der feindlichen Armee überlegen — ansonst wir unser Militärbudget auf die Erhaltung dieses einen Soldaten einschränken dürften. Das Buch „ist" nicht die Bibliothek; die Bibliothek kann viele Tausende wert sein, das Buch gleichwol nicht, etc.

Als Kollektivnamen könnten wir jedes Ding bezeichnen, an welchem überhaupt Teile sich unterscheiden lassen: also vielleicht allein den Punkt, den Augenblick und das Nichts nicht! So ist ein Buch wieder Kollektivname in Bezug auf die in ihm zusammengebundenen Blätter und deren Seiten, eine Seite ebenso im Hinblick auf die auf ihr gedruckten Sätze, Wörter, Silben und Buchstaben. Fast jeden Namen also, mit dem wir bisher ein Objekt des Denkens bezeichnet dachten, mag man einen Kollektivnamen nennen. Es ist darum für die Logik von sehr geringem Belange, eine Unterscheidung zwischen Kollektivnamen und solchen, die es nicht sind, aufzustellen.

Und gleichwie die Eigennamen, von welchen wir bisher gesprochen, so mögen wir auch Gemeinnamen als *kollektive* hinstellen.

„Armee" ist so ein Gemeinname, sofern das Wort geradesogut die deutsche, wie die französische, die englische etc. Armee bezeichnen kann, und zugleich ist es Kollektivname in Bezug auf die einzelnen Soldaten, welche mit ihrer Ausrüstung die Armee zusammensetzen. Ebenso ist „Bibliothek (überhaupt)" Gemeinname und Kollektivname zugleich, ersteres als die Bibliothek des Herrn A, die der Gesellschaft B, etc. letzteres als die einzelnen Bücher umfassend, die sich in ihr befinden. (Jevons[6].)

Ein psychologischer sowol als grammatikalischer Grund, von Kollektivnamen zu reden, liegt wirklich vor, wenn von einer Reihe von Individuen diese einzeln aufgezählt, erwähnt worden sind, und es nun gilt dieselben kollektiv zu einem Ganzen zusammenzufassen.

Wenn aufgezählte Individuen zu einem Gemeinnamen zusammengefasst werden sollen, so bedient sich die Sprache wesentlich anderer Ausdrücke, als wenn dieselben zu einem Kollektivnamen zu vereinigen sind.

Hat man erstern Zweck im Auge, so spricht man (streng konsequent, oder auch nur mit Vorliebe) von einer

Klasse, Gattung, Art, Ordnung, Familie (im weiteren Sinne, z. B. Pflanzenfamilie), einem *Geschlecht*, auch einem *Reich (Bereich)*, einer *Abteilung* etc.

dieser Individuen, im Hinblick dagegen auf letztern Zweck von ihrer (resp. ihrem)

Menge, (Quantität), Gesamtheit, (Summe), Reihe, Folge, ev. *Sequenz, Schar, Haufen, Gruppe, System, Zusammenstellung, Komplex, Inbegriff, Gebiet, Mannigfaltigkeit*,

man spricht von ihnen als von einem *Ganzen*, und vielleicht noch in manchen andern *mehr oder weniger* synonymen Termen.

Das Wort *„Abteilung"* — sowie vielleicht auch schon *Bereich*,

Gebiet und *Mannigfaltigkeit* — scheint wol in gleicher Weise für *beide* Zwecke disponibel zu sein.

Auffallend ist der grosse Reichtum an Ausdrücken, welche der Sprache zu solchen Zwecken zur Verfügung stehen. Die Wissenschaft (namentlich die Mathematik) hat übrigens schon angefangen diese Synonyme (besonders die der zweiten Gruppe) erheblich zu differenziiren und dürfte darin noch weiter fortschreiten.

Die häufigste Veranlassung dazu, von Kollektivnamen überhaupt zu reden, liegt in dem Auftreten der *Pluralform* von Substantiven, mit kollektiver Bedeutung. Auch sie ist vorwiegend grammatischer Natur. Die Individuen, welche der zugehörige Singular (als Gemeinname)*) distributiv bezeichnet, bezweckt die Verwendung des Pluralis nicht selten, kollektiv zu einem Ganzen zusammenzufassen, während in der Regel freilich auch der Plural nur bestimmt ist, eine Klasse darzustellen.

Dass man, wenn ein Hauptwort im Plural fällt, demselben oft nicht ansieht, ob es mit der Absicht kollektiver oder aber genereller Auffassung gebraucht wird, ist als eine *sehr grosse* Unvollkommenheit der Sprache zu bezeichnen. Wir werden sehen, dass auf der Verwechselung beider Absichten manche Fehlschlüsse beruhen.

Wenn wir z. B. sagen: „Die Anforderungen, welche sein Beruf an ihn stellte" . . . und fortfahren . . . „erfüllte er mit spielender Leichtigkeit", so lässt sich das Urteil als ein generelles auffassen. Fahren wir dagegen fort: . . . „brachten seine Gesundheit zum Wanken", so erscheint dies ausgeschlossen, und ist solches nicht wol von der einzelnen Anforderung, sondern nur von den vereinigten Nachwirkungen aller der aufreibenden Anforderungen gültig auszusagen gewesen. Etc. Zuweilen werden sogar Kollektivnamen gebraucht, um generelle Urteile zu fällen, z. B. wenn wir sagen: die ganze Familie N. N. hat zur Zeit den Keuchhusten. Seine Eltern sind gestorben. Etc.

In der Regel lässt sich allerdings — durch Aufwendung von nur ein wenig Sorgfalt auf die Ausdrucksweise — der Doppelsinn vermeiden, doch ist zu beklagen, dass in dieser Richtung ausserordentlich viel gesündigt wird.

Wie oft begegnen wir nicht Sätzen wie: „dass die drei Winkel eines

---

*) Ein Eigenname kann überhaupt nicht in den Plural gesetzt werden. Man käme dadurch zu absurden Ausdrücken, wie wenn etwa ein Mensch von „seinen Nasen", Köpfen, Vätern, seinen Geburtsstädten und dergl. reden wollte. Schon die natürliche Zahl, wenn grösser als 1, wird unsinnig (um nicht zu sagen „imaginär") sobald als ihre Einheit ein „Individuum" gesetzt wird, als ihre „Benennung" ein Eigenname auftritt, und ist z. B. „fünf John Stuart Mill's (mit dessen Heimatsorte und Geburtsjahr gedacht)" ein gänzlich sinnloser Ausdruck, desgleichen „7 Sonnen" (unseres Planetensystemes).

Dreiecks gleich zwei Rechten sind“*) oder die Quadrate über den beiden Katheten gleich demjenigen über der Hypotenuse*) — in welchen doch das Prädikat nur *der Summe* der im Subjekte aufgezählten Grössen zukommt! Korrekt gedeutet würden jedoch diese Sätze behaupten, jeder Dreieckswinkel für sich sei gleich zwei Rechten und das Quadrat über der Hypotenuse sei gleich dem über einer jeden Kathete. Wie leicht wäre es aber, in solchen Fällen noch das Adverbium „*zusammen*“ in den Text, wie sich gehört, einzufügen!

Ebenso muss es als ein wahrer Verderb bezeichnet werden, wenn im Elementarunterricht der Volksschullehrer sagen lässt: „2 *und* 3 *sind* 5“, welches bedeutete: 2 ist 5, desgleichen 3 ist 5. Der Satz enthält zwei Fehler (nur!), indem einmal die Konjunktion „und“ für das arithmetische Operationszeichen „plus“ gesetzt erscheint — dieses ginge aber noch an mit Rücksicht auf den von der Bequemlichkeit der Aussprache beherrschten Sprachgebrauch. In diesem Buche werden wir uns in der That gewissermassen des umgekehrten Fehlers schuldig machen.

Gar nicht zu rechtfertigen ist aber die *Plural*form der Kopula. „2 und 3“, verstanden als die Summe $2 + 3$, *ist* eine einzige Zahl, und diese („sind“ nicht, sondern) „ist“ (gleich) 5. Will man im Plural sprechen, wie dies als Bedürfniss erscheinen kann in dem Falle, wo die Zahlen „benannte“ sind, wie bei „2 Birnen und 3 Birnen“, so ist zu sagen: „sind zusammen 5 Birnen“, wofern man nicht vorzieht zu sagen: „*gibt*“ (oder „macht“) 5 Birnen.

Eine Ausdrucksweise aber, die, wie gezeigt, den Unterschied zwischen Einzahl und Mehrzahl, kollektiver und genereller Deutung verwischt, kann nur verwirrend auf die jungen Köpfe wirken. [Ebenso dulde der Lehrer nicht, falls a und b Zahlen bedeuten, dass etwa der Schüler spreche, „a *sind* gleich b“ — und dergleichen mehr.]

Sehr misslich erscheint es besonders, wenn das adjektivische (sog. „unbestimmte“) Zahlwort „*alle*“ anstatt generell, einmal kollektiv verwendet wird. Die lateinische hat in dieser Hinsicht schärfer unterschieden als die modernen Sprachen. Sie gebraucht generell nur „*omnes*“, kollektīv dagegen „*cuncti*“ (zusammengezogen aus con-juncti, für „alle zusammengenommen“, joined together). Wir haben im Deutschen noch das Wort „*sämtliche*“, und wäre zu wünschen, dass dieses bislang mit „alle“ synonyme Wort davon differenziirt und mit der gleichen Konsequenz unterscheidend gebraucht würde. Vergl. einen in § 4 besprochenen Fehlschluss.

Abgesehen von den erwähnten Fällen der Zusammenfassung aufgezählter Dinge und der in den Plural gesetzten Hauptwörter, wo ein *grammatikalischer* Grund vorliegen kann, einen (einfachen oder zusammengesetzten) Namen als „Kollektivnamen“ hinzustellen, ist die

*) Philosophen — ich könnte deren namhafte citiren — sollten derartige Nachlässigkeiten des Ausdrucks sich am allerwenigsten zuschulden kommen lassen.

zwischen solchen und Einzelnamen angängige Unterscheidung nur von *psychologischer* Art. Sie ist objektiv nur in soweit begründbar, als eben an dem überhaupt Benennbaren sich fast immer noch irgend welche Teile unterscheiden lassen, und erscheint im übrigen in unser subjektives Belieben gestellt.

Den Namen eines materiellen Körpers z. B. haben wir zunächst keinen Grund, anders als wie als einen „Einzelnamen“ zu bezeichnen. Denselben Namen müssen wir aber als einen kollektiven hinstellen, sobald wir den Körper als eine Atomengruppe studiren. Nach Belieben können wir z. B. auch das Schachbrett als einen Felderkomplex behandeln. Etc.

Die kollektive Vereinigung mehrerer substantivisch benannter Dinge zu einem Ganzen, sowie die kollektive Pluralbildung (resp. -verwendung) ist besonders für die mit Zahl und Maass, mit der Quantität der Dinge sich beschäftigenden Disziplinen von Bedeutung.

Das Studium ihrer Gesetze ist demgemäss aber der *Arithmetik und Grössenlehre* und *nicht* der Logik (*im engern Sinne*) zuzuweisen.

An diesem Scheidepunkte zweigt sich eine grosse Gruppe von Disziplinen von der Logik ab, um sich ihr selbständig und — in Anbetracht des Reichtums der Entwickelung, die sie gefunden — als mindestens ebenbürtig gegenüberzustellen. Und beide Richtungen erscheinen unter diesem Gesichtspunkt ungefähr wie Quantität und Qualität geschieden.

ν_2) Bevor wir das *über* ω_1) charakterisirte Ziel noch weiter verfolgen und den Nachweis der dort aufgestellten Behauptung vollends erbringen, scheint es mir wünschenswert, gleich mit den grundlegenden Betrachtungen über *Namen*, ihre Einteilungen und Unterscheidungsmöglichkeiten hier erst zu Ende zu kommen.

Man pflegt Namen auch noch als *positive* (affirmative, bejahende) oder aber *negative* (verneinende) hinzustellen, wie „nützlich“ und „nicht nützlich“ (nutzlos), „schädlich“ und „nicht-schädlich“ (unschädlich), „Ich“ und „Nicht-ich“.

So unleugbar in der That ein Gegensatz zwischen solchen Benennungen (auch ihrer Bedeutung nach) besteht, von denen die eine als „Verneinung“, Negation der andern sich darstellt und gerade diejenigen individuellen Objekte auszuschliessen scheint, welche die andere umfasst (und vice versā), so kann auf diesen Gegensatz doch nicht etwa eine Einteilung der Namen selbst in „positive“ und „negative“ begründet werden — in Anbetracht, dass es in unser subjektives Belieben gestellt bleibt, *welchen* von den beiden einander „kontradiktorisch entgegengesetzten“ Namen wir als den positiven hinstellen wollen.

So wenn z. B. von geraden Linien in einer Ebene die Rede ist, mögen wir gewisse Paare (oder auch Systeme, Scharen) von solchen Geraden als *„Parallele"* mit einem positiven, andere als *„Nicht-parallele"* mittelst negativen Namens darstellen. Nichts hindert aber auch, die erstern als *„Nicht-schneidende* (Gerade)" negativ, die letztern als „(einander) *Schneidende* (Gerade)" positiv zu benennen.

Positiv oder negativ zu sein, ist daher blos ein äusserliches, sozusagen grammatikalisches Merkmal des Namens, welchem in seiner Bedeutung kein bestimmtes Merkmal entspricht, ein logischer Gehalt überhaupt nicht zukommt, unter Umständen aber wol ein psychologischer.

Nur die Beziehung, der Gegensatz zwischen dem durch eine Bejahung und dem durch deren Verneinung gebildeten Namen fällt wirklich dem Bereich der Logik anheim, und mit diesem Gegensatz werden wir uns auch noch eingehend zu beschäftigen haben. (Genaueres hierüber und über die auf diesen Punkt bezüglichen Kontroversen siehe in der siebenten und achten Vorlesung.)

Einen Stein kann man als „nicht-sehend", dagegen nicht wol als „blind" bezeichnen. Demgemäss noch gewisse unter den für negativ angesehenen Namen als *„privative"* hinzustellen — wie „blind", „taub", „lahm" etc. — hat nur dann Sinn und ist nur motivirbar, wenn uns eine bestimmte Gattung vorschwebt, zu der ein so prädizirtes Individuum gehört. Entbehrt das Individuum nur eines Merkmals, welches seinesgleichen (den andern Individuen ebendieser Gattung) in der Regel (von rechtswegen, im „normalen" Zustande) zukommt, so legen wir jenem das „privative" Prädikat oder Attribut bei. Wegen der einerseits willkürlichen, andrerseits so komplizirten Voraussetzungen (denn was hat wol als „normal" zu gelten?), auf welchen solche Distinktion beruht, ist dieselbe aber für die elementare Logik von ganz untergeordnetem Interesse.

ξ_2) Dagegen lässt eine wirkliche Einteilung der Namen sich gründen auf ihre Unterscheidung als *absolute* (nicht-relative) und *relative.* Ein „relativer" Name ist ein solcher, welcher einem Dinge auf Grund des Umstands beigelegt wird, dass es in einer bestimmten Art von *Beziehung* (Relation) zu einem oder mehreren andern Dingen steht — ein Name also, bei dessen Deutung das Vorhandensein auch dieser letzteren Dinge eine Voraussetzung oder Unterstellung bildet.

Z. B. „Ursache, Wirkung, Grund, Folge, Entfernung, Vater, Sohn, ähnlich, gleich, unähnlich, verschieden" sind lauter relative Namen.

Nichts kann als eine „Ursache" bezeichnet werden, es sei denn als Ursache *von etwas* (anderem), welches seine „Wirkung" zu nennen sein wird. Niemand kann Vater heissen, er sei denn Vater *von* Kindern. „Entfernung" hat keinen Sinn für sich, sondern nur als Entfernung zweier Punkte, Körper oder Dinge im Raume von einander.

Wenn in der Parodie des „Tannhäuser", welche die Breslauer Studentenverbindung Silesia geschaffen, auf die Bemerkung des Landgrafen, der den Tannhäuser aus der Ferne herankommen sieht:

„Mich däucht, ich kenne diesen Wanderer:
Entweder ist er's, oder s'ist ein anderer",

der Dichter den Adjutanten wohldienernd sagen lässt:

„Wen Euer Gnaden meinen, weiss ich nicht —
Doch hat er ein *sehr ähnliches* Gesicht",

so beruht der Witz, resp. die Komik, auf der Verwendung eines relativen Namens, als ob er ein absoluter wäre.

Jene andern Dinge heissen die „Korrelate", ihre Namen die nomina correlativa zu dem, was das nomen relativum bezeichnet; alle miteinander sind die „Beziehungsglieder", membra relationis, und die bestimmte Art der zwischen beiderlei Objekten bestehend zu denkenden Beziehung heisst das „fundamentum relationis".

Das letztere ist oft sehr verwickelter Art, wie bei „Gläubiger", „Schuldner", noch mehr bei „Ankläger" (Kläger), wo das eine Korrelat der „Verklagte" (Beklagte), ein zweites Korrelat das „Delikt", Vergehen, sein würde, dessen der letztere vom ersten beschuldigt wird (resp. die eingeklagte Schuldforderung oder Entschädigungssumme), ein drittes Korrelat der Gerichtshof, das „Forum", vor welchem die Klage anhängig gemacht wird, und endlich ein viertes Korrelat — sofern es nicht durch die vorerwähnten bereits bedingt erscheint und dann nicht mitzuzählen wäre — die Gesetzesbestimmungen, der „Kodex" und Paragraph, auf die sich die Klage beruft.

Das angeführte Beispiel exemplifizirt ein „mehrfaches Relativum" (multiple oder plural relative) im Gegensatz zu dem häufigsten Falle, dem des „zweifachen" (dual relative), wie es z. B. „Wirkung" mit ihrem Korrelate, der „Ursache", darstellen würde.

Auch Abstrakta, wie „Gestalt", „Schönheit" etc. können hienach schon als duale Relative aufgefasst werden (sofern zu fragen ist: wessen?), wobei allerdings in Bezug auf „Schönheit", *wie üblich,* übersehen wäre, dass eigentlich der Geschmack des Publikums oder desjenigen, der dieselbe beurteilt, anerkennt, als ein drittes Glied in die Beziehung eingeht.

Indem wir uns hier mit einer blossen Worterklärung begnügten, verweisen wir in Bezug auf Weiteres und Genaueres auf die letzten Vorlesungen in unserm Buche (24. Vorl.).

o_2) Mit obigem sind unsre Betrachtungen über Namen vorerst zu Ende gekommen, und dürfte es sich darnach empfehlen, die Hauptergebnisse übersichtlich zu rekapituliren. Es konnten unterschieden und einander gegenübergestellt werden:

a) *univoke,* d. h. *einsinnige* (wo nicht *unsinnige*)	und *äquivoke* oder *doppel-* und *mehrsinnige*

Namen — desgleichen auch schon Wörter oder Zeichen überhaupt.

Nicht mehrsinnig zu sein war die fundamentale an das Zeichen zu stellende Anforderung, die auf die Forderung der Konsequenz in seinem Gebrauche hinauslief.

Die Wörter zerfielen in

b) *kategorematische* oder *Namen*	und *synkategorematische* oder *Nichtnamen.*

Die Namen waren entweder

c) *Eigennamen* oder *Gemeinnamen*

— jener ein *Individuum* unter den Objekten des Denkens, dieser (distributiv) eine *Klasse* von Individuen bezeichnend — und es bildete dies die für die Logik fundamentale Unterscheidung, mit deren Besprechung wir uns auf längere Zeit zur Not schon hätten begnügen können.

Die Unterscheidung von

d) *Einzelnamen* und *Kollektivnamen*

liess sich indessen kaum anders als wie grammatikalisch oder psychologisch rechtfertigen, indem ausser dem Nichts (0), der Eins, dem Punkt und dem Augenblick so ziemlich alles Benennbare unter irgend einem Gesichtspunkt als ein Kollektivname hingestellt werden durfte. — Ebenso war von den einander gegenübergestellten

e) *positiven* und *negativen*

Namen nur der Gegensatz zwischen beiden logisch begründbar. — Dagegen erschien jeweils

f) *abstrakt* oder *konkret*

und (bei Gemeinnamen) eventuell auch gemischt „abstrakt-konkreter“ Natur zu sein als ein in der Bedeutung des Namens selbst begründetes Merkmal, auf das zu achten jedoch für die Logik weniger in's Gewicht fallen möchte, als für die Philosophie überhaupt.

Endlich war die Einteilung der Namen in

g) *absolute* und *relative*

wieder eine durchaus belangreiche — wozu unter den Gemeinnamen auch wiederum solche von „gemischtem“ Charakter denkbar wären (indem die Individuen, welche der Gemeinname umfasst, auch teils durch absolute, teils durch relative Namen charakterisirt sein könnten).

Es ist gelegentlich von Wert, sich bei der Verwendung von Namen über diese Verhältnisse Rechenschaft zu geben und darauf bezügliche Fragen vorzulegen.

Recht instruktiv und zu richtiger Anwendung vorstehender Unterscheidungen erziehend ist ein logisches Gesellschaftsspiel: das Ratspiel, bei welchem, unter zeitweiliger Entfernung eines Mitspielenden, sich die übrige Gesellschaft über irgend ein Benennbares, jenem zum Erraten aufzugebendes Objekt des Denkens einigt. Der Ratende hat der Reihe nach an jeden Eingeweihten eine beliebige Frage in Bezug auf das zu erratende Objekt zu stellen, die aber *nur* mit „Ja“ oder mit „Nein“ — und im Zweifelsfalle mit „Ja-nein“ — beantwortet werden darf und korrekt zu beantworten ist; das Fragen mag so lange im Ring herum fortgesetzt werden, bis die Lösung erfolgt, das aufgegebene Objekt vom Ratenden bei seinem Namen genannt, oder aber der Versuch des Ratens aufgegeben wird. Fragen über die Buchstaben und Silben, die den Namen zusammensetzen, sind ausgeschlossen.

Das Spiel gibt oft die überraschendsten Aufschlüsse über die logische und intellektuelle Verfassung einzelner von den beteiligten Persönlichkeiten, und durch die nach erfolgtem Raten häufig sich anspinnende Diskussion als Erläuterung oder Rechtfertigung für gegebene Antworten, sowie durch die zuweilen schon im Laufe desselben mittelst Protests aus der Gesellschaft erfolgende Remedur für eine unrichtig erfolgende Antwort des Einzelnen gibt es vielfach Anregung zur Klärung der Begriffe.

Es können nicht nur individuelle Gegenstände aus der materiellen Welt aufgegeben werden, bei denen die Kategorieen der Zeit und des Ortes meist rasch auf die Spur zu helfen pflegen, sondern auch allgemein gefasste, mittelst Gemeinnamens dargestellte, Objekte — wie z. B. „Schwefelhölzer“. Bei einiger logischen Schulung der Teilnehmer pflegen selbst Abstrakta als Gemeinnamen, wie z. B. „der Sommer“, „Wahrscheinlichkeit“, „der Prädestinationsglaube“, „ein Missverständniss“ und dergl. unschwer geraten zu werden. Als überraschend reichhaltig erweisen sich die Kategorieen des Zweckes bei den Erzeugnissen menschlicher Kunst.

Bedingung für die Lösbarkeit der Aufgabe ist die Einsinnigkeit des zum Raten Aufgegebenen: es muss, falls dessen Name ein doppelsinnig gebräuchlicher sein sollte, die Gesellschaft sich zuvor über eine bestimmte unter seinen Bedeutungen als die hier dem Namen beizulegende geeinigt haben.

Natürlich wird in praxi auch bei dem Ratenden eine Kenntniss von der Existenz des betreffenden Objektes oder wenigstens von seinesgleichen, vorauszusetzen sein. Wer nie von dem neuentdeckten Metall Germanium, vom Neptunsmond Oberon oder von der dunklen (sehr lichtschwachen) Nebensonne des Sirius, vom Sehpurpur, von dem kopflosen Wirbeltier des mittelländischen Meeres, dem Fisch Amphioxus etc. gehört hat, wird solche nicht wol zu raten im stande sein. Und auch bei denjenigen, welchen es obliegt, die Antworten zu geben, muss eine hinlängliche Bekanntschaft mit den Eigenschaften und Ingredienzien, mit dem ganzen Wesen des Ratobjektes vorliegen.

C. Über Begriffe. Einteilung, Definition und Kategorieen, Pasigraphie. Logik des Inhaltes oder des Umfangs? Über Urteile, Schlüsse und deren Folgerichtigkeit. Warum Algebra der Logik.

π_2) Nachdem wir die Notwendigkeit erkannt, dass der sprachenbildende Geist neben Eigennamen auch Gemeinnamen schaffe, drängt sich uns als nächste die Frage auf: *welche* Dinge wir denn je mit demselben Gemeinnamen belehnen sollen?

Behufs ihrer Beantwortung müssen wir uns berufen auf das menschliche *Unterscheidungsvermögen*, ein Vermögen, ohne welches ja kein Studium, keine Wissenschaft, kein Erkennen denkbar erschiene:

Wir sind im stande, Verschiedenes zu unterscheiden und an ähnlichen Dingen Gleichheiten wahrzunehmen.

Die *Gleichheit*, Übereinstimmung (agreement) findet immer nur in einer gewissen *Hinsicht* statt und ist mit Verschiedenheiten (differences), — in anderer Hinsicht — verknüpft, ohne welche uns die miteinander verglichenen Dinge gar nicht als *mehrere* Dinge erscheinen könnten, sondern *identisch, einerlei*, einunddasselbe (oder das nämliche), nur *ein* Ding zu nennen sein würden.

Teile oder Elemente der Vorstellung eines — nötigenfalls vollständig, auch mit allen seinen Beziehungen zu noch andern Dingen — gedachten Dinges, in welchen es mit andern Dingen übereinstimmen oder auch von solchen differiren kann, nannten wir *Merkmale* desselben (genauer gesagt: jeweils das solchen Vorstellungselementen zugrunde liegend gedachte Wirkliche).

Insofern wir häufig ein Ding nicht vollständig auszudenken fähig, müssen wir natürlich neben „bekannten" auch „unbekannte" Merkmale in der Regel zugeben.

Es sei hier nochmals in Erinnerung gebracht, dass (hienach) dem Namen „Merkmal" eine möglichst allgemeine Bedeutung unterzulegen ist; es handelt sich dabei durchaus nicht blos um „Eigenschaften" (oder aber „Thätigkeiten"), die dem Dinge selber, auch wenn es isolirt betrachtet wird, notwendig oder zufällig zukommen (innewohnen), vielmehr kann das Merkmal auch begründet sein in einer „Beziehung", einem Verhältnisse, einer Stellungnahme, welche andere Dinge *zu dem gedachten* einnehmen. Nicht nur gilt uns der Wellenschlag als ein Merkmal des Meeres, sondern es gilt uns auch der Preis, die Käuflichkeit als Merkmal einer Waare. Schon dass er mir, oder einem Andern, *mir nicht*, (als Eigentum) gehört, dass er mir *gefällt*, und dergl. ist als Merkmal eines Gegenstandes hinzustellen, und auch die Abwesenheit bestimmter Merkmalgruppen kann selbst wieder als Merkmal gelten, z. B. als Merkmal einer gewisser Bergspitze, dass noch kein menschlicher Fuss sie je betreten — einerlei auch, ob etwa ein einwörteriger Name dafür vorhanden ist, oder nicht (Merkmal der Jungfräulichkeit oder Unberührtheit des Gipfels, der „Unerstiegenheit"?). Vergl. hiezu besonders § 15. Dass aber z. B. eine Person A um den Tod einer andern B trauert, lässt sich begreiflicherweise — ohne weiteres — nicht

wol ein Merkmal einer dritten Person (oder Sache) C nennen. Im Merkmal muss eine Bezugnahme auf das Ding zu erblicken sein, sobald wir dieses ausdenken.

Wir pflegen nun jeweils solche Dinge mit *demselben Gemeinnamen* zu benennen, welche dadurch, dass sie einander in Hinsicht bestimmter Merkmale gleichen, sich uns sozusagen von selber zur Belehnung mit dem gleichen Namen empfehlen.

ϱ_2) Schon als Vorbedingung und weiterhin im Verlauf dieses Benennungsprozesses sowie bei dem Gebrauch des dadurch geschaffenen Gemeinnamens treten allemal die übereinstimmenden Merkmale jener Dinge in den Vordergrund der Aufmerksamkeit, denn sie gerade bilden das Band zwischen den wechselnden Vorstellungen der individuell verschiedenen Dinge, welche der Gemeinname umfasst, und dem sich gleichbleibenden Namen. Es wird (in Kant's Ausdrucksweise) auf jene übereinstimmenden Merkmale *„reflektirt"*.

Mit dem Gemeinnamen „teuer" (teures Ding) z. B. werden wir verschiedene Gegenstände nur dann bezeichnen, wenn wir auf die Höhe ihres Preises achten, mit dem Gemeinnamen „rund" nur solche, bei denen auf ihre Gestalt wir unser Augenmerk richten und deren Übereinstimmung mit der Kugelgestalt wahrnehmen. Etc.

Infolgedessen aber spielt sich ab, vollzieht sich im Geiste ein eigentümlicher psychologischer Vorgang, welcher darin gipfelt, dass wir mit dem Gemeinnamen einen *„Begriff"* verbinden.

Die übereinstimmenden Merkmale der Dinge, die wir mit demselben Gemeinnamen bezeichnen, *verstärken* sich gegenseitig im Bewusstsein, werden als wiederholt vorgestellte intensiver gedacht, wogegen deren nicht übereinstimmende Merkmale im Bewusstsein zurücktreten.

In unserm Hirn mag diesem Vorgang ein Prozess entsprechen, welcher treffend verglichen worden ist mit der Vertiefung einer Furche des Ackers, wie sie durch wiederholtes Pflügen entlang derselben bewirkt wird. Schopenhauer[1] zieht zum Vergleiche heran: die durch wiederholte und andauernde Umbiegung längs derselben Kanten sich ausbildende Neigung eines Tuches, sich in bestimmter Faltung zu legen. Bei der unzweifelhaften Feinheit der uns grösstenteils noch unbekannten Vorgänge im Gehirne, welche die Denkhandlungen begleiten und deren Erforschung der Physiologie obliegt, sind jedoch beide Vergleiche nur als sehr rohe Annäherungen aufzufassen, als ein blosser Notbehelf zu nehmen.

Beneke fasst obigen Verstärkungsprozess als eine *Anziehung des Gleichartigen* (in unserm Geiste) auf.

σ_2) Es kann diese Wirkung noch mit bewusster Absicht gesteigert werden kraft eines andern Vermögens des Menschengeistes (auf das wir nebenher Bezug zu nehmen schon wiederholt Veranlassung fanden) nämlich des *Abstraktionsvermögens:*

Wir sind im stande, auf gewisse Merkmale eines gedachten *Dinges*, m. a. W. in irgendwelchen Elementen unsrer Vorstellung von demselben, *die Aufmerksamkeit zu konzentriren*, dieselben in das Feld der Aufmerksamkeit zu rücken und daselbst mehr oder minder vollkommen zu isoliren, *indem wir von andern Merkmalen absehen* oder „abstrahiren", d. h. die den letztern entsprechenden Vorstellungselemente im Bewusstsein zurücktreten, eventuell sie völlig aus demselben schwinden lassen.

Solch' bewusste Steigerung des durch den Gemeinnamen schon unbewusst eingeleiteten Abstraktionsprozesses wird — aus Gründen der Arbeitsteilung — besonders in den Wissenschaften praktizirt; in diesen pflegt der Geist durch reichliche Übung eine förmliche Virtuosität zu erlangen, von den (für die Untersuchung) unwesentlichen Merkmalen der Dinge abzusehen, alle Nebenumstände jeweils zu vernachlässigen, dieselben zum Behuf seiner eigenen Entlastung zu ignoriren und so befreit dann seine volle Kraft dem Wesentlichen zuzuwenden.

Durch die Abstraktion überhaupt werden Vorstellungselemente soweit isolirt, dass sie auch allein, in gleicher Isolirtheit, reproduzirt zu werden vermögen. Dadurch erlangen resp. erhöhen wir die Fähigkeit, dieselben *allgemein* zu verwenden, nämlich sowol, mit neuen Vorstellungselementen sie zu verknüpfen, als auch in andern Vorstellungskomplexen als diejenigen waren, *aus* welchen sie abstrahirt*) wurden, sie (genauer ihresgleichen) wiederzuerkennen. Vergl. Sigwart[1].

Nachdem wir z. B. vom Schnee das Merkmal der Weisse, weisser Farbe entnahmen, auslösten, abstrahirten, werden wir das gleiche Merkmal in der vorgestellten Nebelwolke, dem Kochsalz, der Gypsfigur, Papier etc. wiederfinden, und würde sich auch jemand eine weisse Maus z. B. vorstellen können, der niemals eine solche gesehen. — Den Anlass zum Vollzug dieser Abstraktion aber bot die Erfahrung, dass es verschiedene weisse Gegenstände gibt, und die Wahrnehmung dessen, worin sie unter sich übereinstimmen und sich von den nicht weissen unterscheiden. Als auf ein anderes Beispiel sei noch hingewiesen auf das Merkmal der „Kugelgestalt" beim Ball, der Seifenblase etc. und auf das Merkmal der „Gestalt" überhaupt, welches wir bei der Melodie, bei einer nach geographischer Länge und Breite bestimmten Himmelsgegend etc. vermissen (als nicht vorhanden erkennen), nachdem es durch Abstraktion aus der Anschauung räumlicher Dinge von bestimmter Begrenzung gewonnen worden.

Die Abstraktion kann schon an der Einzelvorstellung (repraesentatio singularis) ausgeübt, ihr Verfahren schon auf das Individuum angewendet werden.

*) Die Ausdrücke „*etwas* abstrahiren" und „*von* etwas abstrahiren" sind wohl zu unterscheiden. Ersteres ist gleichbedeutend mit „darauf reflektiren", letzteres mit „davon absehen".

Logisch betrachtet ist es gleichgültig für das Ergebniss eines Abstraktionsprozesses, ob man denselben nur *ein*mal, oder öfters, vollzogen habe, ob an *einem* oder an unzähligen Objekten. Psychologisch aber macht solches einen sehr beträchtlichen Unterschied aus, und es dürfte fraglich sein, ob nicht in dieser Hinsicht es geradezu als eine Vorbedingung für die Möglichkeit des Abstraktionsvollzuges hinzustellen ist, dass wir erst der individuellen Verschiedenheit der durch Abstraktion zu sondernden Merkmale inne geworden seien dadurch, dass durch Vergleichung verschiedener Objekte wir die Übereinstimmung der einen neben der Verschiedenheit der andern wahrgenommen.

τ_2) Wir versuchten vorstehend genetisch auseinanderzusetzen, auf welche Weise wir dazu gelangen, uns einen *Begriff*, notio, conceptus, conception zu bilden von den durch einen Gemeinnamen dargestellten Dingen.

Der Begriff ist das — in gewissem Sinne unvollendet, ein „Ideal" bleibende — Resultat des eben (unter ϱ_2 und σ_2) geschilderten Prozesses.

Sein „Wesen" (essentia), oder, wie man auch sagt, seinen „*Inhalt*" (complexus, intent) bilden eben die gemeinsamen Merkmale der mit dem Gemeinnamen bezeichneten Dinge, und zwar seinen „*faktischen*" Inhalt diejenigen der letztern, auf welche bei seiner Bildung reflektirt wurde, seinen „*idealen*" Inhalt aber die sämtlichen gemeinsamen Merkmale überhaupt, welche als solche erkannt werden könnten, die es aber vielleicht niemals vollständig auszudenken möglich.

Im Gegensatz zu diesem Inhalte wird die Gesamtheit, Klasse der unter dem Gemeinnamen (distributiv) zusammengefassten Individuen bezeichnet als der „*Umfang*" (ambitus, sphaera, extent) des zugehörigen Begriffes.

Beispielsweise sind im Begriffe „materielle Substanz" als dessen Inhalt zusammengefasst die Merkmale: ausgedehnt und von bestimmter Raumerfüllung zu sein, d. i. sich irgendwo im Raume zu befinden, die Merkmale der Beweglichkeit, Undurchdringlichkeit, Trägheit und Schwere, überhaupt die Eigenschaft, der Sitz von Kräften zu sein, dazu von unzerstörbarer und unerschaffbarer Masse, also der Masse nach geschätzt, von ewiger Fortdauer zu sein, das Merkmal, eine Temperatur zu besitzen, und anderes mehr. Seinen Umfang macht alles das zusammen aus, was überhaupt Materie heisst: jeder Körper, jeder Teil eines solchen und jede Gruppe von Körpern im Weltall.

υ_2) Gemäss der hervorgehobenen zwiefachen Hinsicht — nach

Inhalt und Umfang — in welcher Begriffe betrachtet werden können, sind auch zwei Möglichkeiten denkbar, einen Begriff zu bestimmen.

Dies kann nämlich einerseits geschehen durch Angabe seines Umfanges — sogenannte *Einteilung*, *Divisio(n)*, resp. *Partition**) des Begriffes, und andrerseits durch Angabe seines Inhaltes, das ist *Begriffserklärung, Definition*, auch *Beschreibung*.

So würden wir z. B. durch Aufzählung sämtlicher Planeten eine Umfangsangabe (Division, Partition) des Begriffes „Planet“ vollziehen — man würde dazu erst im stande sein, wenn schon alle Planeten bekannt wären. Ebenso aber thun wir dies auch dadurch, dass wir sagen, die Klasse der Planeten zerfalle in die drei Unterklassen der inneren Planeten, der Erde und der äusseren Planeten.

Die Umfangsangabe des grammatikalischen Begriffes *„Satz“* (sentence) wird geleistet durch den Hinweis, dass der Satz entweder ein *Fragesatz* (sentence interrogative) oder ein *Ausrufungssatz* (sentence ejaculative), oder eine *Wunschäusserung* (sentence optative), oder eine *Bitte* (sentence rogative), ein *Befehl* (sentence imperative) oder endlich eine *Aussage* (sentence indicative, statement, lat. enunciatio — ein Urteil, judgement, judicium) sein wird, m. a. W. dass die genannten Gebilde zusammen alles das ausmachen, was man einen „Satz“ nennen kann.

Das Entsprechende leisten wir für den Begriff der „einfachen Farbe“ (im Gegensatz zur Mischfarbe), wenn wir sagen, sie sei entweder rot, orange, gelb, grün, blau oder violet mit allen Abstufungen und Übergängen, wie sie das Spektrum eines weissglühenden festen Körpers zeigt.

So mögen wir ferner den Umfang des Begriffs „Wirbeltier“ kund geben durch den Hinweis darauf, dass mit Einschluss des Amphioxus die Fische, sowie die Reptilien, Vögel und Säugetiere zusammen die Wirbeltiere ausmachen.

Der Ausspruch: „Die Affekte sind: Liebe, Hass, Freude, Kummer, Hoffnung, Furcht, Humor (!) und Zorn“ gibt eine Aufzählung (oder Einteilung des Begriffs) der Affekte.

*) In Bezug auf den Namen „Partition“ ist der Gebrauch unter den Logikern ein schwankender. Viele wollen darunter nur die Angabe der „Teile“ eines Dinges verstanden wissen (z. B. bei der Orange die von Schale, Fleisch und Kernen), wogegen Ueberweg[1] pag. 106 auch die Angabe der „Merkmale (überhaupt)“, indess nur eines Einzeldinges — vergl. nachher ψ_2) — als „Partition“ hinstellt. Ich würde oben diese letztere Bezeichnung der gebräuchlicheren „Division“ vorziehen, in Anbetracht, dass mir für jene „Aufzählung der Teile“ ein einwörteriger Name überhaupt nicht Bedürfniss erscheint, dass ferner Ueberweg's „Partition“ (hier) als ein besondrer Fall der „Definition“ hinzustellen ist, der eines aparten von „Definition“ verschiedenen Namens ebenfalls nicht bedarf, sodass zunächst der Name „Partition“ zu beliebiger Verwendung frei wird, in Anbetracht endlich, dass wir uns genötigt sehen werden, den Namen „Division“ (sowie das Divisionszeichen) in einem von dem obigen gänzlich verschiedenen Sinne späterhin zu gebrauchen, womit dann also eine Doppelsinnigkeit mehr in die Wissenschaft der Logik Eingang fände, die nach unserm Vorschlag vermieden wird.

Die *Einteilung* kann geradezu auf eine *„Klassifikation“* hinauslaufen, sofern man nämlich bei ihr nicht (oder nicht durchaus) auf die Individuen selbst zurückgeht, sondern dabei sich auf gewisse Unterklassen als dem Umfange nach schon bekannte Begriffe (die sog. „Einteilungsglieder“, membra divisionis) beruft. Durch an sie gestellte wissenschaftliche Anforderungen wird indess der Begriff der „Klassifikation“ noch weiter eingeengt.

