkeit, einem „Widerspruch zwischen den Punkten einer geraden Linie“.

In der That wird dieser Aussagenkalkül auch nur ein Unterfall sein des identischen Kalküls mit Gebieten einer Mannigfaltigkeit von unter sich verträglichen Elementen.

Ein Beispiel dagegen des „logischen“ Kalküls, der einen wesentlich andern Anblick darbieten wird, liefert erstmals der logische Kalkül mit Funktionalgleichungen, Algorithmen und Kalkülen, auf den wir in Anhang 4 und 5 eingehen.

Aus diesen Gründen sei die Beibehaltung der (Boole'schen) 1 empfohlen und hier bethätigt.

23_x) Theorem. Stets ist:

$$a(a+b) = a.$$

Beweis 1. Nach I ist $a \in a$, zugleich nach 6₊): $a \in a+b$.

Aus diesen beiden Subsumtionen folgt nach Def. (3_x)':

$$a \in a(a+b).$$

Umgekehrt ist aber auch nach 6_x):

$$a(a+b) \in a.$$

Hiemit ist denn nach Def. (1) die Gleichheit erwiesen.

Beweis 2. Nach 6) ist: $ab \in a \in a+b$ und die erste dieser beiden Subsumtionen lässt sich nach dem einen Teil des Th. 20) umschreiben in die Gleichung 23₊), die zweite Subsumtion, nach dem andern Teil von 20), in die Gleichung 23_x). —

23₊) Theorem. Stets ist:

$$a+ab = a.$$

Beweis 1. Nach I ist $a \in a$, zugleich nach 6_x): $ab \in a$,

woraus nach Def. (3₊)' folgt:

$$a+ab \in a.$$

Dazu ist nach 6₊) direkt:

$$a \in a+ab.$$

Von den beiden Theoremen 23) ist — aus einem erst unter 28) darzulegenden Grunde — das zweite 23₊) von der grösseren Wichtigkeit. Es genügt, von beiden nur dieses für den Gebrauch beim Rechnen sich einzuprägen, weshalb wir dasselbe auch allein in Worte kleiden wollen: *Solche Glieder einer Summe, welche ein anderes Glied derselben zum Faktor haben, können jeweils unterdrückt, gestrichen, weggelassen werden, sie gehen in dem letzteren ein, werden von ihm gewissermassen verschluckt, einverleibt oder absorbiert* — weshalb man das Th. 23₊) auch als das „Absorptionsgesetz“ des identischen Kalküls bezeichnen kann. Umgekehrt kann man natürlich auch ein beliebiges (Gebiets- oder Klassen-)Symbol um das Produkt desselben in irgend welche andere Symbole auf Wunsch additiv vermehren, ohne dass dies von Einfluss auf die Bedeutung des Ausdrucks wäre, in welchem jenes Symbol vorkommt.

Für irgend zwei Gebiete a, b ist die Gültigkeit der Theoreme 23) auch unmittelbar anschaulich.

Exempel für Klassen: Die Adeligen, welche adelig oder auch besitzend sind, müssen eben die Adeligen sein. Die Adeligen und die besitzenden Adeligen sind einfach die Adeligen.

Der Ausdruck: „Pferde oder auch Rappen (schwarze Pferde)“ sagt weiter nichts, als der kürzere Ausdruck: „Pferde“.

Freilich, wenn jemand erzählte, es seien (bei einer gedachten Gelegenheit) „Pferde und Rappen“ zu sehen gewesen, so würde er mehr sagen, als wenn er bloß erzählte, es seien „Pferde“ zu sehen gewesen; es wäre nämlich im erstern Falle positiv behauptet, dass unter den Pferden auch (einige) Rappen bemerkbar gewesen seien, während im zweiten Falle hierüber nichts ausgesagt, also das Gegenteil auch als möglich offen gelassen ist. Wie ein solcher Ausspruch in der logischen Zeichensprache darzustellen wäre, würde sich erst nach dem Eingehen auf die partikularen und Existenzial-Urteile angeben lassen, dann aber dem Studirenden auch keine Schwierigkeit mehr bereiten.

