Hertz, Heinrich

Gesammelte Werke

Band 3

Leipzig
1894

H. HERTZ,

Principien

der

MECHANIK

H. Lichmann 1.54
Leipzig 1899

GESAMMELTE WERKE

VON

HEINRICH HERTZ.

BAND III

DIE PRINZIPIEN DER MECHANIK.

LEIPZIG, 1894
JOHANN AMBROSIUS BARTH
(ARTHUR MEINER)

(03)

DIE

PRINZIPIEN DER MECHANIK

IN NEUEM ZUSAMMENHANGE DARGESTELLT

VON

HEINRICH HERTZ.

MIT EINEM VORWORTE

VON

[ermann]

H. VON HELMHOLTZ.

LEIPZIG, 1894
JOHANN AMBROSIUS BARTH
(ARTHUR MEINER)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Hiermit wird HEINRICH HERTZ' letztes Werk der Öffentlichkeit übergeben. Es bringt die Früchte der Arbeit seiner drei letzten Lebensjahre. Nach etwa einjähriger Arbeit war das Werk in seinen grofsen Zügen niedergeschrieben; die anderen beiden Jahre waren dem Ausbaue im Einzelnen gewidmet. Am Ende dieser Zeit betrachtete der Verfasser die erste Hälfte des Werkes als völlig abgeschlossen, die zweite Hälfte als der Hauptsache nach vollendet. Diese zweite Hälfte noch einmal durchzuarbeiten, war sein Plan. Schon aber waren die Pläne zu Wünschen geworden, und für die Wünsche gab es nur mehr Entsagung. Die Sonne, welche uns so hell noch einmal aus diesen Blättern leuchtet, neigte sich zum Untergange. — Kurz vor seinem Tode übergab der Verfasser selbst den gröfseren Teil des Manuskriptes der Verlagsbuchhandlung. Zugleich berief er den Unterzeichneten zu sich und wies ihn an, die Herausgabe zu besorgen, wenn er selbst dies nicht mehr würde thun können.

Indem ich die Drucklegung vom ersten Bogen an überwachte, achtete ich mit gröfster Sorgfalt auf getreue Wiedergabe des Originales, und zwar vor Allem des Sinnes desselben. Nicht minder war ich bestrebt, auch die Form zu wahren; aber dieselbe in allen Punkten festzuhalten, ohne Rücksicht auf Inhalt und Zusammenhang, wäre nicht im Sinne des Verfassers gewesen. Ich habe solche geringe Änderungen der Form eintreten lassen, von welchen ich nach sorgfältigem Studium des Werkes nicht zweifeln konnte, dafs sie der Verfasser selbst würde angebracht haben. Von der Angabe dieser Änderungen im Einzelnen glaubte ich absehen zu dürfen, eben weil keine derselben den Sinn berührt. Um dies letztere verbürgen zu können, habe ich auch sämtliche Concepte und früheren Ausarbeitungen des Werkes gewissenhaft studiert. Solcher früherer Ausarbeitungen sind mehrere in sorgfältiger Niederschrift vorhanden, und sie sind zum Teil ausführlicher, als das letzte, für den Druck bestimmte Manuskript.

Die letzten Verbesserungen, welche der Verfasser noch nach Absendung des Manuskriptes in einem zweiten Exemplare desselben vermerkt hatte, sind alle vor dem Drucke nachgetragen worden. Die Hinweise auf frühere Stellen des Werkes, welche im zweiten Teile desselben spärlicher wurden und im letzten Abschnitte nur angedeutet waren, habe ich ergänzt, den geplanten Nachweis der Definitionen und Bezeichnungen zusammengestellt.

Besondere Aufmerksamkeit widmete ich auch der äufseren Gestaltung des Druckes, wie es des Verfassers Wunsch war. Ich hoffe, man wird, Dank der anerkennenswerten Mitwirkung der Verlagsbuchhandlung, die Ausstattung als des Werkes würdig befinden.

Bonn, Juni 1894.

Ph. Lenard.

Vorwort von H. v. Helmholtz.

Am 1. Januar 1894 starb Heinrich Hertz. Für alle, die den Fortschritt der Menschheit in der möglichst breiten Entwickelung ihrer geistigen Fähigkeiten und in der Herrschaft des Geistes über die natürlichen Leidenschaften wie über die widerstrebenden Naturkräfte zu sehen gewohnt sind, war die Nachricht vom Tode dieses bevorzugten Lieblings des Genius eine tief erschütternde. Durch seltenste Gaben des Geistes und Charakters begünstigt, hat er in seinem leider so kurzen Leben eine Fülle fast unverhoffter Früchte geerntet, um deren Gewinnung sich während des vorausgehenden Jahrhunderts viele von den begabtesten seiner Fachgenossen vergebens bemüht haben. — In alter, klassischer Zeit würde man gesagt haben, er sei dem Neide der Götter zum Opfer gefallen. Hier schienen Natur und Schicksal in ganz ungewöhnlicher Weise die Entwickelung eines Menschengeistes begünstigt zu haben, der alle zur Lösung der schwierigsten Probleme der Wissenschaft erforderlichen Anlagen in sich vereinigte. Es war ein Geist, der ebenso der höchsten Schärfe und Klarheit des logischen Denkens fähig war, wie der gröſsten Aufmerksamkeit in der Beobachtung unscheinbarer Phänomene. Der uneingeweihte Beobachter geht an solchen leicht vorüber, ohne auf sie zu achten; dem schärferen Blicke aber zeigen sie den Weg an, durch den er in neue unbekannte Tiefen der Natur einzudringen vermag.

Heinrich Hertz schien prädestiniert zu sein, der Menschheit solche neue Einsicht in viele bisher verborgene Tiefen der Natur zu erschlieſsen, aber alle diese Hoffnungen scheiterten an der tückischen Krankheit, die, langsam und unaufhaltsam vorwärts schleichend, dieses der Menschheit so kostbare Leben vernichtete und alle darauf gesetzten Hoffnungen grausam zerstörte.

Ich selbst habe diesen Schmerz tief empfunden, denn unter allen Schülern, die ich gehabt habe, durfte ich Hertz immer als denjenigen betrachten, der sich am tiefsten in meinen eigenen Kreis von wissenschaftlichen Gedanken eingelebt hatte, und auf den ich die sichersten Hoffnungen für ihre weitere Entwickelung und Bereicherung glaubte setzen zu dürfen.

Heinrich Rudolf Hertz ward am 22. Februar 1857 in Hamburg als ältester Sohn des damaligen Rechtsanwalts, späteren Senators Dr. Hertz geboren. Nachdem er bis zu seiner Konfirmation den Unterricht in einer der städtischen Bürgerschulen erhalten hatte, trat er nach einem Jahre häuslicher Vorbereitung für höher reichende Studien in die Gelehrtenschule seiner Vaterstadt, das Johanneum, ein und verlieſs dieselbe 1875 mit dem Zeugnis der Reife. Er gewann schon als Knabe die Anerkennung seiner Eltern und Lehrer wegen seines ungewöhnlich regen Pflichtgefühls. Die Art seiner Begabung zeigte sich schon früh dadurch, daſs er aus eigenem Antriebe neben seinen Schulfächern mechanische Arbeiten an der Hobel- und Drehbank betrieb, daneben Sonntags die Gewerbeschule besuchte, um sich im geometrischen Zeichnen zu üben, und sich mit den einfachsten Hilfsmitteln brauchbare Instrumente optischer und mechanischer Art zu erbauen bestrebte.

Als er nach Beendigung seines Schulkursus sich zu der Wahl eines Berufs entschlieſsen muſste, wählte er den des Ingenieurs. Es scheint, daſs die auch in späteren Jahren als ein charakteristischer Grundzug seines Wesens hervortretende Bescheidenheit ihn an seiner Begabung für theoretische Wissenschaft zweifeln lieſs, und daſs er sich bei der Beschäftigung mit seinen geliebten mechanischen Arbeiten des Erfolges sicherer fühlte, weil er deren Tragweite schon damals ausreichend verstand. Vielleicht hat ihn auch die in seiner Vaterstadt herrschende, mehr dem Praktischen zugeneigte Sinnesweise beeinfluſst. Übrigens beobachtet man nicht selten diese Art zaghafter Bescheidenheit gerade bei jungen Leuten von hervorragenden Anlagen. Sie haben wohl eine deutliche Vorstellung von den Schwierigkeiten, die vor der Erreichung des ihnen vorschwebenden hohen Zieles zu überwinden sind, und müssen ihre Kräfte erst praktisch erprobt haben, ehe sie das zu ihrem schweren Werke nötige Selbstvertrauen gewinnen. Aber auch in ihrer späteren Entwickelung pflegen reich veranlagte Naturen um so unzufriedener mit ihren eigenen Werken zu sein je höher ihre Fähigkeiten und ihre Ideale reichen. Die Begabtesten erreichen offenbar nur deshalb das Höchste, weil sie am empfindlichsten gegen jede Unvollkommenheit sind, und am unermüdlichsten an deren Beseitigung arbeiten.

Volle zwei Jahre dauerte bei Heinrich Hertz dieses Stadium des Zweifels. Dann entschloſs er sich im Herbst 1877 zur akademischen Laufbahn, da er bei reifenden Kenntnissen sich innerlich überzeugte, daſs er nur in wissenschaftlicher Arbeit dauernde Befriedigung finden würde. Der Herbst 1878 führte ihn nach Berlin, wo ich ihn zuerst als Praktikanten in dem von mir geleiteten physikalischen Laboratorium der Universität kennen lernte. Schon während er die elementaren Übungsarbeiten durchführte, sah ich, daſs ich es hier mit einem Schüler von ganz ungewöhnlicher Begabung zu thun hatte, und da mir am Ende des Sommersemesters die Aufgabe zufiel, das Thema zu einer physikalischen Preisarbeit für die Studierenden vorzuschlagen, wählte ich eine Frage aus der Elektrodynamik, in der sicheren, nachher auch bestätigten

Voraussetzung, daſs HERTZ sich dafür interessieren und sie mit Erfolg angreifen werde.

Die Gesetze der Elektrodynamik wurden damals in Deutschland noch von der Mehrzahl der Physiker aus der Hypothese von W. WEBER hergeleitet, welche die elektrischen und magnetischen Erscheinungen auf eine Modifikation der NEWTON'schen Annahme von unmittelbar und geradlinig in die Ferne wirkenden Kräfte zurückzuführen suchte. Die Abnahme der betreffenden Kräfte in der Ferne sollte demselben Gesetze wie die von NEWTON angenommene Gravitationskraft und die von COULOMB zwischen je zwei elektrisierten Massenpunkten gemessene scheinbare Fernkraft folgen, es sollte nämlich die Intensität der Kraft dem Quadrate des Abstandes der auf einander wirkenden elektrischen Quanta umgekehrt, dem Produkte der beiden Quanta aber direkt proportional sein, und zwar mit abstoſsender Wirkung zwischen gleichnamigen, anziehender zwischen ungleichnamigen Mengen. Übrigens wurde in WEBER's Hypothese die Ausbreitung dieser Kraft durch den unendlichen Raum als augenblicklich und mit unendlicher Geschwindigkeit erfolgend vorausgesetzt. Der einzige Unterschied zwischen W. WEBER's Annahme und der von COULOMB bestand darin, daſs WEBER voraussetzte, auch die Geschwindigkeit, mit der sich die beiden elektrischen Quanta einander näherten oder von einander entfernten, und auch die Beschleunigungen dieser Geschwindigkeiten könnten einen Einfluſs auf die Gröſse der Kraft zwischen den beiden elektrischen Mengen haben. Neben dieser WEBER'schen Hypothese bestanden noch eine Reihe ähnlicher anderer, die alle das Gemeinsame hatten, daſs sie die Gröſse der COULOMB'schen Kraft noch durch den Einfluſs irgend einer Komponente der Geschwindigkeit der bewegten elektrischen Quanta modifiziert ansahen. Solche Hypothesen waren von F. E. NEUMANN, von dessen Sohne C. NEUMANN, von RIEMANN, GROSSMANN, später von CLAUSIUS aufgestellt worden. Magnetisierte Molekeln galten als Achsen elektrischer Kreisströme, nach einer schon von AMPÈRE aufgefundenen Analogie ihrer nach auſsen gerichteten Wirkungen.

Diese bunte Blumenlese von Annahmen war in ihren Folgerungen sehr wenig übersichtlich und erforderte zu ihrer Ableitung verwickelte Rechnungen, Zerlegungen der Einzelkräfte in ihre verschieden gerichteten Komponenten u. s. w. So war das Gebiet der Elektrodynamik um jene Zeit zu einer unwegsamen Wüste geworden. Beobachtete Thatsachen und Folgerungen aus höchst zweifelhaften Theorien liefen ohne sichere Grenze durcheinander. In dem Streben, dieses Wirrsal übersehen zu lernen, hatte ich es übernommen, das Gebiet der Elektrodynamik, so weit ich sah, zu klären, und die unterscheidenden Folgerungen der verschiedenen Theorien aufzusuchen, um wo möglich durch passend angestellte Versuche zwischen ihnen zu entscheiden.

Es ergab sich daraus folgendes allgemeine Resultat: Alle Erscheinungen, die vollkommen geschlossene Ströme bei ihrer Zirkulation durch in sich zurücklaufende metallische Leitungskreise hervorrufen und die die gemeinsame Eigentümlichkeit haben, daſs es, während sie flieſsen, zu keiner erheblichen Veränderung der in einzelnen Teilen des Leiters angesammelten elektrischen Ladungen kommt, lieſsen sich aus allen den genannten Hypothesen gleich gut ableiten. Ihre Folgerungen stimmten sowohl mit AMPÈRE's Gesetzen der elektromagnetischen Wirkungen, wie mit den von FARADAY und LENZ entdeckten und von F. E. NEUMANN verallgemeinerten Gesetzen der induzierten elektrischen Ströme wohl überein. In unvollständig geschlossenen leitenden Kreisen dagegen führten die verschiedenen oben genannten Hypothesen zu wesentlich verschiedenen Folgerungen. Die erwähnte gute Übereinstimmung aller der verschiedenen damaligen Theorien mit den an vollständig geschlossenen Strömungen beobachteten Thatsachen erklärt sich leicht daraus, daſs man geschlossene Ströme beliebig lange Zeit und in beliebiger Stärke unterhalten kann, jedenfalls lange genug, daſs die von ihnen ausgeübten Kräfte volle Zeit haben, ihre Wirkungen sichtbar zu entfalten, daſs deshalb die thatsächlichen Wirkungen solcher Ströme und ihre Gesetze wohlbekannt und genau ermittelt waren. Daher würde jede Abweichung einer neu aufgestellten Theorie von irgend einer der bekannten Thatsachen dieses wohl durchgearbeiteten Gebietes schnell aufgefallen und zur Widerlegung der Theorie benutzt worden sein.

Dagegen sammeln sich an den offenen Enden ungeschlossener Leiter, wo sich isolierende Massen zwischen diese Enden einschieben, durch jede elektrische Bewegung längs der Länge des Leiters sogleich elektrische Ladungen an, herrührend von der gegen das Ende des Leiters hindrängenden Elektricität, die ihren Weg durch den Isolator nicht fortsetzen kann. Eine außerordentlich kurze Dauer der Strömung genügt in einem solchen Falle, um die abstoßende Kraft der am Ende angehäuften Elektricität gegen die gleichnamige nachdrängende so hoch zu steigern, daß diese in ihrer Bewegung vollständig gehemmt wird, wonach zunächst das weitere Zuströmen aufhört und nach momentaner Ruhe dann ein schnelles Zurückdrängen der angesammelten Elektricität folgt.

Es war für jeden Kenner der thatsächlichen Verhältnisse zu jener Zeit klar, daß sich das vollkommene Verständnis der Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen nur durch die genaue Untersuchung der Vorgänge bei diesen sehr schnell vorübergehenden ungeschlossenen Strömen werde gewinnen lassen. W. Weber hatte versucht, gewisse Schwierigkeiten seiner elektrodynamischen Hypothese zu beseitigen oder zu vermindern dadurch, daß er sich auf die Möglichkeit berufen, die Elektricität könne einen gewissen Grad von Beharrungsvermögen haben, wie es den schweren Körpern zukomme. Scheinbar zeigen bei Schließung und Unterbrechung jedes Stromes sich Wirkungen, die den Anschein eines Beharrungsvermögens der Elektricität vortäuschen. Diese rühren aber von der sogenannten elektrodynamischen Induktion d. h. von einer gegenseitigen Einwirkung nahe gelegener Stromleiter auf einander her und sind in ihren Gesetzen seit Faraday wohlbekannt. Wahres Beharrungsvermögen müßte nur der Masse der bewegten Elektricität proportional sein, ohne von der Lage des Leiters abzuhängen. Wenn etwas derart existierte, müßte es sich durch eine Verlangsamung der oscillierenden Bewegungen der Elektricität zu erkennen geben, wie sie nach jähen Unterbrechungen elektrischer Ströme in gut leitenden Drähten sich zeigen. Auf diesem Wege ließ sich die Bestimmung einer oberen Grenze für den Wert dieses Beharrungsvermögens erwarten, und deshalb stellte ich die Aufgabe, über die Größe von Extraströmen Versuche auszuführen. Aus diesen sollte wenigstens eine obere Grenze für die bewegte Masse festgestellt werden. Es waren schon in der Aufgabe, als zu diesen Versuchen besonders geeignet erscheinend, Extraströme aus doppeltdrähtigen Spiralen vorgeschlagen, deren Zweige in entgegengesetzter Richtung durchflossen wären. In der Lösung dieser Aufgabe bestand die erste größere Arbeit von Heinrich Hertz. Er giebt darin eine präcise Antwort auf die gestellte Frage und zeigt, daß höchstens $^1/_{20}$ bis $^1/_{30}$ des Extrastromes aus einer doppeltdrähtigen Spirale der Wirkung einer Trägheit der Elektricität zuzuschreiben sei. Diese Arbeit wurde mit dem Preise gekrönt.

Aber Hertz beschränkte sich nicht auf die vorgeschlagenen Versuche. Er erkannte nämlich, daß bei geradlinig ausgespannten Drähten die Induktionswirkungen, trotz ihrer sehr viel geringeren Stärke, viel genauer zu berechnen waren, als bei Spiralen mit vielen Windungen, weil er hier die Lagerungsverhältnisse nicht genau abmessen konnte. Daher benützte er zu weiteren Versuchen eine Leitung aus zwei Rechtecken von geraden Drähten und fand hier, daß der von dem Beharrungsvermögen herrührende Extrastrom höchstens $^1/_{250}$ von dem Werte des Induktionsstromes betrage.

Untersuchungen über den Einfluß der Centrifugalkraft in einer schnell rotierenden Platte auf die Bewegung eines sie durchfließenden elektrischen Stromes führten ihn zu einer noch viel tiefer liegenden oberen Grenze des Beharrungsvermögens der Elektricität.

Diese Versuche haben ihm offenbar die ungeheure Beweglichkeit der Elektricität eindringlich zur Anschauung gebracht und ihm geholfen, die Wege zu finden, um seine wichtigsten Entdeckungen zu machen.

In England waren durch Faraday ganz andere Vorstellungen über das Wesen der Elektricität verbreitet. Seine in schwerverständlicher abstrakter Sprache vorgetragenen Ideen brachen sich nur langsam Bahn, bis sie in CLARK MAXWELL einen berufenen Interpreten fanden. FARADAY's Hauptbestreben bei der Erklärung der elektrischen Erscheinungen ging dahin, alle Voraussetzungen, bestehend in Annahmen von nicht direkt wahrnehmbaren Vorgängen oder Substanzen, auszuschliefsen. Vor allem wies er, wie es einst zu Anfang seiner Laufbahn schon NEWTON gethan, die Hypothese von der Existenz der Fernkräfte zurück. Es schien ihm undenkbar, wie die älteren Theorien annahmen, dafs direkte und unmittelbare Wirkungen zwischen zwei räumlich getrennten Körpern bestehen sollten, ohne dafs in den zwischenliegenden Medien irgend eine Veränderung vor sich gehe. Daher suchte er zunächst nach Spuren von Veränderungen in Medien, welche zwischen elektrisierten oder zwischen magnetischen Körpern lagen. Es gelang ihm der Nachweis von Magnetismus oder Diamagnetismus bei fast allen bisher für unmagnetisch geltenden Körpern. Ebenso wies er nach, dafs unter der Einwirkung elektrischer Kräfte gut isolierende Körper eine Veränderung erlitten; diese bezeichnete er als „dielektrische Polarisation der Isolatoren“.

Es liefs sich nicht verkennen, dafs die Anziehung zwischen zwei mit Elektricität beladenen Leitern oder zwischen zwei entgegengesetzten Magnetpolen in Richtung ihrer Kraftlinien sich wesentlich verstärken mufste, wenn man dielektrisch oder magnetisch polarisierte Medien zwischen sie einschaltete. Quer gegen die Kraftlinien mufste dagegen eine Abstofsung entstehen. Nach diesen Entdeckungen konnte nicht mehr geleugnet werden, dafs ein Teil der magnetischen und elektrischen Fernwirkung durch Vermittelung der zwischenliegenden polarisierten Medien zu stande käme, ein anderer konnte freilich immerhin noch übrig bleiben, der einer direkten Fernkraft angehörte.

FARADAY und MAXWELL neigten sich der einfacheren Annahme zu, dafs überhaupt Fernkräfte nicht existierten, und MAXWELL entwickelte die mathematische Fassung dieser Hypothese, welche allerdings eine vollständige Umkehr der bisherigen Anschauungen verlangte. Danach mufste der Sitz der Veränderungen, welche die elektrischen Erscheinungen hervorbringen, nur noch in den Isolatoren gesucht werden, Entstehen und Vergehen der Polarisationen in den Isolatoren mufste der Grund der scheinbar in den Leitern stattfindenden elektrischen Bewegungen sein. Ungeschlossene Ströme gab es nicht mehr, denn die Anhäufung elektrischer Ladungen an den Enden der Leitung und die dabei in den sie trennenden Isolatoren auftretende dielektrische Polarisation stellte eine äquivalente elektrische Bewegung in den zwischenliegenden Isolatoren dar, die die Lücke des Stromes zu ergänzen geeignet schien.

Schon FARADAY hatte mit seiner sehr sicheren und tiefgehenden inneren Anschauung geometrischer und mechanischer Fragen erkannt, dafs die Verteilung der elektrischen Fernwirkungen im Raume nach diesen Annahmen genau mit der durch die alte Theorie gefundenen stimmen mufste.

MAXWELL bestätigte und erweiterte dies mit den Hilfsmitteln der mathematischen Analysis zu einer vollständigen Theorie der Elektrodynamik. Ich selbst erkannte sehr wohl das Zwingende in den von FARADAY gefundenen Thatsachen und untersuchte zunächst die Frage, ob Fernwirkungen überhaupt existierten uud in Betracht gezogen werden müssten. Der Zweifel schien mir zunächst in einem so verwickelten Gebiete der wissenschaftlichen Vorsicht gemäfs zu sein und konnte zu entscheidenden Versuchen hinleiten.

Das war der Stand der Frage, als HEINRICH HERTZ nach Beendigung seiner vorgenannten Preisarbeit in die Untersuchung eintrat.

Nach MAXWELL's Auffassung war es wesentlich entscheidend für seine Theorie, ob das Entstehen und Vergehen dielektrischer Polarisation in einem Isolator dieselben elektrodynamischen Wirkungen in der Umgebung hervorbringt, wie ein galvanischer Strom in einem Leiter. Diesen Nachweis zu erbringen erschien mir als eine ausführbare und hinreichend wichtige Arbeit, um sie zum Gegenstand einer der grofsen Preisaufgaben der Berliner Akademie zu machen.

Wie sich, an diese von den Zeitgenossen vorbereiteten Keime anknüpfend, die Entdeckungen von HERTZ weiter entwickelten, hat er selbst in der Einleitung seines interessanten Buches: Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft so anschaulich und interessant entwickelt, dafs kein Anderer dazu etwas wesentliches oder gar besseres hinzufügen könnte. Dieser Bericht ist als eine höchst aufrichtige und eingehende Darstellung einer der wichtigsten und folgenreichsten Entdeckungen von hervorragendem Werte. Leider besitzen wir nicht viel ähnliche Akten über die innere psychologische Geschichte der Wissenschaft, und wir sind dem Verfasser auch dafür den gröfsten Dank schuldig, dafs er uns so tief in das Innere seiner Gedankenwerkstatt und selbst in die Geschichte seiner zeitweiligen Irrtümer hat schauen lassen.

Nur über die Folgen dieser neuen Entdeckungen wäre noch einiges hinzuzufügen.

Die Ansichten, deren Richtigkeit HERTZ später bestätigt hat, waren allerdings, wie oben bemerkt, vor ihm durch FARADAY und MAXWELL als möglich oder selbst als höchst wahrscheinlich schon aufgestellt, aber die thatsächlichen Beweise ihrer Richtigkeit fehlten noch. HERTZ hat nun in der That diese Beweise geliefert. Nur einem ungewöhnlich aufmerksamen Beobachter, der die Tragweite jeder unvermuteten und bis dahin unbeachteten Erscheinung sogleich durchschaut, konnten die höchst unscheinbaren Phänomene auffallen, die ihn auf den richtigen Weg geleitet haben. Es wäre eine hoffnungslose Aufgabe gewesen, schnell wechselnde Ströme mit einer Dauer von Zehntausendteilen oder gar nur Millionteilen einer Sekunde am Galvanometer oder mittels irgend einer anderen damals geübten experimentellen Methode sichtbar zu machen. Denn alle endlichen Kräfte brauchen eine gewisse Zeit zur Hervorbringung endlicher Geschwindigkeiten und zur Verschiebung von Körpern von irgend welchem Gewicht, auch so geringem, wie es die Magnetnadeln unserer Galvanometer zu haben pflegen. Aber elektrische Funken können zwischen den Enden einer Leitung sichtbar werden, wenn auch nur für ein Milliontel Sekunde die elektrische Spannung an den

Enden einer solchen Leitung hoch genug gesteigert wird, dafs der Funke eine winzige Luftschicht durchbrechen kann. HERTZ war durch seine früheren Untersuchungen schon wohlbekannt mit der Regelmäfsigkeit und enormen Geschwindigkeit dieser sehr schnellen Oscillationen der Elektricität, und seine Versuche, auf diesem Wege die flüchtigsten elektrischen Bewegungen zu entdecken und sichtbar zu machen, gelangen ihm verhältnismäfsig schnell. Er fand sehr bald die Bedingungen, unter denen er die Oscillationen ungeschlossener Leitungen in solcher Regelmäfsigkeit erzielen konnte, dafs er ihre Abhängigkeit von den verschiedensten Nebenumständen ermitteln und dadurch die Gesetze ihres Auftretens und sogar den Wert ihrer Wellenlänge in der Luft und ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ermitteln konnte. Bei dieser ganzen Untersuchung mufs man immer wieder den Scharfsinn seiner Überlegungen und sein experimentelles Geschick bewundern, die sich in der glücklichsten Weise ergänzten.

HERTZ hat durch diese Arbeiten der Physik neue Anschauungen natürlicher Vorgänge von dem gröfsten Interesse gegeben. Es kann nicht mehr zweifelhaft sein, dafs die Lichtschwingungen elektrische Schwingungen in dem den Weltraum füllenden Äther sind, dafs dieser selbst die Eigenschaften eines Isolators und eines magnetisierbaren Medium hat. Die elektrischen Oscillationen im Äther bilden eine Zwischenstufe zwischen den verhältnismäfsig langsamen Bewegungen, welche etwa durch elastisch tönende Schwingungen magnetisierter Stimmgabeln dargestellt werden, und den ungeheuer schnellen Schwingungen des Lichts andererseits; aber es läfst sich nachweisen, dafs ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit, ihre Natur als Transversalschwingungen, die damit zusammenhängende Möglichkeit der Polarisationserscheinungen, der Brechung und Reflexion vollständig denselben Verhältnissen entsprechen wie bei dem Lichte und bei den Wärmestrahlen. Nur fehlt den elektrischen Wellen die Fähigkeit das Auge zu affizieren, wie diese auch den dunklen Wärmestrahlen fehlt, deren Schwingungszahl dazu nicht grofs genug ist.

Es ist gewifs eine grofse Errungenschaft, die vollständigen

Beweise dafür geliefert zu haben, daſs das Licht, eine so einfluſsreiche und so geheimniſsvolle Naturkraft, einer zweiten ebenso geheimnisvollen, und vielleicht noch beziehungsreicheren Kraft, der Elektricität, auf das engste verwandt ist. Für die theoretische Wissenschaft ist es vielleicht noch wichtiger, verstehen zu können, wie anscheinende Fernkräfte durch Übertragung der Wirkung von einer Schicht des zwischenliegenden Medium zur nächsten fortgeleitet werden. Freilich bleibt noch das Rätsel der Gravitation stehen, die wir noch nicht folgerichtig anders, denn als eine reine Fernkraft zu erklären wissen.