Fortgesetzte Einteilung auch der zunächst sich darbietenden Unterklassen oder Teilungsglieder führt in letzter Instanz (zuguterletzt) immer auf die *Individuen* als etwas (dem „Umfange“ nach) „nicht“ weiter „Teilbares“ (zurück).

Umfasst — wie in der grossen Mehrzahl der Fälle — der Umfang eines Begriffes *unbegrenzt viele* Individuen, ist deren Klasse eine *offene*, so lässt sich dieser Umfang niemals erschöpfend angeben dadurch, dass man auf die Individuen selbst zurückgeht; vielmehr sieht man sich alsdann genötigt, zur Umfangsangabe auch solche Unterklassen heranzuziehen, die selbst wieder offene sind, und entweder als schon bekannte vorauszusetzen sind, oder, wenn sie erklärt werden sollen, dies nur vermittelst *Inhalts*angabe, Definition eines ihnen zugehörigen Begriffes zu werden vermögen. Bekannt wiederum konnten zwar die Individuen einer beliebig grossen Menge noch einzeln, der unbegrenzte Rest jedoch ebenfalls nur durch Innewerdung ihres begrifflichen Inhalts geworden sein.

Exempel: Die unbegrenzte Reihe der Individuen, welche wir „natürliche Zahlen“ nennen, lässt sich zwar beliebig weit, doch niemals fertig aufzählen. Irgendeinmal muss die begriffliche Bestimmung derselben eintreten, und am besten geschieht dies gleich von vornherein; man wird sie „definiren“ als „Summen von Einern“, d. i. als die Ergebnisse eines Verfahrens, durch welches hinter 1 fort und fort $+ 1$ angehängt wird.

Ebenso lassen sich die Punkte, die innerhalb einer gegebenen Ellipse liegen, nur durch ebendies Merkmal, oder auf eine darauf zurückkommende Weise, sie lassen nur begrifflich sich allesamt bestimmen.

Die Umfangsangabe erscheint darum als das unvollkommnere der beiden Mittel, einen Begriff zu bestimmen. Zudem überlässt sie uns noch ungelöst die Aufgabe, erst den Komplex der in allen unter den Begriff fallenden Individuen übereinstimmenden Merkmale ausfindig zu machen, zu entdecken, durch deren Verknüpftsein dieselben von allen nicht unter diesen Begriff fallenden Individuen unterscheidbar sind. Sie lässt somit das Wesen des Begriffes unerörtert, lässt uns den Reifen vermissen, der gleichsam als Fassdauben die Individuen erst zusammenhält.

Auch ist noch ein Umstand zu beachten: Wenn wir die Bestimmung eines Begriffs durch Umfangsangabe versuchen, so erscheint die Auswahl der Objekte des Denkens, die als seine Individuen hinzustellen sind, von vornherein in unser Belieben gestellt. Wie immer man auch solche Auswahl treffen mag, so lässt sich in dem Zufall, der unsre subjektive Willkür lenkt und sie gerade auf diese und auf keine andern Objekte als die zu Individuen zu erhebenden (vielleicht auf's Gerathewohl, at random) verfallen lässt, in der That ein ebendiesen und nur diesen Individuen gemeinsames Merkmal erblicken, in gewissem Sinne also auch von einem „Begriffe" reden, welcher der so gebildeten Klasse von willkürlich zusammengelesenen Objekten zugeordnet wäre.

Indessen leuchtet ein, dass solchermassen künstlich geschaffenen, „erkünstelten" Begriffen ein wissenschaftlicher Wert in der Regel nicht zukommen wird. Ein solcher wird wol nur solchen Begriffen zuzusprechen sein, die entweder entsprungen sind aus der Erkenntniss übereinstimmender Merkmale an *gegebenen* Objekten, die diesen unabhängig von subjektiver Laune notwendig oder faktisch zukommen, oder welche dadurch, dass sie ein gegebenes, ein bestimmt *angebbares* Merkmal enthalten, eben dienen sollen Objekte unsres Denkens zu bestimmen.

Wenn schon sie allerdings missbraucht werden könnte, so wird es gleichwol nicht ratsam erscheinen, der Freiheit der Begriffsbildung irgend welche Schranken von vornherein aufzuerlegen. Vergl. γ_3).

φ_2) Die Begriffserklärung, Definition*), zu der wir nach obigem zum Behufe der Begriffsbestimmungen greifen werden, sieht sich vor eine andere Schwierigkeit gestellt.

Zunächst lassen die Merkmale, welche den unter einen Begriff fallenden („zu seiner Kategorie gehörigen") Individuen „gemeinsam" sind, und welche in ihrer Verbindung dessen *idealen* Inhalt ausmachen, sich überhaupt nie vollständig aufzählen. Der volle Inhalt des Begriffs lässt nie sich fertig „beschreiben". Denn wieviele Merkmale man auch schon berücksichtigt haben mag, so werden sich stets noch neue gemeinsame Merkmale angeben lassen, auf welche noch nicht geachtet worden ist. (Vergl. nachherige Beispiele.)

Die Definition verzichtet daher in der That auf die *unmittelbare* Angabe des ganzen Begriffsinhaltes. Sie begnügt sich, direkt, *explicite*, nur einen Teil desselben, den Rest aber blos *mittelbar*, *implicite* anzugeben, indem sie unter den übereinstimmenden Merkmalen eine gewisse Gruppe hervorhebt von solchen Merkmalen, welche die übrigen alle involviren, mitbedingen, nach sich ziehen, zur Folge haben — sei es

*) Wir sprechen hier nur von der (allein als haltbar zu erkennenden) „*Nominaldefinition*" der schulmässigen Logik und betrachten das unklare Ideal der sog. „Realdefinition" als durch die Ausführungen von Mill, Sigwart und Andern abgethan.

auf Grund logischer Denknotwendigkeit allein, sei es auch mit denknotwendiger Bezugnahme auf die anerkannten Grundsätze einer wissenschaftlichen Doktrin, wie die Naturgesetze, Rechtsnormen und dergl.

Diese in der Definition hervorgehobenen Merkmale können als *charakteristische* oder „wesentliche" Merkmale des Begriffes (notae essentiales) hingestellt werden; doch ist nicht zu übersehen oder zu vergessen, dass die Bedeutung dieses Namens ein willkürliches Moment in sich schliesst, indem schon Beispiele darthun, dass für denselben Begriff als für ihn charakteristische sehr verschiedene Merkmalgruppen erwählt werden können.

Ein Beispiel zur Erläuterung dieser allgemeinen Bemerkungen: Wir mögen den Kreis (aufgefasst als Kreis*linie*) regelrecht definiren als eine geschlossene, ebene Kurve, deren sämtliche Punkte von einem bestimmten Punkt (etwa ebendieser ihrer Ebene, dem alsdann sogenannten „Mittelpunkte") gleichweit abstehen. [Etwas kürzer gefasst könnte die Definition auch lauten: „Kreis" ist der „geometrische Ort" — d. i. die Gesamtheit der möglichen Lagen — eines („desjenigen") Punktes in einer Ebene, welcher konstanten Abstand hat von einem festen Punkt in dieser Ebene.]

Auf Grund der geometrischen Axiome folgt alsdann denknotwendig der Satz von der Gleichheit aller Peripheriewinkel, welche auf demselben Bogen stehn, im Kreise. Dieser Satz thut aber weiter nichts, als: auf ein weiteres Merkmal, welches allen Kreisen gemeinsam ist, aufmerksam machen, solches konstatiren. Und zwar würde hier sogar sich beweisen lassen, dass dieses Merkmal (wenn auf gewisse Art formulirt) unter allen ebenen Kurven *nur* einem Kreise zukommen kann, weshalb man dasselbe auch benutzen könnte um eine gültige, jedoch von der vorigen gänzlich verschiedene Definition des Kreises aufzustellen.

Ebenso hätten wir aber auch definiren können „Kreis sei eine solche ebene (geschlossene) Kurve zu nennen, welche bei gegebenem oder nicht zu überschreitendem Umfange den grösstmöglichen Flächeninhalt hat. Daraus folgt dann schon logisch allein (wenigstens, falls zugegeben wird, dass der vorigen Definition allemal ein wirklicher Kreis entspricht, ohne Berufung auf weitere geometrische Axiome), dass diese Kurve auch bei gegebenem Flächeninhalt den kleinstmöglichen Umfang haben muss — was folglich ebensogut zu einer Definition des Kreises hätte mitverwendet werden können.

Offenbar sind es Gruppen von zum Teil recht verschiedenen Merkmalen — wir brauchen sie nicht in einzelner Aufzählung zu wiederholen — die in diesen verschiedenen Definitionen als wesentliche Merkmale des Kreises hingestellt wurden. Die einen ziehen aber schon die andern auf Grund der geometrischen Doktrin nach sich.

Den idealen Begriff des Kreises würde jemand erst dann besitzen, wenn alle möglichen für alle Kreise übereinstimmenden Eigenschaften und Relationen (Thätigkeiten fehlen hier) seinem Geiste gegenwärtig wären, in seinem Bewusstsein vereinigt würden. Derselbe müsste darnach alle (unter anderm auch alle geometrischen) Sätze, die überhaupt als von jedem Kreise gültig ausgesagt werden könnten (auch in Bezug auf seinen Schnitt, seine Berührungen mit andern seinesgleichen sowie mit irgend welchen Kurven und Figuren, auch in Bezug auf Scharen von seinesgleichen, die Kreisschnitte der Flächen etc., nicht zu vergessen seiner Gleichung und analytischen Eigenschaften in *jedem* Koordinatensysteme) schon kennen. Nun lässt sich aber die Möglichkeit nicht leugnen, dass fort und fort neue und allgemeingültige Sätze vom Kreise entdeckt werden. Den idealen Begriff des Kreises besitzt sonach niemand, sondern es ist seine Verwirklichung ein Ziel, auf das die Wissenschaft erst hinarbeitet.

Ein altbekanntes Beispiel, wie man in Bezug auf die Auswahl der als „wesentliche" zur Begriffsbestimmung ausreichenden Merkmale sich versehen kann, liefert Platon's Definition des Menschen als eines zweibeinigen Tiers ohne Federn, welche dessen Schüler Diogenes durch einen gerupften Hahn persiflirte. Bezug sollte bei jener Definition genommen sein auf die anerkannten Thatsachen der Naturgeschichte.

Für einen gegebenen Begriff hat demnach der Ausdruck „die wesentlichen Merkmale" keinen bestimmten Sinn, sofern damit nicht auf eine bereits getroffene Auswahl hingewiesen wird; man kann vielmehr von vornherein nur reden von „einer" Gruppe charakteristischer Merkmale.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass eine Definition (auf extralogischem Gebiete) überhaupt nur *innerhalb des Rahmens einer bestimmten Wissenschaft* eines bestimmten Sinnes teilhaftig sein wird — indem sie eben auf die Grundsätze, Axiome einer solchen stillschweigend Bezug nimmt.

Z. B. durch die oben gegebene Begriffserklärung des Kreises würde dieser Begriff in andrer Weise und *als ein andrer* bestimmt, wenn dabei auf die Axiome etwa einer *nicht*-euklidischen Geometrie Bezug genommen werden sollte — anstatt, wie dies oben stillschweigend geschah — auf die der Euklidischen. Es mag sogar der Fall eintreten, dass verschiedene unter den gleichberechtigt zu nennenden, weil einander gegenseitig bedingenden Definitionen des Kreises dort in der That wesentlich verschiedene Begriffe bestimmen, einander nicht mehr gegenseitig zur Folge haben.

Unter allen Umständen aber stützt und beruft sich die Begriffsbestimmung mittelst Definition ganz unvermeidlich (mit) auf die Gesetze des denknotwendigen Folgerns; *sie setzt die deduktive Logik bereits voraus.*

χ_2) Nun stehen zunächst uns nur diejenigen Begriffe zur Verfügung, die mit den fertigen Gemeinnamen der Sprache verknüpft sind und so uns gegeben erscheinen. Diese mögen jeweils durch beigegebene Erläuterungen von jedem Doppelsinn gereinigt, vor solchem fernerhin bewahrt werden, sodass wir mit ihnen einen unveränderlichen und scharfbestimmten Vorstellungsinhalt (vorbehaltlich dessen durch die

fortschreitende Erkenntniss bedingten Zuwachses) verknüpfen. Zur Aufstellung aller ferneren Begriffe von unbegrenzt allgemeiner Anwendbarkeit steht uns dann, wie gezeigt, nur das Mittel der Definition zur Verfügung, bei dessen Anwendung allemal die Logik schon vorausgesetzt werden musste.

Dieser Umstand legt mir erstmalig eine Bemerkung nahe, für die ich noch anderweitige und ausschlaggebende Gründe in's Feld zu führen haben werde. Schon im Hinblick darauf scheint mir nämlich das Bestreben: die Logik selbst als eine Logik des Begriffs*inhaltes* darzustellen, wie es seit Jahrtausenden vorwiegend zu verwirklichen gesucht worden, ein Hysteron-proteron zu sein; es wird damit, wie mich dünkt, das unterste zu oberst gekehrt, genauer: das oberste zu unterst.

Es würde mir bedauerlich erscheinen, es würde ja zu einem Zirkel nötigen, wenn die Grundgesetze folgerichtigen Denkens sich nicht darlegen liessen, ohne diesen subtilsten und schwierigsten Teil der Logik, wenn man will auch den höchsten, schon vorauszusetzen, als welcher die Lehre von den *Inhalten* der Begriffe (den Endzielen der Wissenschaft überhaupt) scheint hingestellt werden zu müssen.

In der That aber zeigt schon in ihrer bisherigen Entwickelung — wie F. A. Lange[1] pag. 147 hervorhebt — die Logik eine zunehmende Tendenz, von einer Lehre des Inhalts eine solche des *Umfangs* zu werden. Der letztern, deren konsequente Durchführung von diesem scharfsinnigen Autor bislang vermisst wird, weissagt derselbe eine „Zukunft" — mit reicher Entfaltung.

Wir versuchen hier, die Verwirklichung dieser Voraussagung mit anzubahnen. Wenn wir auch die verschiedenen Seiten der Frage noch eingehend beleuchten werden, so sei es doch hier schon ausgesprochen, dass wir die Logik als Lehre von den Urteilen und Schlüssen rein nur als eine *„Logik des Umfanges"* darstellen werden — desgleichen *zunächst* auch die Lehre von den Begriffen. Damit glauben wir auch den *leichtesten* Weg einzuschlagen, auf welchem sich mit gegebenen Kräften am weitesten wird kommen lassen.

ψ_2) Auch das individuelle oder *Einzelding* wird als „Begriff" mit zugelassen; es ist der Komplex aller seiner Merkmale, durch deren eigenartige Verbindung miteinander es sich von allen andern Objekten des Denkens unterscheidet und so als ein vollkommen bestimmtes sich darstellt. In ihm und mit ihm selbst fällt Inhalt und Umfang seines Begriffes in eins zusammen.

Durch diese Einziehung des Einzeldinges unter die (bisher nur als *„allgemeine"* betrachteten) „Begriffe" erweitern wir die Auffassung, die wir mit dem Worte „Begriff" verbinden. Wir geben damit kund, dass uns als das Charakteristische beim Begriffe (als das Wesen vom Begriff des Begriffes) nur eben das erscheint, dass unter seinem Namen eine *bestimmte von allen andern unterscheidbare Merkmalgruppe*, ein bestimmter Vorstellungsgehalt*) — in eigenartiger Verknüpfung**) — zusammengefasst und in unabänderlich *konstanter* Weise diesem Namen zugeordnet werde.

Mit Sigwart (l. c.) betrachten wir als „das Ziel der Begriffsbildung im logischen Sinne eine für alle Denkenden gleiche *Ordnung ihres mannigfaltigen Vorstellungsgehaltes* und damit die allseitige planmässige Vollendung dessen, was die Sprache überall schon mit unbewusster Vernunft begonnen hat".

In und mit dem Begriff wird in der That *verglichen:* es wird Übereinstimmendes zusammengefasst und Nichtübereinstimmendes auseinandergehalten. Und die Wahrnehmung aller Verschiedenheiten sowie die aller Übereinstimmungen (auch nach der Seite der Relationen, wie Grund und Folge, Ursache und Wirkung) wird die Erkenntniss des Weltganzen zusammensetzen.

Die Wissenschaft aber geht darauf aus, nicht nur logisch vollkommene, sondern auch die *zweckmässigsten* Begriffe zu gewinnen, mit Hülfe deren und ihrer Bezeichnung die grösstmögliche Einfachheit und Abkürzung unsres Wissens zu erreichen ist und die wertvollsten und umfassendsten allgemeinen Urteile ermöglicht werden. (Vergl. Sigwart[1] p. 272 u. 273.)

ω_2) Kehren wir nochmals zu unsrer Betrachtung der Definition zurück. Bei der Erklärung eines Begriffs mittelst Definition konnte es sich nicht um die Angabe eines *einzigen* Merkmals als des „wesentlichen" handeln. Es müsste sonst das zu Erklärende mit Demjenigen, wodurch es erklärt werden soll, sich dem idealen Vorstellungsgehalte nach schon von vornherein decken und würde ein völlig identisches Urteil resultiren, wie z. B. „Weiss heisst etwas Weisses", „Wahrheit ist, was wahr ist"; es könnte höchstens die Erläuterung des Sinns eines Wortes vermittelst eines damit synonymen vorliegen, wie etwa

*) Ich glaube mich darin in Übereinstimmung mit Sigwart zu befinden — vergl.[1] pag. 270. Doch möchte ich, im Hinblick auf das Unvollendetbleiben der Begriffe nach der Seite ihres idealen Inhaltes, seiner Forderung der *„festen Begrenzung"* die obige der *Bestimmtheit* vorziehen.

**) Dieser Zusatz ist eigentlich überflüssig, indem die Art und Weise, wie Merkmale miteinander verknüpft auftreten, selbst schon unter die Merkmale eingerechnet werden mag. Die *„sichere Unterscheidung"* eines Begriffs von allen andern wird notwendig mit ihm selbst gegeben sein, sobald nur sein Inhalt hinreichend entwickelt.

„Rotation ist eine Drehung", „Zweifel ist Ungewisssein" und dergl. — was aber niemand als eine Definition gelten lässt.

Als charakteristisch kann immer nur eine Mehrheit, Gruppe, *ein System* von (allermindestens zwei) angebbaren *Merkmalen* in Betracht kommen — welche dem Begriffsinhalte angehören, in ihm enthalten sind.

Würde eines von diesen Merkmalen durch die übrigen von selbst bedingt" (in dem schon erläuterten Sinne), so wäre seine Anführung überflüssig; dasselbe ist dann aus der Definition — behufs deren Vereinfachung — fortzulassen; dann sind ja schon die übrigen Merkmale zur Bestimmung des Begriffes ausreichend.

Jedes von diesen Merkmalen wird nun aber, ausser in dem zu definirenden, auch noch selbständig oder in andern Begriffen auftreten, denn wenn ein solches jenem *ausschliesslich* angehörte, so würde es allein schon für den zu definirenden Begriff charakteristisch sein, zur Bestimmung desselben ausreichen; die Angabe der übrigen Merkmale könnte alsdann unterbleiben und kämen wir auf den oben schon als ausgeschlossen erkannten Fall zurück.

Die in der Definition je als „wesentliche" verwendeten Merkmale müssen also, je für sich, gleichwie einen *„engeren"* Inhalt, so einen *„weiteren"* Umfang haben; sie werden dem zu definirenden *„übergeordnete"* oder mit ihm verglichen *„höhere"* Begriffe sein.

Von diesen Begriffen oder wesentlichen Einzelmerkmalen pflegt man irgend einen — gewöhnlich den durch ein Substantiv dargestellten — als *„genus proximum"*, d. i. als die dem zu definirenden („Art"-) Begriffe *nächst übergeordnete „Gattung"* zu bezeichnen, und sagt von dieser, dass sie durch die noch ferner hinzutretenden Merkmale eingeschränkt, noch näher bestimmt, *„determinirt"* werde.

Jedes neu hinzutretende Merkmal muss in der That, gleichwie es den faktischen durch die bisherigen Merkmale ausgedrückten Vorstellungs*inhalt vermehrt,* so auch den (möglichen) *Umfang* des von letzterm bestimmten Begriffes wirklich *verringern,* ansonst es ja von diesen bereits thatsächlich mitbedingt sein und darum seine Erwähnung überflüssig erscheinen würde.

Diese in der Definition zu dem genus proximum noch hinzutretenden Merkmale werden demgemäss als *„differentiae specificae"* bezeichnet, weil sich durch ihren Komplex, sowie auch schon durch jedes einzelne von ihnen der zu definirende Begriff als eine Unterart des genus proximum von andern Arten dieser Gattung spezifisch unterscheidet.

So erscheint bei unsrer (ersten) Definition des Kreises der Begriff „Kurve“ (oder Linie) als nächst übergeordnete Gattung. Dieser ist von weiterem Umfange und dürftigerem Inhalte als der Begriff „Kreis“ selbst. Der Kreis erscheint als eine „Art“ unter der „Gattung“ der Kurven. Als spezifische Unterschiede treten in unsrer Definition drei Merkmale zu dem Begriff der Kurve hinzu, nämlich das Merkmal „geschlossen“ zu sein, „eben“ zu sein und „gleichen Abstand ihrer Punkte vom Mittelpunkte zu haben“.

Liessen wir das erste fort, so würde die Definition auch jeden Kreis*bogen* umfassen (resp. als einen „Kreis“ hinstellen), ja — bei hinreichend allgemeiner Fassung des Begriffs „Kurve“ — auch jedes System von Bögen und vielleicht isolirten Punkten *derselben* Kreislinie.

Durch Weglassung auch des zweiten Merkmals der Ebenheit bekämen wir einen Begriff, unter dessen Umfang ausser den Kreisen und Kreisbögen auch jeder Linienzug auf einer Kugelfläche fallen würde — der auf eine starre Kugel (als mathematische Linie) geschriebene Namenszug des geehrten Lesers zum Beispiel. Etc.

Was Kurve, was eben, was geschlossen ist, was gleichen Abstand seiner Punkte von einem nämlichen Punkte hat, das sind lauter höhere oder dem des Kreises übergeordnete Begriffe.

Wenn sonach die Definition eines Begriffes nur vermittelst anderer, demselben übergeordneter oder höherer Begriffe geleistet zu werden vermag, so wird man bei fortgesetzter Bestimmung auch dieser und der folgenden Begriffe mittelst Definition schliesslich bei solchen Begriffen anlangen und innehalten müssen, welche als die allgemeinsten, dem Umfange nach weitesten oder höchsten, einer Definition nicht weiter fähig sind, da sich zu ihnen höhere Begriffe (ausser dem einen allumfassenden des *„Etwas“*) nicht mehr angeben lassen (resp. im Begriffsvorrat der Sprache nicht vorfinden).

Solche selbst nicht definirbare, aber zur Definition anderer verwendbare Begriffe nennt man *„Urbegriffe“* oder *„Kategorieen“*. Dieselben werden dann einfach als von Anfang bekannt, nämlich mit der Sprache selbst gegeben vorauszusetzen sein.

Welches sind nun aber jene Kategorieen, die zum Aufbau aller andern Begriffe ausreichen würden?

Ein erster — nach der zutreffenden Kritik von Mill und Andern noch ziemlich misslungener — Versuch zur Aufstellung einer Kategorieentafel ist bekanntlich von Aristoteles gemacht. Auch haben Kant, Mill selbst, Peirce[1c], Sigwart und Andere schon bessere Vorschläge für das ganze Gebiet oder für einzelne Teilgebiete des Denkens zu machen gewagt. Ich hoffe einleuchtend zu machen, dass und warum derartige Versuche als verfrühte zur Zeit noch nicht zum Ziele führen können.

α_3) Immerhin ist uns mit Obigem das Ideal erwachsen, unser gesamtes Begriffssystem zu einem wissenschaftlich streng gegliederten zu gestalten, indem wir die Begriffe alle aus möglichst wenigen *Ur-* oder *Grundbegriffen* vermittelst möglichst weniger *Grundoperationen* (zu denen die Determination gehören wird) systematisch aufbauen. [Die Begriffe dieser Operationen werden selbst zum Teil den Urbegriffen in gewissem Sinne zuzuzählen sein].

Nachdem erkannt ist, wie viel der menschliche Geist dem Zeichen verdankt, dürfen wir die Möglichkeit nicht ungenutzt lassen, das Zeichen noch weiter auszubilden. Es bietet sich die Aufgabe dar, durch angemessene, adäquate Gestaltung des Zeichens Zeichen und Sache durchweg in gesetzmässiges Entsprechen zu bringen, oder (mit den Worten Trendelenburg's) die Gestaltung des Zeichens und den Inhalt des Begriffs in unmittelbare Berührung zu bringen, indem wir statt des in der Sprache gerade vorhandenen Wortes solche Zeichen ersinnen, welche die im Begriff unterschiedenen und zusammengefassten Merkmale unterscheidend und zusammenfassend darstellen.

Auf einzelnen Gebieten hat die Wissenschaft aus eigenem Bedürfniss schon Anfänge einer solchen Begriffsschrift hervorgebracht. Das Verfahren, durch welches mit unsern Ziffern die nach dem zehnteiligen Gesetz fortschreitende Zahlenbildung ausgedrückt wird (vergl. ζ_2), ist ein hervorragendes Beispiel dazu, an welchem es sich (in der Arithmetik und höheren Rechnung) deutlich zeigt, wie mit dem zutreffenden Zeichen die Herrschaft über die Sache, die Einsicht und Kunst des Menschen in unübersehbarer Wirkung zunimmt. Mit dem „notwendigen“, d. h. gemäss der Forderung höchster Angemessenheit als solches sich aufdrängenden Zeichen muss sich die Erkenntniss der bezeichneten Gebiete notwendig weiter und weiter erschliessen.

Eine solche Bezeichnung wird, wenn sie auf das *ganze* Feld der Gegenstände des Denkens ausgedehnt zu werden vermag, im Gegensatz gegen das dem Inhalte der Vorstellungen mehr oder weniger gleichgültige Zeichen des Wortes, eine *charakteristische Sprache* der Begriffe, *„Begriffsschrift“*, und im Gegensatz gegen die besonderen Sprachen der Völker eine *allgemeine* Sprache der Sache *(Pasigraphie)* sein (ibid.). Hiermit sind wir angelangt bei dem Gedanken einer philosophisch wissenschaftlichen *Universalsprache*.

Derselbe war zuerst von Des Cartes erfasst, dann von Leibniz vertieft; doch blieben die beiderseits gemachten Vorschläge mehr Umriss und Versprechen, als Ausführung und Leistuug. Ich folge mit den hierauf bezüglichen Bemerkungen wieder Trendelenburg (l. c.). Cartesius (Epistolae I, 111 in der Amsterdamer Ausgabe von 1682, p. 353 sqq.) verlangt, dass eine ähnliche Ordnung unter den Ideen, welche möglich sind, her-gestellt werde, wie es eine natürliche Ordnung unter den Zahlen gibt. Und wie jemand in einem Tage lernen kann, in einer unbekannten Sprache alle Zahlen in's unendliche zu benennen und zu schreiben, obwol sie mit unzähligen verschiedenen Wörtern bezeichnet werden, so könne ähnliches mit den übrigen zum Ausdruck der menschlichen Gedanken notwendigen Wörtern geschehen. Die Erfindung einer solchen Sprache hänge von der wahren Philosophie ab*); denn ohne diese sei es unmöglich, alle Ideen der Menschen aufzuzählen oder zu ordnen und so zu unterscheiden, dass sie deutlich und einfach wären. Erst wenn man deutlich entwickelt hätte, welches die einfachen Vorstellungen, und aus welchen Elementen die Gedanken zusammengesetzt sind, und wenn dies in der Welt anerkannt worden: so lasse sich eine allgemeine Sprache hoffen, welche leicht zu lernen, auszusprechen und zu schreiben wäre und welche überdies, was die Hauptsache, unsre Urteilskraft fördern würde, indem sie alles so deutlich und unterschieden darstellte, dass eine Täuschung unmöglich würde, während umgekehrt unsre Wörter nur verworrene Bedeutungen haben, an welche sich der menschliche Geist so lange Zeit gewöhnt hat, dass er fast nichts vollkommen einsehe. Cartesius setzt hinzu, dass er eine solche Sprache und die Wissenschaft*), von welcher sie abhängt, für möglich halte; mit ihrer Hülfe werde dann ein Bauer über die Wahrheit der Dinge besser urteilen, als jetzt ein Philosoph. Aber man solle nicht hoffen, sie je zu erleben, denn das setze grosse Veränderungen voraus und es sei dazu notwendig, dass sich die Welt in's Paradies verwandle.

Leibniz indessen hatte kühneren Mut, obwol er die vorangegangenen Versuche*) und ihr Vergebliches kennt.

Des Letztern (nicht von ihm herausgegebenen) Aufsätze über die Pasigraphie sind betitelt: historia et commendatio linguae characteristicae universalis quae simul sit ars inveniendi et judicandi, desgl. dialogus de connexione inter res et verba et veritatis realitate (1677).

Schon die Namen, welche Leibniz dem Unternehmen gibt, kündigen seine Bedeutung an. Bald nennt er es *lingua characteristica universalis*

*) Man sieht hier schon den grossen Unterschied, welcher besteht zwischen dem *logischen* Ideal der „Pasigraphie" und dem linguistischen einer „Weltsprache", wie es heutzutage die Volapükisten anstreben. Gleichwie die Letzteren es thun, so bezweckten auch die erwähnten vorangegangenen Versuche blos, eine Verständigung zu erzielen zwischen Solchen, die in der Sprache einander fremd sind. Durch die allerdings nicht gering anzuschlagende Beseitigung aller Unregelmässigkeiten vereinfachen sie zwar erheblich die Grammatik, übernehmen aber ohne weiteres fast alle sonstigen logischen Unvollkommenheiten unsrer faktischen Kultursprachen, schliessen an diese sich als an etwas schlechthin Gegebenes an.

Solcher vorgängigen Versuche führt schon Trendelenburg uns eine ziemliche Anzahl (beiläufig fünfe, von Kircher, Becher, Dalgarn, Wilkins und Trede) an. Das ohne Jahreszahl, Druckort und Namen des Verfassers unter dem Titel: „Vorschläge einer notwendigen Sprachlehre" um 1811 erschienene Werk von Ludwig Benedikt Trede, welches den Grundgedanken des Volapük schon vollständig (indess wol weniger einfach) in seiner Art verwirklicht, konnte ich von der Königlichen Bibliothek zu Berlin entleihen. Einer noch umfassenderen

oder das *Alphabet der menschlichen Gedanken,* bald hingegen *calculus philosophicus* oder *calculus ratiocinator.* [In jenem Briefe vom Jahre 1714 nennt er es *spécieuse générale* — ein Name, welcher an die Verwandtschaft mit der geometrischen Analysis erinnert, da diese, seit Vieta Buchstaben als *allgemeine* Zeichen von Grössen in sie einführte, *analysis speciosa* hiess.] Diese Namen zeigten schon das Ziel, das Leibniz vor Augen hatte: es war eine adäquate und allgemeine Bezeichnung des Wesens der Begriffe durch eine solche Zergliederung in ihre Elemente, dass dadurch eine Behandlung derselben durch Rechnung möglich werden sollte; sein Unternehmen, sagt Leibniz, müsse zustande kommen *characteribus et calculo* als eine *combinatoria characteristica.*

Von den Prinzipien her hofft er Befestigung der Erkenntniss, Verhütung des Widerspruchs, Ausschluss des Streites (man werde, wo solcher droht, einfach sagen: Lasst uns friedlich die Sache berechnen!). Leibniz erwartet einen Einblick und eine Übersicht, durch welche mitten in der sich ausdehnenden Masse der Erkenntniss dennoch die Wissenschaften sich abkürzen, und insbesondere hofft er durch die Einsicht in die einfachen Elemente und deren Verbindungsweisen auch fortschreitende Erkenntniss des Besonderen, Entdeckungen und Erfindungen.

Die Verwirklichung des gedachten Ideals einer wissenschaftlichen Klassifikation und systematischen Bezeichnung alles Benennbaren muss aber nach dem oben von uns Angeführten zur Voraussetzung haben: die vollendete Kenntniss der die Begriffselemente zu verknüpfen bestimmten Grund*operationen* und die Bekanntschaft mit deren Gesetzen. Diese Vorarbeit hat die Logik zu leisten, und solange sie — wie dermalen — unvollendet ist, können Versuche erwähnter Art von Erfolg nicht gekrönt sein.

Vorher schon Kategorieentafeln aufzustellen scheint mir kaum verdienstlicher, als der Hinweis auf einen Haufen Steine als auf die Bausteine zu einem wundervollen Baue, dessen Plan jedoch noch niemand gesehen hat, und bei welchem auch das Bindemittel, der Kitt zum Zusammenhalten der Steine, vergessen ist.

Jene die Begriffe verknüpfenden Operationen werden wir hier in der That erst zu studiren haben.

Und ihre Gesetze werden wir in bestimmten Grenzen vollständig erforschen, aber allerdings zunächst nur für die elementarsten Ver-

Reihe derartiger Versuche gedenkt Herr Guntram Schultheiss in einem Aufsatze über „Künstliche und natürliche Weltsprachen" in Westermann's Monatsheften vom Sept. 1886, p. 796 .. 807.

Des Raimundus Lullius „Summulae logicales" war hierbei nicht Erwähnung zu thun. — Dass Herrn Frege's „Begriffsschrift"[1] diesen ihren Namen nicht verdient, sondern etwa als eine in der That logische (wenn auch nicht zweckmässigste) Urteilsschrift zu bezeichnen wäre, glaube ich in meiner Rezension[4] dargethan zu haben.

richtungen des Denkens, wie sie als solche sich darbieten. Dieser erste Teil der Logik ist der *Klassenkalkul* — von Peirce als die Logik der Dinge hingestellt, welchen *„absolute“* Namen zukommen (vergl. ξ_2).

An die schwankenden Gebräuche der Wortsprache werden wir dabei den Maasstab eines vollkommen konsequenten Bezeichnungssystems anlegen. Mit letzterem werden wir dann auch im stande sein, die Verknüpfungen und Beziehungen, die zwischen *Urteilen* möglich sind, erschöpfend wiederzugeben, sodass als ein zweiter Teil der Logik der *Aussagenkalkul* erscheint, der sich zu einem hohen Grade von Vollendung bereits entwickelt zeigt.

Erst mit dem völligen Ausbau eines dritten (und schwierigsten) Teiles könnte aber die Disziplin der Logik den Anspruch erheben die obenerwähnte Vorarbeit für die dereinstige wahre Philosophie geleistet zu haben. Das wäre die Logik der unter „relativem“ Namen zu begreifenden Gedankendinge: die Logik der *Beziehungen* überhaupt und ihrer verschiedenen Kategorieen. Diesen Teil unsrer Disziplin müssen wir dermalen grossenteils noch unfertig lassen.

β_3) Wir haben von π_2) ab versucht, den Begriff des „Begriffes“ zu entwickeln.

In einer so fundamentalen Frage, über welche die Philosophen schon seit Jahrtausenden geschrieben und wo deren Lehrmeinungen so himmelweit auseinandergehen, scheint nun aber doch ein kritischer Rückblick noch angezeigt zu sein.

Wir gingen bei unsrer Betrachtung von dem für den Begriff (als Einzelding oder aber allgemeinen Begriff) bereits vorhanden gedachten *Namen* (Eigennamen resp. Gemeinnamen) aus.

Die Annahme, dass der fragliche Begriff einen Namen *habe*, kann nicht wol als eine Beschränkung für die Allgemeinheit unsrer Betrachtungen angesehen werden, wofern nur nicht etwa gefordert wird, dass der Name von Anfang bereits unter den einwörterigen figurire. Denn was auch Gegenstand des Denkens werden mag, es lässt sich doch mit Worten angeben, beschreiben. Und diese Beschreibung stellt uns einen (eventuell eben vielwörterigen) Namen für das Beschriebene vor. So oft wir übrigens einen neuen Begriff gewinnen, empfinden wir alsbald das Bedürfniss nach einem angemessenen (auch angemessen kurzen) Namen für denselben, und diesem Bedürfniss könnte nötigenfalls selbst durch einen einwörterigen Namen — mittelst Einführung eines solchen — immer genügt werden.

Es sollte jedenfalls mit unsrer Erörterung nicht behauptet sein, dass die Bildung des Worts dem Begriffe notwendig oder thatsächlich *voran*gehe.

Wenigstens die Aneignung des Wortes vonseiten des jugendlichen Menschen bei der Erlernung seiner Muttersprache mag in der That nicht selten derjenigen des zugeordneten Begriffes voraufgehen. Auch vermöchte die Wissenschaft wol Beispiele aufzuweisen, wo die Kombination von Worten — z. B. in der Form als „Nicht-a“, nachdem ein Begriff von a bereits vorgelegen — den ersten Anstoss zur Bildung eines Begriffes gab.

Jedoch lassen auch Belege sich erbringen für Fälle, wo die umgekehrte Succession erkennbar ist. Auf p. 177 seiner Schrift[1] erinnert J. Keller an das von Steinthal erwähnte Kind, das jedesmal, wenn es einen Fremden mit Papa anredete, den Kopf dazu schüttelte. „Es befand sich auf dem Stadium seiner Begriffsentwickelung, wo der allgemeine Begriff *Mann,* den es mit dem Worte Papa verband, sich zu spalten anfing in *Mann im allgemeinen* und in den Begriff, den Kinder späterhin mit *Papa* verbinden.“ Wie in diesem Falle, so dürfte auch bei dem Zuwachs an Begriffen, den die Wissenschaften liefern, die geistige Erfassung des Begriffes der wortbildenden Namengebung zumeist vorangehen.

Die ganze Frage mögen wir indess der Psychologie, Sprachwissenschaft und Pädagogik überlassen.

Worauf wir hier sicher fussen zu dürfen glaubten, ist nur: dass die Begriffsbildung mit der Namengebung, der Schöpfung und Fortentwickelung der Sprache, notwendig handinhand geht.

γ_3) Schwerlich dürfte unsre Darlegung beanstandet, sie möchte wol als zutreffend zugestanden werden in Bezug auf die sogenannten „empirischen“ Begriffe.

Begriffe, die ihren Ursprung der Wahrnehmung, *Erfahrung* verdanken, entstehn zweifellos auf die angegebene Weise. Und zwar braucht die Wahrnehmung nicht gerade eine sog. „äussere“ zu sein, die auf dem Sinneseindruck beruht.*) Auch durch „innere“ Wahrnehmung und Erfahrung gewinnen wir Begriffe in ganz analoger Weise. So mögen wir bei der Farbe und dem Ton auf das gemeinsame Merkmal des „Sinneseindrucks“ reflektiren**), wir mögen von den Phantasiegebilden, Absichten, Stimmungen und Gedanken das Merkmal der „Unsinnlichkeit“ abstrahiren.

---

*) Vergl. γ) Fussnote. Auch diese „äussere“ Wahrnehmung läuft übrigens wesentlich auf eine „innere“ hinaus, indem es nicht das Auge ist, das sieht, sondern der Geist, das *Ich*, in dessen Bewusstsein die Sinnesbotschaft aufgenommen wird.

**) Mit Absicht führe ich dies Beispiel an, um auf die Unhaltbarkeit und Willkür hinzuweisen, welche in der üblichen Erklärung „disparater“ Begriffe liegt.

Eine andere Frage ist indess, ob wirklich *alle* Begriffe *so*, durch Reflexion auf die gemeinsamen Merkmale, in's Dasein treten und treten müssen.

Neben dem geschilderten Prozesse der „unmittelbaren" Begriffsbildung scheint mir in der That eine Möglichkeit auch „mittelbarer" konstruktiver Bildung von Begriffen zugestanden werden zu müssen.

Der Begriff der „Unmöglichkeit" z. B. (den auch Keller hervorhebt) ist sicher nicht empirisch durch Reflexion auf die gemeinsamen Merkmale von allem „Unmöglichen" entstanden, weil solches überhaupt nicht Gegenstand einer Erfahrung werden konnte. Allerdings hegt auch dieser Begriff eine Mannigfaltigkeit von Vorstellungsverbindungen und Gedanken ein, und grenzt sie gegen die übrigen ab, denen wir aus logischen oder (solchen und) physikalischen Gründen die „Möglichkeit" zusprechen. Und es wäre noch immerhin denkbar, dass auch hier durch Reflexion auf ein gemeinsames Merkmal an eben jenen Gedankendingen der Begriff entstanden wäre, in Anbetracht, dass „Unmöglichkeit" ja in der That nicht von Dingen der Aussenwelt, sondern nur von einer Kombination von Erkenntnisselementen in unserm Geiste prädizirt werden kann.