Aufgaben. Den Ausdruck zu vereinfachen:

$$abc(b+c) + (cd+a+def)a$$

Resultat: a .

Desgleichen die Ausdrücke:

$$ab(a+b), a+b+ab, abc(a+b+c), a+b+c+ab+ac+bc+abc.$$

Endergebnisse bezüglich: $ab, a+b, abc, a+b+c$.

24_x) Theorem. Wenn

$$1 = ab$$

ist, so muss auch sein:

$$1 = a \quad \text{und} \quad 1 = b.$$

24₊) Theorem. Wenn

$$a+b = 0$$

ist, so muss auch sein:

$$a = 0 \quad \text{und} \quad b = 0.$$

Ein Produkt kann nicht anders gleich 1 werden, als indem jeder Faktor desselben gleich 1 wird.

Beweis 1. Laut Voraussetzung ist nach Def. (1):

$$1 \in ab,$$

und da nach Th. 6_x)

$$ab \in a$$

ist, so folgt nach II auch:

$$1 \in a,$$

somit nach Th. 5₊):

$$1 = a.$$

Analog beweist man auch, dass $1 = b$ ist; zudem folgt dies nach 21_x) als Rückstand aus der Voraussetzung, nachdem schon $a = 1$ bewiesen ist.

Beweis 2. Nach Def. (3_x) resp. (3₊) sagt die Subsumtion

$$1 \in ab$$

ganz das nämliche aus, wie die beiden Subsumtionen:

$$1 \in a \text{ nebst } 1 \in b$$

zusammen, und nach Th. 5_x) resp. 5₊) sind diese Subsumtionen alle drei je für sich äquivalent den entsprechenden Gleichungen in unserm zu beweisenden Satze.

Beweis 3. Beiderseitige Addition von a zu der Voraussetzung nach 15₊) gibt wegen 22₊):

$$1 = ab + a$$

also nach 23₊):

$$1 = a,$$

etc.

Anmerkung. Nach Th. 5) hätten auch die Gleichheitszeichen in der Voraussetzung unseres Satzes (desgleichen überall in demselben) durch das Subsumtionszeichen ersetzt werden können.

Mit Beweis 1 konnte das Theorem schon viel früher aufgeführt

Eine Summe kann nur dann verschwinden, wenn ihre Glieder sämtlich gleich 0 werden.

Beweis 1. Laut Voraussetzung ist nach Def. (1):

$$a + b \in 0.$$

Aber nach Th. 6₊) ist

$$a \in a + b,$$

folglich nach II:

$$a \in 0,$$

nach Th. 5_x) also

$$a = 0.$$

Analog beweist man auch, dass $b = 0$ ist; desgl. folgt dies nach 21₊) als Rückstand aus der Voraussetzung, nachdem bereits $a = 0$ bewiesen ist.

werden, dicht hinter Th. 6), wenn man will; mit Beweis 2 sogar noch vor dem letztern.

Zusätze. Da aus den zwei letzten (den behaupteten) Gleichungen des Satzes auch umgekehrt die erste (die vorausgesetzte) nach 18) und 21) folgt, so kann man sagen, dass diese eine Gleichung äquivalent ist dem System der beiden andern, simultan als gültig hingestellten. Insbesondere also sagt rechterhand die eine Gleichung $a + b = 0$ genau dasselbe aus, wie die beiden Gleichungen $a = 0$ und $b = 0$ zusammen genommen; denn aus jener folgen diese beiden, und aus diesen beiden folgt umgekehrt auch jene. Aus einem bald näher darzulegenden Grunde besitzt dieser Satz wiederum grössere Wichtigkeit als sein duales Gegenstück.