Heinrich Hertz hat sich durch seine Entdeckungen einen bleibenden Ruhm in der Wissenschaft gesichert. Sein Andenken wird aber nicht nur durch seine Arbeiten fortleben, auch seine liebenswürdigen Charaktereigenschaften, seine sich immer gleichbleibende Bescheidenheit, die freudige Anerkennung fremden Verdienstes, die treue Dankbarkeit, die er seinen Lehrern bewahrte, wird Allen, die ihn kannten, unvergeſslich sein. Ihm selbst war es nur um die Wahrheit zu thun, die er mit äuſserstem Ernst und mit aller Anstrengung verfolgte; nie machte sich die geringste Spur von Ruhmsucht oder persönlichem Interesse bei ihm geltend. Auch da, wo er einiges Recht gehabt hätte, Entdeckungen für sich in Anspruch zu nehmen, war er eher geneigt stillschweigend zurückzutreten. Im ganzen still und schweigsam, konnte er doch heiter an fröhlichem Freundeskreise teilnehmen und die Unterhaltung durch manches treffende Wort beleben. Er hat wohl nie einen persönlichen Gegner gehabt, obgleich er gelegentlich über nachlässig gemachte oder renomistisch auftretende Bestrebungen, die sich für Wissenschaft ausgaben, ein scharfes Urteil fällen konnte. Sein äuſserer Lebensgang verlief folgendermaſsen: Im Jahre 1880 trat er als Assistent im Physikalischen Laboratorium der Berliner Universität ein; 1883 veranlaſste ihn das preuſsische Kultusministerium, sich in Kiel mit Aussicht auf baldige Beförderung zu habilitieren. Zu Ostern 1885 wurde er als ordentlicher Professor der Physik an die technische Hochschule zu Karlsruhe berufen. Hier machte er seine hauptsächlichsten

Entdeckungen, und hier verheiratete er sich mit Fräulein Elisabeth Doll, der Tochter eines Kollegen. Schon nach zwei Jahren erhielt er einen Ruf als Ordinarius der Physik an die Universität Bonn, dem er zu Ostern 1889 folgte.

In den nun folgenden leider so kurzen Jahren seines Lebens brachten ihm seine Zeitgenossen alle äuſseren Zeichen der Ehre und Anerkennung entgegen. Im Jahre 1888 wurde ihm die Matteucci-Medaille von der italienischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1889 von der Academie des Sciences in Paris der Preis La Caze und von der K. K. Akademie zu Wien der Baumgartner-Preis, 1890 die Rumford-Medaille von der Royal Society in London, 1891 der Bressa-Preis von der Königlichen Akademie in Turin verliehen.

Die Akademien von Berlin, München, Wien, Göttingen, Rom, Turin und Bologna, sowie viele andere gelehrte Gesellschaften wählten ihn zum korrespondierenden Mitglied, und die preuſsische Regierung verlieh ihm den Kronenorden.

Er sollte sich seines steigenden Ruhmes nicht lange erfreuen. Eine qualvolle Knochenkrankheit fing an sich zu entwickeln; im November 1892 schon trat das Übel drohend auf. Eine damals ausgeführte Operation schien das Leiden für kurze Zeit zurückzudrängen. Hertz konnte seine Vorlesungen, wenn auch mit groſser Anstrengung, bis zum 7. Dezember 1893 fortsetzen; am 1. Januar 1894 erlöste ihn der Tod von seinen Leiden.

Wie sehr das Nachsinnen von Hertz auf die allgemeinsten Gesichtspunkte der Wissenschaft gerichtet war, zeigt auch wieder das letzte Denkmal seiner irdischen Thätigkeit, das vorliegende Buch über die Prinzipien der Mechanik.

Er hat versucht, darin eine konsequent durchgeführte Darstellung eines vollständig in sich zusammenhängenden Systems der Mechanik zu geben und alle einzelnen besonderen Gesetze dieser Wissenschaft aus einem einzigen Grundgesetz abzuleiten, welches logisch genommen natürlich nur als eine plausible Annahme betrachtet werden kann. Er ist dabei zu den ältesten theoretischen Anschauungen zurückgekehrt, die man eben deshalb auch wohl als die einfachsten und natürlichsten ansehen darf, und stellt die Frage, ob diese nicht ausreichen würden, alle die neuerdings abgeleiteten allgemeinen Prinzipien der Mechanik konsequent und in strengen Beweisen herleiten zu können, auch wo sie bisher nur als induktive Verallgemeinerungen aufgetreten sind.

Die erste Entwickelung der wissenschaftlichen Mechanik knüpfte sich an die Untersuchungen des Gleichgewichts und der Bewegung fester Körper, die mit einander in unmittelbarer Berührung stehen, wofür die einfachen Maschinen, Hebel, Rollen, schiefe Ebenen, Flaschenzüge die erläuternden Beispiele gaben. Das Gesetz von den virtuellen Geschwindigkeiten ist die ursprünglichste, allgemeine Lösung aller dahin gehörigen Aufgaben. Später entwickelte Galilei die Kenntnis der Trägheit und der Bewegungskraft als einer beschleunigenden Kraft, die freilich von ihm noch dargestellt wird als eine Reihe von Stöſsen. Erst Newton kam zum Begriff der Fernkraft und ihrer näheren Bestimmung durch das Prinzip der gleichen Aktion und Reaktion. Es ist bekannt, wie sehr anfangs ihm selbst und seinen Zeitgenossen der Begriff unvermittelter Fernwirkung widerstrebte.

Von da ab entwickelte sich die Mechanik weiter unter Benutzung von Newton's Begriff und Definition der Kraft, und man lernte allmählich auch die Probleme behandeln, in denen sich konservative Fernkräfte mit dem Einfluſs fester Verbindungen kombinieren, deren allgemeinste Lösung in d'Alembert's Prinzip gegeben ist. Die allgemeinen prinzipiellen Sätze der Mechanik (Gesetz von der Bewegung des Schwerpunkts, der Flächensatz für rotierende Systeme, das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte, das Prinzip der kleinsten Aktion) haben sich alle entwickelt unter der Voraussetzung von Newton's Attributen der konstanten, also auch konservativen Anziehungskräfte zwischen materiellen Punkten und der Existenz fester Verbindungen zwischen denselben. Sie sind ursprünglich nur unter der Annahme solcher gefunden und bewiesen worden. Man hat dann später durch Beobachtung gefunden, daſs die so hergeleiteten Sätze eine viel allgemeinere Geltung in der Natur in Anspruch nehmen durften, als aus ihrem Beweise folgte, und hat demnächst gefolgert, daſs gewisse allgemeinere Charaktere der Newton'schen konservativen Anziehungskräfte allen Naturkräften zukommen, vermochte aber diese Verallgemeinerung aus einer gemeinsamen Grundlage nicht abzuleiten. Hertz hat sich nun bestrebt, für die Mechanik eine solche Grundanschauung zu finden, welche fähig wäre, eine vollkommene folgerichtige Ableitung aller bisher als allgemeingültig anerkannten Gesetze der mechanischen Vorgänge zu geben, und er hat das mit groſsem Scharfsinn und unter einer sehr bewundernswürdigen Bildung eigentümlich verallgemeinerter kinematischer Begriffe durchgeführt. Als einzigen Ausgangspunkt hat er die Anschauung der ältesten mechanischen Theorien gewählt, nämlich die Vorstellung, daſs alle mechanischen Prozesse so vor sich gehen, als ob alle Verbindungen zwischen den auf einander wirkenden Teilen feste wären. Freilich muſs er die Hypothese hinzunehmen, daſs es eine groſse Anzahl unwahrnehmbarer Massen und unsichtbarer Bewegungen derselben gebe, um dadurch die Existenz der Kräfte zwischen den nicht in unmittelbarer Berührung mit einander befindlichen Körpern zu erklären. Einzelne Beispiele, die erläutern könnten, wie er sich solche hypothetischen Zwischenglieder dachte, hat er aber leider nicht mehr gegeben, und es wird offenbar noch ein groſses Aufgebot wissenschaftlicher Einbildungskraft dazu gehören, um auch nur die einfachsten Fälle physikalischer Kräfte danach zu erklären. Er scheint hierbei hauptsächlich auf die Zwischenschaltung cyklischer Systeme mit unsichtbaren Bewegungen Hoffnung gesetzt zu haben.

Englische Physiker, wie Lord Kelvin in seiner Theorie der Wirbelatome, und Maxwell in seiner Annahme eines Systems von Zellen mit rotierendem Inhalt, die er seinem Versuch einer mechanischen Erklärung der elektromagnetischen Vorgänge zu Grunde gelegt hat, haben sich offenbar durch ähnliche Erklärungen besser befriedigt gefühlt, als durch die bloſse allgemeinste Darstellung der Thatsachen und ihrer Gesetze, wie sie durch die Systeme der Differentialgleichungen der Physik gegeben wird. Ich muſs gestehen, daſs ich selbst bisher an dieser letzteren Art der Darstellung festgehalten, und mich dadurch am besten gesichert fühlte; doch möchte ich gegen den Weg, den so hervorragende Physiker, wie die drei genannten, eingeschlagen haben, keine prinzipiellen Einwendungen erheben.

Freilich werden noch grofse Schwierigkeiten zu überwinden sein bei dem Bestreben, aus den von HERTZ entwickelten Grundlagen Erklärungen für die einzelnen Abschnitte der Physik zu geben. Im ganzen Zusammenhange aber ist die Darstellung der Grundgesetze der Mechanik von HERTZ ein Buch, welches im höchsten Grade jeden Leser interessieren mufs, der an einem folgerichtigen System der Dynamik, dargelegt in höchst vollendeter und geistreicher mathematischer Fassung, Freude hat. Möglicherweise wird dieses Buch in der Zukunft noch von hohem heuristischen Wert sein als Leitfaden zur Entdeckung neuer allgemeiner Charaktere der Naturkräfte.

Vorwort des Verfassers.

Alle Physiker sind einstimmig darin, dafs es die Aufgabe der Physik sei, die Erscheinungen der Natur auf die einfachen Gesetze der Mechanik zurückzuführen. Welches aber diese einfachen Gesetze sind, darüber herrscht nicht mehr die gleiche Einstimmigkeit. Die Meisten verstehen unter jener Bezeichnung wohl schlechthin die NEWTON'schen Gesetze der Bewegung. In Wahrheit aber erhalten diese letzteren Gesetze ihren inneren Sinn und ihre physikalische Bedeutung erst durch den stillen Nebengedanken, dafs die Kräfte, von welchen sie reden, einfacher Natur sind und einfache Eigenschaften haben. Was nun aber hier noch einfach und noch zulässig sei, und was schon nicht mehr, das steht nicht fest; eben hier ist der Punkt, wo die Berufung auf allgemeine Einstimmigkeit aufhört. Daher sehen wir auch wirklich Meinungsverschiedenheiten entstehen, ob diese oder jene Annahme noch der gewöhnlichen Mechanik entspreche, oder ob nicht mehr. Dafs hier offene Fragen liegen, tritt freilich nur bei neuen Aufgaben hervor, hier aber als erstes Hindernis der Untersuchung. So ist z. B. der Versuch verfrüht, die Bewegungsgleichungen des Äthers auf die Gesetze der Mechanik zurückführen zu wollen, solange man sich nicht eindeutig darüber verständigt hat, was man mit diesem Namen bezeichnet haben will.

Die Aufgabe, deren Lösung die folgende Untersuchung anstrebt, ist diese, die hier vorhandene Lücke auszufüllen und eine vollkommen bestimmte Zusammenstellung der Gesetze der Mechanik anzugeben, welche mit dem Stande unserer heutigen Kenntnis verträglich ist, welche nämlich in Beziehung auf den Umfang dieser Kenntnis weder zu eng ist, noch zu weit. Die Zusammenstellung soll nicht zu eng sein, das heifst, es soll keine natürliche Bewegung geben, welche ihren Forderungen nicht gehorcht. Die Zusammenstellung aber soll auch nicht zu weit sein, das heifst, sie soll auch keine Bewegung zulassen, deren Vorkommen in der Natur schon nach dem Stande unserer heutigen Erfahrung ausgeschlossen ist. Ob die Zusammenstellung, welche ich als Lösung dieser Aufgabe im Folgenden gebe, die einzig mögliche ist, oder ob es andere, vielleicht bessere mögliche giebt, bleibt dahingestellt. Dafs aber die gegebene Zusammenstellung in jeder Hinsicht eine mögliche ist, beweise ich dadurch, dafs ich ihre Folgen entwickele, und zeige, dafs bei voller Entfaltung sie den Inhalt der gewöhnlichen Mechanik aufzunehmen vermag, sofern sich der letztere auf die wirklichen Kräfte und Zusammenhänge der Natur beschränkt und sich nicht als Spielplatz mathematischer Übungsarbeit betrachtet.

Durch diese Entwickelung ist freilich aus einer theoretischen Abhandlung ein Buch geworden, welches eine vollständige Übersicht aller wichtigeren allgemeinen Sätze der Dynamik enthält und welches sogar als ein systematisches Lehrbuch dieser Wissenschaft gelten kann. Zu einer ersten Einführung ist dasselbe freilich aus verschiedenen Gründen nicht wohl geeignet; mit umsomehr Überzeugung aber bietet es sich Demjenigen als Führer an, welcher den Inhalt der Mechanik aus der gewöhnlichen Darstellung schon einigermafsen kennt. Einem Solchen hofft es einen Standpunkt zeigen zu können, von welchem aus die physikalische Bedeutung, die innere Verwandtschaft und die Tragweite der mechanischen Prinzipien in durchsichtiger Klarheit vor Augen liegt; von welchem aus auch der Begriff der Kraft wie die übrigen mechanischen Grundbegriffe des letzten Restes von Dunkelheit entkleidet erscheinen.

Die Aufgabe, welche sich die vorliegende Untersuchung stellt, ist in verdeckter Weise bereits behandelt und mit einer möglichen Lösung beantwortet durch von Helmholtz in seiner Arbeit über das Prinzip der kleinsten Wirkung und in der damit zusammenhängenden Arbeit über cyklische Systeme[1]). In der ersteren wird die These aufgestellt und vertreten, dafs die Mechanik auch dann noch die sämtlichen Vorgänge der Natur zu umfassen vermag, wenn man nicht nur die Newton'schen Grundlagen als allgemeingültig betrachtet, sondern auch die besonderen Voraussetzungen, welche neben jenen dem Hamilton'schen Prinzip zu Grunde liegen. In der zweitgenannten Arbeit wird zum ersten Male in allgemeiner Weise Sinn und Bedeutung der verborgenen Bewegungen behandelt. Von jenen Arbeiten ist meine eigene Untersuchung im Ganzen und in ihren Teilen wesentlich beeinflufst und abhängig; der Abschnitt über cyklische Systeme ist ihnen fast unmittelbar entnommen. Von der Form abgesehen, bestehen die Abweichungen meiner eigenen Lösung hauptsächlich in zwei Punkten: Einmal suche ich dasjenige von vornherein von den Elementen der Mechanik fern zu halten, was von Helmholtz durch nachträgliche Einschränkung aus der schon entwickelten Mechanik wieder entfernt. Zweitens entferne ich aus der Mechanik in gewissem Sinne weniger, indem ich mich nicht auf das Hamilton'sche Prinzip, noch auf ein anderes Integralprinzip stütze. Die Gründe hierfür und die Folgen hiervon werden aus der Arbeit selbst erhellen.

Ähnliche Gedankenreihen, wie in den von Helmholtz'schen Arbeiten sind angesponnen in der bedeutenden Abhandlung

[1]) H. von Helmholtz, Über die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **100**, p. 137—166, 213—222, 1887; Prinzipien der Statik monocyklischer Systeme, ebenda, **97**, p. 111—140, 317—336, 1884.

von J. J. THOMSON über die physikalischen Anwendungen der Dynamik[1]). Ebenfalls entwickelt hier der Verfasser die Folgen einer Dynamik, welche neben den NEWTON'schen Gesetzen der Bewegung noch weitere, besondere, nicht ausdrücklich ausgesprochene Voraussetzungen zur Grundlage hat. Auch an diese Abhandlung also hätte ich mich anlehnen können; thatsächlich war meine eigene Untersuchung schon ziemlich fortgeschritten, als ich jene genauer kennen lernte. Das gleiche darf ich von den in mathematischer Hinsicht verwandten, aber weit älteren Arbeiten von BELTRAMI[2]) und LIPSCHITZ[3]) sagen; doch konnte ich noch reiche Anregung aus denselben schöpfen, ebenso aus der neueren Darstellung, welche DARBOUX[4]) von jenen Arbeiten mit eigenen Zusätzen gegeben hat. Manche mathematische Abhandlungen, welche ich hätte berücksichtigen können und sollen, mögen mir entgangen sein. In allgemeiner Hinsicht verdanke ich sehr viel dem schönen Buche über die Entwickelung der Mechanik von MACH[5]). Es ist selbstverständlich, daſs ich die bekannteren Lehrbücher der allgemeinen Mechanik zu Rate zog, nicht am wenigsten die umfassende Darstellung der Dynamik in dem Lehrbuche von THOMSON und TAIT[6]). Wertvoll war mir auch das Heft einer Vorlesung über analytische Dynamik von BORCHARDT, welches ich im Winter 1878/79 nachschrieb. Hiermit habe ich die von mir

---

[1]) J. J. THOMSON, On some Applications of Dynamical Principles to Physical Phenomena, Philosophical Transactions **176**, II, p. 307—342, 1885.

[2]) BELTRAMI, Sulla teoria generale dei parametri differenziali; Memorie della Reale Accademia di Bologna, 25. Febbrajo 1869.

[3]) R. LIPSCHITZ, Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist. Journal für die reine und angewandte Mathematik, **74**, p. 116—149, 1872. Bemerkungen zu dem Prinzip des kleinsten Zwanges. Ebenda, **82**, p. 316—342, 1877.

[4]) G. DARBOUX, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Livre V, Chapitres 6, 7, 8. Paris 1889.

[5]) E. MACH, Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt. Leipzig 1883.

[6]) W. THOMSON und P. G. TAIT, Handbuch der theoretischen Physik, deutsche Ausgabe von HELMHOLTZ und WERTHEIM, Braunschweig 1871.

benutzten Quellen genannt; im Texte werde ich nur soviel citieren, als die Sache selbst es verlangt. Im einzelnen habe ich ja auch nichts vorzutragen, das neu wäre und nicht aus vielen Büchern genommen werden könnte. Was, wie ich hoffe, neu ist, und worauf ich einzig Wert lege, ist die Anordnung und Zusammenstellung des Ganzen, also die logische, oder, wenn man will, die philosophische Seite des Gegenstandes. Meine Arbeit hat ihr Ziel erreicht oder verfehlt, jenachdem in dieser Richtung etwas gewonnen ist oder nicht.

Inhalt.

Einleitung.

Es ist die nächste und in gewissem Sinne wichtigste Aufgabe unserer bewufsten Naturerkenntnis, dafs sie uns befähige, zukünftige Erfahrungen vorauszusehen, um nach dieser Voraussicht unser gegenwärtiges Handeln einrichten zu können. Als Grundlage für die Lösung jener Aufgabe der Erkenntnis benutzen wir unter allen Umständen vorangegangene Erfahrungen, gewonnen durch zufällige Beobachtungen oder durch absichtlichen Versuch. Das Verfahren aber, dessen wir uns zur Ableitung des Zukünftigen aus dem Vergangenen und damit zur Erlangung der erstrebten Voraussicht stets bedienen, ist dieses: Wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äufseren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, dafs die denknotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände. Damit diese Forderung überhaupt erfüllbar sei, müssen gewisse Übereinstimmungen vorhanden sein zwischen der Natur und unserem Geiste. Die Erfahrung lehrt uns, dafs die Forderung erfüllbar ist und dafs also solche Übereinstimmungen in der That bestehen. Ist es uns einmal geglückt, aus der angesammelten bisherigen Erfahrung Bilder von der verlangten Beschaffenheit abzuleiten, so können wir an ihnen, wie an Modellen, in kurzer Zeit die Folgen entwickeln, welche in der äufseren Welt erst in längerer Zeit oder als Folgen unseres eigenen Eingreifens auftreten werden; wir vermögen so den Thatsachen vorauszueilen und können nach der gewonnenen Einsicht unsere gegenwärtigen Entschlüsse richten. — Die Bilder, von welchen wir reden, sind unsere Vorstellungen von den Dingen; sie haben mit den Dingen die eine wesentliche Übereinstimmung, welche in der Erfüllung der genannten Forderung liegt, aber es ist für ihren Zweck nicht nötig, dafs sie irgend eine weitere Übereinstimmung mit den Dingen haben. In der That wissen wir auch nicht, und haben auch kein Mittel zu erfahren, ob unsere Vorstellungen von den Dingen mit jenen in irgend etwas anderem übereinstimmen, als allein in eben jener einen fundamentalen Beziehung.

Eindeutig sind die Bilder, welche wir uns von den Dingen machen wollen, noch nicht bestimmt durch die Forderung, dafs die Folgen der Bilder wieder die Bilder der Folgen seien. Verschiedene Bilder derselben Gegenstände sind möglich und diese Bilder können sich nach verschiedenen Richtungen unterscheiden. Als unzulässig sollten wir von vornherein solche Bilder bezeichnen, welche schon einen Widerspruch gegen die Gesetze unseres Denkens in sich tragen und wir fordern also zunächst, dafs alle unsere Bilder logisch zulässige oder kurz zulässige seien. Unrichtig nennen wir zulässige Bilder dann, wenn ihre wesentlichen Beziehungen den Beziehungen der äufseren Dinge widersprechen, das heifst wenn sie jener ersten Grundforderung nicht genügen. Wir verlangen demnach zweitens, dafs unsere Bilder richtig seien. Aber zwei zulässige und richtige Bilder derselben äufseren Gegenstände können sich noch unterscheiden nach der Zweckmäfsigkeit. Von zwei Bildern desselben Gegenstandes wird dasjenige das zweckmäfsigere sein, welches mehr wesentliche Beziehungen des Gegenstandes wiederspiegelt als das andere; welches, wie wir sagen wollen, das deutlichere ist. Bei gleicher Deutlichkeit wird von zwei Bildern dasjenige zweckmäfsiger sein, welches neben den wesentlichen Zügen die geringere Zahl überflüssiger oder leerer Beziehungen enthält, welches also das einfachere ist. Ganz werden sich leere Beziehungen nicht vermeiden lassen, denn sie kommen den Bildern schon deshalb zu, weil es eben nur Bilder und zwar Bilder unseres besonderen Geistes sind und also von den Eigenschaften seiner Abbildungsweise mitbestimmt sein müssen.

Wir haben bisher die Anforderungen aufgezählt, welche wir an die Bilder selbst stellen; etwas ganz anderes sind die Anforderungen, welche wir an eine wissenschaftliche Darlegung solcher Bilder stellen. Wir verlangen von der letzteren, dafs sie uns klar zum Bewufstsein führe, welche Eigenschaften den Bildern zugelegt seien um der Zulässigkeit willen, welche um der Richtigkeit willen, welche um der Zweckmäfsigkeit willen. Nur so gewinnen wir die Möglichkeit an unsern Bildern zu ändern, zu bessern. Was den Bildern beigelegt wurde um der Zweckmäfsigkeit willen, ist enthalten in den Bezeichnungen, Definitionen, Abkürzungen, kurzum in dem, was wir nach Willkür hinzuthun oder wegnehmen können. Was den Bildern zukommt um ihrer Richtigkeit willen, ist enthalten in den Erfahrungsthatsachen, welche beim Aufbau der Bilder gedient haben. Was den Bildern zukommt, damit sie zulässig seien, ist gegeben durch die Eigenschaften unseres Geistes. Ob ein Bild zulässig ist oder nicht, können wir eindeutig mit ja und nein entscheiden und zwar mit Gültigkeit unserer Entscheidung für alle Zeiten. Ob ein Bild richtig ist oder nicht, kann ebenfalls eindeutig mit ja und nein entschieden werden, aber nur nach dem Stande unserer gegenwärtigen Erfahrung und unter Zulassung der Berufung an spätere reifere Erfahrung. Ob ein Bild zweckmäfsig sei oder nicht, dafür giebt es überhaupt keine eindeutige Entscheidung, sondern es können Meinungsverschiedenheiten bestehen. Das eine Bild kann nach der einen, das andere nach der andern Richtung Vorteile bieten, und nur durch allmähliches Prüfen vieler Bilder werden im Laufe der Zeit schliefslich die zweckmäfsigsten gewonnen.

Dies sind die Gesichtspunkte, nach welchen man, wie mir scheint, den Wert physikalischer Theorieen und den Wert der Darstellung physikalischer Theorieen zu beurteilen hat. Jedenfalls sind es die Gesichtspunkte, von welchen aus wir jetzt die Darstellungen betrachten wollen, welche man von den Prinzipien der Mechanik gegeben hat. Dabei ist es freilich zunächst nötig, bestimmt zu erklären, was wir mit diesem Namen bezeichnen.

In strengem Sinne verstand man ursprünglich in der Mechanik unter einem Prinzip jede Aussage, welche man nicht wieder auf andere Sätze der Mechanik selbst zurückführte, sondern welche man als unmittelbares Ergebnis anderer Quellen der Erkenntnis angesehen wissen wollte. Es konnte infolge der geschichtlichen Entwickelung nicht ausbleiben, daſs Sätze, welche unter besonderen Voraussetzungen einmal mit Recht als Prinzipien bezeichnet wurden, später diesen Namen, wiewohl mit Unrecht, beibehielten. Seit Lagrange ist die Bemerkung häufig wiederholt worden, daſs die Prinzipien des Schwerpunktes und der Flächen im Grunde nur Lehrsätze allgemeinen Inhalts seien. Man kann aber mit gleichem Rechte bemerken, daſs auch die übrigen sogenannten Prinzipien nicht unabhängig von einander diesen Namen führen können, sondern daſs jedes von ihnen auf den Rang einer Folgerung oder eines Lehrsatzes herabsteigen muſs, so bald die Darstellung der Mechanik auf eines oder mehrere der übrigen gegründet wird. Der Begriff des mechanischen Prinzipes ist demnach kein scharf festgehaltener. Wir wollen deshalb zwar jenen Sätzen in Einzelaussagen ihre herkömmliche Benennung belassen; wenn wir aber schlechthin und allgemein von den Prinzipien der Mechanik reden, so wollen wir darunter nicht jene einzelnen konkreten Sätze verstanden wissen, sondern jede übrigens beliebige Auswahl unter ihnen und unter ähnlichen Sätzen, welche der Bedingung genügt, daſs sich aus ihr ohne weitere Berufung auf die Erfahrung die gesamte Mechanik rein deduktiv entwickeln läſst. Bei dieser Bezeichnungsweise stellen die Grundbegriffe der Mechanik zusammen mit den sie verkettenden Prinzipien das einfachste Bild dar, welches die Physik von den Dingen der sinnlichen Welt und den Vorgängen in ihr herzustellen vermag. Und da wir von den Prinzipien der Mechanik durch verschiedene Auswahl der Sätze, welche wir zu Grunde legen, verschiedene Darstellungen geben können, so erhalten

wir verschiedene solche Bilder der Dinge, welche Bilder wir prüfen und mit einander vergleichen können in Bezug auf ihre Zulässigkeit, ihre Richtigkeit und ihre Zweckmäſsigkeit.

1.

Ein erstes Bild liefert uns die gewöhnliche Darstellung der Mechanik. Wir verstehen hierunter die in den Einzelheiten abweichende, in der Hauptsache übereinstimmende Darstellung fast aller Lehrbücher, welche das Ganze der Mechanik behandeln, fast aller Vorlesungen, welche sich über den gesamten Inhalt dieser Wissenschaft verbreiten. Diese Darstellung bildet den königlichen Weg und die groſse Heerstraſse, auf welcher die Schar der Schüler in das Innere der Mechanik eingeführt wird; sie folgt genau dem Gang der historischen Entwickelung und der Reihenfolge der Entdeckungen; ihre Hauptstationen sind gekennzeichnet durch die Namen eines Archimedes, Galilei, Newton, Lagrange. Als gegebene Vorstellungen legt diese Darstellung zu Grunde die Begriffe des Raumes, der Zeit, der Kraft und der Masse. Die Kraft ist dabei eingeführt als die vor der Bewegung und unabhängig von der Bewegung bestehende Ursache der Bewegung. Zuerst treten auf nur Raum und Kraft für sich, und ihre Beziehungen werden in der Statik behandelt. Die reine Bewegungslehre oder Kinematik begnügt sich, die beiden Begriffe Raum und Zeit in Verbindung zu setzen. Die Galilei'sche Vorstellung von der Trägheit liefert einen Zusammenhang zwischen Raum, Zeit und Masse allein. In den Newton'schen Gesetzen der Bewegung treten zuerst alle vier Grundbegriffe neben einander in Verknüpfung auf. Diese Gesetze bilden die eigentliche Wurzel der weiteren Entwickelung, aber sie geben noch keinen allgemeinen Ausdruck für den Einfluſs starrer räumlicher Verbindungen; hier erweitert das d'Alembert'sche Prinzip das allgemeine Ergebnis der Statik auf den Fall der Bewegung und schliefst als letztes den Reigen der nicht aus einander ableitbaren, unabhängigen Grundaussagen. Alles weitere dagegen ist deduktive Ableitung. In der That sind die aufgezählten Begriffe und Gesetze nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, um den gesamten Inhalt der Mechanik aus ihnen mit Denknotwendigkeit zu entwickeln und alle übrigen sogenannten Prinzipien als Lehrsätze und Folgerungen aus besonderen Voraussetzungen erscheinen zu lassen. Jene aufgezählten Begriffe und Gesetze geben uns also ein erstes System der Prinzipien der Mechanik in unserer Ausdrucksweise; damit zugleich also auch das erste allgemeine Bild von den natürlichen Bewegungen der Körperwelt.