Ob solches aber die wirkliche und notwendige Entstehung des Begriffs der „Unmöglichkeit" darstellt, scheint eine schwierige Frage zu sein.

Zuzugeben ist wol, dass wir in Gestalt der „*Verknüpfung*" (Kombination) und „*Trennung*" (Separation) und — als eine Modifikation der letztern — insbesondre in Form der „Verneinung" (Negation), von durch Abstraktion gewonnenen Vorstellungselementen oder Merkmalen auch das Vermögen besitzen, Begriffe mittelbar zu konstruiren, sodass Reflexion und Abstraktion nicht als die einzigen Quellen der Begriffsentwickelung hingestellt werden dürfen.

Auch die Begriffe des „Dings an sich" und der „Wahrheit", der „Vollkommenheit", des „Ideals", der „Freiheit", und andere, könnten ähnlich dem vorausgeschickten Beispiel verwendet werden, solche Bemerkung anzuregen.

Die angeführten Beispiele genügen wol, um auf die Schwierigkeiten einer *allgemeinen* Theorie der Begriffsbildung und der Erklärung seines Wesens hinzuweisen.

Ungeachtet der mehrtausendjährigen Arbeit sind über eine solche die Philosophen auch noch nicht einig geworden.

Es befehden sich die Schulen der „Nominalisten", der „Realisten" und der „Konzeptualisten" und wenn auch ziemlich unverkennbar geworden ist, dass jene erstern mit der Einseitigkeit ihrer Auffassung sich nicht im Rechte befinden, so können wir uns doch auch auf eine allgemein anerkannte Theorie noch nicht berufen.

Ebenso gehen die Ansichten noch weit auseinander über das Wesen der „*allgemeinen Vorstellung*" (repraesentatio generalis sive universalis) als

Desjenigen, was darunter vorgestellt wird, wenn der Name einer Klasse fällt, z. B. wenn von „einem Baume" gesprochen wird — im Gegensatz zu der Einzelvorstellung (repraesentatio singularis, wie „*dieser* Baum hier") und im etwaigen Gegensatz zum Begriff „Baum". Die Identität solcher Allgemeinvorstellung mit dem zugehörigen Begriffe wird teils behauptet, teils bestritten.

Auf solchem unsichern und vielumstrittenen Fundamente nun das Gebäude einer Wissenschaft errichten zu wollen, die, wie die Logik, den Anspruch erhebt, nur absolut sichere, weil denknotwendige und evidente Wahrheiten aufzustellen, scheint mir kein wissenschaftliches Verfahren. Die Logik von vornherein als eine solche des Begriffs*inhaltes* zu errichten möchte eher wol dem Versuche gleichen, das Dach vor dem Hause zu bauen.

Eine „*Logik des Umfanges*" in erster Linie anzustreben, darin bestärkt mich auch die Überlegung: dass (gerade wenigstens *von dem Standpunkte, den manche Verfechter* einer solchen „*des Inhaltes*" einnehmen) viele Begriffe *dem Inhalte nach überhaupt nicht existiren*, die gleichwol eines (begrifflich!) scharfumgrenzten Umfanges sich erfreuen.

So die meisten ursprünglich durch Negation gewonnenen Begriffe, wie etwa „*Nichtmensch*" — indem es, wie Lotze witzig bemerkt, für den menschlichen Geist eine ewig unlösbare Aufgabe bleibt, von allem, was nicht ein Mensch ist, also „*von Dreieck, Wehmut und Schwefelsäure*" die gemeinsamen Merkmale zu abstrahiren und zum Begriff des „Nicht-menschen" zusammenzufassen!

Dem Umfange nach existirt aber dieser Begriff doch unzweifelhaft (wenn man auch mit Lotze gegen die Zweckmässigkeit und den wissenschaftlichen Wert seiner Aufstellung zu Felde ziehen mag), sintemal kein individuelles Objekt des Denkens bekannt ist, über welches wir irgend im Zweifel sein könnten, ob demselben das Prädikat, ein „Mensch" zu sein, zu oder abzusprechen wäre — vorausgesetzt nur, dass man sich über gewisse Fragen des Doppelsinns, z. B. den Embryo, den Leichnam betreffend, geeinigt, nämlich den Begriff „Mensch" selbst erst gehörig präzisirt hat.

Und die Lotze'sche Argumentation[1] pag. 58 würde mutatis mutandis ebensogut auf „*einander nicht schneidende Kurven*" anwendbar sein, wo seine sonstigen Einwendungen wegfielen. Auch hier würde es wol unmöglich sein, ein „positives" gemeinsames Merkmal zu abstrahiren. Ein „negatives" aber, genauer: die Abwesenheit eines bestimmten (anerkannten) Merkmals, will Lotze eben nicht als Merkmal gelten lassen. Vergl. hiezu § 16.

Von seinem Standpunkte aus, auf den ich mich soeben stellte, um ihn mit seinen eigenen Gründen zu widerlegen, hätte also auch dieser letztere Begriff keinen Inhalt und existirte doch unzweifelhaft seinem Umfange nach, als Klasse; und als solcher wäre er auch (schlechthin oder in anderweitig noch enger begrenzter Auffassung) für die Geometrie ganz unentbehrlich.

Von einer Logik des Inhaltes müssten (darnach also) ganz unentbehrliche Begriffe ausgeschlossen bleiben und hätte solche keinen

Anspruch darauf, mit ihren Gesetzen unser ganzes Denken zu umfassen, oder die erforderliche Allgemeinheit zu besitzen.

Übrigens steht es auch gar nicht so schlimm um die Einseitigkeit eines Studiums der blossen Begriffsumfänge (ohne Rücksicht auf den Inhalt der zugehörigen Begriffe) — aus dem Grunde, weil sich zeigen wird, dass bestimmten Umfangs*verhältnissen* der Begriffe (wo solche vorhanden) allemal die „umgekehrten“ Verhältnisse zwischen ihren Inhalten parallel gehen, z. B. einer Überordnung hier eine Unterordnung dort.

Es wird also das eine zwar unbehelligt vom andern dennoch grossenteils zugleich mit ihm erledigt. Und die Frage: ob Logik des Inhalts oder des Umfangs? müsste darnach sogar für irrelevant erklärt werden, hätte sich nicht jene durch die Anforderung, u. a. immer nur *begrifflich* bestimmte Subjektklassen zu bilden, ganz übermässig eingeschränkt gesehen, und wäre sie nicht in Reaktion gegen solche Einengung notgedrungen allemal über ihre Grenzen hinaus getreten, und — inkonsequent geworden! [Konsequenterweise könnte z. B. die Logik des Inhalts partikulare Urteile überhaupt nicht bilden — es sei denn als identische oder „nichtssagende“ Urteile — vergl. die Ausführungen am Schlusse des § 44.]

Was eine „Klasse“ ist, scheint auch viel leichter zu begreifen, als der Komplex der psychologischen Motive, welche zu ihrer Aufstellung Veranlassung bieten könnten. Stellte man letztere, d. i. eben den „Inhalt“ des zugeordneten Begriffes (falls anerkannt werden mag, dass es einen solchen gibt) in den Vordergrund der Betrachtung und begänne, dergleichen Motive selbst aufzuzählen, so vermöchte niemand vorab zu ersehen, ob nicht die Wissenschaft noch ganz andere Motive zur Klassenbildung dereinst aufdrängen wird, als diejenigen sind, die man heutzutage als einen regelrechten Begriff konstituirend gelten lassen will. Wie schon unter v_2) angedeutet und in Einstimmung mit Dedekind[1] pag. 2, Fussnote können wir es nicht als berechtigt anerkennen, dass man der Freiheit der Begriffsbildung irgend welche Schranken von vornherein auferlege.

Gerade indem sie die Klasse als eine möglicherweise auch ganz willkürlich zusammengesetzte — um nicht zu sagen „zusammengewürfelte“ — in's Auge fasst, wird die Logik der *Klassen*, unter denen von selbst auch die Umfänge aller Begriffe mit figuriren, eine wesentlich höhere Allgemeinheit erzielen als jede Logik, welche von vornherein nur von den Inhalten der Begriffe handeln will.

Das letzte Wort über die Frage dürfte der *Erfolg* zu sprechen

haben; und hier scheinen mir zunächst die jahrtausendlangen Bemühungen, von der Betrachtung des Begriffs*inhaltes* aus die Logik in ein gesund fortschreitendes Wachstum zu bringen, gescheitert.

Schlagender dürfte dies kaum zu konstatiren sein, als es von einem der heftigsten Gegner der Umfangslogik selbst geschieht, nämlich von Prantl, indem dieser in der Vorrede zum 4^{ten} Bande seines Riesenwerkes[1] als den Hauptgewinn seiner eingehenden Studien über die Logik-Erzeugnisse von mehrern der neueren und neuesten Jahrhunderte mit drastischen Worten den hinstellt, dass Andere all' den Wust nun nicht mehr durchzulesen brauchen! Sollte da die Disziplin nicht fortgesetzt doch auf dem Holzwege gewesen sein?

δ_3) Ich möchte hiernächst noch einem Vorurteile entgegentreten, welches der Aufstellung einer „Logik des Umfanges“ entgegensteht.

Es ist besonders in Deutschland bei geistreichen Philosophen Mode geworden — und neuerdings in verstärktem Maasse*) — die Versinnlichung von Begriffsumfängen durch die Euler'schen Kreise (vergl. § 3) eine *dürre* oder *öde* zu nennen, überhaupt von der Betrachtung der Umfangsverhältnisse als von etwas *Trockenem*, *Langweiligen* oder *Unfruchtbaren* mit einer gewissen Geringschätzung zu sprechen, und vollends einen auf diese Betrachtung gegründeten *Kalkul* als einen *toten Formalismus* oder *leeren Schematismus* zu qualifiziren, solchen von vornherein zu verdammen.

Die Frage, ob dem wirklich so ist, scheint mir von ganz kapitaler Bedeutung zu sein und es besonders im Interesse der *deutschen* Philosophie zu liegen, dass derselben auf den Grund gegangen werde.

Bei dem Versuche, dies zu thun, wende ich mich nicht an Diejenigen, die (vielleicht mehr oder minder bewusst) solche Äusserungen im Grunde blos als einen Deckmantel, eine scheinbare Rechtfertigung für ihre Bequemlichkeit benutzen, zufolge deren sie die Mühe scheuen, welche es unvermeidlich kostet, in den Geist einer konsequent aufgebauten, exakten Wissenschaft einzudringen, die Herrschaft über einen Kalkul sich zu erringen. Diese würden, weil ihnen die Überzeugung unwillkommen, auch schwerlich zu überzeugen sein.

Denjenigen aber, die unbeeinflusst von solch' persönlichem Motive aufrichtig meinen, dass die Sache sich also verhalte, möchte ich folgende Betrachtung nahe legen.

Bringen wir uns einmal zum Bewusstsein, was denn eigentlich

---

*) Es würden sich eine Menge Citate beibringen lassen; ich halte mich aber durch das „nomina sunt odiosa“ gerechtfertigt, wenn ich möglichst davon abstehe, solche Beispiele anzuführen, die vielleicht als eine persönliche Invektive aufgefasst werden könnten.

Selbstverständlich indess sind zu obigem auch erfreuliche Ausnahmen zu konstatiren.

vor sich geht beim *Zählen* (der Einheiten einer Menge). — Wenn ich z. B. die Herrn, die hier auf einer Bank vor mir sitzen, zähle, so *bilde* ich *einen jeden* derselben einfach *mit einem Striche* (1) *ab.* Damit das entstandene Bild — sagen wir 11111 — nicht als eilftausendeinhunderteilf gelesen werde, verbinde ich die Striche (Einer) mit dem Zeichen plus. Ich erhalte so ein Schema:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

und ist es für die Zwecke unsrer Betrachtung nebensächlich, dass für dasselbe auch ein einfacheres Zeichen: 5, nebst zugehörigem Namen eingeführt ist.

Im Grunde ist es also eine *äusserst rohe* Art von *Abbildung*, die wir beim Zählen vornehmen (die Abbildung der Einheiten oder Individuen der Menge blos nach ihrer „Häufigkeit“ oder „Anzahl“) — eine Abbildung, die hinsichtlich ihres Gehaltes bei weitem nicht heranreicht an diejenige, welche der Stift des Zeichners, die Kamera des Photographen, der Pinsel des Malers hervorzubringen vermöchte, von dem Meissel des Bildhauers zu geschweigen, durch welche ja nicht blos die Anzahl, sondern vielleicht die ganze äussere Erscheinung, ja allerhand charakteristische Eigentümlichkeiten der Haltung und der geistige Ausdruck der Gesichtszüge der abgebildeten Persönlichkeiten zur Darstellung kämen. Noch weniger kümmern wir uns bei unserm Abbildungsverfahren um diejenigen Verhältnisse, die den Menschen am meisten vom Menschen zu interessiren pflegen. Von den Anlagen, Kenntnissen und Fertigkeiten, von dem ganzen Charakter der abgebildeten Personen — nicht zu reden von ihren Vermögensverhältnissen (!), die ja von andrer Seite auch wiederum der Darstellung durch Zahlen zugänglich wären — wird einfach abstrahirt. Von der Abstammung und sozialen Stellung, von der Vorgeschichte eines Jeden, seinen Aussichten für die Zukunft . . . von allem, was das Wesen seiner Persönlichkeit ausmacht, wird abgesehen; es wird, sofern es auch bekannt sein sollte, beim Zählen gelöscht, ignorirt.

Welcher gemüt- und phantasievolle Denker möchte sich angesichts dessen nicht versucht fühlen etwa zu sagen: „Natürlich haben auch die Zahlenverhältnisse ihren Wert; aber wo man diesen bedürfen wird, ist er nicht so schwierig zu ermitteln, um sich seiner nicht nebenher augenblicklich zu bemächtigen; *einen Hauptgesichtspunkt für die Betrachtung der Dinge aus ihren Zahlenverhältnissen zu machen halte ich für ebenso unfruchtbar* (irrig) *als langweilig*“*)!

*) Vergleiche einen analogen Ausspruch Lotze's in Bezug auf die begrifflichen Umfangsverhältnisse, den wir in § 15 citiren. Das Wort „unfruchtbar“ fällt an andrer Stelle.

Langweilig, trocken, dürr etc.? — Vielleicht ja! — Man kann es auch heute noch niemand verwehren, die Arithmetik (als die Wissenschaft, die sich mit den Zahlenverhältnissen beschäftigt) langweilig zu finden. Es thun dies aber zumeist nur Solche, die entweder einen recht schlechten Elementarunterricht genossen oder sich überhaupt nicht der Mühe unterzogen haben, dieselbe kennen zu lernen.

Unfruchtbar? — Nein! — Es dürfte doch heutzutage wol niemand mehr es wagen, die Analysis und Mathematik, die Lehre von *Zahl* (*und Maass*), die messende und rechnende Physik, der Unfruchtbarkeit zu zeihen.

Und dennoch bleibt die Thatsache der Rohheit unsres Abbildungsverfahrens, welches bei jedem Zählen allemal bethätigt wird, bestehen; dennoch ist die ungeheure Dürftigkeit, welche auch der Ermittelung *metrischer* Beziehungen notwendig anhaftet, ganz unverkennbar, und selbst die Geometrie, indem sie noch die „gestaltlichen Verhältnisse“ der Dinge in den Bereich ihrer Betrachtung zieht, ist doch unleugbar einseitig, sieht von den allerinteressantesten Eigenschaften der raumerfüllenden Substanz armselig ab.

Wie sind dabei nun die grossartigen Erfolge zu begreifen, die in einer (die Unterbrechungen eingerechnet) allerdings mehrtausendjährigen Geschichte gerade jene Wissenschaften thatsächlich errungen haben (und mit der Zeit nur immer reichlicher zu verwirklichen scheinen), welche sich die Erforschung der Gesetze der Dinge nach Zahl und Maass zur Aufgabe stellten?

Die Antwort gibt das alte Gleichniss von dem Bündel Pfeile, welches allen Versuchen, dasselbe zu zerbrechen, als Ganzes widerstand und sich erst Demjenigen ergab, der dasselbe auflöste, die Pfeile einzeln zu knicken:

Die Schwierigkeiten, welche dem Fortschritt der Erkenntniss entgegenstehen, sind auch nur einzeln zu überkommen, und gerade in ihrer Einseitigkeit, in der durch sie verwirklichten *Teilung der Arbeit* liegt das Verdienst und die Kraft der erwähnten Disziplinen.

In ebendiesem Sinne dürfen wir auch die unsrer Logik der Umfangsverhältnisse zur Last gelegte Einseitigkeit als einen *Vorzug* derselben in Anspruch nehmen. Indem die ältere Logik solche Einseitigkeit verschmähte, ist sie in den Jahrtausenden verhältnissmässig stehen geblieben, das Sprichwort illustrirend: qui trop embrasse, mal étreint.

Versuchen wir — es ist hohe Zeit — es jetzt einmal ernstlich *mit* solcher Einseitigkeit und gehen über den Vorwurf der Dürftigkeit, die ja allerdings in gewissem Sinne mit solcher naturnotwendig verknüpft ist, sich aber durch intensivere Entwickelung in ihrem eigenen Bereiche, durch grossen, ja ungeahnten, Reichtum der Entfaltung in andrer Hinsicht ausgleicht, zur Tagesordnung über.

Nicht übergehen dürfen wir jedoch diese Frage:

War es denn aber auch *wahr*, dass die Zahlenverhältnisse der Dinge gar „nicht so schwierig zu ermitteln seien, um sich ihrer (im Bedarfsfalle) nicht nebenher augenblicklich zu bemächtigen?" Sind nicht vielmehr in der That Generationen scharfsinniger Forscher in unermüdlicher Arbeit fort und fort in Anspruch genommen, nur um dieser Zahlenverhältnisse sich immer mehr zu bemächtigen?

Und was zeigt sich nun auch in Bezug auf die Begriffsumfänge beim Vordringen auf unserm „einseitigen" Pfade?

Es zeigt sich, dass schon diese „dürftigen" Umfangsverhältnisse durchaus nicht so einfach zu übersehen sind, wie man anfangs sich einbilden mochte, ferner dass selbst bedeutende Philosophen in Fehler darin verfallen sind, und dass sich schwierige Probleme zur Lösung darbieten. Wer letzteres mit Aussicht auf Erfolg bestreiten wollte, der müsste wol erst einmal die in diesem Buch als noch ungelöst signalisirten Probleme lösen!

Ganz Zutreffendes über die vorliegende Frage sagt F. A. Lange auf p. 18 seiner citirten Schrift[1], wo er Ueberweg's Stellungnahme gegen die schematisirende formale Logik geisselt. Der sehr beachtenswerte Passus lautet:

„Wie nahe übrigens Ueberweg in Folge seines ungemeinen Scharfsinns, seinem eigenen erkenntnisstheoretischen Vorurteil zum Trotz, an die richtige Auffassung der logischen Technik streifte, zeigt eine zum § 84 (S. 234) gehörige Anmerkung, welche speziell gegen die geringschätzige Art gerichtet ist, in der Hoppe (Logik, Paderborn 1868) von dem »Denken nach dem Schema« redet im Gegensatz zu einem angeblichen Denken nach dem Begriff. Hier sagt Ueberweg wörtlich: »Mit gleichem Recht könnte man die mathematisch-mechanische Betrachtung als einseitig und willkürlich schelten, wenn sie untersucht, was aus gewissen einfachen Voraussetzungen folgt und dabei von andern Datis absieht, von denen jene in der Wirklichkeit nicht abgesondert vorzukommen pflegen, wenn sie z. B. die Bahn und die Stelle des Falls eines irgendwie geworfenen Körpers nur auf Grund der Gravitation und der Beharrung berechnet, ohne den Miteinfluss des Luftwiderstandes zu erwägen, sodass anscheinend die konkrete Anschauung das Resultat genauer zu bestimmen und über die Rechnung zu triumphiren vermag; wollte aber die mathematische Mechanik jenes abstraktive Verfahren nicht üben, so würde sie die Bewegungs*gesetze* überhaupt nicht zu erkennen vermögen und die Wissenschaft würde aufgehoben sein.« Es folgt die in der That schlagende Anwendung auf die Logik. Wer in ähnlicher Weise das abstrakte Verfahren der Logik von der Realität aus korrigiren will, »hebt durch dieses Verfahren nicht eine falsche Logik zugunsten einer bessern, sondern die Möglichkeit einer methodisch fortschreitenden logischen Erkenntniss der Denkgesetze selbst auf.«"

Erst nach beendeter Untersuchung über das, was aus den Umfangsverhältnissen der Begriffe schon allein folgt, wird die wissenschaftliche Theorie des Denkens auch andere Momente mit in Betracht ziehen dürfen. Wer freilich sich an ein gerade vorliegendes Beispiel hält und solches anderweitige Wissen, den nicht auf Umfangsverhältnisse bezüglichen Gehalt desselben, mit hinzunimmt, kann wol ein volleres Resultat zu besitzen glauben und auf den Logiker herabsehen, der sich mit dem dürftigen Schema des Umfangsverhältnisses plage. Allein Der wird auch stets am Beispiel hängen bleiben und sich ohne die Reflexion auf diese Verhältnisse, welche durch das Abstrahiren von allem übrigen bedingt ist, niemals zur Erkenntniss des allgemeinen Denkgesetzes erheben (vergl. Ueberweg l. c. mutatis mutandis).

So wird es auch Demjenigen, der ein Gemälde nach den Regeln der Perspektive beurteilt, nicht zu verargen sein, wenn er die Abstufungen der Farbentöne und die dem Bilde zugrunde liegende Idee des Künstlers dabei ausser Acht lässt. Soll das Bild gut sein, so muss vor allem die „dürftige" Zeichnung, die wieder übermalt wird, jenen Gesetzen genügen. (Vergl. De Morgan[5] p. 83.)

Wenn gar aber Lotze seine Logik mit dem Wunsche schliesst, dass die deutsche Philosophie zu dem Versuche sich immer wieder erheben werde „den Weltlauf zu *verstehen* und ihn nicht blos zu *berechnen*", so ist zu sagen: könnten wir ihn nur erst *berechnen*! dann würden wir gewiss ihn auch „verstehen", soweit überhaupt ein Verständniss auf Erden erzielbar.

ε_3) Den Begriffen wird ihre Bildungsweise vorgeschrieben durch das *„Urteil"*. Durch das Urteil wird ausnahmslos einem Subjekte ein Prädikat beigelegt, zugeschrieben oder aber abgesprochen.

Für die komplizirteren Fälle, in welchen das Urteil sich aus Teilsätzen zusammensetzt, die durch Konjunktionen verbunden sind, behalten wir uns vor, dies in der Theorie erst genauer darzulegen; in solchen ist das Subjekt selbst ein Urteil, eine Aussage. In den einfacheren Fällen treten zumeist anderweitige Objekte des Denkens als Subjekt auf.

Dies Subjekt ist entweder ein Einzelding — und als solches ohnehin ein Begriff — oder es ist eine Klasse von Einzeldingen, und auch diese erscheint gewöhnlich zusammengehalten und bestimmt durch das Band eines ihre Individuen verknüpfenden Begriffes. Das Urteil *bejaht* dann, oder *verneint*, das Prädikat von allen Individuen dieser Klasse und damit zugleich von ihrem Begriffe.

Soferne das Urteil anerkannt, zur Überzeugung erhoben, adoptirt wird — und dies zu werden ist der letzte, der Endzweck aller Urteile, welcher nur vorübergehend durch den mittelbaren Zweck einer blos provisorischen Annahme des Urteils verdrängt zu werden vermag — erfüllt es alsdann folgende Mission, Bestimmung.

Sofern es *bejahte*, begründet es hinfort, wird es zum Ausgangspunkt für — eine Gewöhnung des Geistes, die Merkmalgruppe des Subjektbegriffes (und damit zugleich eines jeden seiner Individuen) stetsfort zu verknüpfen mit den Merkmalen des Prädikatbegriffes, die letztere geradezu in den Subjektbegriff selbst aufzunehmen und als einen integrirenden Bestandteil seines Inhaltes mit diesem zu verschmelzen.

War solche mentale Gewöhnung schon ehe das Urteil fiel vorhanden, so erscheint dasselbe als überflüssig, oder es dient doch nur dazu, gedachte Gewöhnung zum Bewusstsein zu bringen, in diesem wieder aufzufrischen und zu festigen.

Sofern das Urteil *verneinte*, beugt es jedenfalls der genannten durchgängigen Verknüpfung vor.

Im übrigen lässt der Sinn und die Tragweite der sog. „verneinenden" Urteile verschiedene Auffassungen zu (als negativ prädizirende oder aber negative), in Bezug auf welche ich mich in Gegensatz zu Sigwart werde stellen müssen. Die Kontroversen können nicht kurzerhand vorweg abgemacht werden und ist in ihrem Betreff auf die Theorie (7te Vorlesung) zu verweisen. Es wird sich zeigen, dass, was wir — um den streitigen Fragen hier noch auszuweichen — nunmehr im Hinblick auf die bejahenden Urteile sagen werden, sich auch auf die „verneinenden" übertragen lässt.

Das Prädikat ist selbst ein Begriff. Und dieser ist, wenn nicht mit dem Subjektsbegriffe „identisch", so allemal ein „höherer" Begriff, die Prädikatklasse dann der Subjektklasse „übergeordnet".

Psychologisch jedoch ist es nicht erforderlich das Prädikat überhaupt als eine *Klasse* zu denken.

Wenn ich z. B. sage (cf. Mill[2] pag. 113, 117) „Schnee ist weiss", so will ich dies von irgend welchem, von *allem* Schnee gesagt haben, und ist es richtig, dass aller Schnee enthalten ist in der Klasse der „weiss" zu nennenden Dinge. Thatsächlich brauche ich aber bei jener Aussage an sonst nichts Weisses zu denken und will ich in der That damit nur kundgeben, dass in meiner Vorstellung vom Schnee das Merkmal der „Weisse" ein Element bildet, dass er mir die Empfindung erregt, die (durch Abstraktion von irgend welchen weissen Dingen gewonnen) als die Vorstellung von „weiss" ein isolirter und bleibender Besitz meines Geistes geworden ist. Die analoge Betrachtung in Bezug auf den Satz: „Blut ist nicht weiss (sondern rot)" durchzuführen überlassen wir dem Leser.

Wir heben dies ausdrücklich hervor, um uns gegen den Vorwurf

zu verwahren, als ob wir den Umstand übersehen hätten, wenn wir späterhin aus Gründen wissenschaftlicher Zweckmässigkeit auf das Verhältniss zwischen der Subjekt- und der Prädikat*klasse* vorwiegend reflektiren, die beiden Begriffe gleichwol nach ihren Umfangsbeziehungen ins Auge fassen.

Aus alledem wird zunächst ersichtlich sein, wie die Urteile bezwecken, auf die (definitive) Gestaltung der Begriffe hinzuarbeiten und einzuwirken.

Ich will nunmehr noch den Gedankengang Herrn Charles S. Peirce's darlegen, durch welchen er in der Einleitung zu seiner grundlegenden Arbeit[5] das Wesen der Urteile und auch der *Schlüsse* von einer neuen Seite beleuchtet. Damit werden wir dann auch auf die Frage nach dem Wesen der *Folgerichtigkeit* der letztern zurückkommen. Indem ich hinsichtlich des Wortlautes auf pag. 15 sqq. der Peirce'schen Schrift verweise, darf ich mich seiner Betrachtungsweise in *freier* Reproduktion anschliessen und mir auch kritische Zwischen- und Zusatzbemerkungen gestatten.

ξ_3) Denken — sagt Peirce ungefähr — Denken *als Gehirnthätigkeit* („cerebration") ist ohne Zweifel den allgemeinen Gesetzen der Nerventhätigkeit (nervous action) unterworfen.

Es erscheint darum gerechtfertigt, zunächst einmal die letztere im allgemeinen zu betrachten.

Wenn eine Gruppe von Nerven gereizt (erregt, stimulirt) wird, so werden die Nervenknoten (Ganglien), mit denen die Gruppe im engsten Zusammenhange steht, — und schliesslich das Centralorgan des Geistes selbst — in einen Zustand der Thätigkeit versetzt, welcher seinerseits nicht selten Bewegungen des Körpers veranlasst.*) Wenn der Reiz (the stimulation) fortdauert, verbreitet sich die Erregung (irritation) von Ganglion zu Ganglion, gewöhnlich dabei anwachsend. Bald auch beginnen die zuerst erregten (excitirten) Nerven Ermüdung zu zeigen, und so ist aus doppeltem Grunde die körperliche Thätigkeit von einer wechselnden Art. Wenn die Reizung beseitigt wird, hört auch meist die Erregung rasch auf.

Aus diesen Thatsachen geht hervor, dass wenn ein Nerv affizirt wird — solange bis die Stimulation unangenehm wirkt — die Reflexthätigkeit, wenn sie nicht von vornherein von solcher Art ist, den

*) Man denke z. B. an das Hinblicken auf eine auffallende (Licht-)Erscheinung im Gesichtsfelde, an das Blinzeln, Ausweichen bei drohendem Stoss, das Schlagen nach dem Insekt bei Mosquitostich und dergleichen.

Reiz zu beseitigen, ihren Charakter wieder und wieder verändern wird, bis der Reiz beseitigt ist, und darnach erst wird diese Thätigkeit aufhören.

Nun haben alle Lebensprozesse eine Tendenz und die Fähigkeit durch *Wiederholung* (repetition) leichter zu werden — innerhalb gewisser Grenzen wenigstens, deren Überschreitung als Übermüdung, Überanstrengung, beziehungsweise Altersabnahme und -schwäche zu bezeichnen wäre. Längs was immer für einem Pfade eine nervöse Entladung (a nervous discharge) einmal gegangen ist, längs ebendieses Pfades wird eine neue der vorigen gleichartige Entladung um so leichter und wahrscheinlicher wieder stattfinden. Es beruht auf dieser allbekannten Thatsache der Nutzen und Erfolg der *Übung.*

Demgemäss wenn eine Nervenerregung wiederholt wird, so sind alle die verschiedenen Thätigkeiten, welche bei vorhergegangenen ähnlichen Veranlassungen stattgefunden haben, in der günstigeren Lage, auch jetzt wieder stattzufinden, und zwar werden diejenigen am ehesten wieder eintreten, welche am häufigsten stattgefunden haben bei jenen vorausgegangenen Veranlassungen. Nun mögen die verschiedenen Handlungen, welche die Reizung nicht beseitigten, vorher manchmal ausgeführt worden sein und manchmal nicht; aber diejenige That, welche die Reizung beseitigt, muss am häufigsten ausgeführt worden sein, weil die Einwirkung in der Regel fortgedauert haben wird bis sie vollzogen wurde.*) Darum muss eine starke *Gewöhnung* daran, der gegebenen Reizung auf diese besondre Weise zu begegnen, rasch sich ausbilden.

Eine so erworbene Gewohnheit kann auch als eine Disposition, eine Anlage zu ihrer Ebenfallserwerbung weiter vererbt werden — sagt Peirce ungefähr; dies dürfte jedoch als eine von der Physiologie noch nicht völlig entschiedene Frage zu bezeichnen sein und wird bekanntlich solches von einer Autorität wie die des Herrn *Weismann* entschiedenst bestritten.

η_3) Zu unsern wichtigsten Gewohnheiten gehören diejenigen, kraft deren gewisse Klassen von Antrieben oder Reizungen uns zuerst in eine blos geistige, physiologisch betrachtet, blos cerebrale oder Hirnthätigkeit versetzen.

*) Es dürfte fraglich erscheinen, ob wirklich der angeführte Grund der ausschlaggebende ist, ob nicht vielmehr das Residuum, welches die vorangegangnen Erlebnisse, in Gestalt der Erinnerung an die früher erfolgreich gewesene Thätigkeit, im Geist und seinem Organe hinterlassen, dabei wesentlich mitwirkt (unter der Konkurrenz einer Gewohnheit, als vergeblich Erkanntes nicht wieder zu versuchen).

Der Anblick eines hübschen Gegenstandes z. B. mag den Wunsch erzeugen, denselben zu besitzen, welcher in dem Vorsatz gipfelt, bei nächster Gelegenheit sich seinesgleichen zu kaufen.

Sehr oft aber ist es auch nicht eine äussere Empfindung, ein Sinneseindruck (an outward sensation), welcher den Gedankengang in Fluss bringt (which starts the train of thought), sondern die Reizung, statt *„peripherisch“* zu sein, ist *„visceral“* (aus den Eingeweiden, aus dem Innern des Leibes stammend).

So wenigstens Peirce. Für diese für ihn charakteristische Ausdrucksweise scheint mir aber eine Modifikation wünschenswert zu sein. Gemeinhin möchte man wol die eigentlich oder im engeren Sinne „visceralen“ Reize — wie Hunger, Geschlechtstrieb, Kopfweh — mitsamt den peripherischen Sinneseindrücken als *physische* Antriebe gegenüberstellen den *psychischen*, von denen Peirce nunmehr reden will, im Hinblick wenigstens auf die Hirnthätigkeit, die sie begleitet.

Solche Antriebe zu Denkhandlungen oder wirklichen Thaten, wie sie als Hass, Liebe, Furcht etc. und namentlich, durch den Stand unsrer Einsicht bedingt, als Beweggründe (Motive) mannigfachster Art, wie Eigennutz, Selbstsucht, Pflichtgefühl, Gemeinsinn, in unserm Bewusstsein existiren, zu den „visceralen“ (vielleicht Unterabteilung der grosshirnig-cerebralen) Reizungen zu rechnen, dürfte doch etwas gewagt erscheinen und überhaupt nur angängig sein, sofern man einseitig lediglich die Zustände oder Vorgänge in's Auge fasst, welche im (als „wirklich“ supponirten) Nervensystem den Bewusstseinsvorgängen — nach heutigem Stand der Physiologie — parallel gehen. Hierauf allerdings hat Peirce von vornherein schon hingewiesen durch die Bemerkung, dass er das Denken (nur) „as cerebration“ betrachten wolle. Nunmehr fährt er fort:

In solchem Falle hat die Thätigkeit in der Hauptsache denselben Charakter: eine innere Thätigkeit beseitigt die innere Reizung. Eine vorgestellte Konjunktur von Umständen veranlasst uns dazu, eine geeignete Richtschnur des Handelns (line of action) vorzustellen.

Man findet, dass solche Vorkommnisse, auch wenn keine äussere Handlung eintritt, doch in hohem Maasse dazu beitragen, dass in uns eine Neigung, Gewohnheit sich ausbilde, wirklich auf die vorgestellte Weise zu handeln, wenn die vorgestellte Gelegenheit annähernd eintritt.

Eine cerebrale Gewöhnung (Gewohnheit? — „cerebral habit“) der höchsten Art, welche für eine unabsehbare Reihe von Gelegenheiten bestimmen wird, sowol, was wir in Gedanken, als was wir in Wirklichkeit thun, wird ein *„Glaube“* genannt.

Peirce sagt durchweg „belief“, nicht *Überzeugung,* conviction, oder Meinung, Ansicht, opinion, view. Wegen der Schwierigkeit, die spezifisch religiöse Nebenbedeutung („faith“), mit welcher (im Deutschen) das Wort „Glaube“ behaftet erscheint, nicht unnötig in den Vordergrund treten zu lassen, würde ich das Wort „Überzeugung" vorziehen, wenn nicht dieses seinerseits wieder eine zu enge Bedeutung hätte, indem es auf ein schon ganz feststehendes, über jedes Zweifeln erhabenes Glauben hinzuweisen pflegt. Das Wort „ein Glaube" soll hier nur irgend etwas, was jemand eben glaubt, bezeichnen.

Bringen wir es uns *zum Bewusstsein,* dass wir eine spezielle Gewöhnung (specified habit) dieser Art *haben,* so vollziehen wir ein *„Urteil"* (judgment).

Unter Umständen möchte ich vorziehn zu sagen: ... dass wir sie erwerben, sie begründen oder fortan *haben werden.* Indessen hat Herrn Peirce's Ausdrucksweise hier den Vorzug, für alle Fälle wenigstens zuzutreffen, wenn sie dafür auch nicht alles erschöpfen dürfte, was im Urteil liegen kann.

Zum Beispiel: schliessen wir uns dem Urteil an: „der Mars ist von intelligenten Wesen bewohnt" (wie dies neuerdings sehr wahrscheinlich geworden ist), so konstatiren wir (für uns und Diejenigen, die wir etwa durch den Hinweis auf die schnurgeraden Kanäle von Sciaparelli's areographischer Karte ebendavon überzeugen oder überreden) — eventuell bebeginnen und festigen, *gewinnen* wir damit eine *Gewohnheit,* die Oberfläche jenes (die Erde an Alter wol weit übertreffenden) Planeten belebt zu denken mit Wesen, die auf die Umgestaltung dieser Oberfläche, ja auf die Konfiguration des Festlandes dortselbst zweckbewusst und mit erfolgreicher Technik einwirkten. —

Es tritt, wie mir scheint, auf diesem, dem intellektuellen Gebiete die merkwürdige Thatsache hervor, dass oft ein Augenblick schon genügt (ein Augenblick, nämlich, des „Einleuchtens"), um die allerfestesten und unerschütterlichsten Gewohnheiten sich anzueignen, Gewohnheiten, die nicht selten mit äusserster Zähigkeit für's ganze Leben festgehalten werden.

Die Kraft, mit welcher eine Überzeugung so als eine Denkgewohnheit festgehalten wird, pflegt mehr oder minder vollkommen die reichliche Übung zu ersetzen, die sonst — auf dem Gebiet der äusseren körperlichen Thätigkeiten wenigstens und auch bei vorwiegend mechanischem Auswendiglernen — unerlässlich scheint zur Erwerbung und Festigung einer Gewohnheit. Die Intensität dieser Kraft erscheint mitbedingt durch den Grad der Evidenz; sie steigert sich nach Maassgabe, je deutlicher wir (einmal oder zu immer wiederholten malen) das im Urteil Gedachte als ein durch objektive Notwendigkeit zu denken Gebotenes zu erkennen glauben. Bei den unmittelbar einleuchtenden, „analytischen" oder selbstverständlichen Wahrheiten ist die Tyrannei dieser Gewohnheit eine so grosse, dass man von vornherein gar nicht anders kann, als derselben huldigen. Der Begriff der Gewohnheit erhält in solchem Falle einen volleren Inhalt als gewöhnlich, den reichsten wol, der überhaupt ihm zukommen kann: sie artet in einen Grenzfall aus und fällt geradezu zusammen mit einem absoluten Zwange (der „Denknotwendigkeit").

Eine Denkgewohnheit kann natürlich auch verhältnissmässig unwichtig und kurzlebig sein. Wer z. B. urteilt: „ich bin hungrig", manifestirt damit eine Gewohnheit, sich, sooft er an seinen gegenwärtigen Zustand zurück-

denken mag, von Hungergefühl befallen zu denken — eine Gewohnheit indess, die meistens wieder verloren gehen wird, sobald darnach Sättigung stattgefunden.

In den meisten Fällen möchte das, was Peirce hier als das Bewusstwerden und den Anfang einer Denk*gewohnheit* hinstellt, vielleicht treffender als das Innewerden einer permanenten *Neigung* (wo nicht subjektiven Notwendigkeit) des Denkens bezeichnet werden. Doch mögen wir — nach dem Billigkeitsanspruche „sit venia verbo" — das Wort „Gewohnheit" immerhin cum grano salis beibehalten.

ϑ_3) Eine Glaubensgewohnheit (belief-habit) kann in ihrer Entwickelung damit beginnen, noch unentschieden, schwankend und schwach zu sein; sie vermag jedoch unbeschränkt zu werden: schärfer ausgeprägt, stärker und von weiterer Sphäre der Wirksamkeit — Peirce lässt sie anfangs unbestimmt, mit Besonderheiten behaftet und dürftig (vague, special and meagre) sein, hernach präziser, allgemeiner und vollständiger (more full) werden.

Der Vorgang dieser Entwickelung, *soweit er im Bewusstsein* (in imagination) *stattfindet,* heisst *Denken* (thought).

Urteile werden gebildet, und unter dem Einfluss einer Glaubensgewohnheit erzeugen sie oft ein neues Urteil, welches als ein Zuwachs zu dem Glauben erscheint. Ein solcher Vorgang wird *Schliessen* (an inference) genannt.

Das oder die vorangegangenen Urteile heissen die Voraussetzungen oder *Prämissen,* das nachfolgende Urteil der Schluss, die *Konklusion.*

Die Gewohnheit des Denkens, welche den Übergang von den ersten zu der letzten vermittelte und bestimmte, wenn als Satz formulirt zum Bewusstsein gebracht, heisst das „leitende Prinzip" (the leading principle) des Schliessens. (Beispiele weiter unten.)