Wir haben auch in der Arithmetik Analoga zu dem erwähnten Satze. So ist, wenn a und b reelle Zahlen bedeuten und i die imaginäre Einheit vorstellt, bekanntlich die Gleichung $a + ib = 0$ äquivalent dem Gleichungspaare: $a = 0, b = 0$. Desgleichen können diese letzteren beiden in die eine Gleichung $a^2 + b^2 = 0$ zusammengezogen werden, indem im reellen Zahlengebiet auch eine Summe von Quadraten nicht anders verschwinden kann, als indem ihre Terme (somit auch die Grundzahlen dieser Quadrate selbst) sämtlich verschwinden. Die Geltung des Th. 24₊) weist darauf hin, dass es im identischen Kalkül nichts geben wird, was den negativen Zahlen der Arithmetik analog wäre. Namentlich kann es hier keine Gebiete geben, die als Summanden oder Addenden zu einmal gesetzten Gebieten hinzugefügt, diese wieder aufheben. Es würden solche Gebiete sich hier auch nicht fingiren lassen, ohne dass die fundamentalen Gesetze des Kalküls umgestossen werden müssten. Gleichwol verfügt auch der identische Kalkül über die Mittel, eine Ausschliessung, Ausnahme oder Exception vorzunehmen, worüber die einschlägigen Betrachtungen in § 23 zu vergleichen sein werden.

Die Ausdehnung der Sätze 24) von zweien auf beliebig viele Operationsglieder und Gleichungen ist leicht zu bewerkstelligen und naheliegend.

So wird z. B. die Gleichung $a + b + c = 0$ das nämliche aussagen, wie die drei Gleichungen $a = 0, b = 0, c = 0$ zusammen. Denn man kann die dreigliedrige Summe $a + b + c$ zunächst darstellen als eine zweigliedrige: $(a + b) + c$. Die Anwendung des für Binome bewiesenen Th. 24₊) auf die Gleichung $(a + b) + c = 0$ zerfällt diese zunächst in die beiden Gleichungen $a + b = 0$ nebst $c = 0$, und die erstere von diesen wird durch abermalige Anwendung des Th. 24₊) noch in $a = 0$ nebst $b = 0$ gespalten. Und so weiter.

Eine beliebige Menge von Gleichungen, deren eine Seite 0 (resp. 1) ist, lässt sich demnach stets in eine einzige solche Gleichung zusammenziehen und durch diese ausreichend vertreten.

Exempel für Klassen.

Wenn die Aussage wahr ist: „Alles der Wirklichkeit 1 Agehörige ist ein Räumliches a (d. i. *irgendwo vorhanden* sei es gewesen, sei es gegenwärtig existierend oder künftig in's Dasein tretend) und ein Zeitliches b (*irgendwann vorhanden*)“, so gelten auch die beiden Aussagen: „Alles Wirkliche ist als ein Räumliches irgendwo vorhanden (sc. gewesen, existierend oder künftig)“ und: „Alles Wirkliche ist als ein Zeitliches irgendwann vorhanden“. Und umgekehrt ziehen diese beiden letzteren Sätze den vorhergehenden nach sich.

Der Satz: „Es gibt keine Drachen, Hexen und Gespenster“ sagt dasselbe, wie die drei Sätze: „Es gibt keine Drachen“. „Es gibt keine Hexen“. „Es gibt keine Gespenster“.

25) Die beweisbare Subsumtion des Distributionsgesetzes.
Es ist allgemein:

25_x) Theorem.

$$ab + ac \in (b+c).$$

Ich gebe für diese Sätze zwei ganz verschiedene Beweise.

Beweis 1. Nach 6₊) ist:

$$b \in b+c \text{ und } c \in b+c$$

somit nach 15_x):

$$ab \in a(b+c), ac \in a(b+c).$$

Hieraus aber folgt nach Def. (3₊) der zu beweisende Satz.

Beweis 2. Nach 6_x) ist:

$$ab \in a \text{ und } ac \in a,$$

woraus nach Def. (3₊):

$$ab + ac \in a.$$

Analog ist:

$$ab \in b \text{ und } ac \in c$$

sonach gemäss 18₊):

$$ab + ac \in b+c$$

Aus dem vorigen Ergebniss in Verbindung mit diesem fliesst nach Def. (3_x) die behauptete Subsumtion.