Es erscheint nun von vornherein sehr fernliegend, dafs man an der logischen Zulässigkeit dieses Bildes auch nur zweifeln könne. Es erscheint fast unmöglich, dafs man daran denke, logische Unvollkommenheiten aufzufinden in einem Systeme, welches von unzähligen und von den besten Köpfen immer und immer wieder durchdacht worden ist. Aber ehe man hierauf hin die Untersuchung abbricht, wird man fragen müssen, ob auch alle und ob die besten Köpfe immer von dem Systeme befriedigt gewesen sind. In jedem Falle mufs es billig gleich im Anfang Wunder nehmen, wie leicht es ist, Betrachtungen an die Grundgesetze anzuknüpfen, welche sich ganz in der üblichen Redeweise der Mechanik bewegen und welche doch das klare Denken unzweifelhaft in Verlegenheit setzen. Versuchen wir dies zunächst an einem Beispiele zu zeigen. Wir schwingen einen Stein an einer Schnur im Kreise herum; wir üben dabei bewufstermafsen eine Kraft auf den Stein aus; diese Kraft lenkt den Stein beständig von der geraden Bahn ab, und wenn wir diese Kraft, die Mafse des Steines und die Länge der Schnur verändern, so finden wir, dafs die Bewegung des Steines in der That stets in Übereinstimmung mit dem zweiten Newton'schen Gesetze erfolgt. Nun aber verlangt das dritte Gesetz eine Gegenkraft zu der Kraft, welche von unserer Hand auf den Stein ausgeübt wird. Auf die Frage nach dieser Gegenkraft lautet die jedem geläufige Antwort: es wirke der Stein auf die Hand zurück infolge der

Schwungkraft, und diese Schwungkraft sei der von uns ausgeübten Kraft in der That genau entgegengesetzt gleich. Ist nun diese Ausdrucksweise zulässig? Ist das was wir jetzt Schwungkraft oder Centrifugalkraft nennen, etwas anderes als die Trägheit des Steines? Dürfen wir, ohne die Klarheit unserer Vorstellungen zu zerstören, die Wirkung der Trägheit doppelt in Rechnung stellen, nämlich einmal als Mafse, zweitens als Kraft? In unseren Bewegungsgesetzen war die Kraft die vor der Bewegung vorhandene Ursache der Bewegung. Dürfen wir, ohne unsere Begriffe zu verwirren, jetzt auf einmal von Kräften reden, welche erst durch die Bewegung entstehen, welche eine Folge der Bewegung sind? Dürfen wir uns den Anschein geben, als hätten wir über diese neue Art von Kräften in unseren Gesetzen schon etwas ausgesagt, als könnten wir ihnen mit dem Namen „Kraft" auch die Eigenschaften der Kräfte verleihen? Alle diese Fragen sind offenbar zu verneinen, es bleibt uns nichts übrig als zu erläutern: die Bezeichnung der Schwungkraft als einer Kraft sei eine uneigentliche, ihr Name sei wie der Name der lebendigen Kraft als eine historische Überlieferung hinzunehmen und die Beibehaltung dieses Namens sei aus Nützlichkeitsgründen mehr zu entschuldigen als zu rechtfertigen. Aber wo bleiben alsdann die Ansprüche des dritten Gesetzes, welches eine Kraft fordert, die der tote Stein auf die Hand ausübt und welches durch eine wirkliche Kraft, nicht durch einen blofsen Namen befriedigt sein will?

Ich glaube nicht, dafs diese Schwierigkeiten künstlich oder mutwillig heraufbeschworen sind; sie drängen sich uns von selbst auf. Sollte sich nicht ihr Ursprung bis in die Grundgesetze zurückverfolgen lassen? Die Kraft, von welcher die Definition und die ersten beiden Gesetze reden, wirkt auf einen Körper in einseitig bestimmter Richtung. Der Sinn des dritten Gesetzes ist, dafs die Kräfte stets zwei Körper verbinden und ebenso gut vom ersten zum zweiten, wie vom zweiten zum ersten gerichtet sind. Die Vorstellung der Kraft, welche dieses Gesetz und die Vorstellung, welche jene Gesetze voraussetzen und in uns erwecken, scheinen mir um ein Geringes verschieden, dieser geringe Unterschied aber reicht vielleicht aus, um die logische Trübung zu erzeugen, deren Folgen in unserem Beispiele zum Ausbruch kamen. Doch haben wir nicht nötig, auf die Untersuchung weiterer Beispiele einzugehen. Wir können allgemeine Wahrnehmungen als Zeugen für die Berechtigung unserer Zweifel aufrufen. Eine erste solche Wahrnehmung scheint mir die Erfahrung zu bilden, daſs es sehr schwer ist, gerade die Einleitung in die Mechanik denkenden Zuhörern vorzutragen ohne einige Verlegenheit, ohne das Gefühl, sich hier und da entschuldigen zu müssen, ohne den Wunsch, recht schnell über die Anfänge hinwegzugelangen zu Beispielen, welche für sich selbst reden. Ich meine, NEWTON selbst müsse diese Verlegenheit empfunden haben, wenn er die Masse etwas gewaltthätig definiert als Produkt aus Volumen und Dichtigkeit. Ich meine, die Herren THOMSON und TAIT müssen ihm nachempfunden haben, wenn sie anmerken, dies sei eigentlich mehr eine Definition der Dichtigkeit als der Masse, und sich gleichwohl mit derselben als einzigen Definition der Masse begnügen. Auch LAGRANGE, denke ich, müsse jene Verlegenheit und den Wunsch, um jeden Preis vorwärtszukommen, verspürt haben, als er seine Mechanik kurzerhand mit der Erklärung einleitete, eine Kraft sei eine Ursache, welche einem Körper eine Bewegung erteilt „oder zu erteilen strebt“; gewiſs nicht ohne die logische Härte einer solchen Überbestimmung zu empfinden. Ein zweites Zeugnis nehme ich aus der Thatsache, dass wir schon für die elementaren Sätze der Statik, für den Satz vom Parallelogramm der Kräfte, den Satz der virtuellen Geschwindigkeiten, u. s. w. zahlreiche Beweise besitzen, welche von ausgezeichneten Mathematikern herrühren, welche den Anspruch machen, streng zu sein und welche doch wieder nach dem Urteil anderer hervorragender Mathematiker diesem Anspruch keineswegs genügen. In einer logisch vollendeten Wissenschaft, in der reinen Mathematik, ist eine Meinungsverschiedenheit in solcher Frage schlechterdings undenkbar. Als ein sehr belastendes Zeugnis aber erscheinen mir auch die über Gebühr oft gehörten Behauptungen: das Wesen der Kraft sei noch rätselhaft, es sei eine Hauptaufgabe der Physik, das Wesen der Kraft zu erforschen, und ähnliche Aussagen mehr. In gleichem Sinne bestürmt man den Elektriker immer wieder nach dem Wesen

der Elektricität. Warum fragt nun niemand in diesem Sinne nach dem Wesen des Goldes oder nach dem Wesen der Geschwindigkeit? Ist uns das Wesen des Goldes bekannter als das der Elektricität, oder das Wesen der Geschwindigkeit bekannter als das der Kraft? Können wir das Wesen irgend eines Dinges durch unsere Vorstellungen, durch unsere Worte erschöpfend wiedergeben? Gewiſs nicht. Ich meine, der Unterschied sei dieser: Mit den Zeichen „Geschwindigkeit“ und „Gold“ verbinden wir eine groſse Zahl von Beziehungen zu anderen Zeichen, und zwischen allen diesen Beziehungen finden sich keine uns verletzenden Widersprüche. Das genügt uns und wir fragen nicht weiter. Auf die Zeichen „Kraft“ und „Elektricität“ aber hat man mehr Beziehungen gehäuft, als sich völlig mit einander vertragen; dies fühlen wir dunkel, verlangen nach Aufklärung und äuſsern unsern unklaren Wunsch in der unklaren Frage nach dem Wesen von Kraft und Elektricität. Aber offenbar irrt die Frage in Bezug auf die Antwort, welche sie erwartet. Nicht durch die Erkenntnis von neuen und mehreren Beziehungen und Verknüpfungen kann sie befriedigt werden, sondern durch die Entfernung der Widersprüche unter den vorhandenen, vielleicht also durch Verminderung der vorhandenen Beziehungen. Sind diese schmerzenden Widersprüche entfernt, so ist zwar nicht die Frage nach dem Wesen beantwortet, aber der nicht mehr gequälte Geist hört auf, die für ihn unberechtigte Frage zu stellen.

Wir haben in diesen Ausführungen die Zulässigkeit des betrachteten Bildes so stark verdächtigt, daſs es scheinen muſs, als sei es unsere Absicht, diese Zulässigkeit zu bestreiten und schlieſslich zu verneinen. Soweit geht indes unsere Absicht und unsere Überzeugung nicht. Mögen die logischen Unbestimmtheiten, welche uns um die Sicherheit der Grundlagen besorgt machten, auch wirklich bestehen, sie haben sicherlich keinen einzigen der zahllosen Erfolge verhindert, welche die Mechanik in ihrer Anwendung auf die Thatsachen errungen hat. Sie können also auch nicht bestehen in Widersprüchen zwischen den wesentlichen Zügen unseres Bildes, also nicht in Widersprüchen zwischen denjenigen Beziehungen der Mechanik, welche Beziehungen der Dinge entsprechen. Sie müssen sich vielmehr beschränken auf die unwesentlichen Züge, auf alles dasjenige, was wir selbst nach Willkür dem von der Natur gegebenen wesentlichen Inhalte hinzugedichtet haben. Dann aber lassen sich jene Verlegenheiten auch vermeiden. Vielleicht treffen unsere Einwände überhaupt nicht den Inhalt des entworfenen Bildes, sondern nur die Form der Darstellung dieses Inhalts. Wir sind gewiss nicht zu streng, wenn wir meinen, diese Darstellung sei noch niemals zur wissenschaftlichen Vollendung durchgedrungen, es fehle ihr noch durchaus die hinreichend scharfe Unterscheidung dessen, was in dem entworfenen Bilde aus Denknotwendigkeit, was aus der Erfahrung, was aus unserer Willkür stammt. In diesem Urteile treffen wir zusammen mit hervorragenden Physikern, welche sich mit diesen Fragen beschäftigt und über dieselben geäufsert haben,[1]) freilich ohne dafs von einer Übereinstimmung aller gesprochen werden könnte.[2]) Jenes Urteil findet ferner eine Bestätigung in der wachsenden Sorgfalt, welche in den neueren Lehrbüchern der Mechanik der logischen Zergliederung der Elemente gewidmet wird.[3]) In Übereinstimmung mit den Verfassern dieser Lehrbücher und mit jenen Physikern sind wir selbst der Überzeugung, dafs die vorhandenen Lücken nur Lücken der Form sind, und durch geeignete Anordnung der Definitionen, Bezeichnungen und weiter durch vorsichtige Ausdrucksweise jede Unklarheit und Unsicherheit vermieden werden kann. In diesem Sinne geben wir, wie Jedermann, die Zulässigkeit des Inhalts der Mechanik zu. Es erfordert aber die Würde und Grösse des Gegenstandes durchaus, dafs die logische Reinheit nicht nur mit gutem Willen zugegeben, sondern dafs sie durch eine vollendete Darstellung auch so erwiesen werde, dafs es nicht möglich sei, sie auch nur zu verdächtigen.

1) Siehe E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung. Leipzig 1883, S. 228. Siehe ferner in der „Nature" von 1893 eine neuerdings von Herrn O. Lodge angeregte und im Schofse der Physical Society in London fortgeführte Diskussion über die Grundgesetze der Mechanik.

2) Siehe Thomson & Tait, Theoretische Physik, § 205 ff.

3) Siehe E. Budde, Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme, Berlin 1890, S. 111—138. Die daselbst gegebene Darstellung giebt zugleich ein deutliches Bild von der Gröfse der Schwierigkeiten, welchen die widerspruchsfreie Anwendung der Elemente begegnet.

Leichter und der allgemeinen Zustimmung sicherer können wir das Urteil fällen über die Richtigkeit des von uns betrachteten Bildes. Niemand wird widersprechen, wenn wir versichern, dafs diese Richtigkeit nach dem ganzen Umfange unserer bisherigen Erfahrung eine vollkommene sei, dafs alle diejenigen Züge unseres Bildes, welche überhaupt den Anspruch machen, beobachtbare Beziehungen der Dinge wiederzugeben, solchen Beziehungen auch wirklich und richtig entsprechen. Wir beschränken allerdings unsere Zuversicht auf den Inhalt der bisherigen Erfahrung; was zukünftige Erfahrungen anlangt, so werden wir noch Gelegenheit haben, auf die Frage nach der Richtigkeit zurückzukommen. Manchem wird freilich diese Vorsicht nicht nur übertrieben, sondern geradezu sinnwidrig dünken; in der Meinung vieler Physiker erscheint es als einfach undenkbar, dafs auch die späteste Erfahrung an den feststehenden Grundsätzen der Mechanik noch etwas zu ändern finden könne. Und doch kann das was aus Erfahrung stammt, durch Erfahrung wieder vernichtet werden; jene allzugünstige Meinung von den Grundgesetzen kann also offenbar nur deshalb entstehen, weil in ihnen die Elemente der Erfahrung einigermafsen versteckt und mit den unabänderlichen denknotwendigen Elementen verschmolzen sind. Die logische Unbestimmtheit der Darstellung, welche wir vorher schlechtweg rügten, bietet also auch einen gewissen Vorteil; sie giebt den Fundamenten den Schein der Unabänderlichkeit; es war vielleicht in den Anfängen der Wissenschaft weise, sie einzuführen und eine zeitlang bestehen zu lassen. Man stellte die Richtigkeit des Bildes auf alle Fälle sicher dadurch, dafs man sich vorbehielt im Notfalle aus einer Erfahrungsthatsache eine Definition zu machen oder umgekehrt. In einer vollendeten Wissenschaft aber ist solches Tasten, ein solcher Schein der Sicherheit nicht erlaubt; in der gereiften Erkenntnis ist die logische Reinheit in erster Linie zu berücksichtigen; nur logisch reine Bilder sind zu prüfen auf ihre Richtigkeit, nur richtige Bilder zu vergleichen nach ihrer Zweckmäfsigkeit. Das dringende Bedürfnis verfährt oft umgekehrt: Die Bilder werden erfunden passend für einen beabsichtigten Zweck, dann geprüft auf ihre Richtigkeit, endlich und zuletzt gesäubert von inneren Widersprüchen.

Ist diese letzte Bemerkung nur einigermaſsen zutreffend, so erscheint es uns nur natürlich, daſs das betrachtete System der Mechanik höchste Zweckmäſsigkeit aufweist, sobald es angewandt wird auf die einfachen Erscheinungen, für welche es zuerst erdacht wurde, also vor allem auf die Wirkung der Schwerkraft und die Aufgaben der praktischen Mechanik. Wir dürfen uns aber hierbei nicht beruhigen, wir haben uns zu erinnern, daſs wir hier nicht die Bedürfnisse des täglichen Lebens und nicht den Standpunkt vergangener Zeiten vertreten wollen, daſs wir vielmehr den gesamten Umfang der heutigen physikalischen Erkenntnis ins Auge fassen und daſs wir überdies von der Zweckmäſsigkeit in einem besonderen Sinne reden, welchen wir im Eingange genau bestimmt haben. Darnach haben wir die Pflicht, zunächst zu fragen: Ist das entworfene Bild vollkommen deutlich? Enthält es alle Züge, welche die heutige Erkenntnis an den natürlichen Bewegungen zu unterscheiden vermag? Diese Frage beantworten wir nun entschieden mit nein. Nicht alle Bewegungen, welche die Grundgesetze zulassen und welche die Mechanik als mathematische Übungsaufgaben behandelt, kommen in der Natur vor; wir können von den natürlichen Bewegungen, Kräften, festen Verbindungen mehr aussagen, als es die angenommenen Grundgesetze thun. Seit der Mitte dieses Jahrhunderts sind wir fest überzeugt, daſs keine Kräfte in der Natur wirklich vorkommen, welche eine Verletzung des Prinzips von der Erhaltung der Energie bedingen würden. Weit älter ist die Überzeugung, daſs nur solche Kräfte vorkommen, welche sich darstellen lassen als Summe von Wechselwirkungen zwischen unendlich kleinen Elementen der Materie. Auch diese Elementarkräfte sind nicht frei. Als allgemein zugegebene Eigenschaften derselben können wir anführen, dass sie unabhängig sind vom absoluten Werte der Zeit und vom absoluten Orte im Raume. Andere Eigenschaften sind umstritten. Man hat bald vermutet, bald in Frage gestellt, ob die Elementarkräfte nur bestehen können in Anziehungen und Abstoſsungen nach der Verbindungslinie der wirkenden Massen; ob ihre Gröſse nur bedingt sei durch die Entfernung oder ob sie nicht auch abhängen könne von der absoluten oder der relativen Geschwindigkeit und nur von dieser, oder ob nicht auch die Beschleunigung oder noch höhere Differentialquotienten des Wegs nach der Zeit in Betracht kommen könnten. So wenig man sich also einig ist über alle bestimmten Eigenschaften, welche den Elementarkräften beizulegen sind, so sehr stimmt man doch überein in der Meinung, daſs sich mehr solche allgemeine Eigenschaften angeben und aus der schon vorhandenen Beobachtung ableiten lassen, als die Grundgesetze enthalten. Man ist überzeugt, daſs die Elementarkräfte, unbestimmt gesprochen, einfacher Natur sein müssen. Was in dieser Hinsicht von den Kräften gilt, kann man in gleicher Weise von den festen Verbindungen der Körper sagen, welche mathematisch durch Bedingungsgleichungen zwischen den Koordinaten dargestellt werden und deren Einfluſs durch das D'ALEMBERTsche Prinzip bestimmt ist. Mathematisch kann man jede beliebige endliche oder Differentialgleichung zwischen den Koordinaten hinschreiben und verlangen, daſs sie befriedigt werde; aber nicht immer läſst sich eine physikalische, eine natürliche Verbindung angeben, welche die Wirkung jener Gleichung hat; oft liegt die Vermutung, bisweilen die Überzeugung vor, daſs eine solche Verbindung durch die Natur der Dinge ausgeschlossen sei. In welcher Weise aber sind die zulässigen Bedingungsgleichungen einzuschränken? Wo ist die Grenzlinie zwischen ihnen und den vorstellbaren? Man hat sich häufig begnügt, nur endliche Bedingungsgleichungen in Betracht zu ziehen. Diese Einschränkung aber geht zu weit, denn nicht integrierbare Differentialgleichungen können als Bedingungsgleichungen bei natürlichen Problemen wirklich auftreten.

Kurzum, sowohl was die Kräfte, als was die festen Verbindungen anlangt, enthält unser System der Prinzipien zwar alle die natürlichen Bewegungen, aber es umfängt gleichzeitig sehr viele Bewegungen, welche nicht natürliche sind. Ein System, welches diese letzteren oder doch einen Teil derselben ausschlösse, würde mehr wirkliche Beziehungen der Dinge zu einander wiederspiegeln und also in diesem Sinne zweckmäſsiger sein. Doch haben wir die Pflicht, auch noch in einer zweiten Richtung nach der Zweckmäſsigkeit unseres Bildes zu fragen. Ist unser Bild auch einfach? Ist es sparsam an unwesentlichen Zügen, an Zügen also, welche von uns zwar zulässiger aber doch willkürlicher Weise den wesentlichen Zügen der Natur hinzugefügt werden? Unsere Bedenken bei Beantwortung dieser Frage knüpfen sich wiederum an den Begriff der Kraft. Es kann nicht geleugnet werden, dafs in sehr vielen Fällen die Kräfte, welche unsere Mechanik zur Behandlung physikalischer Fragen einführt, nur als leergehende Nebenräder mitlaufen, um überall da aufser Wirksamkeit zu treten, wo es gilt, wirkliche Thatsachen darzustellen. In den einfachen Verhältnissen, an welche die Mechanik ursprünglich anknüpfte, ist das freilich nicht der Fall. Die Schwere eines Steines, die Kraft des Armes scheinen ebenso wirklich, ebenso der unmittelbaren Wahrnehmung zugänglich, wie die durch sie erzeugten Bewegungen. Aber wir brauchen nur etwa zur Bewegung der Gestirne überzugehen, um schon andere Verhältnisse zu haben. Hier sind die Kräfte niemals Gegenstand der unmittelbaren Erfahrung gewesen; alle unsere früheren Erfahrungen beziehen sich nur auf den scheinbaren Ort der Gestirne. Wir erwarten auch in Zukunft nicht die Kräfte wahrzunehmen, sondern die zukünftigen Erfahrungen, welche wir erwarten, betreffen wiederum nur die Lage der leuchtenden Punkte am Himmel, als welche uns die Gestirne erscheinen. Nur bei der Ableitung der zukünftigen Erfahrungen aus den vergangenen treten als Hülfsgröfsen vorübergehend die Gravitationskräfte ein, um wieder aus der Überlegung zu verschwinden. Ganz allgemein liegt die Sache so bei der Betrachtung der molekularen Kräfte, der chemischen, vieler elektrischen und magnetischen Wirkungen. Und wenn wir nun nach reiferer Erfahrung zurückkehren zu den einfachen Kräften, über deren Bestehen wir keinen Zweifel hatten, so werden wir belehrt, dafs diese mit überzeugender Gewifsheit von uns wahrgenommenen Kräfte jedenfalls nicht wirkliche waren. Der Trieb jedes Körpers gegen die Erde hin, welchen wir mit Händen zu greifen glaubten, dieser Trieb, so sagt uns die reifere Mechanik, ist als solcher nicht wirklich, er ist das als Einzelkraft nur vorgestellte Ergebnis einer unfafsbaren Anzahl wirklicher Kräfte, welche die Atome des Körpers gegen alle Atome des Weltalls hinziehen. Auch hier sind dann also die wirklichen Kräfte niemals Gegenstand der früheren Erfahrung gewesen, noch erwarten wir sie in zukünftigen Erfahrungen anzutreffen. Nur

während des Prozesses, mit welchem wir die zukünftigen Erfahrungen aus den vergangenen ableiten, treten sie leise ein und wieder aus. Doch selbst wenn die Kräfte nur von uns in die Natur hineingetragen wären, dürften wir darum ihre Einführung noch nicht als unzweckmäfsig bezeichnen. Wir waren uns von vornherein klar darüber, dafs sich unwesentliche Nebenbeziehungen in unsern Bildern nicht ganz würden vermeiden lassen. Nur möglichste Einschränkung dieser Beziehungen, nur weise Besonnenheit in ihrem Gebrauch durften wir verlangen. Kann man aber behaupten, dafs die Physik in dieser Richtung immer mit Sparsamkeit zu Wege gehen konnte? Mufste sie nicht vielmehr die Welt bis zum Übermafs erfüllen mit den verschiedensten Arten von Kräften, mit Kräften, welche selbst niemals in die Erscheinung treten, sogar mit solchen, welche nur ganz ausnahmsweise überhaupt eine Wirkung haben? Wir sehen etwa ein Stük Eisen auf dem Tische ruhen, wir vermuten demnach, dafs keine Bewegungsursachen, keine Kräfte daseien. Die Physik, welche auf unserer Mechanik aufgebaut und durch dies Fundament notwendig bestimmt ist, belehrt uns eines anderen. Jedes Atom des Eisens wird zu jedem anderen Atom des Weltalls durch die Gravitationskraft hingezogen. Jedes Atom des Eisens ist aber auch magnetisch und dadurch mit jedem anderen magnetischen Atom des Weltalls durch neue Kräfte verbunden. Aber die Körper des Alls sind auch erfüllt mit bewegter Elektricität und von diesen bewegten Elektricitäten gehen weitere verwickelte Kräfte aus, welche an jedem magnetischen Atom des Eisens ziehen. Und insofern die Teile des Eisens selbst Elektricität enthalten, haben wir wieder andere Kräfte in Betracht zu ziehen; neben diesen dann noch verschiedene Arten von Molekularkräften. Einige dieser Kräfte sind nicht klein; wäre von allen Kräften nur ein Teil wirksam, so könnte dieser Teil das Eisen in Stücke reifsen. In Wahrheit aber sind alle Kräfte so gegen einander abgeglichen, dafs die Wirkung der gewaltigen Zurüstung Null ist; dafs trotz tausend vorhandenen Bewegungsursachen Bewegung nicht eintritt; dafs das Eisen eben ruht. Wenn wir nun diese Vorstellungen unbefangen Denkenden vortragen, wer wird uns glauben? Wen werden wir überzeugen, dafs wir noch von wirklichen Dingen reden und nicht von Gebilden einer ausschweifenden Einbildungskraft? Wir selbst aber werden nachdenklich werden, ob wir wirklich die Ruhe des Eisens und seiner Teile in einfacher Weise geschildert und abgebildet haben. Ob sich die Verwickelung überhaupt vermeiden läſst, ist zunächst ja fraglich; aber das ist nicht fraglich, daſs ein System der Mechanik, welches sie vermeidet oder ausschlieſst, einfacher und in diesem Sinne zweckmäſsiger ist, als das hier betrachtete, welches solche Vorstellungen nicht nur zuläſst, sondern uns geradezu aufzwingt.

Fassen wir noch einmal in kürzester Form die Bedenken zusammen, welche uns bei Betrachtung der gewöhnlichen Darstellungsweise der Prinzipien der Mechanik aufstieſsen. Was die Form anlangt, schien uns, daſs der logische Wert der einzelnen Aussagen nicht hinreichend klar festgelegt worden sei. Was die Sache anlangt, schien uns, daſs die von der Mechanik betrachteten Bewegungen sich nicht völlig mit den zu betrachtenden natürlichen Bewegungen decken. Manche Eigenschaften der natürlichen Bewegungen werden in der Mechanik nicht berücksichtigt; viele Beziehungen, welche die Mechanik betrachtet, fehlen wahrscheinlich in der Natur. Auch wenn diese Ausstellungen als gerechtfertigt anerkannt werden, dürfen sie uns freilich nicht zu der Meinung verleiten, daſs die gewöhnliche Darstellung der Mechanik ihren Wert und ihre bevorzugte Stellung deshalb einbüſsen müsse oder je einbüſsen werde; aber sie rechtfertigen es doch hinreichend, daſs wir uns auch nach anderen Darstellungen umsehen, welche in den getadelten Beziehungen Vorteile bieten und den darzustellenden Dingen noch enger angepaſst sind.

2.