Während aber dieser Prozess des Schliessens oder die spontane Entwickelung von Überzeugungen (des „Glaubens") fast beständig in uns vorgeht, erzeugen auch neue peripherische Reizungen immerfort neue Glaubensgewohnheiten.

Für unsre Kulturepoche glaube ich als einen höchst wesentlichen Teil dieser neuen Anregungen die durch Beispiel, Unterricht, Wort, Schrift, Druck und Bild bewirkte Mitteilung resp. Übertragung der Ansichten und Überzeugungen andrer Menschen, von Sachverständigen, Fachgenossen etc. doch ganz besonders hervorheben zu sollen.

So wird der Glaube (das Glauben) zum Teil durch frühere Überzeugungen bestimmt, zum Teil durch neue Wahrnehmungen.

Herrscht nun aber eine Gesetzmässigkeit in allen diesen Wandlungen?

Die Forschung besteht darauf (maintains), dass dies der Fall ist, nämlich dass sie alle hinsteuern auf *ein Endziel* (gerichtet, angepasst sind, are . . adapted to an end), nämlich das: den Glauben mit der Zeit gewissen vorbestimmten Erkenntnissen entgegenzuführen (that of carrying belief, in the long run, toward certain predestinate conclusions), welche die nämlichen sind für alle Menschen und welche bleiben.

Dies ist der *„Glaube“* (the faith) des Forschers.

Auf dieser stillschweigend angenommenen Thatsache beruhen alle Maximen des Überlegens (maxims of reasoning) und auf Grund derselben wird das, was zuletzt geglaubt werden muss, unabhängig sein von dem, was bisher geglaubt worden ist, und wird den Charakter der Wahrheit (reality) haben.

Kommt diese Wahrheit auch für den Einzelnen vielfach noch nicht zum Durchbruch, so wird sie doch (mehr und mehr auf jedem Gebiete) einst ihre Herrschaft entfalten für das Geschlecht. Der Glaube an ihre Erkennbarkeit, an ihren endlichen und definitiven (endgültigen) Sieg oder Triumph, liegt ganz gewiss der Forschung zugrunde und an der Verwirklichung dieses Ideals mitzuarbeiten schwebt jedem Forscher vor.

Diesen Glauben nimmt nun Peirce auch für den *Logiker* in Anspruch (dem Wortlaute nach sogar *nur* für diesen) und sagt:

Wenn darum eine gegebene Gewohnheit des Folgerns (a given habit, considered as determining an inference) von solcher Art ist, dass sie auf das gemeinsame Endziel hinwirkt (is of such a sort, as to tend toward the final result), so ist sie korrekt und andernfalles nicht. So zerfallen die Schlussfolgerungen (inferences become divisible) in *gültige* (the valid) und in *ungültige* (the invalid), und daraus schöpft die Logik ihre Existenzberechtigung.

Man sieht, dass hier Peirce dem Ergebnisse der Erkenntnisstheorie sozusagen teleologisch vorgreift.

Da nun diese Auffassung der Folgerichtigkeit die Ergänzung, deren sie bedürftig erscheint, durch Sigwart bereits gefunden hat — vergl. unter A der Einleitung die Absätze β) und $\zeta \ldots \iota$) — so glauben wir der Auseinandersetzung nach dieser Richtung nichts mehr hinzufügen zu sollen.

ι_3) Das Eigentümliche und Verdienstliche an dieser den Kern der Sache jedenfalls nahe streifenden Auseinandersetzung von Peirce scheint mir zu sein: die nachdrückliche Hervorhebung des Moments der *Gewohnheit* in Bezug auf das Urteilen (mit Überzeugung, das Glauben) sowol, wie auf das Folgern oder Schliessen.

Ein spezielles, individuelles Handeln kann niemals selbst als eine Gewohnheit bezeichnet werden; es kann, als ein *ein*maliges, höchstens zum Ausgangspunkt für eine solche werden oder ein Ausfluss einer

solchen sein. Gewohnheit (und Neigung, Disposition) ist etwas Gemeinsames, übereinstimmend Wirkendes in einer ganzen Klasse von Handlungen (die, sofern sie auch bei verschiedenen handelnden Personen verglichen werden, sogar unbegrenzt, eine offene Klasse sein mag und in Bezug auf den Einzelnen die gleiche Bezeichnung nur insofern nicht verdienen wird, als das Leben desselben eine unbegrenzte Menge von Handlungen überhaupt nicht in sich fassen kann); die Gewohnheit ist immer von einem mehr oder weniger *allgemeinen* Charakter.

Eine Gewohnheit veranlasst uns, unter ähnlichen Umständen auch immer ähnlich zu handeln, d. h. unter Umständen, die einander in einer bestimmten Hinsicht *gleichen*, stets Handlungen zu vollziehen, die wiederum in bestimmter (vielleicht in einer ganz andern) Hinsicht einander gleichen. Die zeitliche Succession der übereinstimmenden Merkmale jener Umstände und dieser Handlungen, wenn aus einem physiologischen Grunde erfolgend (und zugleich vielleicht durch ein psychologisches Motiv verursacht), macht das Wesen der Gewohnheit aus.

In den verschiedenen Fällen, in denen „dieselbe“ Gewohnheit wirksam ist, werden darnach die „spezifischen Differenzen“ zwischen den Gruppen jener Umstände sowol als auch zwischen diesen Handlungen nebensächlich, ohne Belang sein.

Gelingt es, die übereinstimmenden Merkmale (eventuell auch nur „wesentliche“ von diesen Merkmalen) jener Umstände und dieser Handlungen in Zeichen darzustellen, bei denen jene spezifischen Differenzen unausgedrückt bleiben, offen gelassen werden — m. a. W. vermögen wir nur den „Begriff“ der Umstände, unter welchen gedachte Gewohnheit wirkt, und den „Begriff“ der Handlungen, die sie dann hervorruft, darzustellen, so werden wir ein *Schema* für die Gewohnheit erhalten: *sooft Umstände* (von den Merkmalen) *A eintreten, thun wir B* (vollziehen eine Handlung von den Merkmalen B).

Jede Gewohnheit muss so ein *allgemeines Schema* haben.

Als Umstände haben wir jetzt hauptsächlich Zustände des Bewusstseins und zwar besonders *Meinungen*, als Handlungen ebenso vorzugsweise Denkhandlungen, *die Bildung neuer Meinungen* im Auge.

Es wurde erkannt, dass solche Meinungen wesentlich selbst schon Gewohnheiten im Denken sind oder zu solchen werden.

$\varkappa_3$) Aus solchen, den „Prämissen“ p kann sich eine neue Denkgewohnheit und Meinung entwickeln: die „Konklusion“ c. (Vergleiche wieder Peirce l. c.)

„Es gilt p, ergo gilt auch c“, oder abgekürzt:

„p, ergo c“

ist darum das Schema jeder Folgerung.

Die Konjunktion „ergo, folglich, also (therefore)“ ist das Zeichen des Schliessens (sign of illation).

Der Übergang von der Prämisse (oder dem System der Prämissen, set of premises) p zu der Konklusion c findet beim Schliessen statt gemäss einer in uns wirksamen Denkgewohnheit oder Regel.

Obwol diese das Folgern beherrschende oder „leitende“ Gewohnheit gewöhnlich nicht vom Bewusstsein objektivirt wird (is not present to the mind), sind wir uns doch bewusst, nach einem allgemeinen Prinzip (on „some“ general principle) zu schliessen.

Alle Schlussfolgerungen, welche ebendiese Denkgewohnheit bestimmen würde sobald nur die geeigneten (d. i. die unter den ersten Teil ihres Schemas fallenden) Prämissen zugelassen wären (when once the proper premises were admitted), bilden eine Klasse. Und die Denkgewohnheit ist vom Standpunkt der Logik eine *gute* zu nennen, wenn sie niemals (oder im Falle eines Schlusses nach der Wahrscheinlichkeit, in case of probable inference, selten) von einer wahren Prämisse zu einer falschen Konklusion führen würde; andernfalles ist sie *verwerflich* (logically bad). M. a. W. Jeder denkbare Fall der Wirksamkeit einer *guten* Gewohnheit des Schliessens würde entweder ein solcher sein, in welchem die Prämisse falsch, oder ein solcher, in welchem die Konklusion wahr ist. Wogegen, wenn eine solche Gewohnheit schlecht ist, Fälle denkbar sein würden, in welchen die Prämisse wahr ist, während die Konklusion falsch bleibt.

Wir sahen, dass eine jede Gewohnheit ein allgemeines Schema haben muss. Dies gilt mithin auch von einer Denkgewohnheit, welche beim Folgern wirksam ist, das Ziehen von Schlüssen beherrscht: dieselbe wird sich allemal durch einen Satz darstellen lassen, dass ein Urteil (proposition) C von einer gewissen allgemeinen Form, welches in einer bestimmten Beziehung steht zu einem Urteil (oder einer Gruppe von Urteilen) P von ebenfalls allgemeinem oder schematischem Ausdruck, wahr sein muss, sobald dieses letztere wahr ist.

Ein solcher Satz ist dann das *„leitende Prinzip“* der Klasse von Schlussfolgerungen, deren Gültigkeit (validity) es in sich schliesst (implies).

Wird der Schluss erstmalig gezogen, so pflegt (wie schon angedeutet) das leitende Prinzip, solchergestalt formulirt, dem Geiste nicht gegenwärtig zu sein. Aber die Gewohnheit, deren Schema es darstellt, ist in einer solchen Weise wirksam, dass bei Vergegenwärtigung (upon contemplating) der angenommenen (believed) Prämissen durch eine Art Intuition (Wahrnehmung, perception) auch die Konklusion für wahr erachtet wird.

Mit diesen Worten „by a sort of perception“ beruft sich auch Peirce auf das von Sigwart mit Recht stärker hervorgehobene, ja in den Vordergrund gestellte Bewusstsein der objektiven Denknotwendigkeit oder Gefühl der Evidenz.

Wenn hernach die Schlussfolgerung einer logischen Kritik unterworfen wird, so vollziehen wir eine neue Schlussfolgerung, deren eine Prämisse jenes leitende Prinzip der vorigen ist (gemäss welcher Urteile, die in bestimmter Beziehung zu einander stehen, geeignet erscheinen, Prämisse und Konklusion eines gültigen Schlusses zu sein), während die andere Prämisse eine Thatsache der Wahrnehmung (observation) ist, nämlich der Beobachtung, dass die genannte (gegebene) Beziehung wirklich besteht zwischen der Prämisse und der Konklusion der in Frage (under criticism) stehenden Schlussfolgerung, dass m. a. W. das Schema jenes leitenden Prinzips im vorliegenden Falle zutrifft, und woraus dann geschlossen wird, dass diese Folgerung berechtigt, gültig war.

Ein Beispiel, an das wir noch weitere Unterscheidungen anknüpfen, mag dies verdeutlichen. Wir wählen hier das folgende (obzwar sehr abgedroschene, weil fast in allen Schriften über Logik einmal erwähnte):

Cajus ist ein Mensch,	a ist ein b,
ergo: Cajus ist sterblich.	ergo: a ist c.

Das rechts dem Schlusse beigefügte „Schema“ desselben zeigt, dass ihm (so wie er zunächst sich darstellt) *logische Gültigkeit* nicht zukommen kann. Es kann nicht eine (gute) Denkgewohnheit uns von einer Prämisse der Form „a ist ein b“ hinüberleiten zu einer Konklusion „a ist c“.

Dass vielmehr eine solche Gewohnheit, falls sie überhaupt bestünde, eine schlechte sein müsste, wäre leicht an beliebigen Beispielen darzuthun: indem wir dem a dieselbe Bedeutung „Cajus“, dem b die „Mensch“ wie in dem Beispiel belassen, brauchen wir etwa nur dem c die Bedeutung „unsterblich“ (oder „vollkommen“ und anderes) beizulegen, um die Haltlosigkeit des Schlusses zu erkennen. Die Folgerung wäre alsdann eine solche, deren Prämisse wir als richtig, deren Konklusion wir aber als falsch (mit einer gewissen Denknotwendigkeit) anerkennen müssen.

Gleichwol lässt sich die obige Konklusion sowol, als die Prämisse, für richtig erklären, und die Schlussfolgerung besitzt darum das, was man die „extralogische Gültigkeit" derselben nennen könnte: sie ist *„materiell"* (aber nicht „formell") richtig.

Von der angeführten Prämisse *allein* konnte, wie gezeigt, eine Denknotwendigkeit die Konklusion hier nicht liefern. Da diese letztere aber richtig ist, so *kann* es dennoch eine gute Denkgewohnheit gewesen sein, die zu ihr hinführte (auch eine, die vom Gefühl der Denknotwendigkeit begleitet sein mag), aber dann von andern Prämissen aus, nämlich von einer Gruppe solcher, die aus der angegebenen durch geeignete Ergänzung, Vermehrung hervorgehen.

Thatsächlich wirkte bei obigem Schlusse noch etwas, eine Denkgewohnheit, mit, die uns zur richtigen Konklusion leitete, indessen als Prämisse unausgesprochen blieb. Man kann den Schluss gelten lassen als einen *unvollständigen*, als ein sog. *„Enthymem"*.*)

In Enthymemen wird im gemeinen Leben sehr häufig geschlossen, wobei dem Verfahren die Tendenz der Abkürzung und die Höflichkeit zugrunde liegt, bei dem Hörer, dem man die erforderliche mentale Ergänzung des Schlusses zuschiebt, auch selbstthätige denkende Mitwirkung vorauszusetzen.

Bringen wir uns dieses (anfänglich eventuell unbewusst gebliebene) Agens zum Bewusstsein, so finden wir, dass es die Überzeugung war, dass *alle* Menschen sterblich seien.

Dieser Glaube, selbst eine Denkgewohnheit, wird von **Peirce** geradezu als das „leitende Prinzip" des vorliegenden Enthymems hingestellt — mit einer gewissen Berechtigung vielleicht, obwol nicht in dem sonst üblichen Sinne.

Fügen wir denselben ausdrücklich, als Urteil gefasst, der bis-

*) Es gibt auch Grenzfälle von Enthymemen, wo dieser Name sich als nicht mehr angemessen beanstanden lässt. Solche treten ein, wenn die ausdrücklich angeführte Prämisse (oder eine derselben) sogar als völlig belanglos, überflüssig zu erkennen ist, wenn man etwa die sämtlichen wirklich wirksamen Prämissen mit Stillschweigen übergangen findet. So z. B. bei dem auch „materiell" wenigstens richtigen „Schlusse" (?):

Vorgestern regnete es irgendwo
ergo: geht morgen die Sonne auf.

Die wirksamen Prämissen dieses Enthymems — falls man es noch so nennen will — würden etwa sein: Jeden Tag geht (in unsern Breiten) die Sonne auf; Morgen ist auch ein Tag. — Man wird in solchem Falle sagen, dass das Wort „ergo" am unrechten Platze sei, und gar kein Schluss vorliege, sondern nur eine Reihe von ausser Zusammenhang stehenden Behauptungen.

herigen Prämisse hinzu, reihen wir dieses Urteil in unsre Prämissen ein, so lautet der Schluss nunmehr:

Alle Menschen sind sterblich, Cajus ist ein Mensch, ergo: Cajus ist sterblich.	Schema: $P) \begin{cases} \text{Alle } b \text{ sind } c, \\ a \text{ ist ein } b, \end{cases}$ ergo $C)$: a ist c.

Der so vervollständigte Schluss besitzt nunmehr auch *logische* Gültigkeit; er ist auch *„formell richtig"* und zur Bekräftigung dessen vermögen wir uns nur darauf zu berufen, dass auch sein allgemeines Schema (unmittelbar) *einleuchtet*. Aus diesem Grunde ist der Schluss nunmehr auch ein „vollständiger" (a complete argument).

Bringen wir uns noch das „leitende Prinzip" dieses Schlusses zum Bewusstsein, so werden wir, die Aufgabe etwa von der psychologischen Seite angreifend, vielleicht finden, dass es die Überzeugung ist: dass ein Merkmal des Merkmals eines Dinges auch ein Merkmal dieses Dinges selbst sein müsse. Wir haben dann den Schluss:

Nota notae est nota rei ipsius,
Sterblichkeit ist ein Merkmal der Menschennatur, welche Merkmal des Cajus ist, ergo: Sterblichkeit ist ein Merkmal des Cajus.

Aber dieses selbe Prinzip des „nota notae etc." ist wiederum wirksam beim Ziehen dieser letzteren Schlussfolgerung, sodass dieselbe durchaus nicht vollständiger ist als die vorhergehende. Auch hat sie das gleiche Schema wie diese.

Die in diesem Schema niedergelegte (formulirte, in dasselbe eingekleidete) Denkgewohnheit mögen wir als das leitende Prinzip selbst hinstellen.

Das Schema des Schlusses erhält man, indem man die Namen der speziellen Dinge, von welchen die Schlussfolgerung spricht, durch Symbole von allgemeiner Bedeutung, Buchstaben, ersetzt, für diese aber alle Beziehungen, welche die Schlussglieder (Prämissen und Konklusion) von jenen Dingen ausdrücklich voraussetzten oder behaupteten, entsprechend zum Ausdruck bringt.

Aus obigen Betrachtungen erhellte auch, dass man, um eine vielleicht materiell richtige Schlussfolgerung als eine dennoch unberechtigte zu erkennen, sie als *logisch ungültig* nachzuweisen, nur zu ihrem Schema ein Beispiel zu finden braucht, in welchem die Prämissen als richtig anzuerkennen sind, während die Konklusion sich als falsch erweist. Auch bei solcher Anerkennung wird an das Gefühl der Evidenz appellirt. (Vergl. hiezu eine in § 12 gegebene Illustration.)

Kürzer auch mag man direkt jene Namen durch irgend welche andere ersetzen, für die zwar die Prämissen noch zutreffen, die Konklusion aber nicht mehr zutreffen würde.

Der Mangel oder das Ausbleiben des Gefühles der Evidenz genügt ohne weiteres in der Regel noch nicht zu obigem Zwecke, dem Ungültigkeitsnachweise für eine gegebene Schlussfolgerung — in Anbetracht dass man schon bei logisch berechtigten Schlüssen in verwickelteren Fällen oft langer Schlussreihen, erst mühsamer Zwischenüberlegungen bedarf, um das Gefühl von der Evidenz der Folgerung, die Überzeugung von ihrer Denknotwendigkeit zu gewinnen.

λ_3) Ich habe noch zu erklären, weshalb hier die Logik als eine Algebra dargestellt und in dieser Darstellung berechtigt erscheint, sich im Gegensatz zu andern Behandlungsweisen vorzugsweise das Epitheton einer „exakten" Logik beizulegen.

In dem Bestreben, die Grundgesetze folgerichtigen Denkens zum Bewusstsein zu bringen und denselben einen allgemeinen, zugleich möglichst einfachen Ausdruck zu geben, hat sich die Logik ursprünglich enge an die *Wortsprache* angelehnt. Sie musste dieses thun, da ein anderes Mittel des Gedankenausdrucks zunächst überhaupt nicht zugebote stand, und sie wird auch in Zukunft fortfahren müssen, bis zu einem gewissen Grade diesen Anschluss zu suchen, nicht nur, weil sie sich dem Anfänger gegenüber stets in der gleichen Lage befindet, sondern auch, weil überhaupt in absehbarer Zeit die Wortsprache immerhin das Hauptmittel des Gedanken*ausdrucks* sowie eine Hauptform des Gedanken*vollzuges* bleiben wird. Auch wir werden mit dieser Anlehnung zu beginnen haben (1. Vorlesung).

Nachdem nun aber in Gestalt von so vielen andern Disziplinen das Beispiel vorlag, wie förderlich es ist, sich für bestimmte Untersuchungsgebiete je eine eigene *Zeichensprache* zu schaffen und die fundamentalen Sätze dieser Disziplinen, unter Benutzung von Buchstaben als Symbolen, in allgemeine *Formeln* einzukleiden, hat nach einer langen Zeit verhältnissmässig unfruchtbarer Stagnation auch die Logik einen frischen Aufschwung genommen und sich in schon ziemlich zahlreichen neueren Bearbeitungen*) zu einer eigenen Buchstabenrechnung, einer *Algebra der Logik* entwickelt.

In dieser finden nun die Gesetze des folgerichtigen Denkens ihren denkbar schärfsten, kürzesten und übersichtlichsten Ausdruck, in ihr stellen sie sich in der konzisesten und knappsten Gestalt dar. Zugleich befreit uns die neue Zeichensprache von all' den Fesseln, in welche durch die Macht der Gewohnheit die Wortsprache den Menschengeist

*) Vergl. das Literaturverzeichniss am Schlusse.

geschlagen. Zufolge dieser Vorzüge ist die rechnerische Behandlung der Logik in der Lage, mancherlei Lücken der älteren blos verbalen Behandlungen nachzuweisen und auszufüllen, zuweilen auch Fehler derselben zu berichtigen, darunter solche von grösserer Tragweite, von fundamentaler Bedeutung.

Jener enge Anschluss an die Wortsprache hat nämlich für die älteren Behandlungen der logischen Disziplin erhebliche Gefahren gebracht, denen sie auch grossenteils zum Opfer fielen. Auch die gebildetsten Kultursprachen haben ja als die Produkte einer von zahllosen Zufälligkeiten beeinflussten Entwickelung viele und gewichtige Mängel, bestehend vor allem in der Übereinstimmung der üblichen sprachlichen Einkleidungsformen für wesentlich verschiedene Gedankenbeziehungen. Mit der dadurch so oft, ja regelmässig bewirkten Verhüllung des wahren Sachverhältnisses war es nahe gelegt, dieses selbst zu verkennen, seinen Unterschied von andern, mittelst gleicher Wortverbindung ausgedrückten zu übersehen — wogegen andrerseits an die Verschiedenheiten zugebote stehender verbaler Ausdrucksformen manch überflüssige Distinktionen geknüpft werden mochten. Der Zweideutigkeiten und Unbestimmtheiten zufolge schwankenden Gebrauches, der unsymmetrischen Einkleidung so vieler symmetrischen Verhältnisse, sowie der empfindlichen Abwesenheit von angemessen kurzen Ausdrucksformen für manche wesentliche und charakteristisch häufig wiederkehrende Beziehungen nicht zu gedenken.

Man wird hiefür in dem Buche als solche gekennzeichnete Belege genugsam finden.

Die *rechnerische Behandlung* der logischen Materie — zuerst von Leibniz[1] angeregt, dann auch von Lambert[2...5] und Ploucquet[1] verfolgt, ist in dem grundlegenden Werke „Laws of thought" zum erstenmal durch George Boole[4] zu einem in seiner Art nahezu vollständigen, auch auf die Lösung von Problemen zugespitzten Systeme ausgebildet worden.

Nahezu vollständig allerdings nur innerhalb jenes schon erwähnten Gebietes, welches, von Peirce als die „logic of absolute terms" bezeichnet, sich weiterhin von selbst schärfer charakterisiren wird. Wie schon angedeutet, beschäftigt sich diese Disziplin nur mit den alleräusserlichsten logischen Aufgaben, welche auch den Tummelplatz der alten Logik bilden, sofern diese etwa in der Lehre von den Syllogismen gipfelte. Naturgemäss muss indess die Erledigung dieser Aufgaben allen feineren Untersuchungen aus der Logik der Beziehungen überhaupt, es muss der „logic of relatives" die elementarere Disziplin vorangehen, so wie etwa die Geometrie der Mechanik und diese der Elasticitätslehre voraufzugehen hat.

Die Anlehnung an das Vorbild eines bereits bekannten Kalkuls, als welcher sich derjenige der arithmetischen vier Spezies naturgemäss in den Vordergrund drängte, hat allerdings auch seinerseits diesem ob zwar genialen und bewunderungswürdigen Systeme gewisse Übelstände aufgeprägt, von welchen es jedoch rasch genug durch neuere Bearbeiter gereinigt worden ist.

μ_3) Nun aber schien diese neuere Darstellung des gewichtigsten Inhaltsstoffes der (alten) Logik in einer eigenen Zeichensprache, in der Form eines *Kalkuls*, dem Althergebrachten ganz unvermittelt, schroff gegenüberzustehen. War sie doch auch nicht aus diesem unmittelbar herausgewachsen, sondern hatte sozusagen einen selbständigen Ursprung: Mathematiker zumeist, nicht Berufsphilosophen, hatten sie aufgebaut.

Kein Wunder, dass dieselbe im andern Lager ungemessenes Befremden*) erregte, verständnissvollem Entgegenkommen oft nicht begegnete, vielmehr manch' abfällige Beurteilung erfuhr, namentlich abseiten Solcher, die überhaupt keinen Kalkul beherrschen.

Zuzugeben ist, dass ein Übergang von dem älteren zum neueren Systeme grösstenteils fehlte, und berechtigt war wenigstens das Verlangen, dass die Grundlagen des Kalkuls aus den Prinzipien der alten Logik abgeleitet und bewiesen würden — wohlbemerkt: *soferne dieses möglich ist* — ein Punkt, auf den ich zurückzukommen habe.

Die vermisste Brücke geschlagen zu haben ist nun das Verdienst der grundlegenden Arbeit[5] in Bd. III des American Journ. des Herrn Charles S. Peirce, zu welcher ihm, wie er sagt, Betrachtungen von Augustus de Morgan die Anregung gegeben haben.

Dasjenige vor allem, was uns in dieser Arbeit an Errungenschaften gesichert ist, desgleichen auch, was alsdann noch — und zum Teile unter seiner Leitung — Herrn Peirce's Schüler hinzugefügt haben, besonders in[1,1] Miss Ladd und Herr Mitchell — dieses zunächst habe ich mich bestrebt, in systematischer Darstellung zu einem wissenschaftlichen Systeme zu vereinigen.

Dass mir dabei nicht blos eine reproduzirende Thätigkeit zufiel, sondern ich auch kritisch und sichtend, lückenergänzend und schliesslich an dem

*) Jenem durch das Vermissen einer Brücke vom Einen zum Andern bedingten Befremden hat beispielsweise Hermann Lotze[1] in der „Anmerkung über logischen Calcül", durch welche sich die zweite Auflage seiner Logik von der ersten unterscheidet, in drastischer Weise Ausdruck gegeben — vergl. die Schlussworte seiner „Anmerkung".

Gebäude weiterbauend eingreifen durfte, wird schon ein flüchtiger Vergleich zeigen.

ν_3) *Einen* Unterschied zwischen der hier angestrebten und den früheren Behandlungsweisen der Logik möchte ich noch hervorheben, ohne jemand damit nahe treten zu wollen.

Suchen wir — was keine leichte Aufgabe ist — die vorgängigen Darstellungen der verbalen Logik zu überblicken, so scheinen dieselben uns stets nur aufzutreten mit einem schon in sich abgeschlossenen, einem *fertigen Bestande* von Lehren.

Für das richtige Verständniss, mitunter für ganz eigenartige Auffassung und Anordnung, für angemessene Wertschätzung und Anwendung ebendieser stereotypen Lehren plädiren solche Werke mit grossem Scharfsinn, oft gewandter Dialektik und mehr oder minder Verdienst und Glück. Mit grossem Verdienst auch pflegen sie den Leser einzuführen in die vorhandenen Streitfragen oder Kontroversen, unhaltbare Ansichten widerlegend, veraltende Distinktionen über Bord werfend und neue einführend, auch einen Einblick in die historischen Wandlungen philosophischer Anschauungsweisen eröffnend. Bald von der allgemein philosophischen und metaphysischen, bald mehr von der psychologischen Seite tragen sie wol Schätzenswertes zu einem Aufbau der Logik bei.

Was ich aber bei all diesem Anerkennenswerten *vermisse* ist, dass dabei mir nirgends zutage zu treten scheint, was denn etwa weiter noch zu thun und anzustreben wäre! In fühlbarem Gegensatze zu andern wirklichen Wissenschaften scheint mit der gegebenen Doktrin das Gebäude der logischen Disziplin allemal schon ganz vollendet dazustehen. —

Dagegen wird bei der rechnerischen Behandlung eine unbegrenzte Fülle ganz bestimmter Probleme sich zur Lösung darbieten: auch die Logik erscheint hier alsbald als eine Wissenschaft, die unbegrenzter Weiterentwickelung fähig, und ganz deutlich wird man, denke ich, die Punkte erkennen, wo zunächst die Hebel anzusetzen sind, an welchen fernere Arbeit einzusetzen haben wird, um ein weiteres Fortschreiten zu verwirklichen. —

Die Frage, wie nun wol das Verhältniss der verbalen zur rechnenden Disziplin aufgefasst werden soll, möchte ich dahin beantworten:

Herr Venn[1] ist der Ansicht, dass diese nicht bestimmt sei, jene zu verdrängen, sondern vielmehr als ein gewissermassen höherer Teil auf sie zu folgen habe. Hievon bin ich nicht allzuweit entfernt, nur meine ich, dass diese überdies — auf Grund eben ihrer *vollkommnen Konsequenz* — von maassgebendem Einfluss auf die künftige Gestaltung jener werden sollte, im Sinne einer Annäherung, ihrer Anbequemung an sie.

Bei der Fülle von der verbalen Logik fremden, ja unzugänglichen Themata von Untersuchungen, auf die wir hier einzugehen haben, mussten naturgemäss manche verdienstliche Betrachtungen jener hier unberücksichtigt bleiben oder konnten solche nur flüchtig gestreift werden. Sollte in der That Alles, was mir anderwärts von Wert erscheint, hier aufgenommen sein, so müsste ich das Volum des Buches vermehrfacht haben. Es kann deshalb nur wünschenswert genannt werden, dass der Studirende sich auch in der sonstigen zeitgenössischen Logikliteratur thunlichst umsehe, wozu ihm die Literaturangaben in unserm Verzeichnisse sowol als in gelegentlichen Noten Anregung geben und behülflich sein mögen.

ξ_3) Zum Schluss der Einleitung noch einige Worte über Wert und Nutzen der Logik überhaupt und damit auch der vorliegenden Studien.

Schon die Logik von Port-Royal[1] bemerkt, dass nichts schätzenswerter sei, als der gesunde Verstand und ein zutreffendes Urteil (le bon sens et la justesse de l'esprit) in der Unterscheidung dessen was wahr und was falsch ist. Während alle andern Eigenschaften des Geistes nur beschränkte Anwendungsgebiete besitzen, sei die Genauigkeit der Urteilsfunktion (l'exactitude de la raison) allgemein von Nutzen in allen Lagen und Verrichtungen des Lebens; denn nicht nur in den Wissenschaften, sondern auch bei der grossen Mehrzahl der Gegenstände (sujets), von denen die Menschen reden, und der Geschäfte, die sie treiben, sei es schwierig und von grösster Wichtigkeit, die Wahrheit vom Irrtum zu scheiden — eine Aufgabe, die dem Verstand obliege. Man solle deshalb vor allem darauf bedacht nehmen, die eigne Urteilskraft zu entwickeln (de former son jugement). Gewöhnlich bediene man sich des Verstandes als des Mittels, sich der Wissenschaften zu bemächtigen, aber man solle eher sich der Wissenschaften als eines Werkzeugs zur Vervollkommnung des Verstandes bedienen, da die Schärfe des letztern ohne Vergleich wertvoller sei als alle auch von den verlässigsten Wissenschaften erschlossenen Kenntnisse.

Und treffend hebt Mill hervor, dass bei weitem der grösste Teil unsres Wissens (allgemeinen sowol wie des besonderen) offenbar aus Folgerungen besteht. Folgerungen zu ziehen sei das grosse Geschäft des Lebens genannt worden. Ein jeder habe täglich, alle Augenblick,

Thatsachen zu prüfen, welche er nicht direkt beobachtet hat (und zwar nicht zu dem allgemeinen Zweck der Vermehrung seines Wissens, sondern weil die Thatsachen selbst für seine Interessen und Obliegenheiten von Belang sind). Alle haben gewisse Thatsachen zu bestimmen, sie aus gegebenen Wahrnehmungen oder Data zu schliessen, und daraufhin gewisse Regeln (vorschriftsmässig oder nach freiem Ermessen) anzuwenden, und je nachdem sie dies gut oder übel thun, erfüllen sie gut oder schlecht die Pflichten ihres Berufs. Die Logik zeige nun aber, welche Beziehungen stattfinden müssen zwischen den Daten und dem was aus ihnen geschlossen oder durch sie bewiesen werden kann. Darnach müsse sich in der Wissenschaft sowol, wie bei Führung seiner Geschäfte, ein jeder richten, bei Strafe, falsche Folgerungen zu ziehen, welche nicht in der Realität der Dinge begründet sind.

„Wenn es Regeln gibt, nach welchen sich jeder Verstand in einem jedem Falle, in welchem er richtig geschlossen hat, wissentlich oder unwissentlich richtet, so scheint es kaum nötig, zu erörtern, ob es wahrscheinlicher ist, dass Einer diese Regeln beobachten wird, wenn er sie kennt, als wenn er sie nicht kennt."

Eine Wissenschaft könne ohne Zweifel auf eine gewisse Höhe gebracht werden ohne die Anwendung einer andern Logik als derjenigen, welche alle Menschen, die einen gesunden Verstand besitzen, im Verlauf ihrer Studien empirisch erlangen. Es gebe aber eine gewisse Grenze sowol in Bezug auf das, was die Mechaniker ohne die Grundsätze der Mechanik, als auf das, was die Denker ohne die Grundsätze der Logik zu leisten vermögen. Wenn mehrere der schwierigeren Wissenschaften noch in einem so mangelhaften Zustand sind, dass in ihnen nicht allein so wenig bewiesen wird, sondern auch der Streit über das wenige „Bewiesene" nicht enden zu wollen scheint, so liege der Grund vielleicht darin, dass die logischen Begriffe der Menschen noch nicht jenen Grad von Ausbildung („Ausdehnung") und Genauigkeit erlangt haben, welcher für die Beurteilung der einschlägigen Beweise erforderlich ist . . .

So sehr wir diesen hier im Auszuge wiedergegebenen Ausführungen zustimmen, so möchten wir doch eine andere Rücksichtnahme in den Vordergrund stellen. Wir wünschen die logische Forschung überhaupt nicht vom utilitarischen, geschweige denn von einem kurzsichtig oder engherzig — um nicht zu sagen „bornirt" — utilitarischen Standpunkte aus beurteilt zu sehen. So verdiente aber ein Standpunkt genannt zu werden, der das Streben nach Zutageförderung und Erkenntniss der

Wahrheit nur dann als berechtigt anerkennte, wenn dieselbe einen unmittelbaren oder zum voraus schon erkennbaren Nutzen verspricht.

Wir wünschen, dass die Logik unter dem *wissenschaftlichen* Gesichtspunkte betrachtet werde. Höher als jede Aussicht auf etwaigen Nutzen der Disziplin steht uns ihr absoluter *Wert* als Selbstzweck — „Wert" als im Gegensatz zur „Nützlichkeit" — steht uns die Erforschung der für richtiges Schliessen maassgebenden Denkgesetze *um ihrer selbst willen.* Und welches *edlere* Ziel könnte sich der Intellekt auch setzen, als das: *sich selbst zu erkennen*! — somit die altehrwürdige Mahnung des Thales, das *γνῶθι σεαυτόν* des Weisen von Milet verwirklichend.

Nebenbei halten wir ja solches Forschen nach der Wahrheit um ihrer selbst willen auch für diejenige Taktik, die den Forderungen eines vernünftigen, weil hinreichend weit ausschauenden Utilitarismus am besten gerecht werden muss.

Die Geschichte der Wissenschaften zeigt es zur Genüge, wie erst durch dieses freie Walten des Erkenntnisstriebes, durch das reine, von allen Rücksichten des Eigennutzes, ja Nutzerfolges, losgelöste Streben nach Wahrheit, d. i. die Bethätigung eben des wissenschaftlichen Geistes, die allergrössten Entdeckungen ermöglicht wurden.

Wären z. B. nicht Jahrhunderte lang in diesem Geiste die Gesetze jener rätselhaften Kraft erforscht worden, mit welcher geriebener Bernstein, Harz etc. leichte Körper wie Korkstückchen, Papierschnitzel anzieht, wären sie nicht, wie gesagt, ohne jede Aussicht auf praktische Verwendbarkeit um ihrer selbst willen studirt worden, so würde auch die Entdeckung des elektrischen Telegraphen unmöglich gewesen sein; als aber jene so „unpraktisch" sich anlassenden Forschungen weit genug gediehen waren, lag dieselbe auf einmal so nahe, dass Mehrere darauf verfielen, war die Entdeckung — unbeschadet des Verdienstes Derer, welche wirklich die letzten Schritte vollführten — schon fast von selbst da.

Eine von diesem Geist beseelte Forschung möchten wir als die Hochpraxis bezeichnen gegenüber der nur auf greifbar praktischen Nutzen ausgehenden Niederpraxis. Hier vor allem dürfte es am Platze sein —, wie der volkstümliche Ausdruck fordert: „den grossen Glauben zu haben und nicht die grosse Eselsmeinung".

So trivial die obige Wahrheit in den Kreisen, die sich mit ernster Forschung abgeben, im allgemeinen glücklicherweise ist, ist sie doch gerade vonseiten Derer, welche die Logik zu kritisiren liebten, nicht hinlänglich gewürdigt, oft ganz ausser Augen gesetzt worden.

Wir zweifeln nicht, dass jene allgemeine Erfahrungsthatsache, welche als ein Gesetz aus der Geschichte der gesamten Wissenschaften hervorleuchtet, sich einst auch bei der Logik bewahrheiten wird, wofern diese nur erst in den richtigen Bahnen — wofern sie nur überhaupt einmal — *fortschreitet*, und nehmen wir das Vorrecht der gänzlich uninteressirten Forschung, das andern Wissenschaften zugestanden ist, auch für sie in Anspruch.

Gleich andern Wissenschaften dürfte auch die Logik einst ganz Ungeahntes verwirklichen und herbeiführen, dass nebenher in überraschender Weise auch unabsehbare Vorteile erzielt werden. Um nur auf eines hinzudeuten, so sind seit ihrem jüngsten Aufschwunge bereits drei „logical machines" neuerdings aufgebaut, die allerdings den ihnen beigelegten Namen noch kaum zu verdienen scheinen, die nämlich mit ihrer Leistungsfähigkeit sich noch auf einer sehr rudimentären Stufe befindlich zeigen — wie etwa der Papin'sche Topf gegenüber der Dampfmaschine. In der That aber vermag doch Niemand vorauszusehen, ob nicht schon bald eine „Denkmaschine" konstruirbar wird, analog oder vollkommner wie die Rechenmaschine, welche dem Menschen einen sehr beträchtlichen Teil ermüdender Denkarbeit fortan abnehmen wird, gleichwie die Dampfmaschine es mit der physischen Arbeit erfolgreich thut.

Freilich darf man die Ernte nicht schon während der Aussaat fordern, und am wenigsten da, wo Bäume gepflanzt werden.

Erste Vorlesung.

§ 1. Subsumtion.

Hauptmittel des Gedanken*ausdrucks* und eine Hauptform des Gedanken*vollzuges* ist, wie schon gesagt, die *Sprache*.

Untersuchungen über die Gesetze des Denkens werden wir deshalb naturgemäss damit beginnen, dass wir *deren* einfachste Bildungen in's Auge fassen. Rein äusserlich betrachtet wären dies allerdings Buchstaben, Silben und Worte — die Ergebnisse eines an den sprachlichen Gebilden vorgenommenen und möglichst weit getriebenen Zergliederungsprozesses. In wesentlicher Hinsicht sind es *Sätze*, welche *Aussagen*, *Urteile*, *Behauptungen* darstellen.

Alles*) auf das Erkennen gerichtete Denken vollendet sich nämlich in *Urteilen*, die als Sätze innerlich gedacht oder äusserlich ausgesprochen, in Worte gefasst werden. In Urteilen endigt jede praktische Überlegung über Zwecke und Mittel, gipfelt jede Übereinkunft, um sie dreht sich jeder Streit. In die Form von Urteilen kleidet sich der Irrtum, in ihnen auch wird die Erkenntniss der Wahrheit niedergelegt; in Urteilen schliesst sich jede Überzeugung ab. Und nur insofern sich eine individuelle Überzeugung im Satze ausspricht, kann sie Gegenstand gemeinsamer Betrachtung werden und auf die Anerkennung vonseiten Aller Anspruch erheben. Alle andern sprachlichen Gebilde kommen nur in Betracht als Bestandteile oder Elemente des Satzes, alle andern Geistesthätigkeiten nur als Bedingungen oder Vorbereitungen, als Begleiterscheinungen und Wirkungen des Urteils.