Zusätze. Wieder gestattet uns das Kommutationsgesetz, in den bewiesenen Formeln sowol Faktoren als Glieder beliebig umzustellen, und dadurch denselben noch andere Gestalten zu geben. Namentlich sei hervorgehoben, dass auch:

25₊) Theorem.

$$a + bc \in (a+b)(a+c).$$

Beweis 1. Nach 6_x) ist:

$$bc \in b \text{ und } bc \in c$$

somit nach 15₊):

$$a+bc \in a+b, a+bc \in a+c,$$

und hieraus folgt nach Def. (3_x) die zu beweisende Subsumtion.

Beweis 2. Nach 6₊) ist:

$$a \in a+b \text{ und } a \in a+c,$$

woraus nach Def. (3_x):

$$a \in (a+b)(a+c).$$

Analog ist:

$$b \in a+b, c \in a+c$$

somit nach 18_x):

$$bc \in (a+b)(a+c)$$

Aus den gewonnenen beiden Resultaten fliesst nach Def. (3₊) der zu beweisende Satz.

$$ba + ca \in (b+c)a \quad | \quad bc + a \in (b+a)(c+a)$$

fortan gelten muss.

Die Ausdehnung der Sätze auf die identische Addition beliebig vieler Terme mit gemeinsamem Faktor, resp. Addition eines Terms zu einem Produkt von beliebig vielen Faktoren, ist naheliegend, und leicht zu beweisen. So haben wir auch:

$$ab + ac + ad \in a(b+c+d) \quad | \quad a + bcd \in (a+b)(a+c)(a+d),$$

und so weiter. —

Die Rechtfertigung der oben den Theoremen 25) gegebenen Überschrift, und die Exemplifikation dieser Sätze durch Klassen, verschieben wir auf die nächste Vorlesung. Desgleichen verzichten wir darauf, die Sätze schon in Worten zu formuliren, aus Gründen, die daselbst zutage treten werden.

Sechste Vorlesung.

§ 12. Nichtbeweisbarkeit der zweiten Subsumtion des Distributionsgesetzes und Unentbehrlichkeit eines weiteren Prinzipes. Prinzip zur Vertretung des unbeweisbaren Satzes.

Setzen wir einen Augenblick den Fall, es würden sich auch die beiden folgenden Formeln *beweisen* lassen, die ich zwar noch *nicht als Theoreme* bezeichnen aber (vorgreifend) mit den jetzt fälligen Chiffren numeriren will:

$$26_x) \quad a(b+c) \not\Leftarrow ab+ac \quad | \quad 26_+) \quad (a+b)(a+c) \not\Leftarrow a+bc,$$

so würden im Hinblick auf Th. 25) nach Def. (1) auch die Gleichungen gelten müssen:

$$27_x) \quad a(b+c) = ab+ac \quad | \quad 27_+) \quad a+bc = (a+b)(a+c),$$

deren erste mit dem „Distributionsgesetz“ der Arithmetik zusammenfällt. Und umgekehrt: wenn die Formeln 27) als Gleichungen gelten, so sind nicht nur die Subsumtionen 25) sondern auch die 26) kraft Def. (1) als allgemeine Formel wahr.

Auch diese Formeln 26) und 27) wären wieder von zweien leicht auf mehr als zwei Operationsglieder auszudehnen, und hätte man bei 27), z. B. linkerhand, für drei Operationsglieder:

$$a(b+c+d) = ab+ac+ad$$

und so weiter. Der Beweis wäre zu führen, indem man die dreigliedrige Summe $b+c+d$ zunächst als eine zweigliedrige $(b+c)+d$ kraft 13₊) darstellte und dann zweimal nacheinander, zuerst auf diese binomische Summe selber, sodann auf ihren ersten Term $b+c$, das Schema 27_x) anwendete. Man hat also zu schliessen:

$$a(b+c+d) = a\{(b+c)+d\} = a(b+c) + ad = (ab+ac) + ad = ab+ac+ad.$$

Um darnach für eine viergliedrige Summe $b+c+d+e$ den Satz zu beweisen, hätte man auch diese wieder als eine binomische darzustellen, z. B. in Gestalt von $(b+c+d)+e$. Etc.