Ein zweites Bild der mechanischen Vorgänge ist weit jüngeren Ursprungs als das erste. Seine Entwickelung aus und neben jenem ist eng verknüpft mit den Fortschritten,

welche die physikalische Wissenschaft in den letzten Jahrzehnten gemacht hat. Noch bis in die Mitte des Jahrhunderts erschien als letztes Ziel und als letzte anzustrebende Erklärung der Naturerscheinungen die Rückführung derselben auf unzählige Fernkräfte zwischen den Atomen der Materie. Diese Anschauungsweise entsprach vollständig dem Systeme der mechanischen Prinzipien, welches wir als das erste bezeichnet haben; sie wurde durch jenes bedingt, wie jenes durch sie. Jetzt, gegen Ende des Jahrhunderts hat die Physik einer anderen Denkweise ihre Vorliebe zugewandt. Beeinfluſst von dem überwältigenden Eindrucke, welchen die Auffindung des Prinzipes von der Erhaltung der Energie ihr gemacht hat, liebt sie es, die in ihr Gebiet fallenden Erscheinungen als Umsetzungen der Energie in neue Formen zu behandeln, und die Rückführung der Erscheinungen auf die Gesetze der Energieverwandlung als ihr letztes Ziel zu betrachten. Diese Behandlungsart kann auch schon von vornherein auf die elementaren Vorgänge der Bewegung selbst angewandt werden; alsdann entsteht eine neue, von der ersten verschiedene Darstellung der Mechanik, in welcher von Anfang an der Begriff der Kraft zurücktritt zu Gunsten des Begriffs der Energie. Eben dieses so entstandene neue Bild der elementaren Bewegungsvorgänge ist es, welches wir als das zweite bezeichnen und welchem wir jetzt unsere Aufmerksamkeit widmen wollen. Wenn wir bei Besprechung des ersten Bildes den Vorteil hatten, daſs wir das Bild selbst als deutlich vor dem Auge aller Physiker stehend voraussetzen konnten, so ist das bei diesem zweiten Bilde nun freilich nicht der Fall. Dasselbe ist sogar wohl noch niemals in allen seinen Einzelheiten ausgemalt worden, es giebt meines Wissens kein Lehrbuch der Mechanik, welches sich von vornherein auf den Standpunkt der Energielehre stellte, und den Begriff der Energie vor dem Begriff der Kraft einführte. Vielleicht ist auch noch niemals eine Vorlesung über Mechanik nach diesem Plane eingerichtet worden. Aber die Möglichkeit eines solchen Planes hat schon den Begründern der Energielehre eingeleuchtet; die Bemerkung, daſs man auf diese Weise den Begriff der Kraft mit seinen Schwierigkeiten vermeiden könne, ist öfters gemacht; in einzelnen besonderen

Anwendungen treten in der Wissenschaft immer häufiger Schlussreihen auf, welche ganz dieser Denkweise angehören. Wir können daher recht wohl eine Skizze entwerfen, welche uns die groben Umrisse des Bildes vorführt; wir können im allgemeinen den Plan angeben, nach welchem die beabsichtigte Darstellung der Mechanik geordnet werden müſste. Wie im ersten Bilde, so gehen wir auch hier aus von vier von einander unabhängigen Grundbegriffen, deren Beziehungen zu einander den Inhalt der Mechanik bilden sollen. Zwei derselben haben einen mathematischen Charakter: Raum und Zeit; die beiden anderen: Masse und Energie, werden eingeführt als in gegebener Menge vorhandene, unzerstörbare und unvermehrbare physikalische Wesenheiten. Freilich wird es nötig sein, neben dieser Erklärung auch deutlich anzugeben, durch welche konkreten Erfahrungen wir in letzter Instanz das Vorhandensein von Masse und Energie feststellen wollen. Hier nehmen wir an, dass dies möglich und dass es geschehen sei. Dass die Menge der Energie, welche mit bestimmten Massen verbunden ist, von dem Zustande dieser Massen abhängig ist, ist selbstverständlich. Es ist aber als eine erste allgemeine Erfahrung einzuführen, daſs die vorhandene Energie sich stets in zwei Teile zerfällen läſst, von welchen der eine allein durch die gegenseitige Lage der Massen bedingt ist, der andere aber von ihrer absoluten Geschwindigkeit abhängt. Der erste Teil wird als potentielle Energie, der zweite Teil als kinetische Energie definiert. Die Form für die Abhängigkeit der kinetischen Energie von der Geschwindigkeit der bewegten Körper ist in allen Fällen die gleiche und bekannt; die Form für die Abhängigkeit der potentiellen Energie von der Lage der Körper kann nicht allgemein angegeben werden, sie bildet vielmehr die besondere Natur und die charakteristische Eigentümlichkeit der gerade betrachteten Massen. Es ist die Aufgabe der Physik, diese Form für die uns umgebenden Naturkörper aus früheren Erfahrungen zu ermitteln. Bis hierher treten in den Betrachtungen im wesentlichen nur drei Elemente, nämlich Raum, Masse und Energie in Beziehung. Um die Beziehungen aller vier Grundbegriffe und damit den zeitlichen Ablauf der Erscheinungen festzulegen, bedienen wir uns eines der Integralprinzipien der gewöhnlichen Mechanik, welche sich zu ihren

Aussagen des Energiebegriffs bedienen. Welches derselben wir anwenden, ist ziemlich gleichgültig; wir können und wir wollen etwa das Hamilton'sche Princip wählen. Wir würden dann also als einziges erfahrungsmäſsiges Grundgesetz der Mechanik den Satz aufstellen, daſs jedes System natürlicher Massen sich so bewegt, als sei ihm die Aufgabe gestellt, gegebene Lagen in gegebener Zeit zu erreichen und zwar in solcher Weise, daſs die Differenz zwischen kinetischer und potentieller Energie im Mittel über die ganze Zeit so klein ausfalle wie möglich. Ist dieses Gesetz auch in der Form nicht einfach, so giebt es doch durch eine einzige Bestimmung die natürlichen Umwandlungen der Energie zwischen ihren Formen in eindeutiger Weise wieder, es gestattet daher den Ablauf der wirklichen Erscheinungen für die Zukunft vollständig vorauszubestimmen. Mit der Aufstellung dieses neuen Gesetzes sind die unentbehrlichen Grundlagen der Mechanik abgeschlossen. Was wir noch hinzufügen können, sind nur mathematische Ableitungen und etwa Vereinfachungen oder Hilfsbezeichnungen, welche vielleicht zweckmäſsig, aber jedenfalls nicht notwendig sind. Zu diesen letzteren gehört dann auch der Begriff der Kraft, welcher in den Grundlagen selbst nicht auftrat. Seine Einführung ist zweckmäſsig, sobald wir nicht nur Massen in Betracht ziehen, welche mit konstanten Mengen von Energie verbunden sind, sondern auch solche Massen, welche Energie an andere Massen abgeben oder von ihnen empfangen. Aber die Einführung geschieht nicht durch neue Erfahrung, sondern durch eine Definition, welche in mehr als einer Weise gefaſst werden kann. Dementsprechend sind auch die Eigenschaften der so definierten Kräfte nicht aus der Erfahrung zu ermitteln, sondern lassen sich aus der Definition und dem Grundgesetz ableiten und selbst die Bestätigung dieser Eigenschaften durch die Erfahrung ist überflüssig, es wäre denn, daſs man noch an der Richtigkeit des ganzen Systems zweifelte. Der Kraftbegriff als solcher kann also in diesem System keine logischen Schwierigkeiten mehr bereiten; auch für die Beurteilung der Richtigkeit des Systems kann er nicht in Frage kommen, nur auf die gröſsere oder kleinere Zweckmäſsigkeit desselben kann er Einfluſs haben.

In der angedeuteten Weise also hätten wir etwa die Prinzipien der Mechanik zu ordnen, um sie der Anschauungsweise der Energielehre anzupassen. Es fragt sich nun aber, ob das entstandene zweite Bild vor dem erstbetrachteten etwas voraus habe, und wir wollen deshalb seine Vorzüge und Nachteile näher ins Auge fassen.

Diesmal liegt es in unserem Interesse, dafs wir uns zuerst an die Zweckmäfsigkeit halten, weil in Bezug auf diese ein Fortschritt am unzweifelhaftesten hervortritt. Denn unser zweites Bild der natürlichen Bewegungen ist zunächst entschieden deutlicher; es giebt mehr Eigentümlichkeiten derselben wieder als das erste. Wenn wir das HAMILTON'sche Prinzip aus den allgemeinen Grundlagen der Mechanik ableiten wollen, müssen wir den letzteren gewisse Voraussetzungen über die wirkenden Kräfte und über die Beschaffenheit etwaiger fester Verbindungen hinzufügen. Diese Voraussetzungen sind höchst allgemeiner Art, aber sie bedeuten darum doch ebenso viele wichtige Einschränkungen der durch das Prinzip dargestellten Bewegungen. Und umgekehrt lassen sich daher auch aus dem Prinzip eine ganze Reihe von Beziehungen, insbesondere von Wechselbeziehungen zwischen jeder Art von möglichen Kräften ableiten, welche in den Prinzipien des ersten Bildes fehlen, welche aber in dem zweiten Bilde, und gleichzeitig, worauf es ankommt, in der Natur sich finden. Der Nachweis, dafs dem so sei, bildet den eigentlichen Inhalt und das Ziel der Arbeiten, welche VON HELMHOLTZ unter dem Titel: „Über die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung“ veröffentlicht hat. Wir treffen aber die Sachlage wohl genauer, wenn wir sagen, die Thatsache selbst, welche bewiesen werden soll, bilde die Entdeckung, welche in jener Arbeit mitgeteilt und dargelegt wird. Denn einer Entdeckung bedurfte in der That die Erkenntnis, dafs aus so allgemeinen Voraussetzungen sich so besondere, wichtige und zutreffende Folgerungen ziehen lassen. Auf jene Abhandlung können wir uns daher auch berufen zur Erhärtung unserer Behauptung im einzelnen, und insofern jene Abhandlung zur Zeit den äufsersten Fortschritt der Physik bezeichnet, können wir uns der Frage überhoben halten, ob ein noch engerer Anschlufs an die Natur

erreichbar sei, etwa durch Einschränkung der für die potentielle Energie zulässigen Formen. Lieber wollen wir betonen, dafs unser jetziges Bild auch in Hinsicht der Einfachheit die Klippen vermeidet, an welchen die Zweckmäfsigkeit unseres ersten Bildes sich gefährdet fand. Denn fragen wir nach dem eigentlichen Grunde, aus welchem die Physik es heutzutage liebt, ihre Betrachtungen in der Ausdrucksweise der Energielehre zu halten, so dürfen wir antworten: weil sie es auf diese Weise am besten vermeidet, von Dingen zu reden, von welchen sie sehr wenig weifs und welche auf die wesentlich beabsichtigten Aussagen auch keinen Einflufs haben. Wir bemerkten schon gelegentlich, dafs die Rückführung der Erscheinungen auf die Kraft uns zwingt, unsere Überlegung beständig an die Betrachtung der einzelnen Atome und Moleküle anzuknüpfen. Nun sind wir ja allerdings gegenwärtig überzeugt davon, dafs die wägbare Materie aus Atomen besteht; auch haben wir von der Gröfse dieser Atome und ihren Bewegungen in gewissen Fällen einigermafsen bestimmte Vorstellungen. Aber die Gestalt der Atome, ihr Zusammenhang, ihre Bewegungen in den meisten Fällen, alles dies ist uns gänzlich verborgen; ihre Zahl ist in allen Fällen unübersehbar grofs. Unsere Vorstellung von den Atomen ist daher selbst ein wichtiges und interessantes Ziel weiterer Forschung, keineswegs aber ist sie besonders geeignet, als bekannte und gesicherte Grundlage mathematischer Theorieen zu dienen. Einen so streng denkenden Forscher, wie es GUSTAV KIRCHHOFF war, berührte es daher fast peinlich, die Atome und ihre Schwingungen ohne zwingende Notwendigkeit in den Mittelpunkt einer theoretischen Ableitung gestellt zu sehen. Die willkürlich angenommenen Eigenschaften der Atome mögen ohne Einflufs auf das Endresultat sein, das letztere mag richtig sein. Gleichwohl sind die Einzelheiten der Ableitung selbst zum grofsen Teile mutmafslich falsch, die Ableitung ist ein Scheinbeweis. Die ältere Denkweise der Physik läfst hier kaum eine Wahl, einen Ausweg zu. Dagegen bietet die Auffassung der Energielehre und damit unser zweites Bild der Mechanik den Vorteil, dafs in die Voraussetzungen der Probleme nur die der Erfahrung unmittelbar zugänglichen Merkmale, Parameter, oder willkürlichen Koordinaten der betrachteten Körper eintreten; dafs die Betrachtungen mit Hülfe dieser Merkmale in endlicher und geschlossener Form fortschreiten und dafs auch das Endresultat unmittelbar wieder in greifbare Erfahrung kann übersetzt werden. Aufser der Energie selbst in ihren wenigen Formen treten keine Hilfskonstruktionen in die Betrachtung ein. Unsere Aussagen können sich auf die bekannten Eigentümlichkeiten der betrachteten Körpersysteme beschränken, ohne dafs wir unsere Unkenntnis der Einzelheiten durch willkürliche und einflufslose Hypothesen verdecken müfsten. Nicht nur das Endresultat, sondern auch alle Schritte der Ableitung desselben können als richtig und sinnvoll vertreten werden. Dies sind die Vorzüge, welche diese Methode der heutigen Physik lieb gemacht haben, welche also auch unserem zweiten Bilde der Mechanik eigen sind, und welche wir in unserer Bezeichnungsweise als Vorzüge der Einfachheit, also der Zweckmäfsigkeit aufzufassen haben.

Leider werden wir wieder unsicherer über den Wert unseres Systems, wenn wir seine Richtigkeit und seine logische Zulässigkeit prüfen. Schon die Frage nach der Richtigkeit giebt zu gerechtfertigten Zweifeln Anlafs. Keineswegs dürfen wir der Übereinstimmung mit der Natur schon deshalb sicher sein, weil sich das HAMILTON'sche Prinzip ja auch aus den zugegebenen Grundlagen der NEWTON'schen Mechanik ableiten läfst. Wir haben zu bedenken, dafs diese Ableitung nur dann stattfindet, wenn gewisse Voraussetzungen zutreffen, und dafs anderseits unser System nicht nur den Anspruch macht, einige Bewegungen der Natur richtig zu beschreiben, sondern dafs es behauptet, alle Bewegungen der Natur zu umfassen. Wir haben also zu untersuchen, ob auch wirklich neben den NEWTON'schen Gesetzen jene besondern Voraussetzungen Allgemeingültigkeit haben, und ein einziges Beispiel der Natur, welches widerspräche, würde die Richtigkeit des Systems als solches umwerfen, wenn es auch die Gültigkeit des HAMILTON-schen Prinzips als allgemeinen Lehrsatzes nicht im mindesten erschütterte. Hier entsteht nun das Bedenken nicht sowohl ob unser Bild die gesamte Mannigfaltigkeit der Kräfte, sondern ob es auch wirklich die gesamte Mannigfaltigkeit der starren Verbindungen enthielte, welche zwischen den Körpern der Natur auftreten können. Die Anwendung des HAMILTON'schen

Prinzips auf ein materielles System schliesst nicht aus, dafs zwischen den gewählten Koordinaten desselben feste Zusammenhänge bestehen, aber es verlangt immerhin, dafs diese Zusammenhänge sich mathematisch ausdrücken lassen durch endliche Gleichungen zwischen den Koordinaten; es gestattet nicht das Auftreten solcher Zusammenhänge, welche mathematisch nur durch Differentialgleichungen wiedergegeben werden können. Die Natur selbst aber scheint Zusammenhänge der letzteren Art nicht einfach auszuschliessen. Denn dieselben treten zum Beispiel auf, sobald dreidimensionale Körper mit ihren Oberflächen ohne Gleitung auf einander rollen. Durch diese Verbindung, welche wir in unserer Umgebung oft vorfinden, ist die Lage beider Körper zu einander nur insofern beschränkt, als sie stets einen Punkt der Oberfläche gemein haben müssen; die Bewegungsfreiheit der Körper aber ist noch um einen Grad weiter beschränkt. Es lassen sich also aus der Verbindung mehr Gleichungen zwischen den Änderungen der Koordinaten herleiten als zwischen den Koordinaten selbst, unter jenen muss daher mindestens eine sein, welche mathematisch als eine nicht integrabele Differentialgleichung zu bezeichnen ist. Auf derartige Fälle nun gestattet das HAMILTON'sche Prinzip keine Anwendung mehr, oder genau gesprochen: Die mathematisch mögliche Anwendung des Prinzips führt zu physikalisch falschen Resultaten. Man beschränke die Betrachtung auf den einfachen Fall einer Kugel, welche allein ihrer Trägheit folgend auf einer festen horizontalen Ebene ohne Gleitung rollt; man kann hier ganz wohl durch blofse Betrachtung ohne Rechnung sowohl die Bewegungen übersehen, welche die Kugel wirklich ausführen kann, als auch die Bewegungen, welche dem HAMILTON'schen Prinzip entsprechen würden und welche so ausfallen müfsten, dafs die Kugel bei konstanter lebendiger Kraft gegebene Ziele in kürzester Zeit erreicht. Man kann sich daher auch ohne Rechnung überzeugen, dafs beide Arten von Bewegungen sehr verschiedene Eigentümlichkeiten aufweisen. Wählen wir Anfangs- und Endlage der Kugel beliebig aus, so giebt es doch offenbar stets einen bestimmten Übergang aus einer zur andern, auf welchem die Zeit des Übergangs, also das HAMILTON'sche Integral ein Minimum wird. In Wahrheit ist aber gar nicht aus jeder Lage in jede andere ohne die Mitwirkung von Kräften ein natürlicher Übergang möglich, wenn auch die Wahl der Anfangsgeschwindigkeit vollkommen frei steht. Aber selbst dann, wenn wir Anfangs- und Endlage so wählen, dafs eine natürliche freie Bewegung zwischen beiden möglich ist, so ist dies gleichwohl nicht diejenige, welche dem Minimum der Zeit entspricht. Bei gewissen Anfangs- und Endlagen kann der Unterschied sehr auffallend sein. In diesem Falle würde eine Kugel, welche dem Prinzip gemäfs sich bewegte, entschieden den Schein eines belebten Wesens annehmen, welches zielbewufst einer bestimmten Lage zusteuert, während neben ihr die Kugel, welche dem Gesetze der Natur folgt, den Eindruck einer toten, gleichförmig dahinkreiselnden Masse hervorrufen würde. Es würde nichts helfen, wollten wir an Stelle des Hamilton'schen Prinzips das Prinzip der kleinsten Wirkungen oder ein anderes Integralprinzip in den Vordergrund rücken, da alle diese Prinzipien nur einen geringen Unterschied der Bedeutung aufweisen und sich in der hier betrachteten Hinsicht ganz gleich verhalten. Übrigens ist der Weg vorgezeichnet, auf welchem allein wir das System verteidigen und gegen den Vorwurf der Unrichtigkeit in Schutz nehmen können. Wir haben zu leugnen, dafs starre Verbindungen der angeführten Art mit Strenge in der Natur wirklich vorkommen. Wir haben auszuführen, dafs jedes sogenannte Rollen ohne Gleitung in Wahrheit ein Rollen mit geringer Gleitung, also ein Vorgang der Reibung sei. Wir haben uns darauf zu berufen, dafs ganz allgemein die Vorgänge in reibenden Flächen zu denjenigen gehören, welche noch nicht auf klar verstandene Ursachen zurückgeführt werden können, sondern für welche nur gerade empirisch die erzeugten Kräfte ermittelt sind; daher gehöre das ganze Problem zu denjenigen, zu deren Behandlung zur Zeit die Benützung der Kräfte und damit der Umweg über die gewöhnlichen Methoden der Mechanik noch nicht vermieden werden könne. Überzeugend wirkt freilich diese Verteidigung nicht. Denn ein Rollen ohne Gleiten widerspricht weder dem Energieprinzipe noch einem anderen allgemein anerkannten Grundsatze der Physik; der Vorgang ist in der sichtbaren Welt mit so grofser Annäherung verwirklicht, dafs man sogar Integrationsmaschinen auf die Voraussetzung seines

genauen Eintretens gegründet hat; wir haben daher kaum ein Recht, sein Vorkommen als unmöglich auszuschliefsen, am wenigsten aus der Mechanik noch unbekannter Systeme, wie es die Atome oder die Teile des Äthers sind. Aber selbst wenn wir zugeben, dass die fraglichen Verbindungen in der Natur nur angenähert verwirklicht sind, selbst dann bereitet uns das Versagen des Hamilton'schen Prinzips in diesen Fällen Schwierigkeiten. Von jedem Grundgesetze unseres mechanischen Systems werden wir verlangen müssen, dafs es angewandt auf angenähert richtige Verhältnisse immer noch angenähert richtige Resultate gebe, nicht aber gänzlich falsche. Denn da schliesslich alle starren Zusammenhänge, welche wir der Natur entnehmen und in die Rechnung einführen, den wirklichen Verhältnissen nur angenähert entsprechen, so geraten wir sonst in gänzliche Unsicherheit, auf welche unter ihnen wir das Gesetz überhaupt noch anwenden dürfen, auf welche nicht mehr. Doch wollen wir die vorgetragene Verteidigung auch nicht gänzlich verwerfen; wir wollen entgegenkommend zugeben, dafs die aufgeworfenen Zweifel nur die Zweckmäfsigkeit des Systems, nicht aber seine Richtigkeit betreffen, so dafs die aus ihnen entspringenden Nachteile durch andere Vorteile aufgewogen werden können.

Die wahren Schwierigkeiten erwarten uns nun aber erst, sobald wir versuchen, die Grundlagen des Systems so zu ordnen, dafs den Anforderungen der logischen Zulässigkeit mit aller Strenge genügt werde. Wir dürfen bei der Einführung der Energie nicht dem gewöhnlichen Wege folgend von den Kräften ausgehen, von diesen zur Kräftefunktion, zur potentiellen Energie, zur Energie überhaupt fortschreiten. Eine solche Anordnung würde der ersten Darstellung der Mechanik angehören. Vielmehr haben wir, ohne eigentlich mechanische Entwickelungen schon vorauszusetzen, diejenigen einfachen unmittelbaren Erfahrungen anzugeben, durch welche wir allgemein das Vorhandensein eines Vorrats von Energie und die Bestimmung seiner Menge definiert wissen wollen. Wir haben oben nur angenommen, nicht aber bewiesen, dafs eine solche Bestimmung möglich sei. Mehrere ausgezeichnete Physiker versuchen heutzutage, der Energie so sehr die Eigenschaften der Substanz zu leihen, dafs sie annehmen, jede kleinste Menge derselben sei zu jeder Zeit an einen bestimmten Ort des Raumes geknüpft und bewahre bei allem Wechsel desselben und bei aller Verwandlung der Energie in neue Formen dennoch ihre Identität. Diese Physiker müssen notwendig die Überzeugung vertreten, dafs sich Definitionen der verlangten Art wirklich geben lassen, und es war daher wohl erlaubt, die Möglichkeit derselben anzunehmen. Sollen wir selbst aber eine konkrete Form dafür aufweisen, welche uns genügt und welche allgemeiner Zustimmung sicher ist, so geraten wir in Verlegenheit; zu einem befriedigenden und abschliefsenden Ergebnis scheint diese ganze Anschauungsweise noch nicht gelangt. Eine besondere Schwierigkeit mufs auch von vornherein der Umstand bereiten, dafs die angeblich substanzartige Energie in zwei so gänzlich verschiedenen Formen auftritt, wie es die kinetische und die potentielle Form sind. Die kinetische Energie bedarf im Grunde an sich keiner neuen Grundbestimmung, da sie aus den Begriffen der Geschwindigkeit und der Masse abgeleitet werden kann; die potentielle Energie hingegen, welche eine selbständige Feststellung fordert, widerstrebt zugleich jeder Definition, welche ihr die Eigenschaften einer Substanz beilegt. Die Menge einer Substanz ist eine notwendig positive Grösse; die in einem System enthaltene potentielle Energie scheuen wir uns nicht, als negativ anzunehmen. Bedeutet ein analytischer Ausdruck die Menge einer Substanz, so hat eine additive Konstante in dem Ausdruck dieselbe Wichtigkeit wie der Rest; in dem Ausdruck für die potentielle Energie eines Systems hat eine additive Konstante niemals eine Bedeutung. Endlich kann der Inhalt eines physikalischen Systems an einer Substanz nur abhängen von dem Zustande des Systems selbst, der Inhalt gegebener Materie an potentieller Energie aber hängt ab von dem Vorhandensein entfernter Massen, welche vielleicht niemals Einflufs auf das System hatten. Ist das Weltall und damit die Menge jener entfernten Massen unendlich, so wird der Inhalt auch endlicher Mengen von Materie an vielen Formen potentieller Energie unendlich gross. Dies sind alles Schwierigkeiten, welche durch die gesuchte Definition der Energie beseitigt oder umgangen werden müfsten. Obwohl

wir nun auch nicht behaupten wollen, dafs eine solche Umgehung unmöglich sei, so können wir sie doch gegenwärtig noch nicht als geleistet ansehen, und es wird am vorsichtigsten sein, wenn wir es einstweilen noch als eine offene Frage betrachten, ob sich das System überhaupt in logisch einwurfsfreier Form entwickeln läfst.

Es ist vielleicht der Mühe wert, an dieser Stelle auch die Frage zu erörtern, ob ein anderer Einwurf gerechtfertigt sei, den man vielleicht gegen die Zulässigkeit des hier betrachteten Systems richten könnte. Soll ein Bild gewisser äufserer Dinge in unserem Sinne zulässig sein, so müssen die Züge desselben nicht allein unter sich in Einklang stehen, sondern sie dürfen auch nicht den Zügen anderer in unserer Erkenntnis schon feststehender Bilder widersprechen. Daraufhin könnte man nun behaupten: Es sei nicht denkbar, dafs das Hamilton'sche Prinzip oder ein Satz von verwandten Eigenschaften in Wahrheit ein Grundgesetz der Mechanik und damit ein Grundgesetz der Natur vorstelle, denn von einem Grundgesetze sei von vornherein Einfachheit und Schlichtheit zu erwarten, das Hamilton'sche Prinzip aber stelle, wenn man es analysiere, eine äufserst verwickelte Aussage dar. Nicht allein mache es die gegenwärtige Bewegung abhängig von Folgen, welche erst in der Zukunft hervortreten können und mute dadurch der leblosen Natur Absichten zu, sondern, was schlimmer sei, es mute der Natur sinnlose Absichten zu. Denn das Integral, dessen Minimum das Hamilton'sche Prinzip fordert, habe keine einfache physikalische Bedeutung; es sei aber für die Natur ein unverständliches Ziel, einen mathematischen Ausdruck zum Minimum zu machen oder seine Variation zum Verschwinden zu bringen. Die gewöhnliche Antwort, welche die heutige Physik auf derartige Angriffe bereit hält, ist diese, dafs die Voraussetzungen, von welchen die Betrachtungen ausgehen, metaphysischen Ursprungs seien, dafs aber die Physik darauf verzichtet habe und es nicht mehr als Pflicht anerkenne, den Ansprüchen der Metaphysik gerecht zu werden. Sie lege kein Gewicht mehr auf die Gründe, welche von metaphysischer Seite einst zu Gunsten der Prinzipien vorgebracht seien, welche einen Zweck in der Natur andeuten; ebensowenig aber könne sie jetzt Einwänden metaphysischen Charakters gegen ebendieselben Prinzipien ihr Ohr leihen. Wenn wir bei solchem Rechten zu entscheiden hätten, so würden wir nicht unbillig denken, wenn wir uns mehr auf Seiten des Angreifers, als des Verteidigers stellten. Kein Bedenken, welches überhaupt Eindruck auf unsern Geist macht, kann dadurch erledigt werden, daſs es als metaphysisch bezeichnet wird; jeder denkende Geist hat als solcher Bedürfnisse, welche der Naturforscher metaphysische zu nennen gewohnt ist. Überdies läſst sich in dem vorliegenden Falle, wie wohl in allen ähnlichen, die gesunde und berechtigte Quelle unseres Bedürfnisses ganz wohl aufweisen. Freilich können wir von der Natur nicht a priori Einfachheit fordern, noch auch urteilen, was in ihrem Sinne einfach sei. Aber den Bildern, welche wir uns von ihr machen, können wir als unsern eigenen Schöpfungen Vorschriften machen. Wir urteilen nun mit Recht, daſs, wenn unsere Bilder den Dingen gut angepaſst sind, daſs dann die wirklichen Beziehungen der Dinge durch einfache Beziehungen zwischen den Bildern müssen wiedergegeben werden. Wenn aber die wirklichen Beziehungen zwischen den Dingen nur durch verwickelte, ja dem unvorbereiteten Geiste sogar unverständliche Beziehungen zwischen den Bildern sich wiedergeben lassen, so urteilen wir, daſs diese Bilder den Dingen nur ungenügend angepaſst sind. Unsere Forderung der Einfachheit geht also nicht an die Natur, sondern an die Bilder, welche wir uns von ihr machen, und unser Widerspruch gegen eine verwickelte Aussage als Grundgesetz drückt nur die Überzeugung aus, daſs, wenn der Inhalt der Aussage richtig und umfassend sei, er sich durch zweckmäſsigere Wahl der Grundvorstellungen auch in einfacherer Form müsse aussprechen lassen. Eine andere Äuſserung derselben Überzeugung ist der in uns erwachende Wunsch, von dem äuſseren Verständnisse eines derartigen Gesetzes zu seinem tieferen und eigentlichen Sinn vorzudringen, von dessen Vorhandensein wir überzeugt sind. Ist diese Auffassung richtig, so bildet in der That der vorgebrachte Einwurf ein berechtigtes Bedenken gegen das System, aber er trifft dann nicht sowohl seine Zulässigkeit, als vielmehr seine Zweckmäſsigkeit und er käme bei der Beurteilung der letzteren in Betracht. Es ist indessen nicht nötig, deshalb nochmals zur Besprechung jener zurückzukehren.

Überblicken wir noch einmal dasjenige, was wir über die Vorzüge des zweiten Bildes vorzubringen hatten, so können wir von der Gesamtheit desselben nicht allzu befriedigt sein. Obgleich die ganze Richtung der neueren Physik uns anlockt, den Begriff der Energie in den Vordergrund zu stellen und ihn auch in der Mechanik als Grund- und Eckstein unseres Aufbaues zu benutzen, so bleibt es doch mehr als zweifelhaft, ob wir bei diesem Vorgehen die Härten und Rauhigkeiten vermeiden können, welche uns in dem ersten Bilde der Mechanik anstöſsig waren. In der That habe ich auch diesem zweiten Wege der Darstellung nicht deshalb eine längere Besprechung gewidmet, um zur Beschreitung desselben zu ermutigen, sondern vielmehr um anzudeuten, aus welchen Gründen ich selbst ihn aufgegeben habe, nachdem ich zuerst ihn zu verfolgen versucht hatte.

3.