Beginnen wir sonach damit, die *Urteile* in's Auge zu fassen, wie sie die Wortsprache als Sätze formulirt! Es muss sich uns hierbei empfehlen, unter Beiseitelassung der zusammengesetzteren, zunächst uns an die einfachsten Arten der Urteile zu halten. Als solche erscheinen die sogenannten *„kategorischen“* Urteile, welche sich darstellen in Form *eines* Satzes, der mit einem *„Subjekt“* ein *„Prädikat“* verknüpft.

Wie aus der Grammatik bekannt, ist das Subjekt Dasjenige, wor-

*) Vergl. Sigwart[1] p. 9 sq.

über etwas ausgesagt wird, das Prädikat Dasjenige, was von dem Subjekte ausgesagt wird. Die Verbindung zwischen beiden wird sehr häufig durch ein Hülfszeitwort, die *„Kopula“*: „ist“, vermittelt.

Am besten werden wir unsre Betrachtungen sogleich an ein paar Beispiele anknüpfen und erst nachher zusehen, inwiefern den Bemerkungen, zu welchen uns diese Beispiele Veranlassung geben, allgemeinere Gültigkeit zukommt.

Kategorische Urteile einfachster Art sind beispielsweise die in der Chemie als richtig anerkannten Sätze:

„(Alles) *Gold ist Metall.*“ — „(Alles) *Kochsalz ist Chlornatrium.*“ —

An diese schon lassen die für unsre Disziplin fundamentalen Auseinandersetzungen sich auf das leichteste knüpfen.

Beide Aussagen haben die nämliche Kopula. Als ihre, wie gesagt übereinstimmende, Kopula erscheint die dritte Person singularis des Hülfszeitworts, verbum auxiliare „sein“, nämlich: das Wörtchen „ist“, welches, hier wie dort, das zu seiner Linken befindliche Subjekt mit dem rechts von ihm stehenden Prädikate verknüpft.

Gleichwol erscheint die Beziehung, welche zwischen dem Subjekt der Aussage und ihrem Prädikat *thatsächlich* besteht, in dem ersten Beispiel als eine wesentlich andere, wie in dem zweiten, insofern umgekehrt *Metall nicht immer Gold*, dagegen *alles Chlornatrium auch Kochsalz* ist. Diese Verschiedenheit ist in den obigen Aussagen augenscheinlich nicht zum Ausdruck gebracht.

Will man *genauer*, *als jene Aussagen es thun*, die thatsächliche Beziehung zwischen dem Subjekte und dem Prädikate hiernächst vermittelst eines *Beziehungszeichens* darstellen, so muss man für das erste Beispiel ein anderes Zeichen wählen, als für das zweite. Man schreibe etwa:

$$\textit{Gold} \subset \textit{Metall}. \qquad \textit{Kochsalz} = \textit{Chlornatrium}.$$

Das zweite Zeichen, $=$, ist entlehnt den (übrigen) mathematischen Disziplinen und namentlich schon der Arithmetik; es ist das bekannte *„Gleichheitszeichen“*. Während dasselbe aber anderwärts oft nur benutzt wird, um Übereinstimmung, Gleichheit in einer bestimmten Hinsicht auszudrücken, z. B. Gleichheit hinsichtlich des Inhaltes oder Flächenmaasses bei zwei verschiedenen vielleicht auch verschieden gestalteten Flächen, soll dieses Zeichen in gegenwärtiger Schrift stets in der (inhaltlich) weitest gehenden (dem Umfang nach „engsten“) Bedeutung aufgefasst werden, welche ihm überhaupt beigelegt zu werden vermag. Es soll uns nämlich die Übereinstimmung in *jeder* Hinsicht, die *vollkommne* Übereinstimmung, Einerleiheit oder *Identität* zwischen den Bedeutungen der durch dasselbe verknüpften Namen, Zeichen oder Ausdrücke darstellen. Es kann daher das Zeichen = hier als „einerlei mit", oder, wenn man will, auch als *„identisch"* gelesen werden; indessen verschlägt es nichts, wenn wir uns bequemer der allgemeinen Übung anschliessen, dasselbe einfach als *„gleich"* zu lesen.

Für der Mathematik ferner stehende Leser sei ein für allemal bemerkt, dass man eine Behauptung der Form

$$a = b$$

eine *„Gleichung"* nennt, und zwar werden im Deutschen die durch das Zeichen = getrennten sowol als verknüpften Ausdrücke schlechtweg als die beiden *„Seiten"* der Gleichung bezeichnet; so ist a die *„linke"*, b die *„rechte Seite"* der vorstehenden Gleichung (englisch: lefthand resp. righthand *member*, französisch: premier und second *membre*, etc.).

Nach dem Gesagten wird eine Gleichung, wie $a = b$, uns ausdrücken, dass ihre beiden Seiten a und b lediglich Namen für *einunddasselbe* Objekt des Denkens sind. Und zwar sind es hier für das Nämliche *verschiedene* Namen. Dieser Umstand jedoch ist nebensächlich, indem auch in Gleichungen, wie $a = a$, die beiderseitigen Namen in einen einzigen werden zusammenfallen können. Es kommt bei der Gleichsetzung oder Identischsprechung, Identitätsbehauptung, nicht auf den Klang der Namen, nicht auf das Aussehen der etwaigen Ausdrücke, sondern ganz allein auf die *Bedeutung* derselben an.

Daneben mag auch die psychologische Wirkung der Namen eine verschiedene sein; sie mögen an verschiedene Merkmale von Dem, was sie bezeichnen, zuerst erinnern, und wie in dem angeführten Beispiele: „Kochsalz = Chlornatrium" den Hörer oder Leser veranlassen, sich Dasjenige, was sie bedeuten sollen, von verschiedenen Seiten vorzustellen, indem sie je mit eigentümlichen Vorstellungselementen an das Vorzustellende anknüpfen, diese sozusagen in den Vordergrund stellend. Achtet man hier in der That auf die Art, wie die Namen „Kochsalz" und „Chlornatrium" zusammengesetzt sind, so wird durch den erstern überhaupt nicht an chemische Bestandteile, sondern nur an die Verwendung des Salzes zum Kochen erinnert, dagegen durch den letzteren blos hervorgehoben, dass das Vorzustellende die chemische Verbindung der Elemente Chlor und Natriummetall sei. Das eine Merkmal aber: durchaus von der Beschaffenheit des gewöhnlichen zum Kochen verwendeten Salzes zu sein, ist von dem andern Merkmal: aus Chlor und Natrium zu bestehen, nach heutigem Stand der chemischen Erkenntniss unmöglich zu trennen, vielmehr damit unweigerlich zu verknüpfen, und so ist es immerhin *dasselbe*, was beide Namen bezeichnen.

Diesen ihren „logischen Gehalt", ihre volle und eigentliche Bedeutung, von ihrem „psychologischen" Gehalt zu unterscheiden werden wir bei Namen sowol als auch bei Urteilen hier häufig Veranlassung haben.

Gleichwie die Klassen der Dinge, welche für Kochsalz, und welche für Chlornatrium erklärt werden müssen, ganz und gar einerlei sind, so sind es auch die zugehörigen „Begriffe" Kochsalz und Chlornatrium. Dieselben haben nicht nur einerlei „Umfang", sondern auch denselben „Inhalt", identisch dieselben Merkmale.

Das andere Zeichen $\subset$ lese man: *„untergeordnet"*, auch, wenn man will: *„subordinirt"*. Es heisse das *Unterordnungszeichen* und eine Behauptung, wie

$$a \subset b$$

eine *„Unterordnung"* (subordinatio). Das Zeichen ist ähnlich gestaltet, gewissermassen nachgebildet dem (einen) „Ungleichheitszeichen" der Arithmetik, nämlich dem Zeichen $<$ für *„kleiner* (als)". Bekanntlich kann dieses rückwärts als „grösser", $>$, gelesen werden und wird dadurch leicht mit seiner Bedeutung dem Gedächtnisse eingeprägt — einerlei, ob vorwärts oder rückwärts gelesen — dass man sich merkt: das Zeichen breite sich immer vom kleineren zum grösseren Werte hin aus, oder spitze sich vom grösseren Wert gegen den kleineren hin zu. Analog wird auch unser Unterordnungszeichen rückwärts, d. i. wenn man wiederum von links nach rechts lesen will, in der umgekehrten Stellung, $\supset$, gelesen, als *„übergeordnet"* (superordinirt) zu deuten sein. Die obige Unterordnung darf (mit andern Worten) auch rückwärts angeschrieben werden als eine *„Überordnung"* (superordinatio):

$$b \supset a,$$

und wird dieser Ausspruch genau dasselbe besagen, wie der vorige.

Einer Verwechselung der Zeichen für „über"- und „untergeordnet" beugt die Bemerkung vor, dass auch hier das Zeichen seine Arme oder Zweige jeweils vom engeren zum weiteren Begriff, von der weniger umfassenden Klasse nach der umfassenderen hin (welche die andere in sich schliesst, also — in einem gewissen, späterhin noch näher erläuterten Sinne — vom Teil zum Ganzen), somit ebenfalls vom Kleineren zum Grösseren hin divergirend ausbreitet, wogegen in dem entgegengesetzten Sinne, vom weiteren zum engeren Begriff hin, das Zeichen sich zuspitzt (genauer gesagt: spitzrundet), seine Zweige immer enger zusammenlaufen, konvergiren, um sich am „Scheitel" des Zeichens zu vereinigen. Die kleinere Klasse, der engere Begriff, steht sonach immer am Scheitel des Zeichens.

Hienach erscheinen auch die Über- und Unterordnungszeichen als leicht zu merkende, als „mnemonische".

Von den beiden *Begriffen* „Gold" und „Metall" wird in der That jener der „engere“, dieser der „weitere“ genannt. Diese Benennung ist schon von der älteren Logik eingeführt und zwar augenscheinlich *im Hinblick, nicht auf den „Inhalt“, sondern auf den „Umfang“* der genannten Begriffe.

Der *„Umfang“* des Begriffes „Gold“ setzt sich zusammen aus allem Dem, was Gold ist; ihn bildet die *Klasse* aller der Substanzen oder Dinge, welche als Gold zu erklären sind. Ebenso bildet die Klasse aller der Dinge oder Substanzen, welche Metall zu nennen wären, kurz gesagt: die ganze *Klasse der Metalle*, den sogenannten „Umfang“ des Begriffes „Metall“. Die erstere Klasse ist in der zweiten enthalten, welche daneben auch noch Anderes enthält, z. B. die Klasse der als Silber zu bezeichnenden Substanzen, etc. Jene ist wirklich ein Teil von dieser. Die Klasse „Gold“ ist, neben noch Anderem, ganz enthalten in der Klasse „Metall“ — dies ist also die Beziehung, welche die Unterordnung „Gold $\subset$ Metall“ auszudrücken bestimmt ist.

Umgekehrt aber, *wie deren „Umfänge“ die Klassen, verhalten sich die „Inhalte“ der* beiden *Begriffe.*

Der „Inhalt“ oder das Wesen des Begriffes Metall setzt sich zusammen aus denjenigen *Merkmalen*, welche *allen* Metallen gemeinsam sind und, *insgesamt, nur* diesen zukommen. Dahin gehören erstlich diejenigen Eigenschaften, welche den materiellen Substanzen überhaupt innewohnen, eventuell für sie charakteristisch sind, als da sind: die Eigenschaft der Raumerfüllung, die Eigenschaft, träge, schwer zu sein, von konstanter Masse, etc. Und zweitens gehören dazu solche Merkmale, welche die Metalle von Nichtmetallen unterscheiden, z. B. die Eigenschaft „gute“ Leiter der Elektrizität zu sein, eine geringe spezifische Wärme zu besitzen, im festen oder flüssigen Zustande das Licht in jener eigentümlichen Weise zurückzuwerfen, welche als „Metallglanz“ bezeichnet und in der Theorie der Metallreflexion von der Optik schärfer präzisirt wird, u. a. m.

Alle diese Merkmale des Begriffes „Metall“ kommen nun auch dem Begriff „Gold“ zu, und dazu noch manche andere, durch welche — zum Teil — das Gold sich von andern Metallen unterscheidet, z. B. das dem Golde eigentümliche hohe spezifische Gewicht, die Eigenschaft, im reflektirten Lichte gelb, im durchgehenden Licht aquamarinblau zu erscheinen, seine Duktilität, gewisse chemische Verwandtschaften und anderes mehr.

Dem „Inhalte“ nach betrachtet ist nun der übergeordnete und weitere Begriff in dem untergeordneten, dem engeren mit enthalten. Der erstere erscheint geradezu als ein Teil des letzteren.

Im Hinblick auf diesen Inhalt der Begriffe, d. i. ihr eigentliches Wesen, müsste man also die Beziehung zwischen Gold und Metall gerade umgekehrt, wie oben, schreiben, in Gestalt von:

Inhalt des Begriffes Gold $\supset$ *Inhalt des Begriffes Metall*

— so wenigstens, wenn man die geschilderte mnemonische Interpretation des Beziehungszeichens beibehalten will.

Statt $\supset$ das frühere Zeichen $\subset$ hier beizubehalten wäre nur angängig, wenn man diesem eine andere (ebenfalls mnemonische) Deutung geben, dasselbe nämlich dahin auslegen wollte, als ob mittelst desselben das an seinem Scheitel stehende Objekt sozusagen den Versuch machte, den Anspruch erhöbe, (mit den ausgebreiteten Armen des Zeichens) das andere Objekt zu umfassen, dasselbe in sich einzuschliessen. Diese Einschliessung als eine vollendete auch äusserlich zur Darstellung zu bringen, indem man etwa den Namen des eingeschlossenen Objektes in den des einschliessenden hineinsetzte, ist aus typographischen Gründen nicht angängig.

Die in unserm Beispiel bestehende Beziehung zwischen Gold und Metall, die wir also im Hinblick auf die zugehörigen „Klassen“ oder „Umfänge“ der gleichnamigen Begriffe vermittelst der Formel

Gold $\subset$ Metall

darzustellen fortfahren, ist wesentlich dieselbe Beziehung, welche überhaupt zwischen einer *„Art“* und der ihr übergeordneten *„Gattung“* besteht, desgleichen zwischen einem *„Individuum“* und einer „Art“, zu der dies Individuum nebst noch andern Individuen gehörte. Es ist im allgemeinen:

die Art $\subset$ ihrer Gattung, das Individuum $\subset$ seiner Art,
die Gattung $\supset$ einer ihrer Arten, die Art $\supset$ einem ihrer Individuen.

Bei Art und Gattung ist der *engere* oder *Artbegriff* zugleich der *inhaltsreichere*, der *weitere* oder *Gattungsbegriff* aber der *inhaltsärmere*. Und dasselbe lässt sich auch aufrecht erhalten in Bezug auf ein „Individuum“ und die demselben übergeordnete „Art“, indem man ja unter dem *„Begriffe“* des gedachten Individuums nichts anderes als dessen (Einzel-)Vorstellung selbst versteht, nämlich die Gesamtheit *aller* seiner Merkmale. Als Beispiel sei angeführt: „Die Erde ist ein Planet“, was mit

Erde $\subset$ Planet

darzustellen ist. Wieder enthält der „Begriff“ der „Erde“ neben vielen eigentümlichen Merkmalen auch alle Merkmale des Begriffes „Planet“.

Nachdem wir nun für unsre beiden Musterbeispiele, die „typischen“ Exempel von kategorischen Urteilen auf S. 127, den Unterschied, Gegensatz hervorgehoben, welcher in den Beziehungen zwischen Subjekt und Prädikat bei ihnen zutage tritt, und uns diese Beziehungen in ihrer

Eigenart klar zum Bewusstsein gebracht haben, haben wir die Fähigkeit erworben, sind wir vorbereitet, die wahre *Bedeutung der Kopula* „ist“ (oder „sind“) zu erfassen, und uns nach einem geeigneten Beziehungszeichen zur Darstellung derselben umzusehen.

Die Kopula „ist“ wird bald die eine, bald die andere der beiden Beziehungen ausdrücken, die wir mittelst der Zeichen $\subset$ und $=$ dargestellt haben. Zu ihrer Darstellung wird sich darum ein aus den beiden letzten zusammengesetztes Zeichen $\subseteq$ als ein ohne weiteres, sozusagen nunmehr von selbst, verständliches und dem Gedächtniss sich einprägendes vor allen andern empfehlen. Ausführlichst wird dieses Zeichen als *„untergeordnet oder gleich“* zu lesen sein. Und soferne sich herausstellen wird, dass den an unsern Beispielen gemachten Wahrnehmungen allgemeine Gültigkeit zukommt, können wir sagen:

Das kategorische Urteil drückt immer aus, dass das Subjekt (der Subjektbegriff) dem Prädikate (Prädikatbegriffe) entweder untergeordnet oder aber mit ihm identisch sei. Es wird demnach ursprünglich oder von hause aus:

$$\textit{Subjekt} \subseteq \textit{Prädikat}$$

die gemeinsame Form aller kategorischen Urteile sein.*)

Indem wir nachher an dem Leitfaden ihres sprachlichen Ausdrucks die verschiedenen Arten kategorischer Aussagen möglichst vollständig durchgehen, werden wir in der That sehen, dass sich diese Behauptung durchaus bewahrheitet, dass die erwähnte Auffassung sich wenigstens *unbeschadet des logischen Gehaltes* der betreffenden Urteile überall anbringen, allgemein durchführen lässt — allerdings nicht selten bedingt durch eine Abänderung des „psychologischen Gehaltes“ der betreffenden Urteile, sowie auf Kosten der Eleganz ihres sprachlichen Ausdruckes, unter Verletzung, mitunter auch, des Sprachgefühles, in einer Weise, die wol in der That den Eindruck, erkünstelt zu sein, hervorbringen kann. Lässt aber dadurch sich nur bewirken, dass alle Urteile in einer gemeinsamen Form erscheinen, und so einer *allgemeinen* Behandlung zugänglich werden, so ist durch die Erzielung solch' unabsehbaren Vorteils doch der gedachte modus procedendi vollauf gerechtfertigt.

Eine Behauptung der Form

1⁰) $$a \subseteq b$$

*) Zufolge der später zu vollziehenden Einführung, Adjungirung des Begriffs des „Nichts“ wird die Wirksamkeit obiger Bemerkung für unsre Disziplin nachträglich eingeschränkt, sodass nicht alle Urteile in jener typischen Form der Subsumtion ihren angemessenen Ausdruck im Kalkul werden finden können.

werden wir eine *Subsumtion* (Einordnung) nennen, das Zeichen $\subseteq$ das *Subsumtionszeichen.* Dasselbe könnte auch das Zeichen der „eventuellen (oder fakultativen) Unterordnung“ genannt werden, wo das Beiwort „eventuell“ darauf anspielt und in der That lediglich darauf hindeuten soll, dass die Unterordnung auch in (identische) Gleichheit ausarten kann — im Gegensatz zu dem Zeichen $\subset$ der wirklichen oder definitiven Unterordnung, „der Unterordnung“ schlechtweg.

Die linke Seite a der obigen Subsumtion heisst auch der *Unterbegriff* oder *terminus minor* derselben, die rechte Seite b ihr *Oberbegriff* oder *terminus major.* [Nebenbei bemerkt sind das Benennungen, die ganz ebenso auch bei der Unterordnung $a \subset b$ anwendbar erscheinen.] Ich werde indess diesen Benennungen in der Regel die einfacheren *„Subjekt“* und *„Prädikat“* selbst vorziehen, und zwar auch auf einem solchen Felde der Anwendung von Subsumtionen, welches mit diesen der Grammatik (spezieller der Satzlehre oder Syntax) entlehnten Gebilden anscheinend nichts zu thun hat, z. B. wenn wir später unter a und b in 1⁰) uns „Gebiete einer Mannigfaltigkeit“ vorzustellen haben.

Wir konnten in unsern typischen Exempeln die Subsumtion 1⁰) *in Worten* durch den Satz darstellen:

„a ist b“

oder auch *„alles a ist b“*. Bei der ersteren Fassung muss man bleiben, wenn das Subjekt a — der Einzelvorstellung entsprechend — ein Individuum bedeutet, das ist also bei den sogenannten *„singulären“* Urteilen. Z. B. „Mars ist Planet“, was logisch dasselbe sagt, wie: „Der Mars ist ein Planet“.

Je nach dem sprachlichen Ausdruck des Subjektes werden aber für die Kopula mitunter auch andere Formen, wie z. B. die Pluralform „sind“ zu wählen sein. So namentlich, wenn es sich um Arten und Gattungen handelt, z. B.

„(Alle) Säugetiere sind Wirbeltiere“.
„(Alle) Zweihufer sind Wiederkäuer“.

An diesen als den wol häufigeren Fall wollen wir uns bei den nächsten Besprechungen vorzugsweise halten.

Gegenüber den einfachen Zeichen $\subset$ und $=$ drückt das zusammengesetztere Zeichen $\subseteq$ (wie schon Peirce betont) *gleichwol die einfachere Beziehung aus.* In der That die Subsumtion

1⁰) $$a \subseteq b$$

sagt *weniger*, wie die Unterordnung, resp. Gleichung

2⁰) $a \subset b$, 3⁰) $a = b$.

Die Subsumtion lässt nämlich die umgekehrte Beziehung, in welcher b zu a steht, offen. In Worten ist der Inhalt der Aussage 2⁰) oder 3⁰) je nur durch *zwei* Sätze wiederzugeben, nämlich etwa:

2⁰) *Alle a sind b, aber nicht alle b sind a,*

und

3⁰) *Alle a sind b, desgleichen alle b sind a.*

Offenbar schliessen diese beiden Beziehungen einander aus; sie können niemals beide zugleich wahr sein, indem die letztern Sätze rechts einander (kontradiktorisch) *widersprechen.*

Dagegen gibt 1⁰) den einfachen Satz wieder: *„Alle a sind b"*. Gemessen nach ihrer Ausdrucksfähigkeit vermittelst der Wortsprache ist also in der That die Subsumtion 1⁰) die einfachste von allen drei Aussagen.

Die Subsumtion 1⁰) konstatirt, stellt fest, *dass irgend einer der beiden Fälle 2⁰), 3⁰) vorliege, und dann selbstverständlich nicht der andere.*

Der erstere 2⁰) von diesen beiden Fällen ist weitaus der häufigere. Bezüglich des letzteren 3⁰) sei zunächst nur hervorgehoben, dass namentlich bei allen Urteilen, die als Begriffserklärungen, *Definitionen* hingestellt werden, beabsichtigt ist, dass diese als auch umgekehrt gültige verstanden werden.

Z. B. wenn wir *definitionsweise* sagen: „Die (Jede) Kugelfläche ist eine Fläche, deren sämtliche Punkte gleichen Abstand haben von einem bestimmten Punkte (dem sog. Mittelpunkte)", so ist damit gemeint, dass auch umgekehrt jede Fläche mit konstantem Abstand ihrer Punkte von einem bestimmten Punkt eine Kugelfläche (zu nennen) sei. Sagen wir ebenso: „Gerade Zahlen sind ohne Rest durch 2 teilbare Zahlen", so muss auch der Ausspruch gelten: „Ohne Rest durch 2 teilbare Zahlen sind gerade Zahlen". —

Welcher von den Fällen 2⁰) und 3⁰) bei der Subsumtion 1⁰) vorliege, ist manchmal unbestimmt, manchmal zwar bestimmt, aber nicht bekannt, meistens ohne Belang.

Freilich, wenn es zweifellos ist, welcher von den Fällen 2⁰), 3⁰) vorliegt, so hat die Aussage 1⁰) $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$ einen eigentümlichen Charakter, den man durch einen Ausspruch wie:

„Paris liegt an der Seine *oder* an der Leine"

illustriren könnte.

Ein solcher Ausspruch mag vielleicht albern erscheinen, doch ist er unzweifelhaft *richtig* oder korrekt zu nennen! Paris liegt allerdings, wie jedermann weiss, *nicht* (wie Hannover) an der Leine, sondern es liegt an der Seine. Jemand, der obigen Ausspruch thäte, würde demnach eine Unwissenheit fingiren, die man ihm kaum zutrauen möchte, er könnte sich dadurch den Vorwurf einer gewissen Unredlichkeit, *Verstellung* zuziehn. Für den Hörer aber, der etwa nicht schon von vornherein sachlich orientirt wäre, der seine Information über die Lage von Paris erst aus der obigen Aussage schöpfen müsste, würde diese Aussage ein *irre führendes* psychologisches Moment enthalten. Und dennoch: *Weniger* zu sagen als man weiss, ist erlaubt; und aus der Fülle der verfügbaren Kenntnisse Dasjenige hervorzuheben, was für einen bestimmten Zweck verwertbar ist, und demgemäss Anderes unbenutzt zu lassen, ist allgemeine Praxis in den Wissenschaften. Geschah dies in dem citirten Ausspruch zwecklos, so hat es hier, bei 1⁰) zu geschehen zu dem Zwecke, den verschiedenen möglichen Fällen, die wir unter 2⁰) und 3⁰) aufgezählt haben, eine einheitliche Behandlung angedeihen zu lassen, wie denn auch die Wortsprache faktisch für sie alle der nämlichen Kopula „ist" oder „sind" sich bedient.

Noch eines kommt hinzu, den obigen (Paris betreffenden) Ausspruch in jeder andern als der logischen Hinsicht als verwerflich erscheinen zu lassen: es ist der Umstand, dass es hier einen grösseren Aufwand von Worten erforderte, dass es *umständlicher* war, die in dem Ausspruch gegebene unvollständige Information zu liefern, als es gewesen wäre (in Gestalt des Ausspruchs: „Paris liegt an der Seine") die vollständigere Information zu geben.

Die gleiche Ausstellung wird man — anscheinend — uns auch später machen können, wenn wir in einer Subsumtion $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$ das Zeichen $\mathrel{=\!\!\!\in}$ als „untergeordnet oder gleich" lesen, während wir in *einem* Falle sehr wohl wissen, dass wirkliche Unterordnung, in einem andern Falle vielleicht, dass eigentlich Gleichheit stattfindet!

Hier wird eben nicht ausser Acht zu lassen sein, dass es sich für uns, indem wir *„untergeordnet oder gleich"* sagten, in erster Linie um eine genaue Darstellung, um charakteristische Wiedergabe des Sinnes der *Kopula* handelte. Das ist freilich umständlicher, als nur „untergeordnet" oder aber blos „gleich" zu sagen. Die Wortsprache aber hat für $\mathrel{=\!\!\!\in}$ den *kürzeren* Ausdruck „ist", wofern sie nicht — noch kürzer — dies Beziehungszeichen gänzlich unübersetzt lässt, wie z. B. die russische Sprache, zuweilen auch die lateinische (vergl. „ars longa", etc.).

Überhaupt haben wir bereits gesehen, dass — im Gegensatz zu vorigem abschreckenden Beispiele — die unvollständigere Information 1⁰) den weitaus kürzeren sprachlichen Ausdruck in der That besitzt. Dies aber gilt für alle Kultursprachen und ist darum nicht etwa blos für einen zufälligen Umstand, eine Äusserlichkeit der betreffenden

Sprachen zu halten, sondern sicherlich tief begründet in der Natur des menschlichen Intellektes. Die Subsumtion 1⁰) — können wir sagen — drückt blos *einen* Gedanken aus; die vollständigere Information 2⁰) resp. 3⁰) aber je deren *zwei*, und indem wir uns statt dieser letzteren mit diesem ersteren begnügen, lassen wir den einen davon fallen, sehen wir ab, abstrahiren wir von demselben.

Das Subsumtionszeichen $\neq\!\!\!<$ wird also, gegenüber den Zeichen $\subset$ und $=$, als das *ursprünglichere* hinzustellen sein. *Auf ihm* werden wir darum auch das ganze Gebäude des ersten und umfassendsten, des elementaren Teiles der exakten Logik aufrichten.

Übrigens je nach den verschiedenen Anwendungsgebieten des Subsumtionszeichens und -begriffes werden wir dafür noch mannigfache sprachliche Ausdrucksformen gewinnen. Will man ein kurzes Wort für dieses Zeichen haben, welches auf allen Gebieten passt, so lese man es etwa als *„eingeordnet"*, oder *„sub"*, spreche also 1⁰) als „a sub b".

Ein Hauptvorzug dieses unbestimmteren (die Alternative zwischen $=$ und $\subset$ stellenden) Zeichens $\neq\!\!\!<$ tritt in der *Wissenschaft* zutage, wo man sehr viel mit *allgemeinen* Sätzen oder Aussagen (auch Formeln) und Gesetzen zu thun hat, wo es gerade wesentlich auf die Gewinnung solcher ankommt. Von der unbegrenzten Menge der Fälle, welche solch' ein allgemeines Urteil $a \neq\!\!\!< b$ unter sich begreift, findet da oft bei den einen Gleichheit, bei den andern Unterordnung statt, und wird eine Zusammenfassung aller dieser Fälle in ein einheitliches Gesetz gerade eben nur durch das Subsumtionszeichen ermöglicht. Es kommt m. a. W. zumeist vor, dass bei *einunddderselben* Subsumtion 1⁰) die Frage, ob der Fall 2⁰) oder der 3⁰) vorliege, gar nicht allgemein, prinzipiell entschieden werden kann, sondern sich bald in dem einen, bald in dem andern Sinne entscheidet. Um hiezu ein einfachstes Beispiel zu geben, werden wir diese Verhältnisse an den Quadratwurzeln der Arithmetik sogleich im Kontext erläutern.

Im Anschluss an das Vorstehende möchte ich auch noch rechtfertigen, weshalb ich *nicht*, wie manche der neueren Autoren über Logik, für $\subset$ das Kleinerzeichen $<$ selbst verwende, und demgemäss auch das Subsumtionszeichen nicht durch das in der Mathematik schon gebräuchliche Zeichen $\leq$ für „kleiner oder gleich" darstelle, vielmehr besondre Zeichen für diese Beziehungen wählte.

Den Ausschlag hiefür gab die Erwägung, dass letztere Zeichen bestimmt sind und geeignet sein sollen, in der Arithmetik selbst auch *neben* den Ungleichheitszeichen verwendet zu werden. Es lassen schon die Elemente der reinen Mathematik in manchen ihrer Abschnitte sich ohne das Unterordnungs- und namentlich das Subsumtionszeichen *nicht* korrekt dar-

stellen, woferne man bei ihrer Begründung nicht ungebührlich lange auf die Anwendung einer knappen Zeichensprache verzichten und mit verbalen Umschreibungen sich behelfen will. Und mit fortschreitender Entwickelung der mathematischen Wissenschaft werden, bin ich überzeugt, diese Zeichen daselbst immer unentbehrlicher werden.

Namentlich tritt dies schon längst bereits da zutage, wo man mit „vieldeutigen" Zahlenausdrücken zu thun bekommt, das ist, im Elementarunterricht, erstmalig bei der Quadratwurzelausziehung. Diese ist eine (im allgemeinen) zweideutige Operation, und bekannt ist, wie zuweilen Lehrer sowol als Bücher, indem sie z. B. in einem Atem schreiben: $\sqrt{9} = 3$ und daneben auch $\sqrt{9} = -3$, den Anfänger (nach dem Satze, dass wenn zwei Grössen *einer* dritten gleich sind, sie auch unter sich gleich sein müssen) zu dem Fehlschlusse verleiten: $+3 = -3$. In mehr versteckter Form, geschickt verhüllt, liegt dieses Verfahren einer Reihe von arithmetischen Paradoxen zugrunde, welche den Anfänger zu verblüffen pflegen.

Der Fehler liegt in dem unberechtigten Gebrauche des Gleichheitszeichens. Schreibt man freilich: „Silber = Metall" und (mit demselben Rechte) „Metall = Gold", so gelangt man auch zu dem Schlusse: „Silber = Gold"! In Bezug auf diesen Gebrauch herrscht in der zeitgenössischen Mathematik noch eine gewisse Nachlässigkeit, hervorgegangen aus der Übertreibung einer sonst in dieser Disziplin als so überaus fruchtbar bewährten Sparsamkeit, der Sparsamkeit mit Zeichen, welche hier zu einem Geizen mit solchen ausartet. Es beruht darauf die Möglichkeit zahlreicher „Paradoxa", das ist deduktiver Ableitung, scheinbaren Beweises von Widersprüchen und augenscheinlich falschen, absurden Ergebnissen auf Grund der schulmässigen Sätze und Regeln, indem eben diese nicht korrekt gewesen.

Um die Sache korrekt zu behandeln muss man zunächst die als eine mehrdeutige verstandene, die „volldeutige" Quadratwurzel von der eindeutig zu verstehenden auch in der Bezeichnung sorgfältig unterscheiden. Jene wird auch der allgemeine oder „Generalwert", diese der Prinzipal- oder „Hauptwert" der Wurzel genannt. Der Generalwert ist aber meist eigentlich gar kein Wert (so wie z. B. ein Handschuh auch kein Schuh ist), vielmehr ist er eine ganze *Klasse* von Werten. Nach Cauchy's Vorschlag kann man ihn durch Anwendung einer sich sonst als „überflüssig" charakterisirenden Klammer (vergl. Anhang 2) in Gestalt von $\sqrt{(a)}$ vor dem letzteren, dem Hauptwert $\sqrt{a}$, auszeichnen, und verwendet man, noch besser, für ihn ein doppeltes Wurzelzeichen $\sqrt{\!\!\sqrt{\,}}$, welches ebenso an den Anfangsbuchstaben des Wortes „Wurzel", wie das gewöhnliche oder einfache Wurzelzeichen $\sqrt{\,}$ an den des Wortes „radix" erinnert.

Wir verstehen demnach unter $\sqrt{\!\!\sqrt{a}}$ die Klasse oder Gattung, welche sich zusammensetzt aus allen den Zahlen, deren Quadrat gleich a ist — im Gegensatz zu $\sqrt{a}$, welches uns eine bestimmte von diesen Zahlen repräsentiren wird.

Es ist z. B. die volldeutige Quadratwurzel, *Vollwurzel,* aus 3^2 oder 9 die von den beiden Werten 3 und -3 gebildete Gattung von Zahlen:

$$\sqrt{\!\!\sqrt{9}} = \begin{cases} 3 \\ -3 \end{cases}, \quad \text{oder kürzer ausgedrückt:} \quad \sqrt{\!\!\sqrt{9}} = \pm 3.$$

Und wollen wir blos ausdrücken, dass 3 einer (der eine) von diesen beiden Werten ist, ein andermal vielleicht, dass -3 ein solcher (der andere) ist, so ist es nur mehr zulässig, hiefür zu schreiben:

$$3 \subset \Vert\!\sqrt{9} \quad \text{und} \quad -3 \subset \Vert\!\sqrt{9}$$

— Behauptungen, die jetzt, weil sie korrekt sind, nicht mehr zu obigem Fehlschlusse verleiten können.

In diesem sowie in fast allen andern Beispielen derselben Art, die wir bilden mögen, besteht zwischen der volldeutigen Quadratwurzel und irgend einem ihrer Werte wirklich die Beziehung der Unterordnung, nämlich die Unterordnung des Individuums unter eine umfassendere Klasse, zu der es gehört. Will man nun aber diese Wahrnehmung generalisiren, dieselbe für eine ganz beliebige Zahl a aussprechen, so darf man gleichwol nicht sagen, es sei

$$a \subset \Vert\!\sqrt{a^2} \quad \text{und} \quad -a \subset \Vert\!\sqrt{a^2},$$

aus dem Grunde, weil diese Aussagen eine Ausnahme erleiden würden, nämlich für $a = 0$ falsch werden. Da $+0$ und -0 einerlei sind, so hat, wenn unter a die Null verstanden wird, auch die volldeutige Quadratwurzel aus a nur mehr *einen* Wert, den Wert 0; die als ihr „Generalwert“ zu bezeichnende Klasse schrumpft hier in ein einziges Zahlindividuum zusammen (sie ist diesmal ausnahmsweise auch wirklich *ein* „Wert“) und es ist:

$$0 = \Vert\!\sqrt{0},$$

gleich, aber nicht untergeordnet.

Allgemein, für jede beliebige Zahl a, gilt daher weder die Unterordnung, noch die Gleichung, sondern in der That nur die Subsumtion:

$$a \subseteq \Vert\!\sqrt{a^2} \quad \text{und ebenso} \quad -a \subseteq \Vert\!\sqrt{a^2}.$$

Und ähnlich ist auch bei den höheren Wurzeln in der Buchstabenrechnung das Subsumtionszeichen anzuwenden der Allgemeingültigkeit zuliebe.

Allerdings wählt die Mathematik von den eventuell beiden unter die Klasse $\Vert\!\sqrt{a}$ fallenden Werten frühzeitig den einen als den sogenannten *Hauptwert* aus und zwar — bei positivem Radicanden, im Gebiete der reellen Zahlen — den positiven, den sie schlechtweg mit $\sqrt{a}$ bezeichnet, sodass z. B. $3 = \sqrt{9}$ der Hauptwert und $-3 = -\sqrt{9}$ der Nebenwert der Quadratwurzel aus 9 sein wird. Und indem sie fortan vorzugsweise mit diesen eindeutigen oder Hauptwerten operirt, das Rechnen mit vieldeutigen Ausdrücken nach Möglichkeit vermeidet, flieht die Mathematik sozusagen die Gelegenheiten, wo sie ein spezifisch *logisches* Beziehungszeichen anwenden müsste. Ähnlich, wie in diesen ersten und einfachsten Fällen, verfährt die Mathematik auch später wieder bei den mehrdeutigen analytischen Elementarfunktionen, d. i. den logarithmischen, cyklometrischen und allgemeinen Potenzfunktionen: sie wendet sich möglichst bald von deren Generalwerten ab und den eindeutigen Zweigen dieser Funktionen als den erwählten Hauptwerten derselben zu, hauptsächlich wol, um nicht einen komplizirteren Zeichenapparat, nämlich noch andere als die drei Zeichen

der Grössenvergleichung ($=$, $>$, $<$) verwenden zu müssen, dergleichen in der That bis jetzt auch keines ganz allgemein rezipirt erscheint.

Aber nicht nur zur Darstellung der Beziehungen zwischen *vieldeutigen Zahlenausdrücken* sollte eigentlich das Subsumtionszeichen allgemeinere Verwendung finden, sondern auch noch auf zahlreichen anderen Untersuchungsgebieten, wo sich einstweilen noch jeder Autor seine eigene bisweilen recht schwerfällige Terminologie schafft behufs Darstellung von Beziehungen, die einfach als eine „Einordnung“ zu charakterisiren wären.*)

Wählten wir nun für die Unterordnung das Zeichen $<$ selbst, so würden zahlreiche Missverständnisse ebendadurch nahe gelegt werden. Wir können auch bei Zahlengattungen A und B, also bei vieldeutigen Ausdrücken, das Zeichen $<$ in seinem *ursprünglichen* Sinne verwenden, um mittelst der Relation $A < B$ auszudrücken, dass jede Zahl der Gattung A *kleiner* sei als jede Zahl der Gattung B. Doch wenn wir auch absehen wollen von der Zulässigkeit dieser immerhin seltneren Verwendungsweise, so sieht man doch den in einer Formel beiderseits stehenden Ausdrücken nicht immer an, ob sie uns *einen* oder ob sie mehrere Werte repräsentiren sollen, wo doch im ersteren Falle das Zeichen $<$ eine ganz andere Deutung zu erhalten hätte. Bei allen allgemeinen Untersuchungen über Zahlenklassen, vieldeutige Ausdrücke, muss man vielmehr als Grenz- oder Degenerationsfälle auch diejenigen besondern Fälle mit unterlaufen lassen, wo die vieldeutigen in eindeutige Ausdrücke ausarten, wo die Klassen auf je ein Individuum zusammenschrumpfen. Zwischen zwei Zahlindividuen, eindeutigen Zahlzeichen, ist die eigentliche Unterordnung unmöglich, undenkbar, denn das zweite Individuum müsste dann eine Klasse sein, die ausser dem ersten noch andere Individuen enthält im Widerspruch zu der Annahme, dass sie nur eines enthalte, nämlich eine „singuläre“ Klasse sei. Sind A und B dergestalt eindeutige Zahlzeichen, so könnte die Subsumtion $A \subseteq B$, in der Gestalt der Relation $A \leq B$ geschrieben, doch nur als *Gleichung* gelten, es müsste dann $A = B$ selbst sein. Als *Behauptung*

*) Ich will in dieser Richtung wenigstens auf Einiges aufmerksam machen und wende mich damit vorzugsweise an Mathematiker: Herrn Georg Cantor's berühmte Untersuchungen über die Mannigfaltigkeitslehre beschäftigen sich mit Beziehungen zwischen Punktmengen, bei denen die Subsumtion eine wesentliche Rolle spielt und durch entsprechende Verwendung ihres Zeichens sich erhebliche Vorteile im Sinne knapper Darstellung erzielen lassen würden. Ebenso könnten die epochemachenden Untersuchungen von Dedekind über allgemeine Zahlentheorie[3] (Supplement XI) sowie die Anwendungen der dort eingeführten Begriffe auf die Theorie der algebraischen Funktionen, wie sie Dedekind und Weber in ihrer Abhandlung in Bd. 92 des Crelle'schen Journals gegeben haben, wol übersichtlicher dargestellt werden, wenn statt des Begriffs der Teilbarkeit stets der der Einordnung und das Subsumtionszeichen benutzt würde. Dabei würde auch der für das Studium störende Umstand vermieden, dass bei *Moduln* der Teiler dem Geteilten übergeordnet ist — ein Umstand, auf welchen ich durch Herrn Lüroth aufmerksam gemacht worden. Nicht minder dürfte dieses Zeichen bei der Begründung von Herrn Schubert's genialem Kalkül der abzählenden Geometrie mit Vorteil zu verwenden sein, sowie auf andern Gebieten mehr.

hingestellt, würde jene Relation dann allerdings noch richtig bleiben, jedoch weniger sagen, wenn man das Zeichen $\subset$ in $\subseteq$, statt als „untergeordnet“, nun als „kleiner“ interpretirte. Sooft aber solche Relation $A \subseteq B$ als *Voraussetzung* hinzustellen wäre, müssten die beiden fraglichen Interpretationen von $\subset$ einen Unterschied geben: es wäre im erstern Falle die Annahme „A kleiner als B“ durch die Relation ausgeschlossen, im zweiten aber zugelassen. Und anderes mehr.