Auf ihre Gültigkeit — die sich bald offenbaren wird — wollen wir die Formeln 27) erst nachher prüfen und uns zunächst damit be-

schäftigen, dieselben in Worte zu kleiden, so, wie man behufs ihrer Anwendung im identischen Kalkül gut thut, sie sich einzuprägen.

Jede als eine allgemeine Formel geltende *Gleichung* des Kalküls lässt sich in zweierlei Weise, nämlich im Sinne von links nach rechts, sowie im entgegengesetzten Sinne, anwenden, und liefert, zum Zwecke dieser Anwendungen in Worte gefasst, demgemäss auch *zwei* Sätze: den einen (wie wir sagen können) vorwärts gelesen, den andern indem sie rückwärts gelesen wird. Die Formel drückt nämlich [im Hinblick auf den Zusatz zu Th. 2), 3), auf Zus. 2 zu Th. 19) und später noch dessen Verallgemeinerung Zus. 2 zu Th. 32)] die Erlaubniss aus, gelegentlich die eine Seite der Gleichung durch die andere zu ersetzen, also entweder die linke Seite derselben durch die rechte, oder, falls es beliebt, umgekehrt den Ausdruck zur rechten durch den zur linken Hand befindlichen.

Von links nach rechts gelesen lehrt die Gleichung 27_x) oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Gleichung: $(b+c)a = ba+ca$, dass eine Summe mit einem Symbol multipliziert werden kann, indem man jedes Glied der Summe mit ihm multipliziert und die Ergebnisse (Einzelprodukte, „Partialprodukte“) addirt (summirt). Kürzer gesagt: die Multiplikation einer Summe kann „gliedweise“ an dieser ausgeführt werden.

Ein Faktor, mit welchem eine Summe behaftet erscheint, „verteilt“ sich darnach auf die Glieder der Summe — so jedoch, dass jedes Glied den *ganzen* Faktor bekommt. Und unter diesem Gesichtspunkt erscheint die Bezeichnung des Satzes 27_x) als „Distributionsgesetz“ gerechtfertigt. *)

Freilich ist die Art der „Verteilung“ eine eigentümliche, wie wir sie übrigens schon bei der distributiven Verwendung der Gemeinnamen in B der Einleitung kennen gelernt haben. Auf dem Gebiete der materiellen Welt dürfte solche Distribution oder distributive Verteilung, bei welcher jeder an ihr Teilnehmende, Partizipirende das zur Verteilung gelangende Objekt ganz und ungeteilt für sich erhält, ohne dass es darum doch den andern Partizipanten vorenthalten würde, kaum ein Analogon finden — es sei denn (annähernd) etwa bei der Austeilung, dem Weitergeben von Feuer — beispielsweise der Cigarre —, von Fermenten, auch der Verbreitung von Ansteckungsstoffen. Wohl aber vollziehen sich distributive Verteilungen auf dem geistigen Gebiete: in Gestalt der — wie die Sprache zu sagen vorzieht — „Mitteilung“ von Gedanken. Charakteristisch ist hierbei, dass Derjenige, der einen klugen Einfall z. B. Andern mitteilt, ihn dadurch selber

*) Dieselbe soll nach Hankel¹ und Herrn Bruce Halstead wahrscheinlich von William Rowan Hamilton (im Cambridge & Dublin Mathematical Magazine) als *erster* Quelle herrühren. Von Servois¹ stammen nur die Namen „Kommutations“- und „Assoziationsgesetz“.

nicht verliert, während doch ein Jeder des ganzen Einfalles oder Gedankens teilhaftig geworden, und auf diesem Umstand beruhen wesentlich die grossen Vorteile des sog. Gedankenaustausches (eventuell auch die Nachteile, z. B. bei Verleumdung). Wenn in einer Gesellschaft von hundert Personen Jeder auch nur *einen* klugen Gedanken hat und ihn den Andern mitteilt, so geht ein Jeder mit hundert klugen Gedanken nach Hause*)! Der Verteilungsprozess ist hierbei untrennbar verbunden mit einer Vervielfältigung, mit einem wiederholten Inexistenztreten des Verteilungsobjektes. Eine Geldsumme z. B. lässt unter die Anwesenden in dieser Weise sich leider nicht verteilen.