Eine dritte Anordnung der Prinzipien der Mechanik ist diejenige, welche in dem Hauptteil des Buches ausführlich dargelegt werden soll, deren Hauptzüge wir aber schon hier in der Einleitung vorführen wollen, um sie in demselben Sinne einer Kritik zu unterwerfen, wie es mit den beiden ersten geschehen ist. Von jenen unterscheidet sie sich wesentlich dadurch, daſs sie von nur drei unabhängigen Grundvorstellungen ausgeht; denen der Zeit, des Raumes und der Masse. Sie betrachtet daher als ihre Aufgabe, die natürlichen Beziehungen zwischen diesen dreien und allein zwischen diesen dreien darzustellen. Ein vierter Begriff, wie der Begriff der Kraft oder der Energie, an welchen sich vorhin die Schwierigkeiten knüpften, ist als selbständige Grundvorstellung beseitigt. Die Bemerkung, daſs drei von einander unabhängige Vorstellungen nötig, aber auch hinreichend seien zur Entwicklung der Mechanik, hat schon G. Kirchhoff seinem Lehrbuche der Mechanik vorangestellt. Ganz ohne Ersatz kann freilich die so in den Grundvorstellungen ausfallende Mannigfaltigkeit nicht bleiben. In unserer Darstellung suchen wir die entstehende Lücke auszufüllen durch Benützung einer Hypothese, welche hier nicht zum ersten Male aufgestellt wird, welche man aber nicht in die Elemente der Mechanik selbst einzuführen gewohnt ist, und deren Wesen wir etwa in der folgenden Weise erläutern können.

Versuchen wir die Bewegungen der uns umgebenden Körper zu verstehen und auf einfache und durchsichtige Regeln zurückzuführen, indem wir aber nur dasjenige berücksichtigen, was wir unmittelbar vor Augen haben, so schlägt unser Versuch im allgemeinen fehl. Wir werden bald gewahr, dafs die Gesamtheit dessen, was wir sehen und greifen können noch keine gesetzmäfsige Welt bildet, in welcher gleiche Zustände stets gleiche Folgen haben. Wir überzeugen uns, dafs die Mannigfaltigkeit der wirklichen Welt gröfser sein mufs als die Mannigfaltigkeit der Welt, welche sich unseren Sinnen unmittelbar offenbart. Wollen wir ein abgerundetes, in sich geschlossenes, gesetzmäfsiges Weltbild erhalten, so müssen wir hinter den Dingen, welche wir sehen, noch andere, unsichtbare Dinge vermuten, hinter den Schranken unserer Sinne noch heimliche Mitspieler suchen. Diese tieferliegenden Einflüsse erkannten wir in den ersten beiden Darstellungen an und wir dachten sie uns als Wesen einer eigenen und besonderen Art, deshalb schufen wir zu ihrer Wiedergabe in unserem Bilde die Begriffe der Kraft und der Energie. Es steht uns aber noch ein anderer Weg offen. Wir können zugeben, dafs ein verborgenes Etwas mitwirke und doch leugnen, dafs dieses Etwas einer besonderen Kategorie angehöre. Es steht uns frei anzunehmen, dafs auch das Verborgene nichts anderes sei als wiederum Bewegung und Masse, und zwar solche Bewegung und Masse, welche sich von der sichtbaren nicht an sich unterscheidet, sondern nur in Beziehung auf uns und auf unsere gewöhnlichen Mittel der Wahrnehmung. Diese Auffassungsweise ist nun eben unsere Hypothese. Wir nehmen also an, dafs es möglich sei, den sichtbaren Massen des

Weltalls andere denselben Gesetzen gehorchende Massen hinzuzudichten von solcher Art, dafs dadurch das Ganze Gesetzmäfsigkeit und Verständlichkeit gewinnt, und zwar nehmen wir an, dafs dies ganz allgemein und in allen Fällen möglich sei, und dafs es daher andere Ursachen der Erscheinungen auch gar nicht gebe, als die hierdurch zugelassenen. Was wir gewohnt sind als Kraft und als Energie zu bezeichnen ist dann für uns nichts weiter als eine Wirkung von Masse und Bewegung, nur braucht es nicht immer die Wirkung grobsinnlich nachweisbarer Masse und grobsinnlich nachweisbarer Bewegung zu sein. Eine derartige Erklärung einer Kraft aus Bewegungsvorgängen pflegt man eine dynamische zu nennen, und man kann wohl sagen, dafs die Physik gegenwärtig derartigen Erklärungen in hohem Grade hold ist. Die Kräfte der Wärme hat man mit Sicherheit auf die verborgenen Bewegungen greifbarer Massen zurückgeführt. Durch Maxwell's Verdienst ist die Vermutung fast zur Überzeugung geworden, dafs wir in den elektrodynamischen Kräften die Wirkung der Bewegung verborgener Massen vor uns haben. Lord Kelvin rückt die Möglichkeit dynamischer Erklärungen der Kräfte mit Vorliebe in den Vordergrund seiner Betrachtungen; in seiner Theorie von der Wirbelnatur der Atome hat er ein dieser Anschauung entsprechendes Bild des Weltganzen zu geben versucht. von Helmholtz hat in der Untersuchung über die cyklischen Systeme die wichtigste Form der verborgenen Bewegung ausführlich und zum Zwecke allgemeiner Anwendung behandelt; durch ihn ist den Ausdrücken „verborgene“ Masse, „verborgene“ Bewegung die Geltung technischer Ausdrücke im Deutschen verliehen. Hat aber jene Hypothese die Fähigkeit, die geheimnisvollen Kräfte allmählich aus der Mechanik wieder zu eliminieren, so kann sie auch verhindern, dafs dieselben überhaupt in die Mechanik eintreten. Und entspricht die Verwertung der Hypothese zu ersterem Zwecke der Denkweise der heutigen Physik, so mufs das Gleiche von ihrer Benutzung zu letzterem Zwecke gelten. Dies ist der leitende Gedanke, von welchem wir ausgehen und durch dessen Verfolgung dasjenige Bild entsteht, welches wir als das dritte bezeichneten, und dessen allgemeine Umrisse wir nun umfahren wollen.

Zuerst führen wir also ein die drei unabhängigen Grundbegriffe Zeit, Raum und Masse als Gegenstände der Erfahrung, indem wir angeben, durch welche konkreten sinnlichen Erfahrungen wir uns Zeiten, Massen, räumliche Gröſsen bestimmt denken wollen. Was die Massen anbelangt, so behalten wir uns vor, neben den sinnlich wahrnehmbaren Massen durch Hypothese verborgene Massen einzuführen. Wir stellen sodann die Beziehungen zusammen, welche zwischen jenen konkreten Erfahrungen stets obwalten und welche wir als die wesentlichen Beziehungen zwischen den Grundbegriffen festzuhalten haben. Es ist naturgemäſs, daſs wir die Grundbegriffe zunächst zu je zweien verbinden. Die Beziehungen, welche Raum und Zeit allein betreffen, können wir als Kinematik voraussenden. Zwischen Masse und Zeit allein besteht keine Verknüpfung. Masse und Raum dagegen treten wieder zusammen zu einer Reihe wichtiger erfahrungsmäſsiger Beziehungen. Wir finden nämlich zwischen den Massen der Natur gewisse rein räumliche Zusammenhänge, welche darin bestehen, daſs von Anbeginn an für alle Zeiten, und also unabhängig von der Zeit, jenen Massen gewisse Lagen und gewisse Änderungen der Lage als mögliche, alle anderen aber als unmögliche vorgeschrieben und zugeordnet sind. Wir können über diese Zusammenhänge ferner allgemein aussagen, daſs sie nur die relative Lage der Massen unter einander betreffen und weitergehend, daſs sie gewissen Bedingungen der Stetigkeit genügen, welche ihren mathematischen Ausdruck darin finden, daſs sich die Zusammenhänge selbst stets durch homogene lineare Gleichungen zwischen den ersten Differentialen derjenigen Gröſsen wiedergeben lassen, durch welche wir die Lage der Massen bezeichnet haben. Die Zusammenhänge bestimmter materieller Systeme im einzelnen zu erforschen ist nicht Sache der Mechanik, sondern der experimentellen Physik; die bezeichnenden Merkmale, durch welche sich die verschiedenen materiellen Systeme der Natur unterscheiden, sind nach unserer Vorstellung eben einzig und allein die Zusammenhänge ihrer Massen. In den bisherigen Erörterungen haben wir nur je zwei der Grundbegriffe für sich verbunden, nunmehr wenden wir uns der eigentlichen Mechanik im engeren Sinne zu, in welcher alle drei zusammenzutreten haben. Es gelingt uns ihre erfahrungsmäſsige allgemeine Verknüpfung zusammenzufassen in ein einziges Grundgesetz, welches eine sehr nahe Analogie mit dem gewöhnlichen Trägheitsgesetz zieht. In der That läſst es sich in der Ausdrucksweise, welche wir benutzen, wiedergeben in der Aussage: jede natürliche Bewegung eines selbständigen materiellen Systems bestehe darin, daſs das System mit gleichbleibender Geschwindigkeit eine seiner geradesten Bahnen verfolge. Diese Aussage ist allerdings nur verständlich, nachdem die benutzte mathematische Redeweise gehörig erörtert ist; der Sinn des Satzes aber läſst sich auch in der gewöhnlichen Sprache der Mechanik wiedergeben. Jener Satz faſst nämlich einfach das gewöhnliche Trägheitsgesetz und das Gauss'sche Prinzip des kleinsten Zwanges in eine einzige Behauptung zusammen. Er sagt also aus, daſs, wenn die Zusammenhänge des Systems einen Augenblick gelöst werden könnten, daſs sich dann seine Massen in geradliniger und gleichförmiger Bewegung zerstreuen würden, daſs aber, da solche Auflösung nicht möglich ist, sie jener angestrebten Bewegung wenigstens so nahe bleiben als möglich. Wie jenes Grundgesetz in unserem Bilde der erste Erfahrungssatz der eigentlichen Mechanik ist, so ist er auch der letzte. Aus ihm zusammen mit der zugelassenen Hypothese verborgener Massen und gesetzmäſsiger Zusammenhänge leiten wir den übrigen Inhalt der Mechanik rein deduktiv ab. Um ihn gruppieren wir die übrigen allgemeinen Prinzipien nach ihrer Verwandtschaft zu ihm und untereinander, als Folgerungen oder als Teilaussagen. Wir bemühen uns zu zeigen, daſs bei dieser Anordnung der Inhalt unserer Wissenschaft nicht weniger reich und mannigfaltig ausfällt, als der Inhalt einer Mechanik, welche von vier Grundvorstellungen ausgeht, jedenfalls nicht weniger reich und mannigfaltig als es die Darstellung der Natur verlangt. Übrigens erweist es sich auch hier bald als zweckmäſsig, den Begriff der Kraft einzuführen. Aber die Kraft tritt nun nicht auf als etwas von uns unabhängiges und uns fremdes, sondern als eine mathematische Hilfskonstruktion, deren Eigenschaften wir völlig in unserer Gewalt haben, und welche also auch für uns nichts Rätselhaftes an sich haben kann. Nach dem Grundgesetze muſs nämlich überall da, wo zwei Körper demselben System angehören, die Bewegung des einen durch die Bewegung des anderen mitbestimmt sein. Der Begriff der Kraft entsteht nun dadurch, daſs wir es aus angebbaren Gründen zweckmäſsig finden, diese Bestimmung der einen Bewegung durch die andere in zwei Stadien zu zerlegen und uns zu sagen: die Bewegung des ersten Körpers bestimme zunächst eine Kraft, diese Kraft erst bestimme die Bewegung des zweiten Körpers. Auf diese Weise wird jede Kraft zwar stets Ursache einer Bewegung, mit gleichem Rechte aber zugleich auch stets Folge einer Bewegung; sie wird, genau gesprochen, das nur gedachte Mittelglied zwischen zwei Bewegungen. Es ist klar, daſs bei dieser Auffassung die allgemeinen Eigenschaften der Kräfte mit Denknotwendigkeit aus dem Grundgesetze folgen müssen und wenn wir in möglichen Erfahrungen diese Eigenschaften bestätigt sehen, so kann uns dies nicht einmal verwundern, wenn anders wir an unserm Grundgesetz nicht zweifeln. Mit dem Begriffe der Energie und mit allen anderen einzuführenden Hilfskonstruktionen liegt die Sache ganz ebenso.

Was wir bisher gesagt haben, betraf den physikalischen Inhalt des vorzuführenden Bildes und erschöpfte denselben im Rahmen dieser Einleitung; es wird zweckmäſsig sein, nun auch eine kurze Erörterung der besonderen mathematischen Form zu widmen, in welcher wir denselben wiedergeben werden. Jener Inhalt ist von dieser Form ganz unabhängig und es ist vielleicht nicht ganz klug gehandelt, daſs wir einen von dem Herkömmlichen abweichenden Inhalt sogleich in einer ungewohnten Form darbieten. Indessen weichen ja sowohl Form als Inhalt ein jedes für sich nur sehr wenig von wohlbekannten Dingen ab, auſserdem passen eben dieser Inhalt und diese Form so zu einander, daſs ihre Vorzüge sich gegenseitig stützen. Das wesentliche Merkmal der benutzten Terminologie besteht nun darin, daſs sie gleich von vornherein ganze Systeme von Punkten vorstellt und in Betracht zieht, nicht aber jedesmal von den einzelnen Punkten ausgeht. Einem jeden sind die Ausdrücke „Lage eines Systems von Punkten“ und „Bewegung eines Systems von Punkten“ geläufig. Es ist eine nicht unnatürliche Fortsetzung dieser Redeweise, wenn wir die Gesamtheit der bei der Bewegung durchlaufenen Lagen

eines Systems als seine Bahn bezeichnen. Jeder kleinste Teil dieser Bahn ist alsdann ein Bahnelement. Von zwei Bahnelementen kann das eine ein Teil des andern sein, sie unterscheiden sich alsdann noch nach der Gröſse und nur nach dieser. Zwei Bahnelemente, welche von derselben Lage ausgehen, können aber auch verschiedenen Bahnen angehören, alsdann ist keines von beiden ein Teil des anderen und sie unterscheiden sich nicht nur hinsichtlich der Gröſse; wir sagen deshalb, daſs sie auch verschiedene Richtung haben. Durch diese Aussagen sind freilich die Merkmale „Gröſse“ und „Richtung“ für die Bewegung eines Systems noch nicht eindeutig bestimmt; wir können aber unsere Definition geometrisch oder analytisch so vervollständigen, daſs ihre Folgen weder mit sich selbst noch mit dem Gesagten in Widerspruch geraten und daſs zugleich die definierten Gröſsen in der Geometrie des Systems genau den Gröſsen entsprechen, welche wir in der Geometrie des Punktes mit den gleichen Namen bezeichnen, mit welchen bekannten Gröſsen sie auch stets zusammenfallen, sobald das System sich auf einen Punkt reduziert. Sind aber einmal die Merkmale Gröſse und Richtung bestimmt, so liegt es nahe genug, die Bahn eines Systems gerade zu nennen, wenn alle ihre Elemente die gleiche Richtung haben; und krumm, sobald die Richtung der Elemente sich von Lage zu Lage ändert. Als Maſs der Krümmung bietet sich wie in der Geometrie des Punktes die Änderungsgeschwindigkeit der Richtung mit der Lage von selber dar. Durch diese Definition sind nun aber schon eine ganze Reihe von Beziehungen gegeben und die Zahl derselben wächst, sobald die Bewegungsfreiheit des betrachteten Systems durch seine Zusammenhänge eingeschränkt ist. Insbesondere lenken alsdann gewisse Klassen von Bahnen die Aufmerksamkeit auf sich, welche sich unter den möglichen durch besondere einfache Eigenschaften auszeichnen. Hierher gehören vor allen Dingen diejenigen Bahnen, welche in jeder ihrer Lagen so wenig wie möglich gekrümmt sind und welche wir als die geradesten Bahnen des Systems bezeichnen. Sie sind es, von welchen in dem Grundgesetz die Rede ist und welche wir schon oben bei Anführung desselben erwähnt haben. Hierher gehören ferner diejenigen Bahnen, welche die kürzeste Verbindung zwischen irgend zweien ihrer Lagen bilden, und welche wir als kürzeste Bahnen des Systems bezeichnen. Unter gewissen Bedingungen fallen die Begriffe der geradesten und der kürzesten Bahnen zusammen. Dies Verhältnis ist uns durch Erinnerung an die Theorie der krummen Oberflächen sogar höchst geläufig, aber allgemein und unter allen Umständen hat es gleichwohl nicht statt. Die Sammlung und Ordnung aller hier auftretenden Beziehungen gehört in die Geometrie der Punktsysteme und die Entwickelung dieser Geometrie hat eigenen mathematischen Reiz; wir verfolgen dieselbe aber nur soweit als es der augenblickliche Zweck der physikalischen Anwendung erfordert. Da ein System von n Punkten eine $3n$fache Mannigfaltigkeit der Bewegung darbietet, welche aber durch die Zusammenhänge des Systems auch auf jede beliebige Zahl vermindert werden kann, so entstehen viele Analogien mit der Geometrie eines mehrdimensionalen Raumes, welche zum Teil so weit gehen, dafs dieselben Sätze und Bezeichnungen hier und dort Bedeutung haben können. Es ist aber in unserem Interesse zu betonen, dafs diese Analogien nur formale sind, und dafs trotz eines gelegentlich fremdartigen Klanges sich unsere Betrachtung ausnahmslos auf konkrete Gebilde des Raumes unserer Sinnenwelt beziehen, dafs also auch alle unsere Aussagen mögliche Erfahrungen darstellen und wenn es nötig wäre, durch unmittelbare Versuche, nämlich durch Messung an Modellen bestätigt werden könnten. Den Vorwurf, dafs wir beim Aufbau einer Erfahrungswissenschaft die Welt der Erfahrung verlassen, diesen Vorwurf haben wir also nicht zu fürchten. Dagegen haben wir Rede zu stehen auf die Frage, ob sich denn die Weitläufigkeit einer neuen und ungewohnten Ausdrucksweise lohne, und welchen entsprechenden Nutzen wir von der Anwendung derselben erwarten? Als Antwort nennen wir darauf als ersten Nutzen die grofse Einfachheit und Kürze, mit welcher sich die meisten allgemeinen und umfassenden Aussagen wiedergeben lassen. In der That erfordern Sätze, welche ganze Systeme behandeln hier nicht mehr Worte und nicht mehr Begriffe, als wenn sie unter Benutzung der gewöhnlichen Ausdrucksweise in Bezug auf einen einzelnen Punkt ausgesagt würden. Die Mechanik des materiellen Systems erscheint hier nicht mehr als eine Erweiterung und Verwickelung der Mechanik des einzelnen Punktes,

sondern die letztere fällt als selbständige Untersuchung fort oder tritt doch nur gelegentlich als Vereinfachung und besonderer Fall der ersteren auf. Wendet man etwa ein, diese Einfachheit sei künstlich erzeugt, so antworten wir, dafs es gar keine andere Methode gebe, einfache Beziehungen zu schaffen, als die künstliche und wohlerwogene Anpassung unserer Begriffe an die darzustellenden Verhältnisse. Will man aber in jenem Vorwurf des Künstlichen den Nebensinn des Gesuchten und Unnatürlichen hervorheben, so dürfen wir dem entgegenhalten, dafs man vielleicht mit mehr Recht die Betrachtung ganzer Systeme für das Natürliche und Naheliegende halten könne, als die Betrachtung einzelner Punkte. Denn in Wahrheit ist uns das materielle System unmittelbar gegeben, der einzelne Massenpunkt eine Abstraktion; alle wirkliche Erfahrung wird unmittelbar nur an Systemen gewonnen und die an einfachen Punkten möglichen Erfahrungen sind daraus durch Verstandesschlüsse abgezogen. Als einen zweiten, allerdings nicht sehr wesentlichen Nutzen heben wir die Vorzüge der Form hervor, welche durch unsere mathematische Einkleidung dem Grundgesetz gegeben werden kann. Ohne jene Einkleidung müfsten wir es zerlegen in das erste Newton'sche Gesetz und das Gauss'sche Prinzip des kleinsten Zwanges. Beide zusammen würden nun zwar genau dieselbe Thatsache darstellen, aber sie würden neben dieser Thatsache andeutungsweise noch ein wenig mehr enthalten und dieses Mehr wäre ein Zuviel. Erstens rufen sie die unserer Mechanik fremde Vorstellung wach, dafs die Zusammenhänge der materiellen Systeme doch auch gelöst werden könnten, obwohl wir dieselben als von Anbeginn an bestehende und als gänzlich unlösbare bezeichnet haben. Zweitens kann man bei Benutzung des Gauss'schen Prinzips nicht vermeiden, die Nebenvorstellung zu erwecken, dafs man nicht nur eine Thatsache, sondern zugleich auch den Grund dieser Thatsache mitteilen wolle. Man kann nicht aussagen, dafs die Natur eine Gröfse, welche man Zwang nennt, beständig so klein als möglich hält, ohne anzudeuten, dafs dies geschehe, eben weil jene Gröfse für die Natur einen Zwang, das heifst ein Unlustgefühl bedeute. Man kann nicht aussagen, dafs die Natur verfahre wie ein verständiger Rechner, der seine Beobachtung ausgleicht, ohne nahezulegen, dafs hier wie dort wohlüberlegte Absicht der Grund des Verfahrens sei. Gewifs liegt gerade ein besonderer Reiz in derartigen Seitenblicken und dies hat GAUSS selbst in gerechter Freude an seiner schönen und für unsere Mechanik grundlegenden Entdeckung hervorgehoben. Aber doch müssen wir uns gestehen, dafs dieser Reiz nur ein Spiel mit dem Geheimnisvollen ist; im Ernste glauben wir selbst nicht an unser Vermögen, durch derartige Andeutungen halb schweigend das Welträtsel zu lösen. Unser eigenes Grundgesetz vermeidet solche Winke gänzlich. Indem es genau die Form des gewöhnlichen Trägheitsgesetzes annimmt, giebt es so gut wie dieses eine nackte Thatsache ohne jeden Schein einer Begründung derselben. In demselben Mafse, in welchem es dadurch ärmer und ungeschmückter erscheint, in demselben Mafse ist es ehrlicher und wahrer. Doch vielleicht verführt mich die Vorliebe für die kleine Abänderung, welche ich selbst an dem GAUSS'schen Prinzip angebracht habe, dafs ich Vorzüge in ihr erblicke, welche fremden Augen notwendig verborgen sind. Sicher aber wird man, denke ich, dagegen zustimmen, wenn ich als dritten Nutzen unserer Methode anführe, dafs dieselbe ein helles Licht auf die von HAMILTON erfundene Behandlungsweise mechanischer Probleme mit Hilfe charakteristischer Funktionen wirft. Diese Behandlungsweise hat in den sechzig Jahren ihres Bestehens Anerkennung und Ruhm genug gefunden, aber sie ist doch mehr aufgefafst und behandelt worden wie ein neuer Seitenzweig der Mechanik, dessen Wachstum und Weiterbildung neben der gewöhnlichen Methode und unabhängig von derselben vor sich zu gehen habe. In unserer Form der mathematischen Darstellung aber trägt die HAMILTON'sche Methode nicht den Charakter eines Seitenzweiges, sondern sie erscheint als die gerade, naturgemäfse und sozusagen selbstverständliche Fortsetzung der elementaren Aussagen in allen den Fällen, in welchen sie überhaupt anwendbar ist. Auch das läfst unsere Darstellungsweise klar hervortreten, dafs die HAMILTON'sche Behandlungsweise nicht in den besonderen physikalischen Grundlagen der Mechanik ihre Wurzeln hat, wie man wohl gewöhnlich annimmt, sondern dafs sie im Grunde genommen eine rein geometrische Methode ist, welche begründet und ausgebildet werden kann, ganz unabhängig von

der Mechanik, und welche mit dieser in keiner engeren Beziehung steht, als alle andere von der Mechanik benutzte geometrische Erkenntnis auch. Übrigens ist es von den Mathematikern seit lange bemerkt worden, dafs die HAMILTON'sche Methode rein geometrische Wahrheiten enthält und zum klaren Ausdruck derselben eine eigentümliche, ihr angepafste Ausdrucksweise geradezu fordert. Nur ist diese Thatsache in etwas verwirrender Form zu Tage getreten, nämlich in den Analogieen, welche man beim Verfolg der HAMILTON'schen Gedanken zwischen der gewöhnlichen Mechanik und der Geometrie eines vieldimensionalen Raumes gefunden hat. Unsere Ausdrucksweise giebt eine einfache und verständliche Erklärung dieser Analogieen; sie gestattet auch die Vorteile derselben zu geniefsen und sie vermeidet doch die Unnatürlichkeit, welche in der Verquickung eines Zweiges der Physik mit aufsersinnlichen Abstraktionen liegt.

Wir haben nunmehr unser drittes Bild der Mechanik nach Inhalt und Form soweit geschildert, als es angeht ohne dem Buche selbst vorzugreifen; zugleich hinreichend, um es den beabsichtigten Fragen nach seiner Zulässigkeit, seiner Richtigkeit und seiner Zweckmäfsigkeit unterwerfen zu können. Was zunächst die logische Zulässigkeit des entworfenen Bildes anlangt, so denke ich, dafs dieselbe selbst strengen Anforderungen genügen könne, und hoffe, dafs diese Meinung der Zustimmung begegnen möge. Ich lege auf diesen Vorzug der Darstellung das gröfste Gewicht, ja einzig Gewicht. Ob das entworfene Bild zweckmäfsiger ist, als ein anderes, ob es fähig ist alle zukünftige Erfahrung zu umfassen, ja ob es auch nur alle gegenwärtige Erfahrung umfafst, alles dies ist mir fast nichts gegen die Frage, ob es in sich abgeschlossen, rein und widerspruchsfrei ist. Denn nicht deshalb habe ich es zu zeichnen versucht, weil die Mechanik nicht bereits für ihre Anwendungen genügend Zweckmäfsigkeit zeigte, noch weil dieselbe mit der Erfahrung irgend in Widerstreit geraten wäre, sondern allein um mich von dem drückenden Gefühle zu befreien, dafs ihre Elemente nicht frei seien von Dunkelheiten und Unverständlichkeiten für mich. Nicht das einzig mögliche Bild der mechanischen Vorgänge, noch auch das beste Bild, sondern überhaupt nur ein begreifbares Bild wollte ich suchen und an einem Beispiel zeigen, dafs ein solches möglich sei und wie es etwa aussehen müsse. Die Vollkommenheit ist uns freilich in jeder Richtung unerreichbar, und ich mufs mir gestehen, dafs trotz vieler Mühe das erlangte Bild nicht in allen Punkten von so überzeugender Klarheit ist, dafs es nicht dem Zweifel ausgesetzt und der Verteidigung bedürftig wäre. Doch scheint mir von Einwänden allgemeiner Art nur ein einziger hinreichend nahe zu liegen, dafs es sich lohnt, ihn vorwegzunehmen und abzuschneiden. Er betrifft die Natur der starren Verbindungen, welche wir zwischen den Massen annehmen, und welche wir auch in unserem System auf keine Weise entbehren können. Viele Physiker werden zunächst der Ansicht sein, dafs mit diesen Verbindungen doch schon Kräfte in die Elemente der Mechanik eingeführt und zwar in heimlicher und deshalb unerlaubter Weise eingeführt seien. Denn — so werden sie sagen — starre Verbindungen sind nicht denkbar ohne Kräfte; starre Verbindungen können nicht auf andere Weise zu stande kommen, als indem sie durch Kräfte erzwungen werden. Wir antworten darauf: Eure Behauptung ist allerdings richtig für die Denkweise der gewöhnlichen Mechanik, aber sie ist nicht richtig unabhängig von dieser Denkweise; sie erscheint nicht zwingend dem Geist, welcher die Sache unbefangen und wie zum erstenmal betrachtet. Gesetzt wir finden, auf welche Weise auch immer, dafs der Abstand zweier bestimmter punktförmiger Massen zu allen Zeiten und unter allen Umständen derselbe bleibt, so können wir dieser Thatsache Ausdruck verleihen, ohne andere als räumliche Vorstellungen zu benutzen und die ausgesagte Thatsache hat als Thatsache für die Voraussicht zukünftiger Erfahrung und für alle andern Zwecke ihren Wert unabhängig von einer etwaigen Erklärung, welche wir besitzen oder nicht besitzen. Auf keinen Fall wird der Wert der Thatsache erhöht oder unser Verständnis von ihr verbessert dadurch, dafs wir sie in der Form mitteilen: Zwischen jenen Massen wirke eine Kraft, welche ihren Abstand konstant hält, oder: Zwischen ihnen sei eine Kraft thätig, welche verhindert, dafs sich ihr Abstand von seinem festen Wert entferne. Aber — so wird man uns wieder einwenden — wir sehen ja, dafs die letztere Erklärung, obwohl scheinbar nur eine lächerliche Umschreibung, gleichwohl richtig ist. Denn alle Verbindungen der wirklichen Welt sind nur angenähert starr und der Schein der Starrheit wird nur dadurch hervorgebracht, dafs die elastischen Kräfte die kleinen Abweichungen von der Ruhelage beständig wieder vernichten. Wir antworten: Von solchen starren Verbindungen der greifbaren Körper, welche nur angenähert verwirklicht sind, wird unsere Mechanik selbstverständlich als Thatsache auch nur aussagen, dafs ihnen angenähert genügt werde und zu dieser Aussage, auf welche es ankommt, bedarf sie wiederum des Begriffs der Kraft nicht. Will unsere Mechanik aber in zweiter Annäherung die Abweichungen und damit die elastischen Kräfte berücksichtigen, so wird sie für diese wie für alle Kräfte eine dynamische Erklärung annehmen; bei der Suche nach den wirklich starren Verbindungen wird sie vielleicht zur Welt der Atome hinabzusteigen haben, aber diese Erörterungen sind hier nicht am Platze, sie berühren nicht mehr die Frage, ob es logisch zulässig sei, feste Verbindungen unabhängig von und vor den Kräften zu behandeln. Dafs diese Frage zu bejahen sei und nur dies wünschten wir zu erweisen und glauben wir erwiesen zu haben. Steht aber dies fest, so können wir aus der Natur der festen Verbindungen die Eigenschaften der Kräfte und ihr Verhalten ableiten ohne uns damit einer petitio principii schuldig gemacht zu haben. Andere Einwände ähnlicher Art sind möglich, können aber, wie ich glaube, in ähnlicher Art erledigt werden.