Unstreitig wird es also praktischer sein, für die Unterordnung ein von dem Zeichen $<$ *verschiedenes* Zeichen zu wählen. Wenn nun dieses fragliche Zeichen mit Rücksicht auf die Anforderung, dass dasselbe beim Vor- und Rückwärtslesen mnemonisch interpretirbar sei, ebenfalls zwei divergirende Äste besitzen soll, so müssen dieselben gekrümmt genommen werden, und bleibt (bei Wahrung der Symmetrie des Zeichens in vertikaler Richtung, d. i. um die horizontale Axe) gewissermassen nur die Möglichkeit übrig, dasselbe dem von uns gewählten *Parabel-* (oder Hyperbel)bogen ähnlich zu gestalten — in Anbetracht, dass ein Zeichen wie

$$\prec$$

bereits vergeben erscheint, nämlich nach Paul Du Bois Reymond's Vorschlag eine eigentümliche Verwendung zur Darstellung infinitärer Beziehungen bereits gefunden hat und auch am besten findet.

Man könnte höchstens noch unserm Zeichen anstatt des Scheitels eine Ecke geben: $\sqsubset$, wodurch es sich aber weniger deutlich von dem Zeichen $<$ abheben würde — ein Punkt indess, über den ich mit niemand streiten will. [Verwendeten wir statt des Parabelbogens einen *Kreis*bogen, so würde dadurch ein oft störender Parallelismus mit etwaigen Klammerhaken der hinter das Zeichen tretenden Ausdrücke bewirkt werden.]

Das Zeichen $\subseteq$ wurde 1873 von mir eingeführt[1]. Umfassende Anwendungen von den durch dasselbe ausgedrückten Beziehungen der Subsumtion möchten wol l. c. zum ersten mal auf (sozusagen) extralogischem Gebiete gemacht sein. Ich habe jenes mit noch einem andern Zeichen, auf das wir einzugehen haben werden, daselbst verwendet, um ein geschmeidiges Rechnen mit vieldeutigen Zahlenausdrücken auszubilden, Prinzipien und Methoden für solches zu entwickeln.

Herr Peirce verwendet dafür das in Amerika bereits ziemlich eingebürgerte Zeichen

$$-\!\!<,$$

welches allerdings drei Jahre früher von ihm eingeführt worden ist; doch haben *vor* ihm auch Augustus De Morgan und Andere sich schon besondrer von den angeführten differirender Zeichen für die gedachte Beziehung bedient.

Ich meine, dass nicht Rücksichten auf die mehr oder weniger zufällige Priorität eines Bezeichnungsvorschlages, sondern lediglich sachliche Zweckmässigkeitsrücksichten den Ausschlag dafür geben sollten, welcher Vorschlag etwa allgemein anzunehmen wäre. In dieser Beziehung könnte ich schon die vorstehende Auseinandersetzung für sich selbst reden lassen. Besonders möchte ich jedoch noch darauf aufmerksam machen, dass ein vorgeschlagenes Beziehungszeichen nicht blos *für sich allein* in Betracht zu ziehen ist, sondern

auch als ein Glied eines vollständigen Systems von Zeichen für *sämtliche* logischen Grundbeziehungen. Sollten letztere — immerhin, wie wir sehen werden, *zehn*, oder, wenn man die vor- und rückwärts verschieden aussehenden gesondert zählt, *vierzehn* an Zahl — überhaupt planmässig, rationell bezeichnet werden — und dies erscheint bei ihrer grossen Anzahl durchaus wünschenswert — so wird sich zeigen lassen, dass mein Vorschlag nicht nur zweckentsprechend, sondern auch fast der einzige ist, der thunlich erscheint. Vergl. die spätere Besprechung der sämtlichen Zeichen in § 34 sq.

Jedenfalls dürfte sich's empfehlen, auf die Gestaltung neu einzuführender Zeichen eine grosse Sorgfalt zu verwenden. Denn ist ein ungeschickt gewähltes Zeichen einmal wirklich eingebürgert, so möchte wol eine Abhülfe kaum minder schwierig durchzuführen sein, als etwa der Plan, den Schienenweg, Fahrdamm einer unzweckmässig gelegten Eisenbahnlinie wieder in fruchtbares Ackerland zu verwandeln!

Ich schliesse diesen Exkurs mit der Anführung eines in der Übersetzung von mir etwas gemilderten Ausspruchs von A. De Morgan, nach Peirce's von mir geteilter Ansicht, eines der scharfsinnigsten Logiker, die existirten. Derselbe stellt am Schlusse seines Syllabus[3] die beiden folgenden Thatsachen einander gegenüber.

Erstens: die Logik ist die einzige Disziplin, welche seit dem Wiederaufleben der Wissenschaften (since the revival of letters) keine entsprechenden Fortschritte gemacht hat.

Zweitens: die Logik, ganz allein, hat keinen Zuwachs an Zeichen (symbols) hervorgebracht.

Er sagt geradezu „*keine* Fortschritte“, was bekanntlich auch Kant mit aller Schärfe behauptet.

§ 2. Vorläufige Betrachtungen über Darstellbarkeit der Urteile als Subsumtionsurteile.

Es erübrigt uns noch, nachzusehen, inwiefern *jedes* Urteil als ein „Subsumtionsurteil“ angesehen werden kann. Zunächst wenigstens wird dies für die kategorischen Urteile zu zeigen sein.

Für nicht-kategorische, nämlich die aus verschiedenen Teilsätzen mittelst Konjunktionen — wie: „*wenn* . ., *so* . .“, „*entweder* . ., *oder*“, „*weder* . ., *noch*“, „*nicht nur* . ., *sondern auch* . .“, „*folglich*“, „*weil*“, und andere — zusammengesetzten Urteile kann erst im Lauf der Entwickelung unsrer Theorie nach und nach dargethan werden, dass und auf welche Weise sie ihrem logischen Gehalte nach vollständig darstellbar sind mit Hülfe des Subsumtionszeichens selbst oder auch anderer Zeichen, deren Bedeutung jedoch auf den Subsumtionsbegriff zurückführbar ist, welche sich in der That aus dem letztern ableiten, auf Grund desselben definiren lassen.

Als „Ding“ oder Objekt des Denkens, von welchem in einem Satze etwas ausgesagt wird, und welches demnach dessen „Subjekt“ bildet, kann auch ein selber als Satz formulirtes *Urteil* auftreten und ebenso kann dasjenige, was von jenem prädizirt wird, bestehen in der Hervorhebung einer Beziehung, in der ein zweites Urteil zu jenem ersten steht. Dergleichen Urteile, welche anstatt von beliebigen andern Dingen zunächst selbst wieder nur von *Urteilen* handeln, nehmen in der Lehre von den Urteilen eine bevorzugte, eine Sonderstellung ein.

Dahin gehören vor allem die sog. *„hypothetischen"* (vergl. § 28) und die *„disjunktiven"* Urteile (vergl. § 15 und 31), ferner aber auch Urteile, welche, indem sie z. B. Verba wie „können" oder „müssen", oder Adverbia, wie „vielleicht" etc. enthalten, auf die Möglichkeit oder Notwendigkeit der Zulassung eines gewissen Urteils hinweisen, im Grunde also auch nur von diesem selbst etwas unmittelbar prädiziren, erst mittelbar auch über die Dinge aussagen, welche dieses Urteil betrifft (vergl. § 54); endlich gehören dahin die im Sinne Sigwart's aufgefassten „verneinenden" Urteile (Urteilsverneinungen — vergl. § 15 und 31).

Alle solchen Urteile werden von Boole *sekundäre* oder Urteile der zweiten Klasse genannt und gegenübergestellt den *primären* oder Urteilen der ersten Klasse (zu denen im allgemeinen die kategorischen gehören), welche nämlich nicht implicite erst von Urteilen sondern sogleich von den Dingen selbst handeln. Als die einfacheren haben wir vorerst nur diese letzteren zu betrachten.

Auch für die kategorischen Urteile müssen wir jedoch im Hinblick auf den fast unerschöpflichen Reichtum der Wortsprache und ihrer Ausdrucksmöglichkeiten darauf verzichten, die Aufgabe der Erbringung fraglichen Nachweises hier mit dem Anspruch auf formelle Vollständigkeit zu lösen. Wir begnügen uns — und dies dürfte auch genügen — an der Hand einiger Beispiele nur für die vornehmsten Ausdrucksformen der Sprache zu erläutern und Anleitung zu geben, in welcher Weise die Darstellung zu vollziehen ist.

Besonders kommt es dabei uns noch darauf an, das Verfahren auch gegen unbillige Beurteilung in Schutz zu nehmen.

Im Urteil gibt sich ausser dem, was wir seinen „logischen Gehalt" nennen, oft ein gutes Teil von Stimmung, Gefühl und Absicht, Streben des Redenden kund und ruft Verwandtes (oder auch Entgegengesetztes) hervor in dem, der es vernimmt. Je nach der Form seiner sprachlichen Einkleidung bleibt dabei oft mancherlei *„zwischen den Zeilen zu lesen"* (vergl. des Dichters: „Was er weise verschweigt, zeigt mir den Meister des Stils" sowie das geflügelte Wort: „Man merkt die Absicht und man wird verstimmt" u. a.). Es legt der Satz häufig Nebengedanken nahe, auf deren Gestaltung schon die Art und Weise seiner Betonung von grossem Einfluss sein kann; gewisse Gedanken bereitet der Satz vor zu leichterer Erweckung, wofern er sie nicht selbst schon völlig wachruft, für andere präjudizirt er hemmend und vorbeugend.

Man wird z. B. dessen inne, wenn man im nächsten besten (Frage)-Satze die Emphase, den Nachdruck der Reihe nach auf's erste oder aber zweite u. s. w. bis letzte Wort legt.

Z. B. „.. Wenn Sie den Mut haben!" „Hat er die Lisette geheiratet?" Etc. Ich will dabei nicht reden von Fällen, wo die Betonung geradezu den Sinn des Satzes selbst verändert, wie der bekannte Ausspruch: „von *der* Seite kannt' ich dich noch nicht" dies erfuhr, als ein schlechter Schauspieler mit der Betonung: „von der *Seite* kannt' ich dich noch nicht" denselben deklamirte. Ich will nur reden von den Wirkungen des Satzes, die unbeschadet seines logischen Gehaltes nebenher gehen können. So sagt z. B. der Ausdruck „Meine Wenigkeit" logisch nicht mehr als „ich"; ersterer aber hat einen Beigeschmack von affektirter Bescheidenheit. Etc.

Von einem mitunter ganz beträchtlichen Teil dieses lebendigen Inhaltes, des *„psychologischen Gehalts"* des Urteils sieht ohnehin die Logik ab — nicht nur die unsrige, die Logik des Umfanges, sondern die Logik überhaupt. Diese kümmert sich um das Urteil nur insofern, als es mit dem, was es ausdrücklich ausspricht, wahr oder falsch ist, resp. durch die Konsequenz zu denken geboten oder weiteres zu denken nötigend.

Wie aber der *„logische Gehalt"* des Urteils hienach nur als ein Auszug, ein Excerpt aus dessen *sprachlich angedeutetem Gehalte* erscheint, so verhält sich wol auch schon dieser zu dem ihm zugrunde liegenden *Gedanken* und mag der Dichter (Victor v. Scheffel) recht haben, wenn er sagt:

„Die Sprache ist ein edel Ding,
Doch hat sie ihre Schranken;
Ich glaub', noch immer fehlt's am Wort
Für die feinsten und tiefsten Gedanken."

Dieser Auffassung gemäss soll nun auch nicht behauptet sein, dass durch die beabsichtigte Darstellung eines Urteils als *Subsumtion* dasselbe etwa nach seiner *psychologischen* Natur genauer dargelegt, dass es damit in irgend einer andern als eben nur der *logischen* Hinsicht angemessener oder besser dargestellt werde!

Als Beispiel betrachte man das Urteil: „Die Wanderheuschrecken haben ihre Ohren an den Waden". Wir bestehen darauf, dass dieses logisch äquivalent ist mit dem Satze: „Die Klasse der Wanderheuschrecken ist enthalten in der Klasse der Geschöpfe (Wesen oder überhaupt „Dinge"), welche (ihre) Ohren (Gehörorgane) an (den) Waden tragen". Keineswegs jedoch soll damit etwa unterstellt oder für die Auffassung plädirt werden, als ob der Hörer in seinem Geiste bereits vorgebildet habe die Vorstellung einer Klasse von Wesen, die das Gehörorgan an der unteren Hälfte der Extremitäten besitzen, und dass er nun, nachdem er durch das Urteil von der Thatsache in Kenntniss gesetzt ist, in diese vorrätige Klasse auch einfach diejenige der Wanderheuschrecken „einordne“.

Im Gegenteil: die Thatsache wird wol den meisten Lesern überraschend und neu sein, so wie es z. B. auch in weiteren Kreisen unbekannt sein mag, dass eine Krebsart, Mysis, das Gehörorgan sogar an den Schwanzflossen trägt. Ein solches Urteil wird uns nicht schon im Besitz der Prädikatklasse antreffen, sondern uns höchstens Veranlassung werden, dass wir eine solche Klasse erst aufstellen. Wesentlich wird jenes Urteil nur unsern Begriff von den Wanderheuschrecken berichtigen oder vervollständigen, uns nötigend, diese Tiere, während wir bislang bei ihnen an Gehörorgane vielleicht niemals gedacht haben, fortan mit Trommelfellen, Tympanums, zu beiden Seiten jedes Schienbeins*) ausgestattet zu denken.

Auch der sprachliche Ausdruck unsrer als Beispiel gewählten Aussage ist durch die Umschreibung nur schwerfälliger geworden. Unstreitig aber gibt diese Umschreibung doch die nämliche Information wie die ursprüngliche Aussage, und ihr Vorzug besteht darin, dass sie die Beziehung zwischen dem Subjekt- und dem Prädikatbegriffe rein *nach deren Umfangsverhältnisse* darstellt, wodurch diese Beziehung in der auf das *Subsumtions*zeichen gegründeten *Zeichensprache*, in Gestalt von $a \mathrel{\leftarrow\!\!\!\in} b$, nunmehr *ausdrückbar wird.* Und die Vorteile solcher Ausdrucksweise — wo immer es sich um logische Fragen handelt — werden im weiteren Verfolg unsrer Theorie genugsam zutage treten.

Ähnliche Bemerkungen, wie an das Vorhergegangene, würden nun auch mutatis mutandis an manche der nachfolgend anzuführenden Beispiele sich anknüpfen lassen; indess werden wir nicht mehr ausdrücklich darauf hinweisen.

Eines aber sei hier noch hervorgehoben: in Bezug auf *verneinende* Urteile.

Es ist geltend gemacht worden, die durch eine Verneinung geforderte permanente Sonderung, Auseinanderhaltung oder *Trennung* von Merkmalen sei so wesentlich verschieden von der durch ein bejahendes Urteil angeregten *Verknüpfung* solcher, dass es keinen Wert habe, beide Operationen unter demselben Gesichtspunkt zu betrachten, unter ein gemeinsames Schema sie zu bringen. Dies aber dürfte doch absprechend, vorschnell geurteilt sein.

Sagen wir z. B. „das Wasser sei nicht zusammendrückbar (inkompressibel)“, so fordern wir psychologisch, dass die Vorstellung, das Merkmal der Zusammendrückbarkeit, wie es elastischen und namentlich elastisch flüssigen Körpern zukommt, ausgeschieden werde aus dem Begriff des Wassers, falls es etwa irrtümlich in denselben aufgenommen worden sein sollte, und andernfalles, dass diese Vorstellung seiner Bildung wenigstens fern bleibe, dass sie nicht in die Vorstellung des Wassers eingehe.

*) Diese Ausdrucksweise ist begreiflich eine anthropomorphistische. Bei Insekten, Heuschrecken von „Waden“ zu reden ist jedoch in der Zoologie rezipirt.

Nun lässt auch dieses Urteil als eine Subsumtion sich ansehen, besagend, dass die Klasse der als „(flüssiges) Wasser“ zu bezeichnenden Dinge *enthalten sei in, gehöre zu* der Klasse der nicht zusammendrückbaren Substanzen oder Dinge.

Diese Umformung des Urteils geschieht auch hier der logischen Technik zuliebe und sie hat den gleichen Wert wie in den übrigen Fällen; sie wird erforderlich sobald man auf die Umfangsbeziehungen zwischen dem Subjekt- und dem Prädikatbegriffe reflektiren will (und zwar, wie man später sehen wird, einerlei, ob man als letzteren das Merkmal der Zusammendrückbarkeit oder aber das der Inkompressibilität gelten lassen mag).

Und solcher Reflexion kann ein wissenschaftlicher Wert ebensowenig abgesprochen werden, als etwa der einseitigen Hervorhebung der chemischen Zusammensetzung (oder vielleicht der Gewichtsverhältnisse) von Substanzen, deren eine aus den andern als eine Verbindung hervorgeht.

Des weiteren wären hiezu noch die unter δ_3) der Einleitung angestellten Betrachtungen heranzuziehen.

Man wird finden, dass, wer da gegen das Verfahren der Logik des Umfanges eifert, allemal dabei aus der Rolle des Logikers eigentlich herausfällt, nämlich anstatt daran festzuhalten, dass es dieser um *normative* Bestimmungen, um einen *Kanon* des Denkens zu thun sein muss, sich (unbewusst) auf den Standpunkt stellt, als ob es vielmehr ankäme auf eine naturwissenschaftliche Analyse der psychologischen Vorgänge beim wirklichen Denken. Namentlich hat die exakte Logik oft Veranlassung, sich von der Sprachform zu befreien; „denn wie sehr auch die letztere — sagt treffend Fr. A. Lange[1] p. 94 — sich dem natürlichen und gewöhnlichen Denken anschmiegt, so ist es doch nicht Sache der Logik, dieser Natürlichkeit zu huldigen, sondern vielmehr zu scheiden und klar zu stellen, was wirklich logisch ist in den Gebilden der Sprache und was nicht.“

Nach diesen Vorbemerkungen können wir unsrer eigentlichen Aufgabe, die nun erhebliche Schwierigkeiten nicht weiter darbietet, jetzt näher treten.

Zunächst gibt es Fälle, wo die Subsumtion (auch) *nicht den vollen* (logischen) *Inhalt des kategorischen Urteils wiedergibt.*

Dies tritt dann ein, wenn in dem Urteil ein Fingerzeig enthalten ist, ob die Kopula Unterordnung oder ob sie Gleichheit bedeutet, wenn das Urteil selbst die eine von diesen beiden Interpretationen ausschliesst. Sagen wir z. B.

„1001 ist eine von den durch 11 und 13 teilbaren Zahlen“, oder auch: „Santorin ist *eine von den* zahlreichen Inseln im griechischen Archipel“,

so erscheint zwischen Subjekt und Prädikat die Beziehung der identischen Gleichheit ausgeschlossen, und drückt das Urteil eine wirkliche *Unterordnung* aus. Es wird hier eben im Urteil selbst das Prädikat als eine *Mehrheit* von Individuen gegenüber dem als eine *Minderheit* (vorhin sogar als nur *ein* Individuum) sich darstellenden Subjekte hingestellt.

Sehen wir dagegen das Prädikat *mit dem bestimmten Artikel* verbunden (der allerdings, wie schon erwähnt, in manchen Sprachen, wie im Lateinischen und Russischen fehlt), oder wird — was wesentlich auf dasselbe hinauskommt — das Prädikat mit dem hinweisenden Fürwort (pronomen demonstrativum) „der-, die-, dasjenige“ (im Plural „diejenigen“) eingeleitet, so beansprucht und erhält die Kopula die assertorische Kraft des *Gleichheitszeichens*, versichert die Identität zwischen Subjekt und Prädikat und schliesst die Unterordnung aus. Z. B.

„Gerade Zahlen (noch deutlicher: *Die* geraden Zahlen) sind *die* durch 2 teilbaren Zahlen.“

„(Die) Primzahlen sind *diejenigen* Zahlen, welche zwei und nur zwei Teiler haben.“

„N. N. ist der Dieb (sc. welcher den vermissten Gegenstand entwendete).“

„Iridium ist das schwerste Metall.“

„Jener Herr ist sein Vater“ (soll heissen: *der* Vater dieses Herrn). Etc.

Hierher gehören auch die Fälle, wo das Prädikat ein Eigenname ist, also nicht — wie es sonst als die Regel erscheint — einen allgemeinen Begriff, sondern etwas Individuelles, ein spezielles Objekt des Denkens bezeichnet, z. B.

„Dieser Fluss ist der Rhein.“ „Diese Stadt ist Berlin.“ „Der Dichter jener Ode war Horaz.“

In dieser besondern Art von „singulären“ Urteilen drückt die Kopula ebenfalls die Identität des Subjektes mit dem Prädikate aus.

Dasselbe gilt von Aussagen wie „2 mal 2 ist 4“, wo das Prädikat ein Zahlenindividuum ist und die Kopula die Versicherung der arithmetischen Gleichheit zwischen Subjekt und Prädikat gibt, die hier übrigens mit der identischen Gleichheit in gewissem Sinne zusammenfällt (sofern es üblich ist, alle einander gleichen Zahlen durch ein einziges den Zahlenort markirendes Zahlenindividuum vertreten zu lassen).

Zu den hiermit gekennzeichneten Fällen treten noch solche von spezielleren Charakter hinzu, die man passend als die „Grenzfälle“ bezeichnen kann, wo nämlich „nichts“ oder „etwas“ resp. „alles“ als Subjekt, beziehungsweise Prädikat auftritt (wie z. B. bei dem Satze: „dies ist alles“). Diese werden wir erst in einer späteren Vorlesung (§ 9) berücksichtigen.

Wird das Subjekt mit a, das Prädikat mit b bezeichnet, so ist $a \subset b$ der volle Sinn der Aussagen ersterer und $a = b$ derjenige der Aussagen letzterer Art. In beiden Fällen gilt also gewiss die Subsumtion $a \mathrel{=\!\!\!\!\!\subset} b$ und drückt wenigstens einen Teil des (logischen) Inhalts unsrer Urteile richtig aus.

Zu derselben muss aber, um die Urteile vollständig wiederzugeben, noch etwas hinzugefügt werden, und zwar in dem zweiten, dem Falle der Gleichheit $a = b$, wo eben das Urteil auch umgekehrt gilt, invertibel oder reziprokabel erscheint, ist zu der Subsumtion $a \mathrel{=\!\!\!\!\!\subset} b$ noch eine zweite Subsumtion $b \mathrel{=\!\!\!\!\!\subset} a$ hinzuzusetzen.

Was zu der Subsumtion $a \mathrel{=\!\!\!\!\!\subset} b$ noch anzumerken ist, damit die Unterordnung $a \subset b$ vollständigen Ausdruck finde, werden wir erst sehr viel später in's Auge fassen (17. Vorlesung.).

Es gehören eben die angeführten Fälle, wenngleich sie in grammatikalischer Hinsicht, d. i. schlechtweg, zu den *einfachen* Urteilen zählen mögen, doch zu den *„in logischer Hinsicht zusammengesetzten“* (so wenigstens vom elementarsten Standpunkte aus betrachtet).

Verweilen wir nur mehr bei den auch im engsten Sinne „einfachen“ Urteilen — das sind diejenigen, in welchen die Frage nach der Umkehrbarkeit des Urteils unbeantwortet gelassen ist — bei welchen also es offen bleibt, ob das durch Vertauschung von Subjekt und Prädikat sich ergebende Urteil gilt oder nicht gilt, nämlich dieser Umstand — wenn auch vielleicht nebenher bekannt oder aus der Sache ersichtlich — doch in dem Urteil selbst nicht ausgedrückt erscheint.

Hier — behaupteten wir — kann man immer Subjekt und Prädikat als *Klassen* auffassen und den logischen Gehalt des Urteils dadurch vollkommen wiedergeben, dass man es interpretirt als die Versicherung (Assertion): Die Subjektklasse *ist* ganz enthalten in der Prädikatklasse. Man wird demnach auch sprachlich durch geeignete Umschreibung — ohne dadurch den logischen Gehalt des Urteils zu alteriren — die Kopula immer auf das Wörtchen „ist“ hinausspielen können.

Hiezu ist es freilich erforderlich, den Begriff der „Klasse“ nicht allzu enge zu fassen.

An schwach besuchten Schulanstalten kann es vorkommen, dass eine Schülerklasse auch einmal nur *einen* Schüler besitzt, vielleicht sogar gar keinen. Analog diesem schon im gemeinen Leben vorkommenden Präcedenzfalle werden wir hier das Wort „Klasse“ immer in solchem Sinne nehmen, so *weit* fassen, dass auch der Fall zugelassen erscheint, wo die Klasse nur *ein* Individuum enthält, sich auf ein solches beschränkt, in ein solches gewissermassen zusammenzieht. Sogar dem „Nichts“ als dem Fall einer gar kein Individuum enthaltenden oder leeren Klasse werden wir späterhin seinen Platz unter den Klassen einräumen.

Im übrigen wollen wir, was unter einer „Klasse“ und was unter einem „Individuum“ zu verstehen sei, zunächst nicht weiter erörtern.

Jedermann versteht, was gemeint ist, wenn man spricht von der Klasse der Säugetiere, einer Klasse, von der jedes einzelne Säugetier ein Individuum vorstellt, oder von der Klasse der Dinge, welche diese oder jene Eigenschaften besitzen. Zum Überfluss mögen hierzu die Betrachtungen unter δ_2) und v_2) der Einleitung nachgesehen werden:

Wir sind im stande irgend welche Objekte des Denkens als „Individuen" zu einer „Klasse" zu vereinigen („zusammenzufassen").

Allein nur (scheint es) *einander* (unmittelbar) *widersprechende* Sätze, je mit der Überzeugung von ihrer Richtigkeit verbunden, machen hievon eine Ausnahme. Kann auch jeder, für sich, für wahr gehalten werden, z. B. der Satz: „Der Mond ist bewohnt", sowie der Satz: „Der Mond ist unbewohnt", so können sie doch nicht zusammengefasst werden zu einer „Klasse von Wahrheiten".

Und auch *ein* Individuum mögen wir bezeichnen als eine Klasse, welche eben nur dieses Individuum selbst enthält. Ein jedes Gedankending kann zu solchem Individuum gestempelt werden.

Dem wissenschaftlichen Begriff des Individuums werden wir indess gelegentlich noch näher treten (22. Vorlesung).

Auch jene Klasse aber, die selber eine Menge von Individuen umfasst, kann wieder als ein Gedankending und demgemäss auch als ein „Individuum" (im weiteren Sinne, z. B. „relativ" in Bezug auf höhere Klassen) hingestellt werden. Wenn wir jedoch von einem Individuum „im absoluten (engeren) Sinne" reden, so verstehen wir darunter ein Objekt des Denkens, dessen Name als ein Eigenname und nicht als ein Gemeinname gehandhabt wird (vergl. den Teil B unsrer Einleitung).

Nach dem Gesagten kann das Subjekt des Urteils, wenn es ein Hauptwort ist, ohne weiteres als eine Klasse aufgefasst werden, desgleichen, wenn dieses Hauptwort etwa durch Beiwörter oder Relativsätze näher bestimmt, determinirt erscheint.

Dasselbe ist der Fall, wenn das Subjekt aus mehreren durch Konjunktionen, wie „und", „oder", „sowie" etc. verbundenen Substantiven oder Nomina besteht. Z. B. „Gold und Silber sind Edelmetalle" heisst: Jede als Gold oder Silber sich erweisende Substanz ist ein Edelmetall; die Klasse jener Substanzen ist enthalten in der Klasse dieser, der Edelmetalle. Den logischen Gehalt der meisten Konjunktionen werden wir übrigens noch zum Gegenstand eines speziellen Studiums machen, und ist zu empfehlen, dass man namentlich die Betrachtung von Sätzen wie: *„Entweder a oder b ist c", „Weder a noch b ist c"* vorerst zurückstelle. Zur Stelle auf diese einzugehen würde später nur zu Wiederholungen uns nötigen.

Nachdem unter ξ_1) der Einleitung der Gebrauch von Wörtern in der „suppositio nominalis" ausgeschlossen worden, konnte als Subjekt des Urteils

nur mehr auftreten ein Hauptwort, Pronomen, oder Verbum; auch kann das Subjekt durch einen Relativsatz vertreten sein.

Von Verben wird häufig die Infinitivform auch substantivisch gebraucht und kann als Subjekt eines Satzes stehen, wie z. B. in „Schwimmen ist eine Kunst", wo „Schwimmen" auch durch „das Schwimmen" ersetzbar ist — im Englischen steht die Partizipialform „swimming", im Französischen das Hauptwort „la nage". Offenbar wird hier etwas ausgesagt von einer Klasse menschlicher Thätigkeiten resp. Fertigkeiten, nämlich vom Schwimmen; von ihr wird behauptet, dass sie *enthalten* sei in der Klasse derer, die „eine Kunst" sind, d. i. eigens erlernt und durch Übung gefestigt werden müssen von Jedem, der sie erlangen will. Vergl. auch „Tadeln ist leicht, schwerer ist Besser-machen"; d. i. (die Thätigkeit des) Tadeln(s) gehört zu der Klasse der „leicht" auszuübenden Thätigkeiten, in diesem dem übertragenen Sinne überhaupt zur Klasse der „leichten Dinge". Man sieht an diesem Beispiele, wie die Einschaltung eines solchen im Urteil selbst gar nicht erwähnten Hülfsbegriffes, hier desjenigen der „Thätigkeit", erforderlich werden kann, um dem Doppelsinn des Prädikatnamens zu steuern, einer falschen Deutung desselben vorzubeugen. Im letzten Teil des Satzes geht das Prädikat dem Subjekte voran: Etwas besser machen (als es gemacht worden ist) ist enthalten in der Klasse der Thätigkeiten (resp. Dinge), welche schwerer sind (im übertragenen Sinne) als das Aussprechen eines Tadels über die erfolgte Ausführung. Etc.

Desgleichen kommen im Deutschen als Subjekt von Sätzen auch Verba vor im Partizip, wie in: „Vorgethan und nachbedacht hat Manchen in gross Leid gebracht". In diesem Sprüchwort ist das Subjekt offenbar die Klasse der Fälle, in welchen ein Mensch erst *nach* impulsivem Handeln über dieses nachdachte. Es ist von dieser Klasse behauptet, dass sie enthalten sei in der Klasse derjenigen Handlungen, die ihrem Urheber grosses Leid brachten — aber, müssen wir hinzufügen, *nicht ganz*, sondern nur zu einem ansehnlichen Teile, denn durch das unbestimmte, hier als Pronomen stehende Zahlwort „Manchen" ist das Urteil obendrein zu einem *„partikularen"* gestempelt, so wie es anderwärts auch durch den Beisatz von Adverbien, wie „manchmal, bisweilen, oft, häufig, selten, nicht immer" etc. zum Prädikate zu geschehen pflegt. Die eigentliche Subjektklasse ist hier jener unbestimmte Teil der angeführten Klasse.

Auch in den Fällen, wo ein Relativsatz das Subjekt des Satzes vertritt, wird nun der Leser leicht das Urteil nach dem Umfangsverhältnisse vom Subjekt- und Prädikatbegriffe analysiren. Die Beispiele: „Was uns im innersten erregt, pflegt bleibenden Eindruck zu hinterlassen", sowie Schiller's „Was kein Verstand der Verständigen sieht, das übet in Einfalt ein kindlich Gemüt" mögen dazu anregen. Beide sind „partikulare" Urteile, worauf im ersten Satze das Verbum „pflegt" hinweist: Subjektklasse wird hier sein der *grössere Teil* der Erlebnisse, welche eine tiefgehende Emotion verursachen. Das zweite Urteil ist allerdings nicht der Form nach als partikular anzusehen, sondern nur im Sinne des Dichters, wofern man demselben nicht eine viel zu weit gehende Behauptung in den Mund legen will.

Abgesehen von Fällen der erwähnten Arten haben wir es beim Subjekt nur mehr mit einem Hauptwort oder aber Fürworte zu thun.

Dass ersteres eine Klasse vorstellt, wurde bereits dargethan. Es sind hiezu nur noch ein paar Bemerkungen angezeigt im Hinblick auf dessen etwaige Begleitworte.

Ausser Adjektiven und Relativsätzen können mit dem Hauptwort auch noch verbunden sein irgendwelche Zahlwörter (numeralia). Z. B. „4 Birnen und 3 Äpfel liegen auf dem Tische", „Der dritte und der fünfte Mann soll vortreten", etc. Nun dann kennzeichnet sich das Subjekt ohne weiteres als eine Klasse (sogar im engsten Sinn dieses Wortes).

Ähnlich verhält es sich, wenn sogenannte unbestimmte Zahlwörter (numeralia indefinita) mit dem Hauptworte verbunden sind. Solche sind z. B. „*einige* (etliche), manche, mehrere, viele, wenige, häufige, die meisten, gewisse", etc.; und die Anwendung dieser stempelt, wie schon unter $\varkappa_2$) der Einleitung erwähnt, das Urteil zu einem sog. „besondern" oder „*partikularen*" — im Gegensatz zum „allgemeinen" oder „*universalen*" Urteile, in welchem das Subjekt als Ganzes angeführt oder von dem unbestimmten Zahlwort „alle", in der Singularform vom adjektivischen Pronomen „jeder", „irgend ein" begleitet erscheint.

Sagen wir: „Einige Menschen sind klug", so ist das Subjekt eine Klasse, bestehend aus einer unbestimmten Anzahl, aus „einigen" Menschen und diese Klasse wird hingestellt als ganz enthalten in der Klasse der „klugen" Wesen. Bezeichneten wir die erstere Klasse mit a', die letztere mit b, so hätten wir auch hier eine Subsumtion: $a' \mathrel{=\!\!\!\in} b$.

Wenn wir nun ferner die Klasse der nicht-klugen (eventuell unklugen) Wesen mit b_1 bezeichnen, so dürfen wir aber das ebenfalls richtige Urteil „Einige Menschen sind nicht klug" jetzt durchaus nicht mit $a' \mathrel{=\!\!\!\in} b_1$ darstellen, weil das Subjekt dieser letzteren Aussage, obwol in Worten gleichlautend, homonym benannt, doch ein ganz anderes ist, als das der vorigen. Hierdurch würde nämlich ein Doppelsinn des Symboles a' geschaffen; dasselbe würde der fundamentalen in der Wissenschaft an jedes Zeichen zu stellenden Anforderung der Einsinnigkeit [vergl. $\sigma_1 \mathinner{..} \chi_1$) der Einleitung] nicht mehr genügen — und in der That wird es für unsre Zeichensprache noch viel verfänglicher erscheinen als in der Wortsprache, Verschiedenes mit dem gleichen Zeichen in *einer* Untersuchung zu benennen. Hier müssten wir also für das Subjekt der zweiten Aussage ein neues Zeichen a'' wählen, dieselbe durch eine Subsumtion $a'' \mathrel{=\!\!\!\in} b_1$ darstellen, um Verwechselungen der beiden Subjekte vorzubeugen, welche ja in einundderselben Betrachtung auch nebeneinander vorkommen könnten, vielleicht zusammen aufzutreten bestimmt sind.

Wie jene beiden partikularen Urteile darzustellen sind, wenn a die Klasse der Menschen überhaupt und b, wie oben, die Klasse der klugen Wesen bedeutet, dies wird in spätern Untersuchungen eingehend dargelegt werden.

Einstweilen genüge die Einsicht, dass auch die partikularen Aussagen im Grunde nichts Anderes als Subsumtionsurteile sind. Indessen sei gleich hier schon angeführt, dass in Bezug auf sie die Fussnote auf S. 132 zutreffen wird.

Ist das als Subjekt figurirende Hauptwort mit einem adjektivischen Pronomen verbunden, wie dem besitzanzeigenden (pr. possessivum) in „Sein Haus" .. oder dem hinweisenden, wie „Diese (Jene) Arbeiter" . . ., so dient dies auch nur zur näheren Bestimmung der Klasse.

Anders dagegen, wenn der sog. verneinende Artikel „*kein*" mit dem Subjekt verknüpft erscheint. Sagen wir „Kein Mensch ist vollkommen", so ist durchaus nicht etwa Subjekt des Satzes „Kein Mensch" und Prädikat desselben „vollkommen". Vielmehr ist der Satz, bevor er als Subsumtion gedeutet werden kann, erst umzuschreiben in den logisch damit äquivalenten: „Jeder Mensch ist nicht-vollkommen" oder „Alle Menschen sind unvollkommen", dessen Subjekt die ganze Klasse der Menschen und dessen Prädikat die Klasse der unvollkommenen Dinge oder Wesen bedeutet. Wie vorhin ein „partikular", so haben wir hier ein „universell verneinendes" Urteil vor uns, und bis zur systematischen Behandlung der verneinenden Urteile überhaupt können wir uns mit der Erkenntniss begnügen, dass sie unter dem Gesichtspunkt der Umfangsbeziehungen ebenfalls blos auf Subsumtionen hinauslaufen.

Tritt ein substantivisch gebrauchtes Pronomen als Subjekt eines Urteils auf, so kann dasselbe als ein „bezugnehmendes" (word of reference) stehen, wie „es", „dasselbe" (das vorher genannte Ding) und ist dann lediglich Stellvertreter eines bestimmten nomen's, welches auch statt seiner wiederholt werden könnte; es war dann im buchstäblichen Sinne ein pro-nomen.

Jenes kann aber auch ein persönliches Fürwort (pronomen personale) sein, in welchem Falle es ganz selbständig, ohne Bezugnahme auf vorher Erwähntes, auftreten mag als: „Ich, du (Sie), er, sie, es, wir, ihr (Sie), sie." Hier kann die Kopula „bin, bist, seid, sind" auch immer leicht auf „ist" hinausgespielt werden, indem man statt „ich bin" . . . doch sagen kann, „der (resp. die) Redende, Sprecher, Verfasser, etc. ist" . . und statt „du bist" . . als logisch vollkommen äquivalent sich sagen lässt: „Der (oder die) Angeredete, Adressat, etc. ist" . .; „wir sind" . . . heisst ja in des Wortes engster Bedeutung gewöhnlich nur: „die Klasse der Personen, welche besteht aus dem Redenden und den Angeredeten, ist" . ., im weiteren Sinne: „die Klasse der bereits erwähnten oder als bekannt vorauszusetzenden Personen mit Einschluss des Redenden oder als redend Dargestellten ist" . .; ebenso „Ihr seid" . . heisst: „die Klasse der angeredeten Personen ist" . . Etc.

Auch das unbestimmte persönliche Fürwort „man" bezeichnet als Subjekt (und es steht nur als solches) doch nur eine gewisse Klasse von Personen, desgleichen „jemand", „jedermann". Bei „niemand" ist, analog wie dies in Bezug auf das ihm äquivalente „kein Mensch" implicite schon auseinandergesetzt wurde, die Verneinung zum Prädikat zu schlagen; für „niemand weiss ob . ." ist als logisch äquivalent zu setzen „jedermann ist darüber unwissend, ob . .". Etc. Auf Urteile, als deren Subjekt „nichts" erscheint, kommen wir noch ausführlich zu sprechen.