Die Anwendung der Formel 27_x) in dem eben erwähnten Sinne heisst *Ausmultiplizieren*; man sagt, dass man die Summe $b + c + \dots$ „mit a ausmultipliziere“, wenn man das Produkt $(b + c + \dots) a$ in $ba + ca + \dots$ verwandelt.

Man sagt in der Arithmetik auch, das Produkt werde „entwickelt“, doch wird man auf diese Ausdrucksweise hier besser verzichten, weil wir dieselbe in § 20 in einem andern Sinne einzuführen haben. Der Engländer verfügt hier über das Wort „*expanded*“ zum Unterschiede von „*developed*“.

Soll $a(b + c + d + \dots)$ ausmultipliziert werden, so „geht man mit dem Faktor a “ in Gedanken „in die Klammer hinein“, und lässt ihn bei dem ersten Gliede auf welches man stösst gewissermassen hängen. Ohne aber dadurch seiner Begleitung verlustig zu gehen, wandert man mit ihm weiter, um ihn auch bei dem zweiten Gliede haften zu lassen, und so fort.

Die umgekehrte Anwendung der Formel, wobei man also eine Summe $ba + ca + da + \dots$ in das Produkt $(b + c + d + \dots)a$ zusammenzieht, heisst das „Ausscheiden des gemeinsamen Faktors“ a . Rückwärts gelesen also liefert uns die Formel 27_x) den Satz: *Wenn die Glieder einer Summe einen „gemeinsamen“ (genauer bloss: übereinstimmenden) Faktor „enthalten“**), so kann man denselben „ausscheiden“, d. h. ihn neben eine Klammer setzen, in welche die Summe der andern Faktoren geschrieben wird.*

Damit dies korrekt sei, muss indess jedes Glied der gedachten Summe als ein „*binäres*“, d. i. aus nur *zwei* Faktoren bestehendes, Produkt angesehen werden, dessen einer Faktor der in allen Gliedern laut Voraussetzung übereinstimmend vorhandene oder „gemeinsame“ Faktor

*) Volkstümliches Argument des unvergesslichen Dr. Faucher, auf die Anwesenden bei der Gründung eines Arbeiterbildungsvereines exemplifizierend vorgebracht.

**) Soll heissen: „als Operationsglied enthalten“, keineswegs aber im Sinne einer Überordnung oder Supersumtion, statt welcher im Gegenteil bei den Gliedern gegenüber dem Faktor eine Unterordnung, Subsumtion vorläge. Für „enthalten“ sage man darum unverfänglicher: „haben“, „besitzen“.

ist. Bestand also ein Glied aus vielen Faktoren, so wird in ihm, nach Abtrennung des „gemeinsamen“ erst das Produkt der übrigen Faktoren den „andern“ Faktor vorstellen, von welchem in obiger Erklärung die Rede war (durchaus nicht dürfte die Summe von dessen Teilfaktoren gebildet werden).

Wie an dem Beispiel der Formel 27_x) zu sehen ist, können die beiden Sätze, welche eine Formel vor- und rückwärts gelesen liefert, gänzlich verschieden klingen. Dies wird sich sogar als die Regel erweisen. Gleichlauten, m. a. W. in *einen* Satz zusammenfallen, müssen die beiden nur dann, wenn die Formel symmetrisch ist, d. h. die eine Seite der Gleichung durch blosse Buchstabenvertauschung in die andere übergeführt werden kann, was dann nebenbei gesagt (durch die entgegengesetzte Vertauschung) auch immer umgekehrt der Fall sein muss. Es war dies unter den bisherigen Formeln oder Theoremen nur bei den Kommutationsgesetzen 12) der Fall.