Dem Wunsche, die logische Reinheit des Systems auch in allen Einzelheiten zu erweisen, habe ich dadurch Ausdruck gegeben, dafs ich für die Darstellung die ältere synthetische Form benutzt habe. Diese Form bietet für jenen Zweck schon darin einen gewissen Vorteil, dafs sie uns zwingt, jeder wesentlichen Aussage den beabsichtigten logischen Wert in abwechslungsarmer aber bestimmter Angabe vorauszuschicken. Dadurch werden die bequemen Vorbehalte und Vieldeutigkeiten unmöglich gemacht, zu welchen die gewöhnliche Sprache durch den Reichtum ihrer Verknüpfung verlockt. Der wichtigste Vorteil der gewählten Form ist aber dieser, dafs sie stets nur auf Vorbewiesenes sich beruft, niemals auf später zu erweisendes, so dafs man der ganzen Kette sicher ist, wenn man beim Vorwärtsschreiten nur jedes einzelne Glied genügend prüft. In dieser Hinsicht habe ich den Pflichten dieser Art der Darstellung mit Strenge zu genügen gesucht. Im übrigen ist es selbstverständlich, dafs die Form allein vor Irrtum und Übersehen keinen Schutz gewähren kann und bitte ich etwa eingeflossene Fehler nicht um des etwas anspruchsvollen Vortrags willen strenger zu beurteilen. Ich hoffe, solche Fehler werden stets verbesserungsfähig sein und daher keinen wesentlichen Punkt betreffen. Bisweilen bin ich übrigens bewufster Weise zur Vermeidung allzu grofser Weitläufigkeit hinter der vollen Schärfe zurückgeblieben, welche die Darstellungsweise eigentlich fordert. Es bedarf keiner besonderen Begründung, dafs ich den Betrachtungen der eigentlichen Mechanik, welche von physikalischer Erfahrung abhängt, diejenigen Beziehungen vorausgeschickt habe, welche allein Folge der gewählten Definitionen und mathematischer Notwendigkeit sind, und welche, wenn überhaupt, so doch jedenfalls in anderm Sinne als jene mit der Erfahrung zusammenhängen. Nichts hindert übrigens den Leser, mit dem zweiten Buche zu beginnen. Die durchsichtige Analogie mit der Mechanik des einzelnen Punktes und der bekannte Stoff werden ihn den Sinn der vorgetragenen Sätze leicht erraten lassen. Hat er der benutzten Redeweise Zweckmäfsigkeit zugebilligt, so ist immer noch Zeit, dafs er sich aus dem ersten Buche von ihrer Zulässigkeit überzeuge.

Wenden wir uns jetzt der zweiten wesentlichen Forderung zu, welcher unser Bild zu genügen hat, so ist es zunächst unzweifelhaft, dafs das System sehr viele natürliche Bewegungen richtig darstellt. Allein nach den Ansprüchen des Systems genügt dies nicht; es mufs als notwendige Ergänzung die Behauptung dahin erweitert werden, dafs das System alle natürlichen Bewegungen ohne Ausnahme umfasse. Auch dies kann man, denke ich, behaupten, wenigstens in dem Sinne, dafs sich zur Zeit keine bestimmten Erscheinungen angeben lassen, welche dem System nachweislich widersprächen. Es ist freilich klar, dafs die Ausdehnung auf alle Erscheinungen einer scharfen Prüfung nicht zugänglich ist, dafs daher das System über das Ergebnis sicherer Erfahrung ein wenig hinausgeht und also den Charakter einer Hypothese trägt, welche ver-

suchsweise angenommen wird und auf plötzliche Widerlegung durch ein einziges Beispiel oder allmähliche Bestätigung durch sehr viele Beispiele wartet. Vornehmlich sind es zwei Stellen, an welchen ein Hinausgehen über sichere Erfahrung stattfindet: Die eine betrifft unsere Beschränkung der möglichen Zusammenhänge, die andere betrifft die dynamische Erklärung der Kräfte. Mit welchem Rechte können wir versichern, dafs alle Zusammenhänge der Natur durch lineare Differentialgleichungen erster Ordnung sich ausdrücken lassen? Diese Annahme ist für uns nicht eine nebensächliche, welche wir auch fallen lassen könnten; mit ihr fiele unsere Mechanik; denn es fragt sich, ob auf Verbindungen allgemeinster Art unser Grundgesetz anwendbar bliebe. Und doch sind Verbindungen allgemeinerer Art nicht nur vorstellbar, sie werden auch in der gewöhnlichen Mechanik ohne Bedenken zugelassen. Dort hindert uns nichts, die Bewegung eines Punktes zu untersuchen, dessen Bahn der einzigen Beschränkung unterworfen ist, dafs sie mit einer gegebenen Ebene einen gegebenen Winkel bilde, oder dafs ihr Krümmungshalbmesser beständig einer gegebenen anderen Länge proportional sei. Diese Bedingungen fallen schon nicht mehr unter diejenigen, welche unsere Mechanik zuläfst. Woher nehmen wir aber die Gewifsheit, dafs sie auch durch die Natur der Dinge ausgeschlossen seien? Wir können erwidern, dafs man vergeblich versuche, diese und ähnliche Verbindungen durch ausführbare Mechanismen zu verwirklichen und wir können uns in dieser Ansicht auf die gewaltige Autorität von Helmholtz's berufen. Aber in jedem Beispiel können Möglichkeiten übersehen worden sein, und noch so viele Beispiele würden nicht hinreichen, die allgemeine Behauptung zu erweisen. Mit mehr Recht können wir, wie mir scheint, als Grund unserer Überzeugung anführen, dafs alle Verbindungen eines Systems, welche aus dem Rahmen unserer Mechanik heraustreten, in dem einen oder in dem andern Sinne eine unstetige Aneinanderreihung seiner möglichen Bewegungen bedeuten würden, dafs es aber in der That eine Erfahrung allgemeinster Art sei, dafs die Natur im Unendlichkleinen überall und in jedem Sinne Stetigkeit aufweise, eine Erfahrung, die sich in dem alten Satze „natura non facit saltus", zu fester Überzeugung verdichtet hat. Ich habe des- ?

halb auch im Texte Wert darauf gelegt, die zugelassenen Verbindungen allein durch ihre Stetigkeit zu definieren, und ihre Eigenschaft, sich durch Gleichungen bestimmter Form darstellen zu lassen, erst aus jener abzuleiten. Eigentliche Sicherheit wird indessen auch so nicht erlangt. Denn die Unbestimmtheit jenes alten Satzes läſst es zweifelhaft erscheinen, ob die Grenzen seiner berechtigten Tragweite hinreichend feststehen und wieweit er überhaupt das Ergebnis wirklicher Erfahrung, wieweit das Ergebnis willkürlicher Voraussetzung ist. Am gewissenhaftesten wird es daher sein, zuzugeben, daſs unsere Annahme über die zulässigen Verbindungen den Charakter einer versuchsweise angenommenen Hypothese trage. Ganz ähnlich liegen die Dinge in betreff der dynamischen Erklärung der Kräfte. Wir können allerdings zeigen, daſs gewisse Klassen verborgener Bewegungen Kräfte erzeugen, welche, wie die Fernkräfte der Natur, sich mit beliebiger Annäherung als Ableitungen von Kräftefunktionen darstellen lassen. Es stellt sich auch heraus, daſs die Formen dieser Kräftefunktionen sehr allgemeiner Natur sein können und wir leiten in der That gar keine Einschränkungen derselben ab. Aber auf der anderen Seite bleiben wir auch den Beweis schuldig, daſs sich jede beliebige Form der Kräftefunktionen erzielen läſst und es bleibt daher die Frage offen, ob nicht etwa gerade eine der in der Natur vorkommenden Formen einer solchen Erklärungsweise sich entzieht. Es bleibt auch hier abzuwarten, ob die Zeit unsere Annahme widerlegen oder durch das Ausbleiben einer Widerlegung mehr und mehr wahrscheinlich machen wird. Ein gutes Vorzeichen können wir darin sehen, daſs die Ansicht vieler ausgezeichneter Physiker sich der Hypothese immer mehr zuneigt. Ich erinnere nochmals an die Wirbeltheorie der Atome von Lord Kelvin, welche uns ein Bild des materiellen Weltganzen vorführt, wie es mit den Prinzipien unserer Mechanik in vollem Einklange ist. Und doch verlangt unsere Mechanik keineswegs eine so groſse Einfachheit und Beschränkung der Voraussetzungen, wie sie sich Lord Kelvin auferlegt hat. Wir würden unsere Grundsätze noch nicht verlassen, wenn wir annähmen, daſs die Wirbel um starre oder um biegsame, aber unausdehnbare Kerne kreisten und auch das welterfüllende Medium könnten wir anstatt der bloſsen Inkompressibilität viel verwickelteren Bedingungen unterwerfen, deren allgemeinste Form noch zu untersuchen wäre. Es erscheint also keineswegs ausgeschlossen, daſs wir mit den von unserer Mechanik zugelassenen Hypothesen zur Erklärung der Erscheinungen auch ausreichen.

Einen Vorbehalt müssen wir indessen hier einschalten. Es ist gewiſs eine gerechtfertigte Vorsicht, wenn wir im Texte das Gebiet unserer Mechanik ausdrücklich beschränken auf die unbelebte Natur und die Frage vollkommen offen lassen, wie weit sich ihre Gesetze darüber hinaus erstrecken. In Wahrheit liegt die Sache ja so, daſs wir weder behaupten können, daſs die inneren Vorgänge der Lebewesen denselben Gesetzen folgen, wie die Bewegungen der leblosen Körper, noch auch behaupten können, daſs sie andern Gesetzen folgen. Der Anschein aber und die gewöhnliche Meinung spricht für einen grundsätzlichen Unterschied. Und dasselbe Gefühl, welches uns antreibt, aus der Mechanik der leblosen Welt jede Andeutung einer Absicht, einer Empfindung, der Lust und des Schmerzes, als fremdartig auszuscheiden, dasselbe Gefühl läſst uns Bedenken tragen, unser Bild der belebten Welt dieser reicheren und bunteren Vorstellungen zu berauben. Unser Grundgesetz, vielleicht ausreichend die Bewegung der toten Materie darzustellen, erscheint wenigstens der flüchtigen Schätzung zu einfach und zu beschränkt, um die Mannigfaltigkeit selbst des niedrigsten Lebensvorganges wiederzugeben. Daſs dem so ist, scheint mir nicht ein Nachteil, sondern eher ein Vorzug unseres Gesetzes. Eben weil es uns gestattet das Ganze der Mechanik umfassend zu überblicken, zeigt es uns auch die Grenzen dieses Ganzen. Eben weil es uns nur eine Thatsache giebt, ohne derselben den Schein der Notwendigkeit beizulegen, läſst es uns erkennen, daſs alles auch anders sein könnte. Vielleicht wird man solche Erörterungen an dieser Stelle für überflüssig halten. In der That ist man auch nicht gewöhnt, sie in der gewöhnlichen Darstellung der Mechanik bei den Elementen behandelt zu sehen. Aber dort gewährt die völlige Unbestimmtheit der eingeführten Kräfte noch einen weiten Spielraum. Man behält sich stillschweigend vor, später etwa einen Gegensatz zwischen den Kräften der belebten und der unbelebten Natur festzustellen. In unserer Darstellung ist das betrachtete Bild von vornherein so scharf umrissen, daſs sich nachträglich kaum mehr tief eingreifende Einteilungen werden vornehmen lassen. Wollen wir daher die aufgeworfene Frage nicht überhaupt ignorieren, so müssen wir gleich im Eingang Stellung zu derselben nehmen.

Über die Zweckmäſsigkeit unseres dritten Bildes können wir uns ziemlich kurz fassen. Wir können aussagen, daſs dieselbe, wie der Inhalt des Buches zeigen soll, nach Deutlichkeit und Einfachheit etwa derjenigen gleichkommt, welche wir dem zweiten Bilde zusprachen, und daſs wir dieselben Vorzüge, welche wir dort rühmten, auch hier hervorheben können. Allerdings ist der Umkreis der zugelassenen Möglichkeiten hier nicht ganz so eng gezogen wie dort, da diejenigen starren Verbindungen, deren Fehlen wir dort hervorhoben, hier durch die Grundannahmen nicht ausgeschlossen sind. Aber diese Erweiterung entspricht der Natur und ist daher ein Vorzug; auch hindert sie nicht, die allgemeinen Eigenschaften der natürlichen Kräfte herzuleiten, in welchen die Bedeutung des zweiten Bildes lag. Einfachheit besteht hier wie dort zunächst im Sinne der physikalischen Anwendung. Auch hier können wir unsere Betrachtung auf beliebige der Beobachtung zugängliche Merkmale der materiellen Systeme beschränken, und aus ihren vergangenen Veränderungen durch Anwendung des Grundgesetzes die zukünftigen ableiten, ohne daſs wir nötig hätten, die Lagen aller Einzelmassen des Systems zu kennen und ohne daſs wir nötig hätten, diese Unkenntnis durch willkürliche, einfluſslose und wahrscheinlich falsche Hypothesen zu überdecken und zu bemänteln. Im Gegensatz zum zweiten Bilde besitzt aber unser drittes Einfachheit auch in dem Sinne, daſs sich seine Vorstellungen der Natur so anschmiegen, daſs die wesentlichen Beziehungen der Natur durch einfache Beziehungen zwischen den Begriffen wiedergegeben werden. Das zeigt sich nicht nur im Grundgesetze selbst, sondern auch in den zahlreichen allgemeinen Folgerungen desselben, welche den sogenannten Prinzipien der Mechanik entsprechen. Es muſs allerdings zugegeben werden, daſs diese Einfachheit nur eintritt, so lange wir es

mit vollständig bekannten Systemen zu thun haben, und daſs sie wieder verschwindet, sobald verborgene Massen sich einmischen. Aber auch in diesen Fällen liegt dann der Grund der Verwickelung klar auf der Hand; wir verstehen, daſs der Verlust der Einfachheit nicht in der Natur, sondern in unserer mangelhaften Kenntnis derselben beruht; wir begreifen, daſs die eintretenden Komplikationen nicht allein eine mögliche, sondern die notwendige Folge unserer besonderen Voraussetzungen sind. Auch das muſs zugegeben werden, daſs die Mitwirkung verborgener Massen, welche vom Standpunkte unserer Mechanik aus der entlegene und besondere Fall ist, daſs diese Mitwirkung gerade der gewöhnliche Fall der Probleme des täglichen Lebens und der Technik ist. Daher ist es auch nützlich, hier nochmals zu betonen, daſs wir von einer Zweckmäſsigkeit überhaupt nur geredet haben in einem besonderen Sinne, nämlich im Sinne eines Geistes, welcher ohne Rücksicht auf die zufällige Stellung des Menschen in der Natur das Ganze unserer physikalischen Erkenntnis objectiv zu umfassen und in einfacher Weise darzustellen sucht; daſs wir aber keineswegs redeten von einer Zweckmäſsigkeit im Sinne der praktischen Anwendung und der Bedürfnisse des Menschen. In betreff dieser letzteren kann die für sie ausdrücklich erdachte gewöhnliche Darstellung der Mechanik wohl niemals durch eine zweckmäſsigere ersetzt werden. Zu dieser Darstellung verhält sich die von uns hier vorgeführte etwa wie die systematische Grammatik einer Sprache zu einer Grammatik, welche den Lernenden möglichst bald erlauben soll, sich über die Notwendigkeiten des täglichen Lebens zu verständigen. Man weiſs wie verschieden die Anforderungen an beide sind und wie verschieden ihre Anordnungen ausfallen müssen, wenn beide ihrem Zweck so genau wie möglich entsprechen sollen.

Blicken wir zum Schlusse noch einmal zurück auf die drei Bilder der Mechanik, welche wir vorgeführt haben und suchen wir einen letzten und endgültigen Vergleich zwischen ihnen anzustellen. Das zweite Bild lassen wir nach dem, was wir gesagt haben, fallen. Das erste und dritte Bild wollen wir gleichstellen in Bezug auf die Zulässigkeit, indem wir annehmen, daſs dem ersten Bilde eine in logischer Hinsicht vollständig befriedigende Gestalt gegeben sei, wie wir angenommen haben, daſs sie gegeben werden könne. Wir wollen beide Bilder auch gleichstellen in Bezug auf die Zweckmäſsigkeit, indem wir annehmen, daſs man das erste Bild durch geeignete Zusätze ergänzt habe und indem wir annehmen, daſs die nach verschiedener Richtung gehenden Vorzüge einander das Gleichgewicht halten. Dann bleibt als einziger Wertmaſsstab die Richtigkeit der Bilder, welche durch die Gewalt der Dinge bestimmt ist, und welche nicht in unserer Willkür liegt. Und hier machen wir nun die wichtige Bemerkung, daſs nur das eine oder das andere jener Bilder, nicht aber beide gleichzeitig richtig sein können. Denn suchen wir die wesentlichen Beziehungen beider Darstellungen auf ihren kürzesten Ausdruck zu bringen, so können wir sagen: Das erste Bild nehme als letzte konstante Elemente in der Natur die relativen Beschleunigungen der Massen gegen einander an, aus diesen leite sie gelegentlich angenähert, aber auch nur angenähert feste Verhältnisse zwischen den Lagen ab. Das dritte Bild aber nehme als die streng unveränderlichen Elemente der Natur feste Verhältnisse zwischen den Lagen an, aus diesen leite sie, wo die Erscheinungen es erfordern, angenähert, aber auch nur angenähert unveränderliche relative Beschleunigungen zwischen den Massen her. Könnten wir nun die Bewegungen der Natur nur genau genug erkennen, so wüſsten wir sogleich, ob in ihnen die relative Beschleunigung oder ob die relativen Lagenverhältnisse der Massen oder ob beide nur angenähert unveränderlich sind. Wir wüſsten dann auch sogleich, welche von unseren beiden Annahmen falsch ist oder ob beide falsch sind, denn richtig können nicht beide gleichzeitig sein. Die gröſste Einfachheit steht auf seiten des dritten Bildes. Was uns zwingt, gleichwohl zunächst zu Gunsten des ersten zu entscheiden, ist der Umstand, daſs wir wirklich in den Fernkräften relative Beschleunigungen aufweisen können, welche bis an die Grenze unserer Beobachtung unveränderlich scheinen, während alle festen Verbindungen zwischen den Lagen der greifbaren Körper schon innerhalb der Wahrnehmung unserer Sinne sich schnell nur angenähert als konstant erweisen. Aber dies Verhältnis ändert sich zu Gunsten des dritten Bildes, sobald die verfeinerte Erkenntnis uns etwa zeigt, daſs die Annahme unveränderlicher Fernkräfte nur eine erste Annäherung an die Wahrheit liefert, welcher Fall in dem Gebiete der elektrischen und magnetischen Kräfte bereits eingetreten ist. Und die Wage schlägt vollends über zu Gunsten des dritten Bildes, sobald eine zweite Annäherung an die Wahrheit dadurch erzielt werden kann, daſs man die vermeintliche Wirkung der Fernkräfte zurückführt auf Bewegungsvorgänge in einem raumerfüllenden Mittel, dessen kleinste Teile starren Verbindungen unterliegen, ein Fall der gleichfalls in dem erwähnten Gebiete nahezu verwirklicht erscheint. Hier also liegt das Feld, auf welchem auch der Entscheidungskampf zwischen den verschiedenen von uns betrachteten Grundannahmen der Mechanik ausgefochten werden muſs. Die Entscheidung selbst aber setzt voraus, daſs vorher die vorhandenen Möglichkeiten nach allen Richtungen hin gründlich erwogen seien. Sie nach einer besonderen Richtung zu entwickeln, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit. Diese Arbeit ist also notwendig gewesen, auch wenn es noch lange dauern sollte, bis eine Entscheidung möglich ist, und auch dann, wenn diese Entscheidung schlieſslich zu Ungunsten des hier ausführlich entwickelten Bildes ausfallen sollte.

ERSTES BUCH.

ZUR GEOMETRIE UND KINEMATIK DER MATERIELLEN SYSTEME.

Vorbemerkung. Den Überlegungen des ersten Buches bleibt die Erfahrung völlig fremd. Alle vorgetragenen Aussagen sind Urteile a priori im Sinne KANT's. Sie beruhen auf den Gesetzen der inneren Anschauung und den Formen der eigenen Logik des Aussagenden und haben mit der äufseren Erfahrung desselben keinen anderen Zusammenhang, als ihn diese Anschauungen und Formen etwa haben. 1

Abschnitt 1. Zeit, Raum, Masse.

Erläuterung. Die Zeit des ersten Buches ist die Zeit unserer inneren Anschauung. Sie ist daher eine Gröfse, von deren Änderung die Änderungen der übrigen betrachteten Gröfsen abhängig gedacht werden können, während sie selbst stets unabhängig veränderlich ist. 2

Der Raum des ersten Buches ist der Raum unserer Vorstellung. Er ist also der Raum der EUKLID'schen Geometrie mit allen Eigenschaften, welche diese Geometrie ihm zuspricht. Es ist gleichgültig für uns, ob man diese Eigenschaften ansieht als gegeben durch die Gesetze der inneren Anschauung, oder als denknotwendige Folgen willkürlicher Definitionen.

Die Masse des ersten Buches wird eingeführt durch eine Definition.

3 **Definition 1.** Ein Massenteilchen ist ein Merkmal, durch welches wir einen bestimmten Punkt des Raumes zu einer gegebenen Zeit eindeutig zuordnen einem bestimmten Punkte des Raumes zu jeder anderen Zeit.

Jedes Massenteilchen ist unveränderlich und unzerstörbar. Die durch dasselbe Massenteilchen gekennzeichneten Punkte des Raumes zu zwei verschiedenen Zeiten fallen zusammen, wenn die Zeiten zusammenfallen. Diese Bestimmungen sind bereits in der Definition enthalten, wenn deren Wortlaut richtig gefaſst wird.

4 **Definition 2.** Die Zahl der Massenteilchen in einem beliebigen Raume, verglichen mit der Zahl der Massenteilchen, welche sich in einem festgesetzten Raume zu festgesetzter Zeit finden, heiſst die in dem ersteren Raume enthaltene Masse.

Die Zahl der Massenteilchen in dem Vergleichsraume kann und soll unendlich groſs gewählt werden. Die Masse des einzelnen Massenteilchens wird alsdann nach der Definition unendlich klein. Die Masse in einem beliebigen Raume kann daher jeden rationalen oder irrationalen Wert annehmen.

5 **Definition 3.** Eine endliche oder unendlich kleine Masse, vorgestellt in einem unendlich kleinen Raume, heiſst ein materieller Punkt.

Ein materieller Punkt besteht also aus einer beliebigen Anzahl mit einander verbundener Massenteilchen. Diese Zahl soll stets unendlich groſs sein, was dadurch erreicht werden kann, daſs wir uns die Massenteilchen von höherer Ordnung unendlich klein denken, als die etwa betrachteten materiellen Punkte von verschwindender Masse. Die Massen der materiellen Punkte, insbesondere auch die Massen der unendlich kleinen materiellen Punkte können darnach in jedem beliebigen rationalen oder irrationalen Verhältnis zu einander stehen.

6 **Definition 4.** Eine Anzahl gleichzeitig betrachteter materieller Punkte heiſst ein System materieller Punkte, oder kurz ein System. Die Summe der Massen der einzelnen Punkte ist nach 4 die Masse des Systems.

Ein endliches System besteht also aus einer endlichen Zahl endlicher oder aus einer unendlichen Anzahl unendlich

kleiner materieller Punkte oder aus beiden. Stets ist es erlaubt, das System materieller Punkte anzusehen als zusammengesetzt aus einer unendlichen Anzahl von Massenteilchen.

Anmerkung 1. Im folgenden werden wir das endliche System stets behandeln als bestehend aus einer endlichen Zahl endlicher materieller Punkte. Da wir aber keine obere Grenze festsetzen für die Zahl derselben und keine untere für ihre Masse, so umfassen unsere allgemeinen Aussagen als besonderen Fall auch den Fall, daſs das System unendlich viele unendlich kleine materielle Punkte enthält. Auf die Besonderheiten, welche die analytische Behandlung dieses Falles nötig macht, werden wir indessen nicht eingehen. 7

Anmerkung 2. Der materielle Punkt kann angesehen werden als ein besonderer Fall und als das einfachste Beispiel eines Systems materieller Punkte. 8

Abschnitt 2. Lagen und Verrückungen der Punkte und Systeme.

Lage.

Definition 1. Der Punkt des Raumes, welcher durch ein gewisses Massenteilchen zu einer gewissen Zeit gekennzeichnet ist, wird die Lage des Massenteilchens zu jener Zeit genannt. Lage eines materiellen Punktes heiſst die gemeinsame Lage seiner Massenteilchen. 9

Definition 2. Die gleichzeitig vorgestellte Gesamtheit der Lagen aller Punkte eines Systems heiſst die Lage des Systems. 10

Definition 3. Jede beliebige Lage eines materiellen Punktes im unendlichen Raume heiſst eine geometrisch denk- 11 bare oder kurz eine denkbare Lage des Punktes. Die Gesamtheit irgend welcher denkbaren Lagen der Punkte eines Systems heifst eine denkbare Lage des Systems.

Zu einer jeden Zeit können sich unterscheiden zwei Massenteilchen durch ihre Lage, zwei materielle Punkte durch ihre Masse und ihre Lage, zwei Systeme materieller Punkte durch Zahl, Masse und Lage ihrer Punkte. Nach anderen Richtungen als diesen aber können sich auf Grund unserer bisherigen Definitionen Massenteilchen, materielle Punkte, Systeme materieller Punkte nicht unterscheiden.

12 **Analytische Darstellung der Lage.** a) des Punktes. Die Lage eines materiellen Punktes kann analytisch dargestellt werden durch die Angabe der drei rechtwinklig-geradlinigen cartesischen Koordinaten desselben in Bezug auf ein ruhendes, festes Axensystem. Diese Koordinaten sollen dauernd mit $x_1\, x_2\, x_3$ bezeichnet werden. Jeder denkbaren Lage des Punktes entspricht ein eindeutig bestimmtes Wertsystem dieser Koordinaten, und umgekehrt jedem willkürlich gewählten Wertsystem der Koordinaten eine eindeutig bestimmte denkbare Lage des Punktes.

Anstatt durch seine rechtwinkligen Koordinaten kann die Lage eines Punktes auch bestimmt werden durch irgend welche r Gröfsen $p_1 \ldots p_\varrho \ldots p_r$, sobald durch Übereinkunft bestimmte Wertsysteme dieser Gröfsen bestimmten Lagen stetig zugeordnet sind und umgekehrt. Die rechtwinkligen Koordinaten sind alsdann Funktionen dieser Gröfsen, und umgekehrt. Die Gröfsen p_ϱ bezeichnen wir als allgemeine Koordinaten des Punktes. Ist $r > 3$, so müssen zwischen den p_ϱ aus geometrischen Gründen $r - 3$ Gleichungen bestehen, welche gestatten, die p_ϱ als Funktionen dreier unabhängiger Gröfsen, z. B. der $x_1\, x_2\, x_3$, darzustellen. Es soll indessen eine Abhängigkeit der Koordinaten von einander aus rein geometrischen Gründen ausgeschlossen sein, und deshalb stets vorausgesetzt werden, dafs $r \gtreqless 3$ sei. Ist $r < 3$, so werden nicht alle denkbaren Lagen des Punktes durch Wertsysteme der p_ϱ dargestellt, sondern nur ein Teil derselben. Die durch die p_ϱ nicht dargestellten Lagen sollen bei Benutzung der p_ϱ dadurch selbst als von der Betrachtung ausgeschlossen gelten.