Eine Bemerkung fordert endlich die dritte Person singularis des Neutrums der persönlichen Fürwörter heraus, nämlich das Wörtchen „es", welches häufig als Subjekt von Urteilen auftritt. Das ist der Fall in den sogenannten *impersonalen* Urteilen.

Als eine wichtige Unterabteilung dieser letztern müssen wir zunächst die sog. „*Existenzialurteile*" hervorheben, wie „*Es gibt* (il y a, there are) . . . z. B. Metalle, die auf dem Wasser schwimmen". Auch solche Urteile würden als Subsumtionsurteile sich ansehen lassen; z. B. das angeführte wäre zu deuten als: Gewisse Vorstellungen von Metallen die auf dem Wasser schwimmen, sind enthalten in der Klasse derjenigen Vorstellungen, denen (als das Vorgestellte) Wirkliches entspricht. Der Klasse gedachter Dinge, denen Realität zukommt, welche *existiren,* wird auch hier eine Subjektklasse eingeordnet. Die Existenzialurteile gehören jedoch wieder zu denen, für welche die Fussnote auf S. 132 Platz greift, weshalb zu ihrer Einkleidung doch in unsrer Technik zu andern Mitteln wird gegriffen werden müssen und wir mit besondrer Sorgfalt auf dieselben zurückzukommen haben. Der vorstehenden Betrachtung kommt daher eine praktische Tragweite nicht zu sondern nur ein theoretischer Wert, sofern sie beiträgt vollends zu erhärten, dass wirklich alles Urteilen sich in Subsumtionen bewegt.

In vielen Fällen vertritt das Wörtchen „es" blos provisorisch das Subjekt, welches dann ausführlicher *hinter* dem Prädikate beschrieben wird; z. B. „es weht ein heftiger Wind" oder „es ist bequem, Andere für sich arbeiten zu lassen"; so auch bei „es ist leicht . . .", „es ist nützlich . .". Etc.

Auch bei den impersonalen Urteilen im engsten Sinne des Worts, wie „es regnet, donnert, blitzt" . . . „es riecht nach Moschus", „es ist vier Uhr (Nachmittags)" etc. wird der Leser unschwer die Subjekt- und zugehörige Prädikatklasse ausfindig machen. So im ersten Beispiel: der gegenwärtige Zustand der Atmosphäre am hiesigen Platze ordnet sich ein in die Klasse der Zustände, die wir als Regen(wetter) bezeichnen; ein Geruch nach Moschus (etwas diesen Geruch Hervorrufendes) ist vorhanden in der uns umgebenden Luft (Existenzialurteil); der gegenwärtige Augenblick ist identisch mit dem durch die Zeitbestimmung 4 Uhr Nachm. der hiesigen Ortszeit charakterisirten Momente. Und so weiter.

Nachdem wir so die wichtigsten Formen sprachlichen Ausdrucks durchgegangen haben, welche beim *Subjekt* eines Urteils vorkommen mögen, erübrigt es, ein gleiches in Bezug auf das *Prädikat* desselben zu thun.

Ist das Prädikat ein Substantiv mit oder ohne determinirende Nebenbestimmungen, oder auch ein Aggregat von solchen (mittelst Konjunktionen verbundenen), so liegt keine Schwierigkeit vor, sich den Umfang des Prädikatbegriffes oder die Prädikatklasse zum Bewusstsein zu bringen.

Desgleichen haben wir dazu wiederholt schon Anleitung gegeben für den Fall, wo das Prädikat ein Adjektivum ist — wie denn der Satz „die Erde ist rund" nichts anderes aussagt als: die Erde gehört zu der Klasse der als „rund" zu bezeichnenden Dinge, sie ist „Etwas rundes", ein rundes Ding. Nach diesem Vorbild konnte überhaupt ein Adjektivum allemal in die substantivische Form sogleich umgesetzt werden; die Adjektiva stehen den Substantiven am nächsten, erscheinen nur grammatikalisch von solchen verschieden. In der Thatsache allerdings, dass sie ihrer logischen Gleichwertigkeit mit Substantiven ungeachtet, doch nicht allgemein wie diese als Subjekt eines Urteils stehen können, offenbart sich eine psychologische Eigentümlichkeit der Wortsprache — wie denn z. B. Mill hervorhebt, dass man nicht sagen könne: „Rund ist leicht zu bewegen".*) — Obige Substantivirung des Adjektivs ist auch gleichermassen ausführbar, in was immer für einem Grad oder Vergleichungsmodus dasselbe steht, einerlei ob im

*) Vereinzelte Ausnahmen kommen in Sprüchwörtern vor, wie: Allzuscharf macht schartig, u. a.

Positiv, Komparativ oder Superlativ. Auch Beispiele zu den letzteren Fällen wird man schon unter den vorstehend betrachteten finden.

Statt durch die vom Hülfszeitwort „sein" abgeleitete Kopula mit dem Subjekt des Urteils verknüpft zu sein, ist das Prädikat desselben in den allermeisten Fällen mit einem *Verbum* konstruirt, und oft besteht es nur aus einem solchen.

Einerlei ob dieses Verbum transitiv — vielleicht ein reflexivum — oder intransitiv ist, ob es im Aktivum oder Passivum steht, auch einerlei in welchem Tempus, ob in einem Präteritum, im Präsens oder im Futurum, stets wird sich — sei es vermittelst einer Partizipialkonstruktion, sei es durch Zuhülfenahme eines Relativsatzes — das Urteil durch ein anderes vom selben logischen Gehalt umschreiben lassen, in welchem die Kopula „ist" steht und das Prädikat als eine Klasse hervortritt, der die Subjektklasse sich einordnet. Es würde ermüdend sein, dies für alle Fälle durchzusprechen, die sich in grammatikalischer Hinsicht irgend unterscheiden lassen, und werden ein paar Beispiele genügen.

„Die Erde dreht sich" sagt das nämliche wie „die Erde ist sich drehend (Etwas sich drehendes), sie *ist* in Rotation befindlich, enthalten in der Klasse der Körper oder Dinge, welche sich im Zustande der Drehung befinden".

Der Satz „Caesar wurde ermordet" passt sich nicht minder unserem allgemeinen Schema der kategorischen Urteile an, indem er besagt: die (singuläre) Klasse, bestehend aus dem *einen* Individuum (der bekannten historischen Person des römischen Imperators) Caesar, ist enthalten in der Klasse der Personen, welche ermordet wurden.

„Am 9. August 1896 wird eine totale Sonnenfinsterniss stattfinden" stellt sich bei Reflexion auf die Umfangsbeziehungen als das Subsumtionsurteil dar: „Eine totale Sonnenfinsterniss ist enthalten in der Klasse der Ereignisse (Dinge), welche am 9. August 1896 stattfinden (werden)".*) In dieser Fassung erscheint indess das Urteil als ein „unbestimmtes", und es gibt sich in der Verbindung des Subjektbegriffes „totale Sonnenfinsterniss" mit dem unbestimmten Artikel „Eine" zu erkennen, dass das Urteil eigentlich ein „Existenzialurteil" ist. Man könnte in der That mit derselben logischen Tragweite auch sagen: „*Es gibt* eine . . . Sonnenfinsterniss, welche auf den . . Aug. 1896 fällt". Am angemessensten würde darnach (abermals als Subsumtion) das Urteil dahin zu interpretiren sein: Die Vorstellung einer auf den 9. Aug. 1896 fallenden Sonnenfinsterniss gehört zu (ist enthalten in) der Klasse derjenigen Vorstellungen, denen Wirkliches entspricht. Analog möge der Leser das Urteil interpretiren: „In die Jahre 1870 und 71 fällt ein deutsch-französischer Krieg".

Auch der abgekürzte Gefechtsbericht: „Tote 20, Verwundete 100" kann so einerseits als Existenzialurteil dargestellt werden; doch lässt er andrerseits auch sich als das umkehrbare Urteil deuten: Die Anzahl der bei jenem Gefechte (tot)Gebliebenen ist (einerlei mit, gleich) 20 u. s. w.

*) Es sei darauf aufmerksam gemacht, dass bei genauer Angabe eines Zeitpunktes oder eines Zeitraums, einer Epoche, ein unterscheidender Gebrauch der Temporalformen beim Verbum überflüssig wird, wie denn auch die Sprache meist das Präsens in solchen Fällen beibehält.

Das in dem Rufe: „Feuer!“ niedergelegte Urteil dürfte ebenfalls wesentlich als Existenzialurteil anzusehen sein. Und anderes mehr.

Dagegen würde das schon in B der Einleitung erwähnte Urteil: „der Pegasus ist geflügelt“, sich logisch decken mit der Subsumtion: „die (erdichtete) Vorstellung vom (Dichterrosse) Pegasus ist enthalten in der Klasse der Vorstellungen von solchen Dingen (Wesen), welche als geflügelt zu bezeichnen“.

In der Regel geht in unsern Kultursprachen das Subjekt dem Prädikate *voran*, doch haben wir bereits auf Fälle hingewiesen, wo das Subjekt provisorisch nur durch „es“ vertreten erscheint, um ausführlichst hinter dem Prädikate beschrieben zu werden. Dahin gehörten auch die meisten Existenzialurteile, cf. „Es war einmal ein König . . .“ etc.

Fälle der umgekehrten Stellung beider Satzglieder kommen auch ausserdem vor, jedoch verhältnissmässig selten, so namentlich bei anschaulich lebendigen Schilderungen vorwiegend sinnlichen Charakters — wie denn noch auf sinnlicher Stufe stehende Sprachen, z. B. das Hebräische, das Verbum besonders gerne voranstellen (Sigwart), so auch im gemütlichen Erzählerton und in poetischen Wendungen. Vergl. z. B. „Unaufhörlich donnerten die Lawinen, rollte der Donner, knatterte das Kleingewehrfeuer; unausgesetzt schien die Sonne“, „Unaufhaltsam schreitet fort die Zeit“, etc. Der Satz: „In Südafrika lebt das Erdferkel“ kennzeichnet durch diese Stellung sich als ein partikulares Urteil und hat darum eine andere logische Tragweite, als der Satz: „Das Erdferkel lebt in Südafrika“, welcher universal, und falsch zu nennen wäre, da diese Tiere auch in Senegambien vorkommen.

Es muss dem Sprachgefühl des Lesers überlassen werden, allemal (auch bei der umgekehrten Stellung) das Subjekt ausfindig zu machen, dasselbe nebst dem Prädikate zu erkennen. — Man übe sich, etwa an Sentenzen, wie: „Diejenigen verzeihen nie, die das Unrecht zugefügt haben“ (They never pardon, who have done the wrong, Jevons), oder Goethe's: „Was wir verstehen können wir nicht tadeln“ etc., desgleichen an irgendwelchen Sätzen, wie „Ich fühle mich jetzt besser“; „So hat er gesagt“ (= Das eben Vernommene ist übereinstimmend mit dem, was er, damals, gesagt hat — De Morgan); „Hans ist allein zuhause“ (= die Klasse der zuhause befindlichen Personen ist identisch der singulären Klasse „Hans“) — die beiden letzten, wie man sieht, umkehrbare Urteile. Etc. —

Es ist darüber gestritten worden, ob ein Urteil wie „dieser Hund *ist* ein laufender“ genau denselben Gehalt habe wie das Urteil „dieser Hund läuft“. Solange man uns nicht einen Hund zeigen kann, der ein „soeben laufender“ ist und dennoch *nicht* „läuft“ — oder umgekehrt — darf uns die ganze Frage als eine höchstens dem psychologischen Gebiet angehörige hier gleichgültig bleiben.

Wir versuchten vorstehend darzuthun, dass in der That und in welcher Weise ein jedes Urteil, soferne man die Umfangsbeziehung zwischen Subjekt- und Prädikatbegriff in's Auge fasst, hinausläuft auf und darzustellen ist als eine *Subsumtion*. Gelang es, dies für die Urteilsbildungen in der *deutschen* Sprache einleuchtend zu machen, so dürfen

wir dasselbe auch für *jede* Sprache in Anspruch nehmen, in Anbetracht dass, was in irgend einer, sich auch in deutscher Sprache adäquat wird ausdrücken lassen.

Zweck der ganzen Auseinandersetzung war nur der: von vornherein einen Einblick zu eröffnen in das weite ja allumspannende Feld der Anwendungen, welche eine auf das Studium der *Subsumtion* gegründete Disziplin zulassen wird, in die Allgemeinheit und Tragweite, auf welche solche Disziplin Anspruch hat, die ihr zukommen muss. Was etwa in diesen Betrachtungen noch unvollendet geblieben ist, das wird sich zumeist in spätern Spezialstudien erledigen.

§ 3. Euler's Diagramme. Identischer Kalkul mit Gebieten einer Mannigfaltigkeit.

Die Beziehung der *Subsumtion*, mit deren logischem Gehalt und sprachlicher Einkleidung wir uns bisher beschäftigten, ist fähig, räumlich oder geometrisch *veranschaulicht* zu werden auf eine Weise, welche für das Studium der Logik ungemein förderlich ist. Seit Leonhard Euler[1] in seinen „Briefen an eine deutsche Prinzessin“ von gedachter Versinnlichungsweise (der zwischen Begriffsumfängen oder Klassen überhaupt — und so namentlich auch zwischen Subjekt und Prädikat — bestehenden Beziehungen) einen populären Gebrauch gemacht hat, ist dieselbe wol in allen Werken über Logik benutzt oder wenigstens auf sie Bezug genommen. Auch wir wollen fortan uns jene Beziehungen versinnlichen vermittelst der „Euler'schen*) *Diagramme*“.

Zu dem Ende *ordnen* wir in Gedanken den zu betrachtenden Begriffsumfängen oder Klassen gewisse räumliche Gebiete „Sphären“ („Begriffssphären“) oder auch Flächen, z. B. Kreisflächen in der Ebene der Zeichnung, *zu*, *lassen* diese und jene *einander gegenseitig eindeutig entsprechen*, oder *bilden* jene durch diese gewissermassen *ab*.

Um zunächst zu unsern typischen Beispielen von kategorischen Urteilen auf S. 127 zurückzukehren, so mag die Kreisfläche a die Klasse „Gold“, die Kreisfläche b die Klasse „Metall“ vorstellen.

Alsdann verdeutlicht die Fig. 1 die Beziehung: $a \subset b$, in welcher beide Klassen zu einander stehen; man erblickt die Klasse a als einen blossen Teil der Klasse b, sieht, dass sie ganz in der letzteren ent-

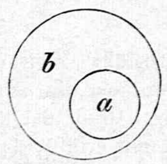

Fig. 1.

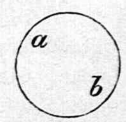

Fig. 2.

*) Wir behalten diese Bezeichnung bei, obwol sich Vorläufer gefunden haben: bei Weise[1] und in Gestalt von Winkeln oder Dreiecken schon bei Vives[1] — vergl. Ueberweg[1] p. 239 und Fr. A. Lange[1] p. 10. —

halten ist, dass aber diese letztere noch über sie hinausragt (b „overlaps“ a) und demnach b auch noch anderes ausser a (wie ja z. B. die Klasse „Silber“) enthalten wird.

Stellen wir uns dagegen durch Kreisflächen a und b die Klassen „Kochsalz“ und „Chlornatrium“ dar, so wird die zwischen beiden Klassen bestehende Beziehung: $a = b$ versinnlicht durch die Fig. 2, in welcher beide Kreise ersichtlich in einen einzigen zusammenfallen.

Die *Subsumtion* $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$ aber, welche, wie wir sahen, den Sinn des kategorischen Urteils *„a* ist *b“ im allgemeinen* wiedergibt, wird zu veranschaulichen sein durch den Hinweis darauf, dass von den beiden durch die Fig. 1 und die Fig. 2 dargestellten Fällen irgend einer (der eine oder aber der andere) stattfinde.

Man kann sich — im ersten Falle — geradezu die Kreisfläche a mit allen Goldteilchen, „Goldatomen“ der Welt belegt denken, sodass jeder Punkt dieser Fläche der *Träger* eines Goldatomes ist, und den a umgebenden ringförmigen Teil der Kreisfläche b mit den Atomen aller übrigen Metalle (ausser Gold), die sich im Weltall vorfinden. Und analog könnte man — im zweiten Falle — mit den „Kochsalzmolekülen“ verfahren.

Wir könnten — im ersten Falle — sagen: man denke sich die Kreisfläche a ganz einfach „vergoldet“, wenn nicht bei der „Vergoldung“ im Sinne der atomistischen Hypothese den Goldatomen gewisse Abstände vorgeschrieben wären, die sie nicht zu unterschreiten vermögen, über die hinaus sie einander sich nicht nähern können, sodass wir sie auf der kleinen Fläche füglich nicht alle unterzubringen vermöchten. Emanzipiren wir uns aber von der Forderung, solche durch die Temperatur und Dichte des Vergoldungsmaterials, eventuell die Grösse der Atome bestimmte Abstände einzuhalten, so steht der geforderten ideellen Zuordnung nichts mehr im Wege, da wir ja über unbegrenzt viele mathematische Punkte in der Kreisfläche a verfügen, welche eine Mannigfaltigkeit „der zweiten Art“ im Sinne Georg Cantor's bilden.*)

Wir gehen aber sofort noch einen erheblichen Schritt weiter, über die bisherige Praxis der Verwendung Euler'scher Diagramme hinaus, indem wir die Beziehungen zwischen „Sphären“ oder Punktgebieten des

*) Die Ausführbarkeit gedachter Zuordnung würde sich nach des letztern Untersuchungen über die „Mannigfaltigkeitslehre“ streng mathematisch beweisen lassen, wie viel Gold und Metall es auch im Weltall geben mag, ja, wenn der ganze Raum damit erfüllt wäre. Man kann nach den einschlägigen Untersuchungsergebnissen (Borchardt's Journal Bd. 84) den ganzen Raum schon auf einer begrenzten Linie oder Strecke ein-eindeutig abbilden, so, dass jedem Punkt des einen immer ein Punkt und nur *ein* Punkt der andern, und umgekehrt, entspricht. Vergl. hiezu auch Arbeiten von J. Lüroth, E. Jürgens, u. A.

Raumes auch *an sich* studiren, losgelöst von deren vorhin charakterisirten illustrativen Zwecken, also ohne Rücksicht darauf, dass uns diese Gebiete Klassen oder Begriffe versinnlichen sollten.

Wir lassen so der eigentlichen Logik eine *Hülfsdisziplin* voraufgehen oder auch mit ihr parallel einhergehen, deren Sätze jederzeit durch die Anschauung kontrolirt werden können und welche von rein mathematischem Charakter ist. In ihr werden die Regeln aufgestellt und bewiesen für eine eigentümliche Buchstabenrechnung, welche passend zu bezeichnen sein dürfte als

Identischer Kalkul mit Gebieten einer Mannigfaltigkeit.

Als gegeben denken wir uns hier eine *Mannigfaltigkeit* von *Elementen* — etwa die Mannigfaltigkeit der Punkte in der Fläche der Schultafel (oder die der Felder auf einem Bogen karrirten Papiers).

Diese Mannigfaltigkeit halten wir im Felde unsrer Aufmerksamkeit fest und kümmern uns nicht um die Dinge ausserhalb derselben. Die Natur dieser Mannigfaltigkeit sowie die Art ihrer Elemente sei von vornherein in unser Belieben gestellt; die Betrachtungen sollen *allgemeine* sein und werden (mit einem gewissen, später zu erwähnenden Vorbehalt) Gültigkeit beanspruchen für jede denkbare Mannigfaltigkeit von irgendwelchen Elementen. Anstatt der bereits hervorgehobenen beiden Beispiele könnten wir namentlich auch nehmen: die Mannigfaltigkeit der Punkte des Raums überhaupt; desgleichen die (bekanntlich vierdimensionale) Mannigfaltigkeit aller im Raume denkbaren Geraden; oder auch blos diejenige der Punkte einer bestimmten (sei es begrenzten, sei es unbegrenzten) geraden Linie; ferner auch die Mannigfaltigkeit der Zeitpunkte eines bestimmten Zeitraums, einer Epoche, wo nicht der Zeit überhaupt, und so weiter, u. s. w. Zur unmittelbaren Veranschaulichung ihrer Teile qualifizirt sich am besten das schon hervorgehobene Paradigma der *Vorderfläche der Schultafel*, die wir ja mit den in sie einzutragenden Figuren auch jeden Augenblick im Text hier abbilden zu können in der Lage sind. Ich werde aus didaktischen Gründen — um nicht immer abstrakt (blos von Elementen, von Mannigfaltigkeit, etc.) zu reden — diese spezielle Mannigfaltigkeit hier in den Vordergrund stellen, sie die *„bevorzugte“* Mannigfaltigkeit nennen.

Irgend eine Zusammenstellung von Elementen der Mannigfaltigkeit nennen wir ein *Gebiet* der letzteren. Solches Gebiet kann — in unserem „bevorzugten“ Falle — aus beliebig vielen getrennten Teilen, als da sind: isolirte Punkte, Linien und Flächen, bestehen, eine ganz beliebige „Figur“ in der Tafelebene bilden; doch muss bei Linienstücken und Flächen jeweils ausgemacht sein, ob auch deren Endpunkte resp. Grenzlinien, Konturen mit zu dem Gebiet gehören sollen, oder nicht. Praktisch aber, behufs Illustration der allgemeinen Sätze unsres Kalkuls, werden wir in der Regel die Gebiete *möglichst einfach* durch zusammenhängende Flächen, etwa nach Art der Euler'schen Diagramme durch Kreisflächen (wo nicht das Gegenteil bemerkt wird, unter Einschluss von deren Peripherie) uns darstellen.

Buchstaben, wie $a, b, c, \ldots$ mögen künftighin solche Gebiete bedeuten, *aber diese selber*, und nicht etwa (wie es sonst wol in der Mathematik üblich ist) deren Maasszahlen oder Flächeninhalte, von dergleichen in diesem Buche überhaupt nicht die Rede sein wird.

Mit einziger Ausnahme, vielleicht, der geometria situs, der synthetischen oder Geometrie der Lage herrscht in der Mathematik der Gebrauch vor, unter den Buchstaben jeweils *Zahlen* zu verstehen, und zwar zumeist die Maasszahlen von Grössen (eventuell auch die aus Paaren solcher zusammengesetzten „komplexen“ Zahlen).

Von einer Grösse ihre Maasszahl zu abstrahiren ist — auch nachdem man mit der Maass-Einheit schon Bekanntschaft gemacht hat — noch ein ziemlich komplizirter Prozess. Ich erinnere an die Schwierigkeiten, welche schon die Aufstellung des Begriffs der Länge einer krummen Linie, sowie des Flächeninhaltes, desgl. des Voluminhaltes einer irgendwie begrenzten ebenen oder körperlichen Figur im elementaren Unterricht bietet — ganz zu geschweigen von den Schwierigkeiten der Messung selber.

Sich unter dem Buchstaben anstatt der gemessenen Grösse, z. B. Fläche selbst, deren Maasszahl vorzustellen ist gar nicht das Naturgemässe, vielmehr etwas Erkünsteltes. Es darf in Erinnerung gebracht werden, dass die Gewöhnung daran erst in der Schule mühsam anerzogen wird. Wenn z. B. von den Schülern eine Mischungsaufgabe, betreffend Wasser und Wein, gerechnet wird, so wird der Lehrer leichtlich auf die Frage, was x hier bedeute?, vom Schüler die Antwort erhalten: „x bedeutet das Wasser“ — statt richtig: die *Anzahl* Liter des zur Mischung zu verwendenden Wassers. Manche Schüler müssen wiederholt und hartnäckig darauf hingewiesen werden, dass unter den Buchstaben keineswegs die Dinge selbst, sondern deren Anzahl, beziehungsweise Maasszahlen, zu verstehen seien.

Es kann daher nicht wol als eine ungebührliche Zumutung an den Mathematiker bezeichnet werden, von dieser so mühsam erworbenen Angewöhnung zeitweilig — für den gegenwärtigen Kalkul — *sich frei zu machen* und wieder zurückzukehren zu dem urwüchsigen Verfahren, welches (anstatt ihrer Maasszahlen) die Dinge selbst benennt und bezeichnet — zumal auch hiefür Präcedenzfälle in der Mathematik schon genugsam vorliegen: wie denn z. B. in der Lehre von Kongruenz, Ähnlichkeit und Projektivität der Figuren unter einem Dreieck ABC auch durchaus nicht verstanden wird die Maasszahl von dessen Fläche, vielmehr in der That das Dreieck selber, u. a. m.

Immerhin dürfte gerade den vorwiegend mathematisch geschulten Leser

es anfänglich eine bewusste Anstrengung kosten, hier, wo es unumgänglich ist, sich zu emanzipiren von jener Gewöhnung, mit den uns Flächen darstellenden Buchstaben in Verbindung zu bringen die Vorstellung von metrischen Relationen.

Jedes spezielle Gebiet, das wir so unter einem Buchstaben a verstehen mögen, nennen wir einen „*Wert*“ (valor, value) des letztern.

Als erste Beziehung, welche zwischen zwei Gebieten a und b bestehen kann, fassen wir nun im identischen Kalkul die Beziehung der *Subsumtion:*

$$a \mathrel{\underset{=}{\prec}} b$$

in's Auge, die uns ausdrücken wird, *dass das Gebiet a* (*das „Subjektgebiet“*) *sich dem Gebiete b* (*dem „Prädikatgebiet“*) *einordne, dass a in b enthalten sei* — so wie es, nebenbei gesagt, die Alternative zwischen den Figuren 1 und 2 veranschaulicht.

Den Sinn eben*dieser* Beziehung setzen wir *einzig und allein* als bekannt voraus.

Alle andern Begriffe und Beziehungen, die wir noch in den Bereich des identischen Kalkuls hereinzuziehen haben, werden ausschliesslich aus Beziehungen dieser Sorte, aus „Subsumtionen“ aufgebaut, sodass wir ungeachtet seiner später vollzogenen Erweiterungen und scheinbar grösseren Tragweite doch sagen können, der identische Kalkul beruhe einfach und ganz auf dem Studium der Subsumtionen.

Wir werden die Gesetze dieses Kalkuls zunächst (unter Beihülfe der Wortsprache) *in der allgemeinen Form mathematischer Beweisführung* begründen, für welche seinerzeit die Geometrie des Euklides mustergültig geworden ist, um hernach in einem Rückblicke zu erkennen, dass bei den Schlüssen ebendieser Beweisführung nur die Prinzipien dieses Kalkuls selber angewendet worden sind.

Niemand, der für Reinheit der Methode und Konsequenz des Verfahrens Sinn besitzt, wird sich dem Eindruck der Schönheit und mathematischen Eleganz des damit geschaffenen wissenschaftlichen Systems verschliessen können. Freilich wird man, um diesen Eindruck ganz ungetrübt zu gewinnen, möglichst abzusehen haben von allem *Beiwerk* der hiernächst zu entwickelnden Theorie.

Das Beiwerk ist zu einem Teile ein *kritisches*, insofern uns obliegen wird, die gewählten Bezeichnungsweisen, die das Fundament der Zeichensprache bilden, zu motiviren, sie zu rechtfertigen gegen etwaige Ausstellungen von mathematischer nicht minder, wie von philosophischer Seite. Überhaupt werden wir auf vorauszusehende Einwände sowol, wie auf entgegenstehende Lehrmeinungen philosophischer Systeme und Ausführungen namhafter Mitarbeiter und Philosophen oft Rücksicht zu nehmen, solche nötigenfalls zu widerlegen haben. Und die Eigenart unsrer Behandlungsweise der logischen Materie bildet gerade hiefür eine beträchtliche Erschwerung. Zufolge der *verbindenden* Stellung, die sie zwischen Philosophie einer- und Mathematik andrerseits einzunehmen bestimmt ist, werden wir in der That auf zwei — wie schon im Vorwort erwähnt — fast allzu verschieden disponirte Leserkreise stetsfort bedacht zu nehmen haben.

Die Hauptmasse aber des mit der Theorie des identischen Gebietekalkuls hier zu verflechtenden Beiwerks wird von *sachlicher* Art sein, nämlich aus Nutzanwendungen des Kalkuls für die Zwecke der Logik selbst zu bestehen haben. Von diesen finden wir für gut, einen (ersten) *Teil* wenigstens gleich neben der Theorie einherlaufen zu lassen, und zwar den Teil, welcher abzielt auf die Verwertung des Kalkuls behufs Einkleidung in seine Zeichensprache zunächst derjenigen Beziehungen, welche zwischen *Klassen* oder Begriffsumfängen die Wortsprache auszudrücken vermag.

Begriffe und Sätze oder Formeln des „identischen" Kalkuls (beziehungsweise des damit verwandten logischen, vergl. die sechste Vorlesung) werden (überhaupt) die verschiedenartigsten *Anwendungen* zulassen, Anwendungen, die sich lediglich unterscheiden durch die Deutungsweise, Interpretation der hier als allgemeine Symbole verwendeten Buchstaben, und demgemäss auch der sie verknüpfenden Operations- und Beziehungszeichen. Wir werden namentlich unter den Buchstaben verstehen können:

α) *Gebiete* einer Mannigfaltigkeit von Elementen,

β) *Klassen* oder Gattungen von Individuen, insbesondere auch Begriffe, nach ihrem Umfang betrachtet, desgl.

γ) *Begriffe* nach ihrem Inhalt betrachtet, speziell auch Vorstellungen,

δ) *Urteile*, Behauptungen, Aussagen („statements"),

ε) *Schlüsse* („inferences")*),

ζ) Funktionalgleichungen, Algorithmen, Kalkuln, „*Gruppen*",

— kurzum, bei geeigneter Auslegung der Zeichen so ziemlich alles Denkmögliche.

Wenn demnach als Vorwurf, Thema der deduktiven Logik gemeinhin bezeichnet wird die Lehre von den *Begriffen*, *Urteilen* und *Schlüssen*, so wird zu sehen sein, dass auch auf diese Objekte unsre Hülfsdisziplin des identischen Kalkuls sich mitbezieht. Sie wird sich auf dieselben direkt übertragen lassen, indem man einfach einen Wechsel in der Deutung der Zeichen vollzieht.

Wie schon angedeutet, würde unsre Darstellung des identischen Kalkuls an Übersichtlichkeit allerdings gewinnen, wenn wir ihn zunächst nur als *reinen Gebiete*kalkul, lediglich unter dem Gesichtspunkte

*) Die „Schlüsse" können selbst als „Urteile" hingestellt werden — welche den denknotwendigen Zusammenhang zwischen Prämisse und Konklusion konstatiren.

α), entwickelten und uns dabei aller Seitenblicke auf seine anderweitigen Anwendungen zunächst enthielten. Dieser Vorteil würde indess erkauft durch eine Reihe von, in meinem Dafürhalten schwerwiegenden pädagogischen Nachteilen: man würde, vor allem, gar lange nicht abzusehen vermögen, zu was überhaupt die Betrachtungen gut sind, und weshalb sie angestellt werden. Zudem handelt es sich doch auch darum, den deutschen Leserkreis erst einigermassen heranzuziehen zu dem Gebrauch dieses Kalkuls, zu welchem ja Übungsbücher oder Aufgabensammlungen im Deutschen noch nicht existiren, wogegen in der englischen Literatur bereits manche Werke diesen Charakter in beträchtlichem Umfange ausgeprägt zeigen. Jede Illustration aber von theoretischen Sätzen durch Beispiele auf einem Anwendungsfelde muss hier den Wert einer Übung im Gebrauch der zu erlernenden Zeichensprache noch nebenher besitzen.

Aus diesen Gründen erscheint es mir als höchst wünschenswert bei der Entwickelung der Theorie des identischen Kalkuls sogleich ein Anwendungsgebiet von einigermassen praktischer Natur zur Verfügung zu haben, und wähle ich als das nächstliegende das Anwendungsfeld β), dasjenige Gebiet also, welches ja den Ausgangspunkt unsrer Betrachtungen von vornherein gebildet hat, und die Idee zur Gründung einer selbständigen Hülfsdisziplin auf dem Felde α) erst seinerseits anregte.

Auf dieses Anwendungsfeld β) werden wir, nunmehr von α) ausgehend, hinübergeleitet durch die Bemerkung, den Hinweis darauf: dass die „Elemente" unsrer Mannigfaltigkeit auch sogenannte „*Individuen*" sein können, wo dann die „Gebiete" dieser Mannigfaltigkeit zu bezeichnen sein werden als Systeme, und wenn man will als „*Klassen*" von solchen Individuen. Als dergleichen „Individuen" mögen irgendwelche Objekte des Denkens, sofern sie überhaupt in Gedanken isolirbar sind, zunächst hingestellt werden, und die ganze Mannigfaltigkeit wird dabei erscheinen als eine all' jenen Klassen übergeordnete allgemeinere oder umfassendere Klasse, wofern sie nicht etwa als die Mannigfaltigkeit des Denkbaren überhaupt sich wird ansehen lassen.

Anmerkung. Nächst dem Anwendungsfelde β) des identischen Kalkuls — das ist dem mit dem „*Gebietekalkul*" α) auf das engste verwandten „*Klassenkalkul*" — ist als das wichtigste dessen Anwendungsfeld δ) hervorzuheben, das ist der „*Aussagenkalkul*" (von McColl als „calculus of equivalent statements" bezeichnet). Müssen wir doch all' unsre Überlegungen und Beweise vollziehen in Gestalt einer Reihenfolge von Aussagen! Um dessen, was wir dabei thun, jeweils vollkommen inne zu werden, über einen jeden unsrer Schritte uns klarste Rechenschaft abzulegen, wird es darum ratsam sein, auf das Anwendungsfeld δ) schon frühzeitig zu achten, gelegentlich auch auf dieses einen Seitenblick zu werfen. Systematisch wird ja auf dasselbe allerdings erst später, mit Band 2 erst einzugehen sein. Aus dem angedeuteten *didaktischen* Grunde aber sei vorgreifend schon hier bemerkt, dass im Aussagenkalkul einer Subsumtion $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$ die Bedeutung zukommen wird: Wann die Aussage a gilt, gilt auch die Aussage b, jene zieht diese nach sich, m. a. W.: Aus *a folgt b.*

Die wichtigste Rolle muss naturgemäss solchen Klassen zufallen, welche als der „Umfang" von (gewissen, denselben zugeordneten) Begriffen bestimmt erscheinen. Doch ist wie bereits unter γ_3) der Einleitung betont, die Rechnung mit Klassen noch umfassender als die Rechnung mit Begriffsumfängen, sofern man jeweils zu vorübergehenden Zwecken, ja sogar in völlig willkürlicher Auswahl, auch die allerheterogensten Dinge in eine Klasse wird zusammengefasst denken dürfen.

Die Benennung als *„Umfang"* eines Begriffes, welche wir von der scholastischen Logik überkommen haben, um die Klasse oder Gesamtheit aller derjenigen Individuen zu bezeichnen, welche „zu der Kategorie des betreffenden Begriffes gehören", diese Benennung erscheint — im Hinblick schon auf deren Versinnlichung mittelst Euler'scher Diagramme — als eine ziemlich unglücklich gewählte. Es sind ja keineswegs die *„Um*fänge" oder Peripherieen der Euler'schen Kreise, es sind *nicht die Konturen* der Flächengebiete, welche uns im identischen Kalkul die „Begriffs*umfänge*" zu versinnlichen haben, sondern allemal diese Kreisflächen selber resp. die Flächengebiete mit allem was sie *in* sich ent*halten*. Viel passender hiefür erscheint das englische „extent", welches ganz wohl mit „Ausdehnung" oder *„Erstreckung"* des Begriffes im Deutschen wiedergegeben werden könnte. Doch sind wir nicht in der Lage, eine Jahrhunderte alte und ganz allgemein acceptirte logische Terminologie umstossen zu können, und müssen uns damit begnügen, auf das Verfängliche der Benennung einmal hier aufmerksam gemacht zu haben.

Noch ist zu betonen, dass wir bei den Anwendungen der Theorie auf Klassen immer nur *scharfumgrenzte* oder, wie man sagen kann *„wohldefinirte"* Klassen im Auge haben werden.

Es wird vorausgesetzt, dass in Bezug auf kein Ding oder irgend mögliches Objekt des Denkens einem Zweifel Raum gelassen sei, ob es zu der gedachten Klasse gehöre oder nicht.

Dies ist zunächst der Fall, sobald die Individuen der Klasse sich vollständig haben aufzählen lassen.

Häufig aber werden die (zu betrachtenden) Klassen „offene" sein, Klassen von einer unbegrenzten Individuenzahl, deren Individuen also

überhaupt nie vollständig aufgezählt zu werden vermögen — wie z. B. die Klasse der Linien oder Kurven — eventuell auch Klassen, deren Individuen zum Teil noch ungewiss im Schoosse der Zukunft ruhen — wie z. B. die Klasse der Menschen u. a. m.

In solchen Fällen müssen wir *voraussetzen*, dass wenigstens ein Prinzip in uns wirksam sei, welches in Bezug auf jedes einzelne in den Bereich unsres Denkens jemals fallende Objekt, in Bezug auf alles, was fähig ist, von uns *vorgestellt* (oder was noch mehr sagt, von uns *gedacht*) zu werden, unzweifelhaft entscheidet und uns mit Notwendigkeit dahin drängt, dirigirt, entweder, es zu der Klasse zu rechnen, oder aber, es von ihr auszuschliessen.

In Gestalt des „Begriffes" haben wir ja mit einem derartigen Prinzipe, das solches auch zu leisten fähig, schon in C der Einleitung Bekanntschaft gemacht. Indessen sei es ausdrücklich bemerkt, dass Natur und Wirkungsweise gedachten Prinzips hiernächst uns gleichgültig lässt. Gerade darin, dass wir es dahingestellt sein lassen, auf welche Weise die vorauszusetzende Abgrenzung unsrer Klassen zustande kommen mag, erblicken wir einen Hauptvorzug der hier befolgten Methode. Auf diesem Umstand gerade beruht, wie wir meinen, der elementare und fundamentale Charakter der hier entwickelten Theorie.

Das oben ausgesprochene Kriterium für die Wohldefinirtheit einer Klasse scheint übrigens noch eines einschränkenden Zusatzes zu bedürfen in Gestalt des Vorbehaltes, dass die in Frage kommenden Objekte hinlänglich *bekannt* seien.

Sobald z. B. wir eine Zahl *kennen*, ist jeder Zweifel ausgeschlossen, ob sie zur Klasse der ganzen Zahlen gehörig oder nicht; wir mögen die Klasse der ganzen Zahlen als Exempel einer wohldefinirten Klasse hinstellen ganz unbeschadet dessen, dass wir z. B. nicht wissen, ob das Atomgewicht des Schwefels (auf Wasserstoff als Einheit bezogen) zu derselben gehört oder nicht (vergl. die Stass'schen Atomzahlbestimmungen), da uns eben diese Zahl zur Zeit nicht hinlänglich sicher bekannt sein dürfte.

Auch mit diesem Vorbehalte bildet die genannte Voraussetzung ein *Ideal* in den Zuständen unsres Denkens, welches nur selten von der Wirklichkeit daselbst erreicht wird.

Es braucht in dieser Beziehung nur an die Schwierigkeiten erinnert zu werden, welche die Abgrenzung zwischen Pflanzen- und Tierreich bei den niederen Organismen der Naturwissenschaft bereitet, oder auch — um ein noch frappanteres Beispiel zu wählen — an die Schwierigkeiten, welchen die neuere gegen Fälschung der Nahrungs- und Genussmittel gerichtete Gesetzgebung bei dem Versuche begegnet ist, die Begriffe von Brod, Wurst, von Wein und Bier festzustellen, den Umfang derselben unzweifelhaft abzugrenzen. Gleichwie diese Umgrenzung erfolgte mittelst Angabe der Ingredienzien, welche zur Bereitung jener Lebensmittel verwendet sein dürfen, so werden auch im allgemeinen gewisse Merkmale, die wir aus dem vollen Inhalte des zugehörigen Begriffs als die „wesentlichen" hervorheben, das wirksame Prinzip zur gesuchten Abgrenzung liefern.

Faktisch ist in der That die Abgrenzung der Klassen, welche die Sprache mit Gemeinnamen darstellt, zumeist eine schwankende. Nicht nur bleiben Fälle denkbar, welche bei der Abgrenzung unberücksichtigt gelassen sind, und in Bezug auf welche schon Derjenige, der den Gemeinnamen gebraucht, sich im Unklaren darüber befindet, ob sie einzurechnen oder auszuschliessen seien (womit dieses auch für Alle strittig, unentschieden bleibt), sondern die Abgrenzung ist auch oft im subjektiven Gebrauch bei einundderselben Persönlichkeit eine wechselnde, richtet sich nach dem Gedankenkreise, in dem man sich eben bewegt, und verändert sich mit dem Untersuchungsfelde, auf das man den Gemeinnamen anwendet.