Die Formel 27_x) werden wir „*das duale Gegenstück des Distributionsgesetzes*“ nennen.*). Dass sie dies wirklich ist, nämlich durch blosse Vertauschung von „plus“ und „mal“ aus dem (eigentlichen) Distributionsgesetze hervorgeht, erkennt man deutlichst, wenn man in beiden Formeln die unterdrückten Malzeichen nebst den gespargten, mental zu ergänzen gewesenen Klammern ausdrücklich anschreibt:

$$27_x) a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad | \quad 27_+) a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c).$$

Auch die Formel $27_+)$ ist von distributivem Charakter; sie zeigt, dass ein Summand, welcher zu einem Produkte tritt, sich auf die Faktoren des letzteren „verteilt“. *Statt ein Symbol zu einem Produkt zu addieren, kann man es zu jedem Faktor desselben addieren und die Ergebnisse (Einzelsummen) miteinander multiplizieren.* Umgekehrt: *Wenn die Faktoren eines Produktes einen übereinstimmenden Term (Summanden) enthalten, so lässt sich das Produkt reduzieren auf diesen Term vermehrt um das Produkt der restirenden Terme in den als nur zweigliedrige oder „binomische“ Summen anzusehenden Faktoren.*

Von diesen beiden Sätzen ist wol der letztere für die Technik des identischen Kalküls noch von einigem Werte. Wie sich zeigen wird, lässt aber die Anwendung des Th. $27_+)$ sich überhaupt umgehen, und kann man schon mit dem Distributionsgesetze 27_x) auskommen.

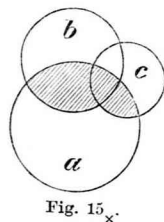
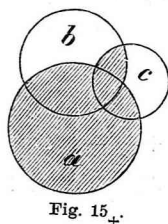
In der Arithmetik gilt die Formel $27_+)$ *nicht*; hier stehen Multiplikation und Addition nur *in einseitig distributivem Zusammenhange*: die

*) In ² glaubte ich, dieselbe entdeckt zu haben; jedoch war mir Herr Peirce in ^{1a} zuvor gekommen.

Multiplikation verhält sich distributiv zur Addition, aber nicht umgekehrt. Im identischen Kalkül dagegen stehen Addition und Multiplikation in gegenseitig distributivem Zusammenhange.

Da die Formel 27_x) die beiden vorhergehenden Subsumtionen 26_x) und 25_x) ohnehin umfasst, so verlohnt es natürlich nicht, diese beiden, weniger besagenden Sätze einzeln in Worte zu kleiden und sich gesondert einzuprägen, sondern wird es vorzuziehen sein und hinreichen, dies nur mit dem inhaltreicheren Satze 27_x) zu thun. Wir durften daher auf jenes verzichten, und begnügen wir uns, das letztere gethan zu haben.

Dass nun die Formeln 27) — und damit auch die vorhergehenden 26) — in der That Geltung haben, lehrt für die bisher als anschauliches Substrat benutzten Flächengebiete oder Klassen von Punkten der Ebene zunächst die Anschauung. Man überzeugt sich nämlich sonder Mühe, dass sowol die linke als die rechte Seite einer jeden Gleichung 27) bezüglich denselben in der folgenden Figur schraffirten Teil der Gebiete a , b , c vorstellt:

Fig. 15_x.Fig. 15₊.

Die Anschauung konnte auch benutzt werden um *alle* bisherigen Sätze des Gebietekalküls unmittelbar als richtig zu erkennen. Doch wird man zugeben, dass dies kein *Beweis* derselben sein würde, unter welchem ja ihre (bewusste) Zurückführung auf die bisherigen Definitionen (1) bis (3) durch zwingende nach den Prinzipien (I und II) ausdrücklich erfolgende Schlüsse zu verstehen ist.