Analytische Darstellung. b) des Systems. Die Lage eines Systems von n materiellen Punkten kann analytisch dargestellt werden durch Angabe der $3n$ rechtwinkligen Koordinaten der Punkte des Systems. Diese Koordinaten sollen dauernd bezeichnet werden mit $x_1 \ldots x_\nu \ldots x_{3n}$, wobei $x_1\, x_2\, x_3$ die Koordinaten des ersten Punktes, $x_{3\mu-2}\, x_{3\mu-1}\, x_{3\mu}$ die entsprechend gerichteten Koordinaten des μten Punktes bedeuten mögen. Diese $3n$ Koordinaten x_ν bezeichnen wir auch kurz als die rechtwinkligen Koordinaten des Systems. Jeder denkbaren Lage des Systems entspricht ein eindeutig bestimmtes Wertsystem seiner rechtwinkligen Koordinaten, und umgekehrt jedem willkürlich gewählten Wertsystem der x_ν eine eindeutig bestimmte denkbare Lage des Systems. 13

Anstatt durch die rechtwinkligen Koordinaten können wir die Lage eines Systems auch bestimmen durch irgendwelche r Gröfsen $p_1 \ldots p_\varrho \ldots p_r$, sobald durch Übereinkunft bestimmte Wertsysteme dieser Gröfsen bestimmten Lagen stetig zugeordnet sind und umgekehrt. Die rechtwinkligen Koordinaten sind dadurch Funktionen dieser Gröfsen, und umgekehrt. Die Gröfsen p_ϱ bezeichnen wir als allgemeine Koordinaten des Systems. Ist $r > 3n$, so müssen zwischen den p_ϱ aus geometrischen Gründen $r - 3n$ Gleichungen bestehen. Wir wollen indessen ausschliefsen, dafs zwischen den Koordinaten aus rein geometrischen Gründen eine Abhängigkeit bestehe, und es sei daher stets $r \gtreqless 3n$. Ist $r < 3n$, so werden nicht alle denkbaren Lagen des Systems durch Wertsysteme der p_ϱ dargestellt, sondern nur ein Teil derselben. Die durch die p_ϱ nicht dargestellten Lagen sollen bei Benutzung der Koordinaten p_ϱ dadurch selbst als von der Betrachtung ausgeschlossen gelten.

Konfiguration und absolute Lage.

Definition 1. Die Gesamtheit der gegenseitigen Lagen der Punkte eines Systems heifst die Konfiguration des Systems. 14

Die Konfiguration des Systems und die absolute Lage der Konfiguration im Raume bestimmen zusammen die Lage des Systems.

15 **Definition 2.** Konfigurationskoordinate nennen wir jede Koordinate des Systems, deren Wert nicht geändert werden kann, ohne daſs dadurch die Konfiguration des Systems sich änderte.

Ob eine bestimmte Koordinate Konfigurationskoordinate ist oder nicht, hängt also nicht ab von der Wahl der übrigen gleichzeitig benutzten Koordinaten.

16 **Definition 3.** Koordinate der absoluten Lage heiſst jede Koordinate des Systems, durch deren Änderung die Konfiguration nicht geändert werden kann, solange die übrigen Koordinaten des Systems sich nicht ändern.

Ob eine bestimmte Koordinate Koordinate der absoluten Lage ist oder nicht, hängt also ab von der Wahl der übrigen gleichzeitig benutzten Koordinaten.

Folgerungen.

17 1. Eine Koordinate kann nicht zugleich Konfigurationskoordinate und Koordinate der absoluten Lage sein. Dagegen kann und wird im allgemeinen eine beliebig herausgegriffene Koordinate weder Konfigurationskoordinate noch auch Koordinate der absoluten Lage sein.

18 2. Sobald $n > 3$, können $3n$ von einander unabhängige Koordinaten aller Lagen auf mannigfaltige Art so gewählt werden, daſs sich unter ihnen bis zu $3n-6$ Konfigurationskoordinaten finden, aber auf keine Weise so, daſs sich mehr als $3n-6$ Konfigurationskoordinaten unter ihnen finden.

Denn wählen wir unter die Koordinaten die 3 Abstände dreier beliebiger Punkte des Systems von einander und die $3(n-3)$ Abstände der übrigen von jenen, so haben wir bereits $3n-6$ Konfigurationskoordinaten, und je $3n-6$ verschiedene Funktionen jener Abstände werden ebenfalls $3n-6$ Konfigurationskoordinaten des Systems sein. Weniger Konfigurationskoordinaten können vorhanden sein; denn es sind z. B. gar keine vorhanden, wenn wir die $3n$ rechtwinkligen Koordinaten benutzen. Mehr Konfigurationskoordinaten aber können sich unter unabhängigen Koordinaten nicht finden; denn wären unter beliebigen Koordinaten mehr als $3n-6$ Konfigurationskoordinaten vorhanden, so lieſsen sich die letzteren als Funktionen jener $3n-6$ Abstände darstellen, wären also nicht von einander unabhängig.

3. Sobald $n > 3$, können $3n$ unabhängige Koordinaten aller denkbaren Lagen eines Systems auf mannigfaltige Art 19
so gewählt werden, daſs sich unter ihnen bis zu 6, aber nicht mehr als 6 Koordinaten der absoluten Lage finden.

Denn wählen wir die Koordinaten so, daſs sich unter ihnen $3n-6$ Konfigurationskoordinaten finden, und fügen hinzu 6 beliebige Koordinaten, etwa 6 der rechtwinkligen Koordinaten des Systems, so sind die letzteren eo ipso Koordinaten der absoluten Lage, da keine Änderung derselben die Konfiguration ändert, solange die übrigen festgehalten werden. Weniger als 6 Koordinaten der absoluten Lage können vorhanden sein; denn es sind z. B. keine vorhanden, wenn wir die rechtwinkligen Koordinaten des Systems benutzen. Mehr als 6 aber können nicht vorhanden sein; denn wären für eine bestimmte Wahl der Koordinaten mehr vorhanden, so wären alle denkbaren Konfigurationen bestimmt durch die übrigen weniger als $3n-6$ Koordinaten, es lieſsen sich also für das System überhaupt nicht $3n-6$ von einander unabhängige Konfigurationskoordinaten angeben, was gegen Folgerung 2 wäre.

4. Sind $3n$ unabhängige Koordinaten eines Systems 20
von n Punkten so gewählt, daſs sich unter ihnen $3n-6$ Konfigurationskoordinaten finden, so sind die übrigen 6 notwendig Koordinaten der absoluten Lage. Sind jene $3n$ Koordinaten so gewählt, daſs sich unter ihnen 6 Koordinaten der absoluten Lage finden, so sind die übrigen $3n-6$ notwendig Konfigurationskoordinaten.

Denn fände sich unter den letzteren $3n-6$ Koordinaten auch nur eine, welche geändert werden könnte ohne die Konfiguration zu ändern, so wäre die absolute Lage der Konfiguration bestimmt durch mehr als 6 unabhängige Koordinaten, was nicht möglich.

5. Als Koordinate der absoluten Lage kann jede Gröſse 21
benutzt werden, deren Änderung eine Änderung in der Lage

des Systems zur Folge hat, und welche nicht eine Konfigurationskoordinate ist. Sechs beliebige Gröſsen, welche diese Eigenschaften besitzen und von einander unabhängig sind, können als Koordinaten der absoluten Lage gewählt werden und werden zu Koordinaten der absoluten Lage dadurch, daſs ihnen keine anderen Gröſsen als Koordinaten hinzugefügt werden, als solche, welche die Eigenschaft von Konfigurationskoordinaten haben.

Endliche Verrückungen

a) der Punkte.

22 **Definition 1.** Den Übergang eines materiellen Punktes aus einer Anfangslage in eine Endlage ohne Rücksicht auf die Zeit und die Art des Überganges nennen wir eine Verrückung des Punktes aus der Anfangs- in die Endlage.

Die Verrückung eines Punktes ist also vollständig bestimmt durch ihre Anfangs- und ihre Endlage. Sie ist ebenfalls vollständig gegeben durch ihre Anfangslage, ihre Richtung und ihre Gröſse.

23 **Anmerkung 1.** Die Gröſse der Verrückung eines Punktes ist gleich der Entfernung seiner Endlage von seiner Anfangslage. Sind die x_ν die rechtwinkligen Koordinaten der Anfangslage, die x'_ν die rechtwinkligen Koordinaten der Endlage, so ist die Gröſse s' der Verrückung die positive Wurzel der Gleichung:

$$s'^2 = \sum_1^3{}^\nu (x'_\nu - x_\nu)^2 \quad .$$

24 **Anmerkung 2.** Die Richtung einer Verrückung ist die Richtung einer Geraden, welche von der Anfangslage der Verrückung zu ihrer Endlage gezogen wird. Haben s', x_ν, x'_ν die Bedeutung wie vorher, und sind die x^0_ν, x''_ν, s'' die Koordinaten der Anfangs-, der Endlage und die Länge einer zweiten

Verrückung, so ist der Winkel oder Richtungsunterschied s',s'' beider Verrückungen gegeben durch die Gleichung:

$$s's''\cos s',s'' = \sum_1^3{}^\nu (x'_\nu - x_\nu)(x''_\nu - x^0_\nu) \quad . \qquad \mathbf{a)}$$

Denn die Betrachtung des Dreiecks aus den beiden Längen s' und s'' als Seiten, und dem Winkel s',s'' als eingeschlossenem Winkel liefert uns die Gleichung:

$$s'^2 + s''^2 - 2s's''\cos s',s'' = \sum_1^3{}^\nu \left[(x'_\nu - x_\nu) - (x''_\nu - x^0_\nu)\right]^2 \quad , \qquad \mathbf{b)}$$

aus welcher zusammen mit **23** Gleichung **a)** folgt.

Definition 2. Zwei Verrückungen eines Punktes heiſsen identisch, wenn sie Anfangs- und Endlage gemein haben; zwei Verrückungen eines Punktes heiſsen gleich, wenn sie Richtung und Gröſse gemein haben; zwei Verrückungen heiſsen gleichgerichtet oder parallel, wenn sie die Richtung gemein haben. 25

Zwischenbemerkung. Bezeichnen $x_1 \ldots\ldots x_k$ die k geradlinigen, rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes in einem Raum von k Dimensionen, $x'_1 \ldots\ldots x'_k$ die Koordinaten eines zweiten Punktes, so erweitert die an dieser Stelle eingeschaltete Festsetzung, daſs die Entfernung beider Punkte die positive Wurzel der Gleichung 26

$$s'^2 = \sum_1^k{}^\nu (x'_\nu - x_\nu)^2$$

sei, den ganzen folgenden Inhalt der Untersuchung und damit die ganze Mechanik auf den Raum von k Dimensionen, ohne daſs eine Änderung auch nur des Wortlautes nötig wäre, von Nebendingen abgesehen. Doch soll von dieser Bemerkung kein Gebrauch gemacht werden, sondern es soll gemäſs der ersten Festsetzung stets nur von dem Raum der Euklid'schen Geometrie die Rede sein.

b) der Systeme.

27 **Definition.** Der Übergang eines Systems materieller Punkte aus einer Anfangslage in eine Endlage ohne Rücksicht auf die Zeit und ohne Rücksicht auf die Art des Überganges heifst eine Verrückung des Systems aus der Anfangs- in die Endlage.

Die Verrückung eines Systems ist also vollständig gegeben durch ihre Anfangs- und ihre Endlage. Sie ist ebenfalls vollständig bestimmt, wenn ihre Anfangslage und diejenigen Merkmale gegeben sind, welche wir als ihre Richtung und Gröfse bezeichnen.

28 **Hülfsbezeichnung.** Quadratischen Mittelwert einer Reihe von Gröfsen nennen wir die positive Quadratwurzel des arithmetischen Mittelwertes der Quadrate der einzelnen Gröfsen.

29 **Definition a.** Gröfse der Verrückung eines Systems heifst der quadratische Mittelwert aus der Gröfse der Verrückungen seiner sämtlichen Massenteilchen.

Die Gröfse der Verrückung, welche eine Lage eines Systems in eine andere überführt, heifst auch die Entfernung oder der Abstand beider Lagen von einander. Die Gröfse einer Verrückung wird auch als die Länge derselben bezeichnet.

30 **Bemerkung.** Die Entfernung zweier Lagen eines Systems von einander ist unabhängig definiert von der Form der analytischen Darstellung, insbesondere von der Wahl der Koordinaten des Systems.

31 **Aufgabe.** Die Entfernung zweier Lagen eines Systems durch die rechtwinkligen Koordinaten desselben darzustellen.

Es sei n die Zahl der materiellen Punkte des Systems. Es sei x_ν der Wert einer der rechtwinkligen Koordinaten des Systems vor der Verrückung, x'_ν der Wert derselben Koordinate nach der Verrückung. Die Koordinate x_ν ist zugleich Koordinate eines der Punkte des Systems; es sei die Masse dieses Punktes m_ν. ν läuft von 1 bis $3n$, aber nicht alle m_ν sind ungleich, sondern es ist für jedes μ von 1 bis n

$$m_{3\mu-2} = m_{3\mu-1} = m_{3\mu} \quad .$$

Ist nun etwa η die Zahl der Massenteilchen in der Masseneinheit, so enthält die Masse m_ν $m_\nu\eta$ Massenteilchen, und die Gesamtmasse m des Systems $m\eta$ derselben. Berechnet man mit diesen Bezeichnungen den quadratischen Mittelwert s' der Verrückungen aller Massenteilchen, so folgt für denselben die positive Wurzel der Gleichung:

$$m s'^2 = \sum_1^{3n} {}_\nu\, m_\nu (x'_\nu - x_\nu)^2 \qquad \textbf{a)}$$

und diese Wurzel ist also die gesuchte Entfernung. Übrigens ist

$$m = \tfrac{1}{3} \sum_1^{3n} {}_\nu\, m_\nu \quad . \qquad \textbf{b)}$$

Lehrsatz. Die Entfernung zweier Lagen eines Systems von einander ist stets kleiner als die Summe der Entfernungen beider Lagen von einer dritten. 32

Es seien nämlich die x'_ν, x''_ν, x'''_ν die rechtwinkligen Koordinaten der Lagen 1, 2, 3; es seien s_{12}, s_{13}, s_{23} die Entfernungen derselben von einander. Wird für den Augenblick zur Abkürzung gesetzt:

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,(x'''_\nu - x'_\nu) = a_\nu \quad , \qquad \sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,(x'''_\nu - x''_\nu) = b_\nu \quad ,$$

so wird

$$s_{13}^2 = \sum_1^{3n} {}_\nu\, a_\nu^2 \quad , \qquad s_{23}^2 = \sum_1^{3n} {}_\nu\, b_\nu^2 \quad , \qquad s_{12}^2 = \sum_1^{3n} {}_\nu\, (a_\nu - b_\nu)^2 \quad .$$

Gesetzt nun, es wäre $s_{12} > s_{13} + s_{23}$, so wäre durch Quadrierung zu erhalten $s_{12}^2 - s_{13}^2 - s_{23}^2 > 2\, s_{13}\, s_{23}$, also durch nochmalige Quadrierung:

$$4\, s_{13}^2 s_{23}^2 - (s_{12}^2 - s_{13}^2 - s_{23}^2)^2 < 0 \quad .$$

Dies ist aber nicht möglich, denn die linke Seite wird durch Einsetzen der Werte für die s in die Form gebracht:

$$4 \sum_1^{3n} {}_\nu \sum_1^{3n} {}_\mu\, (a_\nu b_\mu - a_\mu b_\nu)^2 \quad ,$$

ist also als Summe von Quadraten notwendig positiv. Da nun also die entgegengesetzte Vermutung unmöglich war, so muſs stets sein:

$$s_{12} \leqq s_{13} + s_{23} \quad .$$

33 **Folgerung.** Aus den drei Entfernungen dreier beliebiger Lagen eines Systems von einander als Seiten ist stets ein ebenes Dreieck zu zeichnen möglich.

34 **Definition b.** Richtungsunterschied zwischen zwei Verrückungen eines Systems aus gleicher Anfangslage heiſst der eingeschlossene Winkel eines ebenen Dreiecks, in welchem die Längen der beiden Verrückungen die einschlieſsenden und die Entfernung ihrer Endpunkte die gegenüberliegende Seite bilden.

Der Richtungsunterschied zwischen zwei Verrückungen wird auch der Winkel zwischen ihnen oder ihre Neigung gegen einander genannt.

35 **Bemerkung 1.** Die Neigung zweier Verrückungen aus derselben Lage gegen einander ist unter allen Umständen ein eindeutig bestimmter, reeller Winkel, kleiner als π.

Denn das Dreieck, welches jene Neigung bestimmt, kann nach 32 immer gezeichnet werden.

36 **Bemerkung 2.** Der Richtungsunterschied zwischen zwei Verrückungen ist unabhängig definiert von der Form der analytischen Darstellung, insbesondere also von der Wahl der benutzten Koordinaten.

37 **Aufgabe.** Den Richtungsunterschied zweier Verrückungen aus der gleichen Anfangslage auszudrücken durch die rechtwinkligen Koordinaten der Anfangslage und der Endlagen.

Es seien die x_ν die Koordinaten der gemeinsamen Anfangslage, die x'_ν und x''_ν die Koordinaten der beiden Endlagen. s' und s'' seien die Längen der beiden Verrückungen, s',s'' der von ihnen eingeschlossene Winkel. Unter Benutzung des ebenen Dreieckes aus den drei Entfernungen der drei Lagen erhalten wir:

$$2\,m\,s'\,s''\cos s',s'' = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu (x'_\nu - x_\nu)^2 + \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu (x''_\nu - x_\nu)^2$$
$$- \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \left[(x''_\nu - x_\nu) - (x'_\nu - x_\nu)\right]^2$$

und hieraus

$$m\,s'\,s''\cos s',s'' = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu (x''_\nu - x_\nu)(x'_\nu - x_\nu) \quad , \qquad \textbf{a)}$$

in welcher Gleichung wir uns noch s' und s'' nach **31a** durch die rechtwinkligen Koordinaten ausgedrückt zu denken haben.

Lehrsatz. Zwei Verrückungen eines Systems aus gleicher Anfangslage haben den Richtungsunterschied Null, wenn die Verrückungen der einzelnen Punkte des Systems in beiden gleichgerichtet und beziehentlich proportional sind, — und umgekehrt. 38

Denn sind die Verrückungen aller Punkte gleichgerichtet und proportional, so ist für alle ν

$$x''_\nu - x_\nu = \varepsilon\,(x'_\nu - x_\nu) \quad ,$$

unter ε einen für alle ν gleichen Faktor verstanden. Es wird daher die rechte Seite der Gleichung **37a** gleich $m\varepsilon s'^2$. Es wird aber ferner $s'' = \varepsilon s'$, also nach jener Gleichung $\cos s',s'' = 1$, also, da s',s'' der Innenwinkel eines Dreiecks, $s',s'' = 0$ (**35**).

Umgekehrt, wenn $s',s'' = 0$, $\cos s',s'' = 1$ ist, so liefert die Gleichung **37a** durch Einsetzen der Werte von s' und s'' und Quadrierung:

$$0 = \left[\sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu (x''_\nu - x_\nu)(x'_\nu - x_\nu)\right]^2 - \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu (x''_\nu - x_\nu)^2 \cdot \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu (x'_\nu - x_\nu)^2$$
$$= \sum_1^{3n}{}_\mu \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu m_\mu \left[(x''_\nu - x_\nu)(x'_\mu - x_\mu) - (x''_\mu - x_\mu)(x'_\nu - x_\nu)\right]^2$$

und dies ist nur möglich, wenn für jedes μ und ν

$$\frac{x''_\mu - x_\mu}{x''_\nu - x_\nu} = \frac{x'_\mu - x_\mu}{x'_\nu - x_\nu} \quad ,$$

womit auch die Umkehrung bewiesen ist.

39 **Folgerung 1.** Haben zwei Verrückungen aus derselben Anfangslage den Richtungsunterschied Null gegen eine dritte Verrückung aus der gleichen Lage, so haben sie den Richtungsunterschied Null gegen einander.

Alle Verrückungen, welche den Winkel Null mit einer bestimmten Verrückung bilden, bilden also mit einander den Winkel Null. Das Gemeinsame aller solcher Verrückungen heiſst die Richtung derselben.

40 **Folgerung 2.** Wenn zwei Verrückungen eines Systems gleiche Richtung haben, so haben sie gleichen Richtungsunterschied mit jeder dritten Verrückung.

Alle Verrückungen von gleicher Richtung aus gleicher Lage bilden also denselben Winkel mit allen Verrückungen, welche eine andere gleiche Richtung haben. Dieser gemeinsame Winkel heiſst auch der Winkel der Richtungen gegen einander oder der Unterschied der beiden Richtungen.

41 **Definition.** Zwei Verrückungen eines Systems heiſsen identisch, wenn die Verrückungen der Punkte des Systems in beiden identisch sind. Zwei Verrückungen eines Systems heiſsen gleich, wenn die Verrückungen der einzelnen Punkte in beiden gleich sind. Zwei Verrückungen eines Systems heiſsen gleichgerichtet oder parallel, wenn die Verrückungen der einzelnen Punkte in beiden gleichgerichtet und beziehentlich proportional sind.

42 **Folgerung.** Zwei Verrückungen eines Systems aus verschiedener Anfangslage sind gleichgerichtet, wenn jede von ihnen gleiche Richtung hat mit einer Verrückung, welche durch ihre Anfangslage geht und der anderen Verrückung gleich ist, — und umgekehrt.

43 **Zusatz.** Richtungsunterschied zweier Verrückungen eines Systems aus verschiedener Anfangslage heiſst der Winkel zwischen jeder von ihnen und einer zu der anderen parallelen Verrückung aus ihrer Anfangslage.

44 **Aufgabe.** Den Winkel zwischen zwei beliebigen Verrückungen eines Systems auszudrücken durch die rechtwinkligen Koordinaten ihrer vier Endlagen.

Es seien s' und s'' die Gröſsen der beiden Verrückungen und s',s'' ihr Winkel. Es seien die x_ν und x'_ν die Koordinaten der Anfangs- und Endlage der ersten, die x^0_ν und x''_ν die Koordinaten der Anfangs- und Endlage der zweiten Verrückung. Eine Verrückung, deren Anfangskoordinaten die x_ν sind, und deren Endkoordinaten den Wert $x_\nu+x''_\nu-x^0_\nu$ haben, hat gleiche Anfangslage mit der ersten und ist der zweiten gleich. Sie bildet also mit der ersten den gesuchten Winkel, für welchen also die Gleichung folgt:

$$m\, s' s'' \cos s',s'' = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu\, (x'_\nu - x_\nu)\,(x''_\nu - x^0_\nu) \quad .$$

Der gleiche Wert wird erhalten, wenn wir eine Verrückung durch die Anfangslage der zweiten und gleich der ersten legen, und den Winkel zwischen dieser und der zweiten bestimmen.

Unsere Definition im Zusatz **43** war also eindeutig und daher zulässig.

Definition. Zwei Verrückungen eines Systems heiſsen 45
senkrecht auf einander, wenn der Winkel zwischen ihnen ein rechter ist.

Folgerung 1. Die hinreichende und notwendige analy- 46
tische Bedingung dafür, daſs zwei Verrückungen senkrecht auf einander stehen, ist die Gleichung:

$$\sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu\, (x'_\nu - x_\nu)\,(x''_\nu - x^0_\nu) = 0 \quad ,$$

in welcher Gebrauch gemacht ist von den Bezeichnungen der Aufgabe **44**.

Folgerung 2. In einem System von n Punkten ist 47
aus einer gegebenen Lage eine $(3n-1)$fache Mannigfaltigkeit von Verrückungen, also eine $(3n-2)$fache Mannigfaltigkeit von Richtungen denkbar, welche auf einer gegebenen Richtung senkrecht stehen.

Definition. Komponente einer Verrückung in einer ge- 48
gebenen Richtung heiſst eine Verrückung, deren Richtung die

gegebene Richtung ist, und deren Gröfse gleich der Vertikalprojektion der Gröfse der gegebenen Verrückung innerhalb des Winkels ist, welchen die gegebene Verrückung mit der gegebenen Richtung bildet.

Ist also die Gröfse der gegebenen Verrückung s, und bildet sie mit der gegebenen Richtung den Winkel ω, so ist ihre Komponente in dieser Richtung gleich $s \cos \omega$.

Die Gröfse der Komponente in gegebener Richtung wird gewöhnlich schlechthin die Komponente in dieser Richtung genannt.

Zusammensetzung der Verrückungen.

49 **Bemerkung.** Werden einem System mehrere Verrückungen erteilt, welche gegebenen Verrückungen gleich sind, und welche sich so an einander schliefsen, dafs die Endlage der vorausgegangenen Verrückung die Anfangslage der folgenden ist, so ist die erreichte Endlage unabhängig von der Reihenfolge der Verrückungen.

Denn dies gilt für die Verrückungen, welche die einzelnen Punkte dabei erleiden, also für das System.

50 **Definition 1.** Eine Verrückung, welche das System in dieselbe Endlage überführt, wie eine Reihe aneinandergefügter Verrückungen, welche gegebenen Verrückungen gleich sind, heifst die Summe jener gegebenen Verrückungen.

51 **Definition 2.** Differenz zwischen einer erstgenannten und einer zweitgenannten Verrückung heifst eine Verrückung, deren Summe mit der zweitgenannten die erstgenannte ergiebt.

52 **Folgerung** (aus 49). Die Addition und Subtraktion der Verrückungen unterliegt den Regeln der algebraischen Addition und Subtraktion.

Abschnitt 3. Unendlich kleine Verrückungen und Bahnen der Systeme materieller Punkte.

Vorbemerkung. Wir behandeln von hier ab den einzelnen materiellen Punkt nicht mehr gesondert, sondern schliefsen seine Betrachtung in die Betrachtung der Systeme ein. Es ist daher im folgenden stets von Verrückungen der Systeme die Rede, auch wo dies nicht besonders bemerkt wird. 53

Unendlich kleine Verrückungen.

Erläuterung. Eine Verrückung heifst unendlich klein, wenn ihre Länge unendlich klein ist. 54

Lage der unendlich kleinen Verrückung heifst eine Lage, welcher die Grenzlagen der Verrückung unendlich nahe liegen.

Eine unendlich kleine Verrückung ist nach Richtung und Gröfse bestimmt durch die Angabe ihrer Lage und der unendlich kleinen Änderungen, welche die Koordinaten des Systems durch die Verrückung erleiden.

Aufgabe 1a. Die Länge ds einer unendlich kleinen Verrückung auszudrücken durch die Änderungen dx_ν der $3n$ rechtwinkligen Koordinaten des Systems. 55

Indem wir in Gleichung **31a** $x'_\nu - x_\nu$ ersetzen durch dx_ν, erhalten wir

$$m\,ds^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu\, dx_\nu^2 \quad .$$

Aufgabe 1b. Den Winkel s,s' der beiden unendlich kleinen Verrückungen ds und ds' auszudrücken durch die Änderungen dx_ν und dx'_ν der $3n$ rechtwinkligen Koordinaten des Systems. 56

Indem wir in Gleichung **44** für $x'_\nu - x_\nu$ setzen dx_ν und für $x''_\nu - x^0_\nu$ setzen dx'_ν, erhalten wir

$$m\,ds\,ds' \cos s,s' = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu\, dx_\nu\, dx'_\nu \quad .$$

Die Lösung gilt, ob beide Verrückungen gleiche Lage haben oder ob nicht.

57 **Aufgabe 2a.** Die Länge ds einer unendlich kleinen Verrückung auszudrücken durch die Änderungen dp_ϱ der r allgemeinen Koordinaten p_ϱ des Systems.

Die rechtwinkligen Koordinaten x_ν sind Funktionen der p_ϱ und zwar der p_ϱ allein, da sie durch diese vollständig bestimmt sind, und da Verrückungen des Systems, welche nicht durch Änderungen der p_ϱ darstellbar sind, als von der Betrachtung ausgeschlossen gelten (13). Setzen wir zur Abkürzung

a) $$\frac{\partial x_\nu}{\partial p_\varrho} = \alpha_{\nu\varrho} \quad ,$$

so bestehen demnach $3n$ Gleichungen von der Form:

b) $$dx_\nu = \sum_1^r{}^\varrho\, \alpha_{\nu\varrho}\, dp_\varrho \quad ,$$

in welchen die $\alpha_{\nu\varrho}$ Funktionen der Lage sind, also als Funktionen der p_ϱ aufgefaſst werden können. Setzen wir die Werte **b)** in Gleichung 55 ein, und setzen noch zur Abkürzung

c) $$m\, a_{\varrho\sigma} = \sum_1^{3n}{}^\nu\, m_\nu\, \alpha_{\nu\varrho}\, \alpha_{\nu\sigma} \quad ,$$

so erhalten wir als Lösung der Aufgabe:

d) $$ds^2 = \sum_1^r{}^\varrho \sum_1^r{}^\sigma\, a_{\varrho\sigma}\, dp_\varrho\, dp_\sigma \quad .$$

58 **Aufgabe 2b.** Den Winkel s,s' zweier unendlich kleiner Verrückungen von der Länge ds und ds' und gleicher Lage auszudrücken durch die Änderungen dp_ϱ und dp'_ϱ der r allgemeinen Koordinaten p_ϱ des Systems.

Wir bilden die Werte der dx'_ν nach Gleichung **57 b** und setzen diese und die Werte für dx_ν in Gleichung **56** ein. Wir beachten, daſs für beide Verrückungen die Werte der Koordinaten selbst, also die der Gröſsen $\alpha_{\varrho\sigma}$ gleich sind, und wir erhalten:

$$ds\, ds' \cos s,s' = \sum_1^r{}^\varrho \sum_1^r{}^\sigma\, a_{\varrho\sigma}\, dp_\varrho\, dp'_\sigma \quad .$$

Eigenschaften der $\alpha_{\varrho\sigma}$ und $a_{\varrho\sigma}$. Einführung der $b_{\varrho\sigma}$.