So schliesst z. B. in der Naturgeschichte die Klasse der Tiere diejenige der Menschen in sich ein, wogegen in der Sprache des gewöhnlichen Lebens und gesellschaftlichen Verkehrs sie dieselbe ausschliesst. So begrenzen wir auch die Klasse „Mensch" sicherlich enger, wenn wir sagen: „Alle Menschen sind sterblich", als wenn wir sagen: „Dieser Mensch ist todt", „der Arzt hat einen Menschen secirt" und dergl. Es hätte doch gewiss keinen Sinn, einen Leichnam noch als „sterblich" zu bezeichnen!

Ausserdem aber wird, wenn erst die Paläontologie noch erfolgreicher in eine graue Vorzeit eindringt, der Lamarck-Darwin'schen Entwickelungslehre einst die Aufgabe zufallen, die Grenze zwischen Zwei- und Vierhänder, eventuell Vierfüsser noch schärfer zu ziehen, so wie sie durch die Entdeckung des Archäopterix und der mit Zähnen bewaffneten fossilen Vögel Nordamerikas (Hesperornis, Ichthyornis etc.) bereits in die Lage versetzt wurde, genauer scheiden zu müssen, was zur Klasse der Vögel und was zu derjenigen der (Flug-)Eidechsen hinfort gehören solle.

Mit der Voraussetzung wohldefinirter Klassen vollzieht die Logik eine ganz ähnliche Idealisirung der Wirklichkeit, wie z. B. die Mechanik es thut, indem sie absolut starre, oder aber vollkommen tropfbar flüssige inkompressible oder endlich vollkommen elastisch flüssige (gasförmige) Körper fingirt. Indessen ist mit ihrem Ideal die Logik insofern in einer günstigeren Stellung, wie die Mechanik, als es der letztern nicht möglich ist, z. B. Körper herzustellen, welche dem Zustand der absoluten Starrheit beliebig nahe kommen. Wogegen es doch wenigstens in unserm Vermögen liegt, für uns selbst und Andere die Klassen, von welchen die Rede sein soll, mittelst Besinnung darüber, resp. in freier Übereinkunft mittelst eingehender Verständigung in jeder wünschbaren Schärfe abzugrenzen. Es geschieht ja nicht immer, doch *kann* es nötigenfalls geschehen.

Auf dieses Ideal der Logik, dass man auf wohldefinirte Klassen sich berufen könne, arbeiten zudem Gesetzgebung und Wissenschaften — eine jede auf ihrem Gebiete — mit grosser Macht hin. Dasselbe ist gerade auf letzterem Felde, welches zur Anwendung unsrer Disziplin in erster Linie in Betracht kommt, im weitesten Umfange verwirklicht, und bildet es in der That eine unerlässliche Voraussetzung für alles exakte Denken. Auch bleibt es unbenommen, die Abgrenzung in Frage kommender Klassen von Dingen zunächst nur provisorisch zu vollziehen, und falls sich aus den Ergebnissen angestellter Untersuchungen auf Grund exakten Denkens Beweggründe dazu ergeben sollten, diese Abgrenzung nachträglich abzuändern, zu modifiziren.

Verstehen wir unter b die Klasse der Studirenden auf deutschen Universitäten im laufenden Studienjahre, so ist diese Klasse eine wohldefinirte. Hier entscheidet nämlich die ordnungsmässig vollzogene Immatrikulation. In dieser Klasse b ist enthalten diejenige der Studirenden der Universität Leipzig vom selben Jahrgange, welche mit a bezeichnet werden möge. Es ist dann $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$. Denkt man sich in die Felder auf einer hinreichend fein karrirten Seite eines Bogens Papier die Namen sämtlicher Studenten der Klasse b eingetragen, und zwar jeden Namen gesondert in ein eigenes Feld, so werden diejenigen Felder, welche die Namen von Studenten der Klasse a enthalten, einen gewissen Komplex bilden — man kann durch geeignete Auswahl der zur Eintragung der letzteren zu verwendenden Felder, durch Zusammenlegen dieser Felder bewirken, dass er einfach zusammenhängend erscheint — und es wird nun die Beziehung zwischen den Felderkomplexen, in welche die Individuen der Klassen a und b eingetragen sind, der Fig. 1 wesentlich gleichen, nämlich mit ihr darin übereinstimmen, dass der Komplex a als ein Teil des Komplexes b erscheint, in letzterem enthalten ist. Indem jedes Feld erscheint als der „Träger" eines einzelnen Individuums, einem solchen „zugeordnet" ist, prägt sich die Beziehung $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$ zwischen den Klassen a und b hier anschaulich aus, sie wird im wahren Sinne des Wortes *sichtbar*.

Es ist für das Folgende von der höchsten Wichtigkeit, dass man sich die Punktgebiete oder Flächen, die wir im identischen Kalkul betrachten werden, und die Klassen, von welchen behufs Illustration oder Anwendung des Kalkuls die Rede sein wird, in der geschilderten Weise auf einander bezogen denke. Wir glaubten, um allseitiges Verständniss zu erzielen, auch ein Beispiel mit begrenzter Individuenzahl der Klassen vorführen zu müssen. Man wähle bei unbegrenzter Individuenzahl (mathematische) *Punkte*, bei begrenzter etwa *Felder* zur Darstellung der in Betracht kommenden Individuen. Indess steht im letztern Falle nichts im Wege, die Felder sich auch in getrennte, etwa besonders markirte Punkte zusammenziehen zu lassen.

Nach diesen (im Grossen und Ganzen auch motivirten) Vorbemerkungen gehen wir zur systematischen Darstellung der *Theorie* über.

Es kommt uns dabei auch sehr auf Erzielung einer guten Übersicht an, welche wir durch scharfe Sonderung und konsequente Chiffrirung ihrer verschiedenen Momente zu erzielen hoffen.

„Definitionen", Begriffserklärungen chiffriren wir (wenn überhaupt,

so) je mit arabischen Ziffern in vollständiger aber einfacher Klammer, wie (1), (2) und so weiter.

„Postulate“ ebenso, jedoch mit doppelter Einklammerung wie ((1)), ((2)), . .

„Prinzipien“ oder „Axiome“ mit römischen Ziffern, wie I, II, etc.,

„Theoreme“, Lehrsätze wieder mit arabischen Zahlen aber nur einseitiger (rechtseitiger) Einschliessung, mit „Halbklammer“, wie 1), 2), 3), . .

Es wird der Logik gemeinhin zugemutet, dass sie auch erkläre, was unter Definition, Postulat, Axiom und Theorem zu verstehen sei, dass sie also namentlich auch auf die Erfordernisse einer guten Definition näher eingehe, desgleichen auf die Anforderungen, die an den *Beweis* (die *„Demonstration“*) zu stellen, durch welchen das Theorem als ein solches nachgewiesen werden muss, durch welchen es von einer blossen Behauptung zum Lehrsatz erst erhoben wird.

Ähnlich gehört auch die Charakterisirung der „Aufgabe“ des *„Problems“*, nebst den Anforderungen an ihre „Lösung“ (solutio) und deren „Determination“ noch zu den Obliegenheiten der gewöhnlichen Logik.

Es erscheint jedoch durch die Anlage, den Plan des ganzen Buches geboten, dass wir uns *an dieser Stelle* auf diese Fragen nicht einlassen, vielmehr uns mit dem Hinweis begnügen, dass die fraglichen Begriffe, soweit sie nicht ohnehin schon Gemeingut sind, einstweilen wenigstens synthetisch erworben, herangebildet werden können an dem Material der aufzustellenden und als solche hingestellten speziellen Definitionen, an der grossen Zahl von mustergültig bewiesenen Theoremen, etc.

Es wird sich ein *„Dualismus“* (eine „Reziprozität“) durch die ganze Disziplin ziehen, indem die auf die Operationsstufe der Addition sich beziehenden Sätze sozusagen „Pendants“, symmetrische Gegenstücke bilden zu den auf die Stufe der Multiplikation bezüglichen (vergl. § 14). Wir chiffriren die „einander dual entsprechenden“ Sätze jeweils mit der gleichen Nummer, jedoch unterschieden durch das Suffixum $+$ resp. $\times$. Auch stellen wir solche Sätze meistens in den beiden Spalten (Kolumnen) links und rechts von einem die Druckseite in der Mitte brechenden Vertikalstriche (dem „Mittelstriche“) einander symmetrisch gegenüber.

Die analoge Übung besteht bekanntlich schon längst in der Geometrie der Lage, wo in den reziproken oder zu einander polaren Sätzen z. B. Raumpunkt und Ebene ihre Rollen tauschen, während die Gerade verharrt.

Es bedarf wol kaum des Hinweises, dass (hier wie dort) in *verschiedenen* Kolumnen oder Spalten aufgeführte Voraussetzungen oder Behauptungen, wenn sie auch im selben Niveau, auf *einer* Zeile stehen, doch niemals Bezug auf einander haben sollen: sie sollen nicht etwa gleichzeitig gelten, behauptet oder angenommen werden. Vielmehr hat man auf einmal immer nur den Text von *einer* Spalte allein, zusammen mit den etwa quer durchgehenden Zeilen zu lesen.

Ohne Suffixum werden nur die „zu sich selbst dualen“ Sätze chiffrirt erscheinen.

Als für die Theorie vorerst unwesentlich — indess behufs etwaiger Nebenbemerkungen vorausgeschickt zu wünschen — lasse ich zur Zeit unchiffrirt die

(Definition). Unter einer Aussage von der Form:

$$b \mathrel{\succcurlyeq} a$$

(sprich: *b übergeordnet oder gleich a, b super a*) soll ganz das nämliche verstanden werden, wie wenn man sagt, dass

$$a \mathrel{\preccurlyeq} b$$

sei. *Eine Subsumtion kann hienach auch rückwärts gelesen werden, indem man nur das Subsumtionszeichen* als Supersumtionszeichen interpretirt, resp. *„umkehrt“*.

Kraft dieser Definition vermögen wir auch den (verhältnissmässig seltenen) Fällen gerecht zu werden, in welchen die Wortsprache das Prädikat dem Subjekte voranzustellen liebt — auf welche bereits in § 2 hingewiesen wurde: auch dergleichen Urteile mögen wir jetzt unmittelbar in die Formelsprache übertragen, ohne dass wir erst genötigt wären, eine Umstellung der beiden Satzglieder dabei vorzunehmen.

Ökonomisch und von Wert wird solche Möglichkeit sich besonders dann erweisen, wenn etwa der natürliche Gedankenverlauf dahin geführt hat, das Prädikat zuerst, vor dem Subjekte, zu beschreiben und wenn diese Schilderung sowie auch der Ausdruck gedachten Prädikates in den Symbolen unsrer Formelsprache einigermassen komplizirt erscheint, weitläufig ist. Wollte man in solchem Falle das Subjekt in die gewöhnliche typische oder normale Stellung zum Prädikate bringen, so wäre man genötigt, die umständliche Beschreibung, den komplizirten Namen oder Ausdruck des letzteren (hinter dem Subjekte, nachdem er vor demselben zuerst gefallen ist) *zu wiederholen*, was mühsam und langweilig sein kann. Die Wortsprache vermag sich dem durch den Gebrauch eines hinweisenden Fürworts zu entziehen, indem sie auf das Prädikat als auf jenes oder dieses eben beschriebene Ding zurückverweist. In der Formelsprache könnten wir allenfalls solcher lästigen umständlichen Wiederholung dadurch auch aus dem Wege gehen, dass wir sofort, nachdem der komplizirte Name des Prädikats erstmalig vollendet ist, ein einfaches Buchstabensymbol als Abkürzung für denselben, als Name ad hoc oder Hülfsbezeichnung für dieses Prädikat einführten, sodass dessen Wiederholung dann keine Umstände mehr verursacht. Doch kann auch dies schon eine Nötigung zu unbequemen Weiterungen (wie Überladung der Untersuchung mit Zeichen u. a.) in sich schliessen, und bleibt das einfachste Auskunftsmittel jedenfalls das anmit geschaffene: die Beziehung des Subjekts zum Prädikate in der umgekehrten Ordnung als eine rückwärts gelesene Subsumtion oder „Supersumtion“ dann zum Ausdruck zu bringen.

In die systematische Darstellung unsrer Disziplin werden wir das Supersumtionszeichen $\succcurlyeq$ erst in § 34 aufnehmen.

Zweite Vorlesung.

§ 4. Erste Grundlagen: Prinzip I und II, Definition von Gleichheit, 0 und 1, nebst Folgesätzen.

An die Spitze haben wir zwei Grundsätze zu stellen, welche nicht auf noch einfachere Sätze zurückführbar erscheinen und schlechthin zugegeben werden müssen.

Prinzip I.

$$a \Subset a.$$

Da das Subsumtionszeichen $\Subset$ der Kopula „ist“ entspricht, so heisst dies in Worten: „*a ist a*“.

Diese Aussage muss als eine gültige anerkannt werden, was immer für eine Bedeutung dem a auch beigelegt werden mag. Z. B. „Gold ist Gold“. „Weiss ist weiss“, etc. Dergleichen Sätze sind von niemand bestrittene Wahrheiten, deren Äusserung höchstens ihrer Selbstverständlichkeit halber Anstoss erregen kann.

Demgemäss trägt auch die obige Subsumtion I den Charakter einer *allgemeingültigen*, einer „Formel“. Dieselbe, oder ihren Ausdruck in Worten, nennen wir den *Satz der Identität*, principium identitatis. Unter diesem Namen hat schon die alte Logik den Satz gekannt und als ersten Grundsatz angenommen.

Bedeutet a ein Punktgebiet (z. B. eine Fläche) aus unsrer Mannigfaltigkeit (der Fläche der Schultafel), so sagt der Satz I aus: *a ist in sich selbst enthalten, ist ein Teil von a; a ist untergeordnet oder identisch gleich a.*

In der That liegt von den beiden Fällen, welche wir in der Einleitung unter dem Subsumtionszeichen als mögliche zusammengefasst haben, hier, wo beide Seiten der Subsumtion das nämliche Gebiet vorstellen, ganz zuverlässig der eine vor, aber allerdings nie der erste, sondern immer nur der zweite Fall: a ist niemals*) untergeordnet dem a, sondern stets identisch gleich a.

*) Diese Behauptung, welche allerdings sofort einleuchtet, wird sich auf einem späteren Standpunkte auch *beweisen* lassen.

Die Aussage $a \Subset a$ hat daher etwas von jenem irreführenden Charakter, den wir bereits auf S. 134 sq. besprochen und durch ein Beispiel illustrirt haben; und auf den ersten Blick würde das nachher von uns bewiesene Theorem 1), nämlich die Gleichung $a = a$, als der angemessenere Ausdruck des Satzes der Identität erscheinen. Demungeachtet müssen wir doch bei der obigen Fassung I dieses Prinzips beharren aus zwei Gründen.

Erstens hatten wir es ja angezeigt gefunden, von den drei Zeichen $\Subset$, $\subset$ und $=$ das erstere oder Subsumtionszeichen als das *ursprüngliche* hinzustellen, auf dessen wohlerfasste Bedeutung das ganze Gebäude der Algebra der Logik zu gründen sei. Von den beiden andern Zeichen wurde bisher nur ganz beiläufig gesprochen, nämlich lediglich, um die äusserliche Bildungsweise oder Zusammensetzung des Subsumtionszeichens zu *motiviren*. Das Zeichen $=$ werden wird erst nachher, mittelst Definition (1), als ein wesentliches fortan legitim zu verwendendes Beziehungszeichen in das System unsrer Disziplin einführen, und das Zeichen $\subset$ noch sehr viel später. Auf unserm *gegenwärtigen* Standpunkte sind wir also noch gar nicht berechtigt, resp. in der Lage, von identischer Gleichheit zu reden.

Zweitens — und dieser Grund ist der ausschlaggebende — müssen wir trachten möglichst wenig Behauptetes als unbeweisbaren Grundsatz hinzustellen. Sagen wir aber von einem ausgewanderten Freunde z. B., er sei nach Südamerika gegangen, so sagen wir offenbar mehr über ihn aus, als wenn wir blos melden, er sei nach Amerika (d. i. Nord-, Süd- *oder* Mittelamerika) gegangen. Und ebenso enthält die Aussage: „a ist identisch gleich a“ eine weitergehende Information über die Beziehung des a zu sich selber, als die Aussage: „a ist untergeordnet *oder* identisch gleich a“, m. a. W. „a ist entweder nur ein Teil oder aber das Ganze von a“.

Um also möglichst wenig Unbewiesenes vorauszusetzen, werden wir die letztere Alternative zunächst offen lassen, nur den letzten Satz als Grundsatz hinstellen. Wir werden für den Augenblick so thun, als ob wir nicht wüssten, welcher von den beiden Fällen eintritt, um dergestalt zu erkennen, dass auch dann schon mit zwingenden Gründen sich darthun lässt, dass es der letztere Fall ist, welcher zutrifft.

Für den systematischen Aufbau unsrer Disziplin sind vorstehende Betrachtungen durchaus nicht *wesentlich;* ich habe mit denselben nur beabsichtigt, die *Beweggründe* unsres Zuwerkegehens klar zu legen, somit auch einer missverständlichen Beurteilung desselben zuvorzukommen.

Für die Theorie ist es vollkommen ausreichend, das Prinzip I rundweg als ein solches hinzustellen.

Anmerkung zu I. Aus didaktischen Gründen will ich ebenso, einstweilen vorgreifend, bemerken, dass, als ein Prinzip des „Aussagenkalkuls" gedeutet, der Satz I der Identität uns die Erlaubniss garantiren wird, eine als wahr anerkannte Behauptung bei beliebiger Gelegenheit zu wiederholen. Dieselbe muss dann immer wieder als wahr anerkannt werden. Wenn a gilt, so gilt a. Von dieser Freiheit werden wir im Text fortgesetzt Gebrauch machen. (Vergl. § 31.)

Prinzip II. *Wenn* $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$ *und zugleich* $b \mathrel{=\!\!\!\in} c$ *ist, so ist auch* $a \mathrel{=\!\!\!\in} c$.

Stellen a, b, c Gebiete — etwa Kreisflächen — vor, so mag dieser Satz durch die Figur erläutert werden:

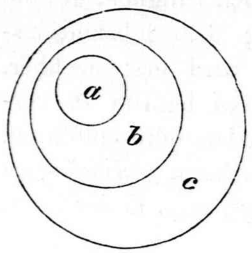

Fig. 3.

Indessen bringt solche Figur noch Besonderheiten (besondre Umstände) zum Ausdruck, die in dem Satze nicht gefordert, nur zugelassen, die in ihm offen gelassen sind. Der Fig. 3 liegt nämlich die Annahme zugrunde, dass die eventuellen Unterordnungen, von welchen im Satze die Rede ist, wirkliche, definitive Unterordnung seien. Da das Zusammenfallen zweier Kreise, von denen der eine im andern enthalten ist, immerhin als ein verhältnissmässig seltener Zufall erscheint, so mag man den in der Figur 3 zur Darstellung gebrachten Fall als den „allgemeineren" bezeichnen (und zwar in Hinsicht jedes Paares von aufeinanderfolgenden Kreisen, welches man in's Auge fassen möge).

Um auch die andern im Prinzip II mit inbegriffenen Fälle zu erhalten, braucht man sich nur noch vorzustellen, dass von den drei Kreisen, nämlich dem innersten a, dem mittleren b und dem äusseren c, irgend zwei successive auch zusammenfallen dürfen — eine Deckung,

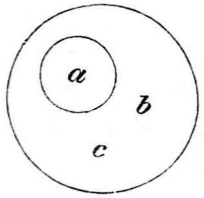

Fig. 4.

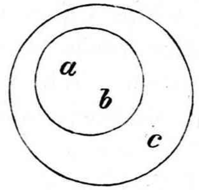

Fig. 5.

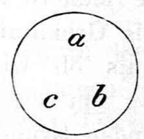

Fig. 6.

die sich in einfachster Weise hinbringen lässt, entweder indem man einen äusseren Kreis zusammenschrumpfen lässt zu dem nächsten in ihm enthaltenen Kreis, oder auch indem man den inneren Kreis sich ausbreiten lässt bis zur völligen Ausfüllung des nächsten ihn um-

schliessenden Kreises. Es können so auch alle drei Kreise in einen einzigen zusammenfallen, und erhalten wir eigentlich noch vorstehende drei Figuren (Fig. 4 .. 6), welche mit Fig. 3 zusammen den Satz II erst vollständig veranschaulichen.

Wir werden bei der Veranschaulichung von Sätzen und Aufgaben uns künftig zumeist nur an den „allgemeinen" Fall halten und uns mit der Darstellung der Fälle spezielleren Charakters durch Figuren nicht aufhalten, vielmehr die besonderen Ausartungen, die „Degenerationsfälle" sich ebenfalls zu veranschaulichen jeweils dem Leser überlassen — soferne solches überhaupt noch wünschenswert erscheint.

In verwickelteren Untersuchungen — beim Auftreten zahlreicher Gebietssymbole — wird es ohnehin unthunlich, jene Möglichkeiten immer vollständig durchzugehen. Alsdann aber bleibt der Argwohn zulässig, es möchte in einem der übergangenen Spezialfälle die Sache sich doch wesentlich anders verhalten, als in dem allgemeineren Falle behauptet und dargestellt worden. Hieraus erhellt, dass aus der *Anschauung* nicht in gleichem Maasse die Überzeugung von der *Gewissheit* unsrer allgemeinen Untersuchungsergebnisse zu schöpfen ist, wie sie sich erreichen lassen wird durch die streng *analytische* Methode, deren wir uns fast immer, jedenfalls in wesentlichen Fragen ganz ausschliesslich bedienen. Kann doch in der That für die Umgrenzung eines Gebiets die Figur immer nur ein *Beispiel* darstellen, während unsre Gebiete irgendwie beschaffen sein, auch aus isolirten Punkten, Linien und getrennten Flächenstücken sollen bestehen dürfen! Mag also auch anfangs — bei unsern grundlegenden Betrachtungen — die Anschauung oft rasch vorauseilen dem durch das Folgende illustrirten modus procedendi, nämlich dem vorsichtigen und zuweilen mühsamen Verfahren des von der Anschauung losgelösten streng deduktiven Schliessens, so wird sie doch später sicher hinter diesem Verfahren zurückbleiben; sie wird ihm bald nachhinken und zuletzt es aufgeben müssen, dasselbe einzuholen. Bei dem Aufbau unsres Lehrgebäudes soll darum die Anschauung nur nebensächliche Verwendung finden, illustrationsweise, um den abstrakten logischen Prozeduren einen Vorstellungsinhalt zu geben; sie soll darin überhaupt nur eine didaktische, erziehende, pädagogische Rolle spielen.

Hier freilich müssen wir uns noch auf dieselbe stützen, um das Prinzip II annehmbar erscheinen zu lassen: Wenn ein Gebiet in einem zweiten und dieses in einem dritten enthalten ist, fällt es uns unmöglich, uns vorzustellen, dass das erste nicht in dem dritten enthalten wäre; das Gegenteil vielmehr ist unmittelbar „intuitiv". Auf die Heraus-forderung drei solche Gebiete a, b, c nachzuweisen, bei denen die vorausgesetzten Einordnungen des a in b und des b in c zutreffen, die behauptete Einordnung des a in c aber sich nicht bewahrheitet, wird niemand sich stellen können.

Das Prinzip II gibt uns ein Schema an die Hand, nach welchem von (zwei) bekannten Wahrheiten zu einer neuen (dritten) Wahrheit fortgeschritten, nach welchem aus zwei Aussagen eine dritte abgeleitet werden kann, welche allemal, wenn jenen beiden Wahrheit zukommt, notwendig ebenfalls wahr sein muss. Nach unsern einleitenden Betrachtungen haben wir einen solchen Prozess als eine *Schlussfolgerung*, als deduktives *Schliessen* (inference, illatio) zu bezeichnen.

Die *Voraussetzungen*, aus denen gefolgert wird, die „*Prämissen*“ sind hier die beiden Subsumtionen $a \Subset b$ und $b \Subset c$; der „*Schluss*“ (genauer: „Schlusssatz“), die „*Konklusion*“ heisst $a \Subset c$.

Der Schluss (als Folgerung verstanden) ist nicht nur gemeinverbindlich für alle Intelligenzen, sondern auch „allgemeingültig“, nämlich unabhängig von der Materie des Denkens: Sein Schema ist *allgemein*, indem der Schluss Geltung beansprucht, was auch immer für Bedeutungen den Buchstabensymbolen a, b, c in jenem Schema (durchweg) untergelegt werden mögen. Vorläufig werden wir das Schema auf Gebiete unsrer Mannigfaltigkeit, sodann auch auf Klassen von irgendwelchen Objekten des Denkens anzuwenden haben.

Der Satz II selbst ist — hier im System für uns — das erste Beispiel eines deduktiven Schlusses, und zwar ist er in der That einer — abermals der erste — von den sogenannten Vernunftschlüssen oder „*Syllogismen*“ der alten Logik, in deren Studium — kann man fast sagen — diese Disziplin gipfelte. Derselbe führt daselbst den — etwas geschmacklosen — Namen *Barbara* und wird auch als das „dictum de omni (et de nullo)“ bezeichnet.

„Quidquid de omnibus valet, valet etiam de quibusdam et de singulis (quidquid de nullo valet, nec de quibusdam valet, nec de singulis)“ ist der Wortlaut dieses „dictum“.

Was von *allen* gilt, das gilt auch von einigen und von den einzelnen (Was von *keinem* gilt, das gilt weder von einigen noch von den einzelnen) — scilicet Individuen.

Wir werden die Syllogismen auch in diesem Werke vollständig (und kritisch) durchnehmen, und mag deshalb in Bezug auf Einiges, was über den Syllogismus Barbara noch zu sagen wäre, auf die 20. Vorlesung verwiesen werden.

Zur Stelle sei nur noch bemerkt, dass das Gebiet b, welches in

der Konklusion gar nicht vorkommt, dagegen in jeder der beiden Prämissen einmal vertreten ist, als das *Mittelglied* (terminus medius) des Syllogismus bezeichnet zu werden pflegt; dasselbe wird durch die Schlussfolgerung ausgemerzt oder „*eliminirt*“. Von den beiden Prämissen heisst diejenige ($a \Subset b$), welche das Subjekt a der Konklusion enthält, auch der *Untersatz* (propositio minor), die andere ($b \Subset c$), welche das Prädikat c der Konklusion enthält, der *Obersatz* (propositio major) des Syllogismus.

Wie schon gesagt, ist der Satz II ein *allgemeiner* Schluss, welcher, weil die Bedeutung der in ihm vorkommenden Glieder a, b, c in unser Belieben gestellt ist, das Vorbild abgibt für eine unbegrenzte Menge nach seinem Schema auszuführender Schlüsse.

Um rein mechanisch die Konklusion $a \Subset c$ aus den Prämissen abzuleiten, bieten sich zwei Wege dar: Man mag in dem Untersatze $a \Subset b$ das Prädikat b auslöschen, und an seine Stelle schreiben das Glied c, welches in dem Obersatz jenem übergeordnet erscheint. Oder man kann auch in dem Obersatz $b \Subset c$ das Subjekt b ersetzen durch dasjenige Subjekt a, welches in dem Untersatz demselben untergeordnet erklärt ist. Hienach können wir die beabsichtigte Anwendungsweise des Schema's II in Worten wie folgt formuliren:

In einer Subsumtion (einem Urteil) kann an Stelle des Subjekts jedes Subjekt dieses Subjektes, sowie an Stelle des Prädikats jedes Prädikat dieses Prädikates eingesetzt (substituirt) werden.

Es wurde in II der Untersatz *vor* (eventuell *über*) dem Obersatz ausgesprochen („Goclenische“ Anordnung der Prämissen). Auch wenn umgekehrt der Obersatz vor (resp. über) den Untersatz gestellt ist („Aristotelische“ Anordnung), muss man geübt sein, den Schluss zu ziehen:

$$\text{Aus } b \Subset c \quad \text{und} \quad a \Subset b \quad \text{folgt ebenfalls} \quad a \Subset c.$$

Denn nach Prinzip I, für Aussagen in Anspruch genommen (vergl. Anmerkung zu I) kann man auch die zweite Prämisse vor der ersten lesen und die (für uns) ursprüngliche Anordnung der Prämissen herstellen.

Die Goclenische Anordnung empfiehlt sich (hier) in der That als die zur Erreichung des Schlusses bequemere, zur Vorbereitung der Schlussfolgerung geeignetere; sie erscheint als die natürliche für die Logik des Umfanges. Die Wahl der umgekehrten Folge erklärt sich bei Aristoteles aus dem Umstand, dass er statt der Umfänge eben die Inhalte der Begriffe in's Auge fasste, wo dann die Stellung: „c ist

Merkmal des b, b Merkmal des a, ergo c auch Merkmal des a“ als die natürlichere erscheint.

Auch wenn a, b, c *Klassen* vorstellen, musste der Satz II allgemeine Geltung haben. Hiezu ein paar Beispiele. Es ist:

Gold $\Subset$ Edelmetall, Edelmetall $\Subset$ Chemisches Element,
folglich auch: Gold $\Subset$ Chemisches Element.
Luft ist ein Körper. Alle Körper sind schwer.
Ergo: die Luft ist schwer. (Lotze.)
Pferd $\Subset$ Säugetier; Säugetier $\Subset$ Wirbeltier; ergo: Pferd $\Subset$ Wirbeltier.

Beiläufig sei noch bemerkt, dass ein Schluss nach dem Schema II auch häufig als ein Schluss *a fortiori* bezeichnet wird; namentlich ist dies berechtigt, wenn (wie dies meist der Fall) die Subsumtionen in den Prämissen wirkliche Unterordnung bedeuten — in Analogie zu dem Schluss der Arithmetik von $a < b$ und $b < c$ auf $a < c$. Wenn jedes Pferd ein Säugetier und jedes Säugetier ein Wirbeltier ist, so muss — können wir sagen — *um so mehr* auch jedes Pferd ein Wirbeltier sein. —

Drücken wir — um bei unsern Beispielen zu bleiben — dies etwa so aus, indem wir nunmehr auch auf den Inhalt der den Klassen zugeordneten Begriffe achten, dass wir sagen: Den Pferden kommen diejenigen Merkmale zu, die allen Säugetieren gemeinsam sind; die Säugetiere aber besitzen alle für die Wirbeltiere gemeinsamen Merkmale, und folglich müssen den Pferden auch die Merkmale der Wirbeltiere zu eigen sein, so wird verständlich, weshalb die überlieferte Logik (Kant) dem Prinzip II auch den Ausdruck geben konnte: „nota notae est nota rei (repugnans notae repugnat rei)“: jedes Merkmal des Merkmals (einer Sache) ist auch ein Merkmal der (eben dieser) Sache. Die in dem Beispiel in Frage kommenden Merkmale sind (kurz zusammengefasst) bezüglich die, Säugetier zu sein und Wirbeltier zu sein.

So auch ist, Materie zu sein, stoffliche Qualität, ein Merkmal der Luft, und schwer zu sein, Schwere, ein Merkmal der stofflichen Natur, „Stofflichkeit“ (sit venia verbo!), folglich auch Schwere ein Merkmal der Luft. —

Nun drängt sich freilich wol einem Jeden, der einen solchen Syllogismus in's Auge fasst, eine Bemerkung auf, die ich zunächst für unser Beispiel aussprechen will, nämlich: dass man gar nicht wissen könne, dass alle Säugetiere Wirbeltiere seien, ohne bereits zu wissen, dass auch die Pferde Wirbeltiere sind.

Ebenso kann man auch nicht wissen, dass ein Gebiet b ganz, mit

allen seinen Teilen, in einem Gebiet c enthalten ist, ohne zugleich zu wissen, dass auch der Teil a des Gebietes b in c enthalten ist.

Die Bemerkung also ist naheliegend, *dass die Schlussfolgerung uns keine wesentlich neue Erkenntniss liefert*, keine, die wir — im Besitze der Prämissen befindlich — nicht eigentlich schon besessen hätten.

Diese Bemerkung ist richtig und unbestritten: es findet durch deduktives Schliessen eigentlich keine Vermehrung des Erkenntnissmaterials statt; die Deduktion gibt über nichts Aufschluss, was nicht in den Prämissen, auf die sie sich stützt, im Grunde schon enthalten wäre, und es kann der Syllogismus II als das einfachste Beispiel, als der Urtypus deduktiven Schliessens, als der er sich hinstellen lässt, gerade am allerbesten benutzt werden, um über das Wesen der deduktiven Methode Klarheit zu verbreiten.

Eines aber, dem wir entgegentreten müssen, das ist die Versuchung (der auch manche Philosophen erlegen sind), auf diesen Umstand eine Geringschätzung der deduktiven Methode zu basiren.

Gleichwie es schwierig sein möchte*), Demjenigen, der eben erst das Alphabet erlernt, einen angemessenen Begriff beizubringen von der Grossartigkeit der Literatur, die ihm durch dasselbe erschlossen wird, so dürfte es auch schwer halten, einem Anfänger, welcher etwa noch keine einzige deduktive Disziplin beherrscht, eine zutreffende Vorstellung beizubringen von der Kraft und dem Wert der deduktiven Methode. Ich würde mich einem solchen gegenüber eines Gleichnisses bedienen: Der Maschinenbauer muss auch das Eisen, aus dem er seine Maschinenteile herstellt, schon haben; es findet bei dem Bau der Maschine keine Vermehrung dieses Materials statt, vielmehr geht ein nicht unbeträchtlicher Teil desselben dabei unproduktiv verloren. Und ferner wird auch bei der Benutzung der fertig gestellten Maschine keine Arbeit durch dieselbe geschaffen, sondern nur ein bereits verfügbarer Arbeitsvorrat — abermals unter Verlusten — in neue wertvollere Formen umgesetzt.

Analog dem ersten, wie auch dem zweiten Teil dieses Gleichnisses, hebt nun allerdings die deduktive Methode aus dem vorhandenen Material oder Vorrat von Erkenntnissen nur Einzelnes hervor, aber allerdings gerade dasjenige, was für bestimmte Erkenntnisszwecke von Wert ist, für die Fortführung der Untersuchung von Interesse erscheint. Sie begrenzt dieses Einzelne in bestimmte Formen und bringt es, von

*) Wenn ich mir gestatten darf, ein schon anderwärts von mir gebrauchtes Bild zu wiederholen.

dem Übrigen getrennt, zum Bewusstsein, bietet es isolirt der Aufmerksamkeit, der Beachtung dar, und hält es zu weiterer Verwendung disponibel. Mitunter richtet sie auch das Ganze in neue zu anderweitiger Förderung der Erkenntniss geeignetere Formen her.

Sie zieht — um ein anderes Bild zu gebrauchen — die im Schachte freilich bereits vorhanden gewesenen Edelsteine an das Tageslicht, gibt ihnen Schliff und Fassung.

Dass diese Deduktion aber eine *Kunst* ist, welche in den meisten Fällen gar nicht so nahe liegt, deren Methode oft nicht leicht zu entdecken, zeigen fast alle Untersuchungen aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik, ebenso die komplizirteren Aufgaben in gegenwärtiger Schrift. Um es zur Stelle durch ein Beispiel darzuthun, *welches keine Vorkenntnisse erfordert,* lege ich dem Leser eine ganz einfache Aufgabe (aus der allgemeinen Theorie der Verknüpfung) vor.

Es mögen a, b, c beliebige Elemente einer Mannigfaltigkeit und ab das Resultat einer Verknüpfung von a mit b bedeuten, von der wir annehmen, dass sie jeweils wieder ein bestimmtes Element derselben Mannigfaltigkeit liefere; m. a. W. es sollen irgend zwei Elemente, in bestimmter Folge genommen, sich immer „eindeutig" zu einem dritten verknüpfen lassen. Die Knüpfung sei auch „eindeutig umkehrbar", d. h. wenn a allein, oder b allein, durch ein anderes Element ersetzt, geändert wird, so soll auch ab sich ändern.

Wenn nun die Knüpfung z. B. das Gesetz befolgt, dass allgemein immer $(ab)(bc) = ac$ ist, so soll die Frage entschieden werden, ob $ab = ba$ durchaus zu gelten habe (die Knüpfung „kommutativ" sein müsse), oder aber, ob nicht vielleicht in besondern Fällen ein Knüpfungsergebniss ab von dem ba verschieden sein könne?

Jene Frage ist zu bejahen (die letztere zu verneinen), sie wäre dagegen, wenn das Gesetz der Knüpfung ein wenig anders, nämlich $(ab)(bc) = ca$ gelautet hätte, zu verneinen.

Diese Antwort auf die gestellte Frage steckt bei der ersten sowol als bei der etwas abgeänderten zweiten Aufgabe ebenfalls ganz und gar schon in den Prämissen, aber doch ziemlich verhüllt. Man versuche doch einmal, sie aus den Prämissen herauszuschälen! Ich will dies hier unterlassen, da die Betrachtung in eine andere (in gewissem Sinne speziellere) Disziplin gehört. —

Ich bemerke nur noch, dass man unter den „Elementen" sich auch *Zahlen* z. B. vorstellen darf, und das Knüpfungsergebniss ab dann — im mathematischen Sinne — irgend eine „Funktion" $f(a, b)$ der zwei Argumente a und b bedeuten wird, die eindeutig umkehrbar sein muss. Erfüllt diese nun die Funktionalgleichung (und es *gibt* solche Funktionen):

$$f\{f(a, b),\ f(b, c)\} = f(a, c),$$

so wird sie auch „symmetrisch" sein, nämlich $f(a, b) = f(b, a)$ für alle Werte von a und b sein müssen. —

Wie oft nicht finden wir aber — ganz ähnlich wie bei der vorliegenden

Aufgabe — uns in der Lage, dass wir gar nicht wissen, was alles in unserm Wissen schon enthalten ist, dass wir nicht sofort abzusehen vermögen, ob ein Bestimmtes darin liegt oder nicht, und es im ersten Falle eine schwere Arbeit kostet, dasselbe herauszuholen!

Es ist dieser Umstand die Folge von dem Vorhandensein *allgemeiner* Erkenntnisse, in Gestalt von welchen ja gegenüber dem direkten Erkennen auch das *mittelbare* oder indirekte Erfassen von Wahrheit zur Thatsache wird.

Wer den Wert der Deduktion überhaupt oder der Syllogistik insbesondere aus dem Grunde bestreitet, weil dabei ein Verlust, ein Preisgeben von, Verzichten auf, Opfer an Erkenntnissmaterial stattfindet, gebraucht durchaus kein stichhaltigeres Argument oder Beweismittel, als jemand, der den Nutzen der Maschine leugnen wollte, weil sie vom verfügbaren Arbeitsvorrat einen Teil als Nebeneffekt verloren gehen lässt — oder auch den Wert der Bildhauerkunst wegen des durch sie herbeigeführten Verlustes an Marmor! Es hat auch die Gestalt, in der wir Erkenntnisse isoliren, ihren selbständigen Wert.

Um die Wertschätzung der Deduktion dem Anfänger gegenüber zu retten, resp. diese gegen die auf sie erfolgten Angriffe zu verteidigen, heben Mill und Wundt[1] (p. 285 sq.) — an Stelle des vorstehend von mir in den Vordergrund gestellten Grundes — als ein ebenfalls nicht zu übersehendes Moment mit Recht hervor, dass man bei jenen auf eine Geringschätzung hinauslaufenden Einwänden von der verkehrten Vorstellung ausgeht, ein allgemeiner Satz lasse sich nur auf diejenigen Fälle anwenden, aus welchen er abstrahirt worden ist. Die fruchtbringendste Anwendung unsres Syllogismus besteht aber gerade darin, dass wir ihn auf solche Fälle anwenden, die zur Aufstellung der (in der Regel wol induktorisch gewonnenen, vielleicht auch axiomatisch-hypothetisch aufgestellten) allgemeinen Prämisse *nicht* gedient haben.

Ein gut gewähltes Beispiel hiezu bringt Ueberweg in Gestalt des Schlusses: Was das Pendel verlängert verlangsamt (ceteris paribus, unter sonst gleichen Umständen) den Gang desselben. Wärme (genauer: Temperatursteigerung, Erwärmung) verlängert das Pendel. Also verlangsamt sie seinen Gang. Der Obersatz konnte in der theoretischen Physik durch Rechnung abgeleitet sein, und brauchte also nicht notwendig ohne Vermittelung des Untersatzes schon den Schlusssatz als Spezialfall in sich zu enthalten (cf. Fr. A. Lange[1] p. 89).

Im Grunde auch wird ja bei dem induktiven Verfahren, es wird selbst in den Erfahrungswissenschaften immer nur *von besonderen Fällen* auf den besonderen Fall geschlossen. Schon das einmal sich gebrannt habende Kind scheut ein zweites mal das Feuer, noch ehe es sich zu