Sonach erscheinen auch die Sätze 27) bis jetzt noch als unbewiesen.

Die Unmöglichkeit, ihren Beweis auf der Grundlage des Bisherigen zu leisten, kann völlig ausser Zweifel gestellt werden auf eine Weise, die ich jetzt auseinandersetzen will.

Ein solcher „negativer“ Beweis kann nur durch *Exemplifikation* geleistet werden.

Eine allgemeine Behauptung wird als in dieser Allgemeinheit ungültig erwiesen sein, sobald man auch nur ein einziges Beispiel nachweist, für

welches sie nicht zutrifft, und dieses für sie selbst oder eine ihrer Konsequenzen zu thun, erscheint als der einzige Weg, ihre Ungültigkeit zu beweisen. Im letztern Fall hat man dafür einen sog. „apagogischen“ oder „indirekten“ Beweis, die „*reductio ad absurdum*“ — wovon sich jene Exemplifikation auch als ein spezieller Fall würde hinstellen lassen, in Anbetracht, dass die Geltung der Behauptung für das Beispiel ja eine Konsequenz ist ihrer allgemeinen Geltung.

Handelt es sich insbesondere um den Nachweis der Ungültigkeit einer *Folgerung* selbst, und zwar einer angeblichen Beweisführung für einen materiell richtigen Satz, so bleibt nur der Weg des unmittelbaren Exemplifizirens offen und kommt folgendes in Betracht.

Dass ein Satz A aus einer Gruppe von Definitionen, Axiomen und Sätzen B nicht mit Notwendigkeit folgt, wird jedenfalls dann unzweifelhaft erwiesen sein, wenn es gelingt, ein Gebilde als wirklich oder denkmöglich nachzuweisen, welches die Definitionen, Axiome (und Sätze) der Gruppe B sämtlich bewahrheitet und gleichwol den Satz A nachweislich nicht erfüllt — kurz: wenn man zeigt, dass irgendwo die Sätze B ohne A geltend vorkommen. Dann in der That kann A von B nicht bedingt werden.

In unserm vorliegenden Falle brauchen wir den Beweis der Nichtbeweisbarkeit nur etwa für die Formel 26_x) zu führen. Für die 26₊) ergibt sich derselbe alsdann als ein selbständiger ganz ebenso *dual* entsprechend, oder auch als ein vom vorigen abhängiger in unmittelbarer Zurückführung auf diesen auf Grund einer am Anfange des nächsten Paragraphen folgenden Bemerkung.

Der Satz A wird so die Formel 26_x), die Gruppe B aber den ganzen Inhalt der Paragraphen 4, 5, 6, 10, 11 vorstellen.

Es empfiehlt sich vielleicht, das Wesen dieser Schlüsse durch ein einfacheres Beispiel zu illustrieren. Ich wähle folgendes Sophisma (aus Keynes¹):

B { Du bist nicht das, was ich bin.
Ich bin ein Mann,

folglich: A) bist du nicht ein Mann (kein Mann).

Sagt dies ein Mann zu irgend jemand, so sind die Prämissen B des ausgeführten Schlusses richtig. Sagt er es zu einer Frau, so ist auch die Konklusion, der Schlusssatz B materiell richtig, und dennoch ist der Schluss unberechtigt, formell falsch! Dies wird erkannt, wenn man es ihn zu einem Manne sagen lässt, wo dann eben die Konklusion auch materiell unrichtig sein wird.

Es kann auch in der Anwendung des Satzes auf eine Frau die Unrichtigkeit des Schlusses als solchen nachgewiesen werden, indem man das Wort „Mann“ durchweg durch das Wort „Mensch“ ersetzt. Würde eine vom Denkinhalte unabhängige Denknötwendigkeit von den Prämissen B zur Konklusion A hinüberführen, so müsste dies gleichermassen der Fall sein, durch welches andre nomen man auch irgend ein in der Schluss-