1. Für alle Werte der ϱ, σ, τ ist: (vergl. **57 a**) 59

$$\frac{\partial \alpha_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} = \frac{\partial \alpha_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma} \quad .$$

2. Für alle Werte von ϱ und σ ist: (vergl. **57 c**) 60

$$a_{\varrho\sigma} = a_{\sigma\varrho}$$

3. Die Zahl der Gröſsen $\alpha_{\varrho\sigma}$ ist gleich $3nr$; die Zahl der von einander verschiedenen Gröſsen $a_{\varrho\sigma}$ ist gleich $\frac{1}{2}r(r+1)$. 61

4. Für alle ϱ ist 62

$$a_{\varrho\varrho} > 0 \quad .$$

Für alle Werte von ϱ und σ ist

$$a_{\varrho\varrho}\, a_{\sigma\sigma} - a_{\varrho\sigma}^2 > 0 \quad .$$

Denn es ist die rechte Seite der Gleichung **57 d** nach ihrer Ableitung aus Gleichung **55** eine notwendig positive Gröſse, welches auch die Werte der dp_ϱ sind. Hierfür sind die vorstehenden Ungleichheiten notwendige Bedingungen.

5. Für alle Werte der ϱ, σ, τ gilt die Gleichung: 63

$$\sum_1^{3n}{}^\nu\, m_\nu\, \alpha_{\nu\sigma} \left(\frac{\partial \alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau} + \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\varrho}\right) = m \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} + \frac{\partial a_{\tau\sigma}}{\partial p_\varrho} + \frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma}\right) \quad .$$

Um die Gleichung zu beweisen, setzt man rechts die Werte der $a_{\varrho\sigma}$ aus Gleichung **57c** ein und macht Gebrauch von den Eigenschaften der $\alpha_{\varrho\sigma}$ nach **59**.

64 **6.** Die Determinante aus den r^2 Gröſsen $a_{\varrho\sigma}$ sei $\triangle$. Der Faktor von $a_{\varrho\sigma}$ in $\triangle$, dividiert durch $\triangle$, soll dauernd bezeichnet werden mit $b_{\varrho\sigma}$. Es ist also als Definition

$$b_{\varrho\sigma} = \frac{1}{\triangle}\,\frac{\partial\triangle}{\partial a_{\varrho\sigma}} \quad .$$

Für alle Werte von ϱ und σ ist dann

$$b_{\varrho\sigma} = b_{\sigma\varrho} \quad .$$

Die Zahl der von einander verschiedenen Gröſsen $b_{\varrho\sigma}$ ist gleich $\frac{1}{2}r(r+1)$.

65 **7.** Der Wert des Ausdrucks

$$\sum_1^r{}_{\varrho}\, a_{\varrho\iota}\, b_{\varrho\varkappa}$$

ist gleich Eins, sobald $\iota = \varkappa$ ist; jener Wert ist gleich Null, sobald ι und $\varkappa$ verschieden sind.

Denn ist $\iota = \varkappa$, so stellt der Ausdruck $\sum_1^r{}_{\varrho}\, a_{\varrho\iota}\, b_{\varrho\varkappa}\triangle$ die Determinante $\triangle$ selbst dar. Ist aber ι von $\varkappa$ verschieden, so stellt er eine Determinante dar, welche aus $\triangle$ entsteht, indem die Reihe $a_{\varrho\varkappa}$ ersetzt wird durch die Reihe der $a_{\varrho\iota}$. In dieser Determinante sind also zwei Reihen gleich, und ihr Wert ist Null.

66 **8.** Es gelten für alle Werte der ι und $\varkappa$ die beiden Gleichungen:

$$\sum_1^r{}_{\varrho}\sum_1^r{}_{\sigma}\, b_{\varrho\sigma}\, a_{\varrho\iota}\, a_{\sigma\varkappa} = a_{\iota\varkappa} \quad ;$$

$$\sum_1^r{}_{\varrho}\sum_1^r{}_{\sigma}\, a_{\varrho\sigma}\, b_{\varrho\iota}\, b_{\sigma\varkappa} = b_{\iota\varkappa} \quad .$$

Man bilde nach **65** den Wert des Ausdrucks $\sum_1^r{}_{\varrho}\, b_{\varrho\sigma}\, a_{\varrho\iota}$ bez. $\sum_1^r{}_{\varrho}\, a_{\varrho\sigma}\, b_{\varrho\iota}$ für alle Werte des σ von 1 bis r, man multipliziere die entstandenen Gleichungen der Reihe nach mit $a_{\sigma\varkappa}$ bez. $b_{\sigma\varkappa}$ und addiere, so folgen die Gleichungen.

9. Bestimmte Änderungen der Gröſsen $a_{\varrho\sigma}$ haben be- 67
stimmte Änderungen der Gröſsen $b_{\varrho\sigma}$ zur Folge. Bezeichnen $\delta a_{\varrho\sigma}$ und $\delta b_{\varrho\sigma}$ beliebige zusammengehörige Variationen der $a_{\varrho\sigma}$ und $b_{\varrho\sigma}$, so gelten die Gleichungen:

$$\sum_1^r{}_{\varrho}\sum_1^r{}_{\sigma}\, a_{\varrho\iota}\, a_{\sigma\varkappa}\, \delta b_{\varrho\sigma} = -\,\delta a_{\iota\varkappa} \quad ;$$

$$\sum_1^r{}_{\varrho}\sum_1^r{}_{\sigma}\, b_{\varrho\iota}\, b_{\sigma\varkappa}\, \delta a_{\varrho\sigma} = -\,\delta b_{\iota\varkappa} \quad .$$

Man variiere die Gleichungen **66** und mache Gebrauch von den Beziehungen **65**, so folgen die Gleichungen.

10. Variiert man in den $a_{\varrho\sigma}$ und $b_{\varrho\sigma}$ nur eine be- 68
stimmte Koordinate p_τ, von welcher sie abhängen, so folgt insbesondere für jeden Wert des τ

$$\sum_1^r{}_{\varrho}\sum_1^r{}_{\sigma}\, a_{\varrho\iota}\, a_{\sigma\varkappa}\, \frac{\partial b_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} = -\,\frac{\partial a_{\iota\varkappa}}{\partial p_\tau} \quad ;$$

$$\sum_1^r{}_{\varrho}\sum_1^r{}_{\sigma}\, b_{\varrho\iota}\, b_{\sigma\varkappa}\, \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} = -\,\frac{\partial b_{\iota\varkappa}}{\partial p_\tau} \quad .$$

Verrückungen in Richtung der Koordinaten.

Definition 1. Verrückung in Richtung einer bestimmten 69
Koordinate heiſst eine unendlich kleine Verrückung, bei welcher sich nur diese eine Koordinate, nicht aber die übrigen gleichzeitig benutzten ändern.

Die Richtung aller Verrückungen in Richtung derselben Koordinate aus derselben Lage ist dieselbe; sie heiſst die Richtung der Koordinate in dieser Lage.

70 **Bemerkung.** Die Richtung einer Koordinate hängt ab von der Wahl der übrigen, gleichzeitig benutzten Koordinaten des Systems.

71 **Definition 2.** Reduzierte Komponente einer unendlich kleinen Verrückung in Richtung einer bestimmten Koordinate heifst die Komponente der Verrückung in Richtung der Koordinate (48, 69), dividiert durch die Änderungsgeschwindigkeit der Koordinate bei einer Verrückung in ihrer eigenen Richtung.

Die reduzierte Komponente in der Richtung einer Koordinate nennen wir auch kurz die Komponente nach der Koordinate.

Man spricht also von der Komponente einer beliebigen Verrückung in einer beliebigen Richtung, aber man kann nicht sprechen von der reduzierten Komponente in einer beliebigen Richtung, sondern nur von der reduzierten Komponente einer unendlich keinen Verrückung in der Richtung einer Koordinate.

72 **Aufgabe 1a.** Die Neigung s,x_ν der Verrückung ds gegen die rechtwinklige Koordinate x_ν durch die $3n$ Änderungen dx_ν auszudrücken.

In Gleichung 56 setzen wir die dx'_ν gleich Null für alle ν mit Ausnahme des bestimmten ν, auf welches sich die Aufgabe bezieht. Dann ist die Richtung von ds' nach 69 die von x_ν, und der Winkel s,s' wird der gesuchte Winkel. Da ferner alsdann nach 55 $m\,ds'^2 = m_\nu\,dx'^2_\nu$, so wird als Lösung der Aufgabe erhalten:

$$ds \cos s,x_\nu = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,dx_\nu \quad ,$$

worin für ds sein Wert in den dx_ν einzusetzen ist.

73 **Aufgabe 1b.** Die Komponenten $d\bar{x}_\nu$ der Verrückung ds nach den rechtwinkligen Koordinaten x_ν durch die Änderungen dx_ν der Koordinaten auszudrücken.

Setzen wir in der vorigen Aufgabe $s,x_\nu = 0$, so erfolgt die Verrückung ds in Richtung der Koordinate x_ν, und wir erkennen, dafs die Änderungsgeschwindigkeit der Koordinate bei einer Verrückung in ihrer eigenen Richtung gleich $dx_\nu : ds$ also gleich $\sqrt{m/m_\nu}$ ist. Die linke Seite der Gleichung 72 stellt

schon die Komponente von ds in Richtung von x_ν dar; dividieren wir also die Gleichung durch $\sqrt{m/m_\nu}$, so erhalten wir (71) als Lösung der Aufgabe:

$$d\bar{x}_\nu = \frac{m_\nu}{m}\,dx_\nu \quad .$$

Aufgabe 1c. Die Änderungen dx_ν der rechtwinkligen Koordinaten bei einer Verrückung auszudrücken durch die reduzierten Komponenten der Verrückung nach jenen Koordinaten. 74

Die Lösung der vorigen Aufgabe giebt unmittelbar:

$$dx_\nu = \frac{m}{m_\nu}\,d\bar{x}_\nu \quad .$$

Aufgabe 2a. Die Neigung s,p_ϱ der Verrückung ds gegen die allgemeine Koordinate p_ϱ durch die r Änderungen dp_ϱ auszudrücken. 75

In Gleichung 58 setzen wir die dp'_ϱ gleich Null für alle ϱ mit Ausnahme des bestimmten ϱ, auf welches sich die Aufgabe bezieht. Die Richtung von ds' ist alsdann nach 69 die von p_ϱ, und der Winkel s,s' wird der gesuchte Winkel. Da gleichzeitig nach 57 $ds'^2 = a_{\varrho\varrho}\,dp'^2_\varrho$ wird, so erhalten wir als Lösung der Aufgabe:

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\,ds \cos s,p_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\,dp_\sigma \quad ,$$

worin für ds sein Wert in den dp_σ einzusetzen ist.

Anmerkung 1. Setzen wir in der Lösung der vorigen Aufgabe alle dp_σ gleich Null mit Ausnahme eines bestimmten dp_σ, so wird die Richtung von ds die Richtung dieser Koordinate p_σ, und der Winkel s,p_ϱ geht über in den Winkel p_σ,p_ϱ, welchen die Koordinate p_σ mit der Koordinate p_ϱ bildet. Da gleichzeitig alsdann $ds^2 = a_{\sigma\sigma}\,dp_\sigma^2$ wird, so erhalten wir für diesen Winkel: 76

$$\cos p_\sigma,p_\varrho = \frac{a_{\varrho\sigma}}{\sqrt{a_{\varrho\varrho}\,a_{\sigma\sigma}}} \quad .$$

Dieser Winkel ist nach 62 stets ein reeller Winkel.

77 **Anmerkung 2.** Die Koordinaten p_ϱ heifsen orthogonal, wenn jede von ihnen in jeder Lage auf allen übrigen senkrecht steht. Die hinreichende und notwendige Bedingung hierfür ist (76), dafs alle $a_{\varrho\sigma}$, für welche ϱ und σ verschieden sind, verschwinden. Die rechtwinkligen Koordinaten sind ein Beispiel orthogonaler Koordinaten.

78 **Aufgabe 2b.** Die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ der Verrückung ds nach den Koordinaten p_ϱ auszudrücken durch die Änderungen dp_ϱ dieser Koordinaten bei der Verrückung.

Setzen wir in Gleichung **75** s,p_ϱ gleich Null, so erfolgt die Verrückung ds dieser Gleichung in Richtung von p_ϱ; alle dp_σ sind also Null, ausser dp_ϱ, und die Gleichung wird also $\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\, ds = a_{\varrho\varrho}\, dp_\varrho$. Die Änderungsgeschwindigkeit von p_ϱ mit einer Verrückung in ihrer eigenen Richtung ist also $1/\sqrt{a_{\varrho\varrho}}$. Bedenken wir, dafs nach **48** $ds \cos s,p_\varrho$ die Komponente von ds in der Richtung von p_ϱ ist, und beachten die Definition **71**, so erkennen wir, dafs die linke Seite der Gleichung **75** bereits die reduzierte Komponente nach p_ϱ darstellt, und wir erhalten also die Beziehung:

a) $$d\bar{p}_\varrho = \sqrt{a_{\varrho\varrho}}\, ds \cos s,p_\varrho \quad ,$$

also als Lösung der Aufgabe:

b) $$d\bar{p}_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\, dp_\sigma \quad .$$

79 **Aufgabe 2c.** Die Änderungen dp_ϱ der Koordinaten bei Ausführung der Verrückung ds auszudrücken durch die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ der Verrückung nach den Koordinaten p_ϱ.

Die Auflösung der Gleichungen **78 b** unter Benutzung der Bezeichnung von **64** ergiebt unmittelbar:

$$dp_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma}\, d\bar{p}_\sigma \quad .$$

80 **Aufgabe 3a.** Die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ einer Verrückung nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ auszudrücken durch die

Komponenten $d\bar{x}_\nu$ der Verrückung nach den rechtwinkligen Koordinaten des Systems.

Wir erhalten der Reihe nach unter Benutzung von **78**, **57 c**, **57 b**, **74**:

$$d\bar{p}_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\, dp_\sigma = \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\, \alpha_{\nu\varrho}\, \alpha_{\nu\sigma}\, dp_\sigma$$
$$= \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\, \alpha_{\nu\varrho}\, dx_\nu = \sum_1^{3n}{}_\nu\, \alpha_{\nu\varrho}\, d\bar{x}_\nu \quad .$$

Aufgabe 3b. Die Komponenten $d\bar{x}_\nu$ einer Verrückung nach den rechtwinkligen Koordinaten x_ν auszudrücken durch die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ der Verrückung nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ des Systems. 81

Wir erhalten der Reihe nach unter Benutzung von **73**, **57 b**, **79**:

$$d\bar{x}_\nu = \frac{m_\nu}{m}\, dx_\nu = \frac{m_\nu}{m} \sum_1^r{}_\sigma\, \alpha_{\nu\sigma}\, dp_\sigma$$
$$= \frac{m_\nu}{m} \sum_1^r{}_\sigma\, \alpha_{\nu\sigma} \sum_1^r{}_\varrho\, b_{\varrho\sigma}\, d\bar{p}_\varrho \quad ,$$

also, wenn wir zur Abkürzung setzen

$$\frac{m_\nu}{m} \sum_1^r{}_\sigma\, \alpha_{\nu\sigma}\, b_{\varrho\sigma} = \beta_{\nu\varrho} \quad , \qquad \textbf{a)}$$

folgt als Lösung der Aufgabe:

$$d\bar{x}_\nu = \sum_1^r{}_\varrho\, \beta_{\nu\varrho}\, d\bar{p}_\varrho \quad . \qquad \textbf{b)}$$

Aufgabe 4. Die Länge einer unendlich kleinen Verrückung auszudrücken durch ihre reduzierten Komponenten nach den Koordinaten des Systems. 82

Wenden wir die allgemeinen Koordinaten p_ϱ an, so erhalten wir durch successive Anwendung von **78 b** und **79** auf Gleichung **57 d** nach einander:

$$ds^2 = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma a_{\varrho\sigma}\, dp_\varrho\, dp_\sigma$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho dp_\varrho\, d\bar{p}_\varrho$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma b_{\varrho\sigma}\, d\bar{p}_\varrho\, d\bar{p}_\sigma \quad .$$

83 Wenden wir insbesondere die rechtwinkligen Koordinaten an, so erhalten diese Gleichungen die Form:

$$ds^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\, dx_\nu^2$$

$$= \sum_1^{3n}{}_\nu dx_\nu\, d\bar{x}_\nu$$

$$= \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m}{m_\nu}\, d\bar{x}_\nu^2 \quad .$$

84 **Aufgabe 5a.** Den Winkel zwischen zwei unendlich kleinen Verrückungen beliebiger Lage auszudrücken durch die reduzierten Komponenten der beiden Verrückungen nach den rechtwinkligen Koordinaten.

Durch successive Anwendung von **73** und **74** auf Gleichung **56** erhalten wir nach einander die Formen:

$$ds\, ds' \cos s,s' = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\, dx_\nu\, dx'_\nu$$

$$= \sum_1^{3n}{}_\nu dx_\nu\, d\bar{x}'_\nu = \sum_1^{3n}{}_\nu d\bar{x}_\nu\, dx'_\nu$$

$$= \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m}{m_\nu}\, d\bar{x}_\nu\, d\bar{x}'_\nu \quad .$$

Hierin haben wir für die ds und ds' ihre Werte in den $d\bar{x}_\nu$ nach **83** einzusetzen.

Aufgabe 5b. Den Winkel zwischen zwei unendlich kleinen Verrückungen aus der gleichen Lage auszudrücken durch die Komponenten der beiden Verrückungen nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ. 85

Durch successive Anwendung von **78** und **79** auf Gleichung **58** erhalten wir nach einander die Formen:

$$ds\, ds' \cos s,s' = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma a_{\varrho\sigma}\, dp_\varrho\, dp'_\sigma$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho dp_\varrho\, d\bar{p}'_\varrho = \sum_1^r{}_\varrho d\bar{p}_\varrho\, dp'_\varrho$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma b_{\varrho\sigma}\, d\bar{p}_\varrho\, d\bar{p}'_\sigma \quad .$$

Hierin sind wieder für die ds und ds' ihre Werte in den $d\bar{p}_\varrho$ nach **82** einzusetzen.

Aufgabe 6. Den Winkel zweier unendlich kleiner Verrückungen auszudrücken durch die Winkel, welche beide mit den Koordinaten des Systems bilden. 86

Wir dividieren die letzte der Gleichungen **85** durch $ds\, ds'$ und beachten, dafs nach **78a**

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s,p_\varrho = \frac{d\bar{p}_\varrho}{ds} \quad , \quad \sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s',p_\varrho = \frac{d\bar{p}'_\varrho}{ds} \quad ;$$

wir erhalten so als Lösung der Aufgabe:

$$\cos s,s' = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma b_{\varrho\sigma} \sqrt{a_{\varrho\varrho}\, a_{\sigma\sigma}} \cos s,p_\varrho \cos s',p_\sigma \quad .$$

Wenden wir rechtwinklige Koordinaten an, so erhält die vorstehende Gleichung die besondere Form: 87

$$\cos s,s' = \sum_1^{3n}{}_\nu \cos s,x_\nu \cos s',x_\nu \quad .$$

Es ist zu bemerken, dass die Gleichung **86** gleiche Lage der beiden Verrückungen voraussetzt, während die Gleichung **87** von dieser Voraussetzung frei ist.

88 **Lehrsatz.** Die r Winkel, welche eine beliebige Richtung in einer bestimmten Lage mit den Richtungen der r allgemeinen Koordinaten daselbst bildet, sind verbunden durch die Gleichung:

$$\sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma\, b_{\varrho\sigma} \sqrt{a_{\varrho\varrho}\, a_{\sigma\sigma}} \cos s,p_\varrho \cos s,p_\sigma = 1 \quad .$$

Denn diese Gleichung folgt, wenn wir in **86** die Richtungen von ds und ds' zusammenfallen lassen.

89 **Folgerung.** Insbesondere genügen die $3n$ Winkel, welche eine beliebige Verrückung des Systems mit den rechtwinkligen Koordinaten des Systems bildet, der Gleichung

$$\sum_1^{3n} {}_\nu \cos^2 s,x_\nu = 1 \quad .$$

Benutzung partieller Differentialquotienten.

90 **Bezeichnung.** Durch die Werte der Koordinaten p_ϱ ihrer Lage und der Änderungen dp_ϱ derselben ist die Länge ds einer unendlich kleinen Verrückung bestimmt. Ändern wir eins jener Bestimmungsstücke, während die übrigen constant gehalten werden, so soll das entsprechende partielle Differential von ds mit $\partial_p ds$ bezeichnet werden.

Betrachten wir dagegen, was ebenfalls zulässig ist, die Koordinaten p_ϱ und die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ nach ihnen als die unabhängigen Bestimmungsstücke von ds, so soll das entsprechende partielle Differential von ds mit $\partial_q ds$ bezeichnet werden.

Andere partielle Differentiale von ds sind selbstverständlich möglich, aber es ist für unseren Zweck nicht nötig, sie zu bezeichnen, sondern es bleibt für sie das gewöhnliche, jedesmal durch eine Worterklärung näher zu bestimmende Zeichen ∂ds vorbehalten.

91 **Bemerkung 1.** Die Komponenten einer Verrückung nach den Koordinaten lassen sich als partielle Differentialquotienten der Länge der Verrückung darstellen. Und zwar geschieht dies in der Form:

$$d\bar{p}_\varrho = \frac{1}{2}\frac{\partial_p ds^2}{\partial dp_\varrho} = ds\frac{\partial_p ds}{\partial dp_\varrho} \quad .$$

Man differentiiere die Gleichung **57 d** und beachte **78**.

Bemerkung 2. Die Neigung einer unendlich kleinen Verrückung gegen die Koordinate p_ϱ kann mit Hülfe der partiellen Differentialquotienten ihrer Länge dargestellt werden. Und zwar geschieht dies in der Form: 92

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s,p_\varrho = \frac{\partial_p ds}{\partial dp_\varrho} \quad .$$

Man beachte **91** und **78**.

Anmerkung. Werden insbesondere in den Bemerkungen 1 und 2 rechtwinklige Koordinaten angewandt, so erhält man 93

$$d\bar{x}_\nu = ds\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu} \quad , \qquad \text{a)}$$

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}} \cos s,x_\nu = \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu} \quad , \qquad \text{b)}$$

wobei die Bedeutung der partiellen Differentiale aus dem vorigen hervorgeht.

Bemerkung 3. Die Änderungen, welche die Koordinaten p_ϱ bei Durchlaufung einer unendlich kleinen Verrückung erleiden, lassen sich als partielle Differentialquotienten der Länge der Verrückung darstellen. Und zwar geschieht dies in der Form: 94

$$dp_\varrho = \frac{1}{2}\frac{\partial_q ds^2}{\partial d\bar{p}_\varrho} = ds\frac{\partial_q ds}{\partial d\bar{p}_\varrho} \quad .$$

Man beachte die Gleichungen **82** und **79**.

95 **Bemerkung 4.** Für alle Werte des Index τ besteht zwischen den partiellen Differentialquotienten von ds die Gleichung:

a)
$$\frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} = -\frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau} \quad .$$

Denn es ist:

$$\frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} = \frac{1}{2ds}\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} dp_\varrho \, dp_\sigma$$

und

$$\frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau} = \frac{1}{2ds}\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \frac{\partial b_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} d\bar{p}_\varrho \, d\bar{p}_\sigma \quad .$$

Setzen wir in der ersteren Form für die dp_ϱ und dp_σ ihre Werte in den $d\bar{p}_\varrho$ und $d\bar{p}_\sigma$ nach **79**, und beachten die Beziehungen **68** und die zweite Form, so folgt die Behauptung. Ebenso wenn wir in gleicher Weise von der zweiten Form ausgehen.

96 **Lehrsatz.** Erleidet die Lage einer unendlich kleinen Verrückung zweimal dieselbe Veränderung, während gleichzeitig das eine Mal die Komponenten nach den Koordinaten, das andere Mal die Änderungen der Koordinaten die ursprünglichen bleiben, so ist die Änderung der Länge der Verrückung in beiden Fällen entgegengesetzt gleich.

Da im zweiten Falle die $\delta dp_\varrho = 0$ sein sollen, während die Koordinaten p_ϱ die Änderungen δp_ϱ erleiden, so ist die Änderung der Länge der Verrückung:

a)
$$\delta_p ds = \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} \delta p_\tau \quad .$$

Im ersten Falle sollen die $\delta d\bar{p}_\varrho = 0$ sein, während die Koordinaten dieselben Änderungen δp_ϱ erleiden, es ist also jetzt:

b)
$$\delta_q ds = \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau} \delta p_\tau \quad .$$

Aus beiden Gleichungen **a)** und **b)** und der Bemerkung 4 folgt

$$\delta_p ds = -\delta_q ds \quad , \qquad \textbf{c)}$$

welches die Behauptung ist.

Bahnen der Systeme.

Erläuterungen.

1. Die gleichzeitig vorgestellte Gesamtheit der Lagen, welche ein System beim Übergang aus einer Lage in die andere durchläuft, heiſst eine Bahn des Systems. 97

Eine Bahn kann auch betrachtet werden als die gleichzeitig vorgestellte Gesamtheit der Verrückungen, welche das System beim Übergang aus der einen in die andere Lage erleidet.

2. Ein Teil der Bahn, welcher durch zwei unendlich nahe Lagen begrenzt wird, heiſst ein Bahnelement. Ein Bahnelement ist eine unendlich kleine Verrückung; es hat eine Länge und eine Richtung. 98

3. Richtung der Bahn eines Systems in einer bestimmten ihrer Lagen heiſst die Richtung eines dieser Lage unendlich benachbarten Bahnelements. 99

Länge der Bahn eines Systems zwischen zwei ihrer Lagen heiſst die Summe der Längen der Bahnelemente zwischen diesen Lagen.

Analytische Darstellung. Die Bahn eines Systems wird analytisch dargestellt, indem die Koordinaten ihrer Lagen angegeben werden als Funktionen einer und derselben, übrigens beliebigen Variabeln. Jeder Lage der Bahn ist dann ein Wert der Variabeln zugeordnet. Als unabhängige Variabele kann eine der Koordinaten selbst dienen. Sehr häufig ist es zweckmäſsig, als unabhängige Variabele die Länge der Bahn, von einer bestimmten Lage der Bahn ab gerechnet, zu benutzen. Die Differentialquotienten nach dieser bestimmten Variabelen, 100 also nach der Bahnlänge, sollen in LAGRANGE's Weise durch Accente bezeichnet werden.

101 **Definition 1.** Die Bahn eines Systems heifst gerade, wenn sie in allen ihren Lagen die gleiche Richtung hat.

102 **Folgerung.** Beschreibt ein System eine gerade Bahn, so beschreiben seine einzelnen Punkte gerade Linien, deren Längen, von der Ausgangslage an gerechnet, einander beständig proportional bleiben. (**38**).

103 **Definition 2.** Die Bahn eines Systems heifst krumm, wenn sich die Richtung der Bahn von Lage zu Lage ändert. Die Änderungsgeschwindigkeit der Richtung mit der Bahnlänge heifst die Krümmung der Bahn.

Die Krümmung der Bahn ist also der Grenzwert des Verhältnisses zwischen dem Richtungsunterschied und der Entfernung zweier benachbarter Bahnelemente.

104 **Anmerkung.** Der Wert der Krümmung ist hierdurch definiert unabhängig von der Form der analytischen Darstellung, also insbesondere unabhängig von der besonderen Wahl der Koordinaten des Systems.

105 **Aufgabe 1.** Die Krümmung c der Bahn auszudrücken durch die Änderungen der Winkel, welche die Bahn mit den rechtwinkligen Koordinaten des Systems bildet.

Es sei $d\varepsilon$ der Winkel zwischen der Richtung der Bahn am Anfang und am Ende des Bahnelementes ds. Dann ist nach Definition (**103**):

$$c = \frac{d\varepsilon}{ds} \quad .$$

Es seien ferner die $\cos s,x_\nu$ die Cosinus der Winkel, welche die Bahn am Anfange von ds mit den x_ν bildet, und es seien $\cos s,x_\nu + d\cos s,x_\nu$ die Werte der gleichen Gröfsen am Ende von ds. Dann ist nach Gleichung **87**:

$$\cos(d\varepsilon) = \sum_1^{3n}{}_\nu \cos s,x_\nu (\cos s,x_\nu + d\cos s,x_\nu) \quad .$$

Es ist aber ferner nach Gleichung **89** sowohl

$$\sum_1^{3n}{}_\nu \cos^2 s,x_\nu = 1 \quad ,$$

als auch

$$\sum_1^{3n}{}_\nu (\cos s,x_\nu + d\cos s,x_\nu)^2 = 1 \quad .$$

Indem wir das Doppelte der ersten Gleichung subtrahieren von der Summe der beiden letzteren, erhalten wir:

$$2 - 2\cos(d\varepsilon) = d\varepsilon^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu (d\cos s,x_\nu)^2 \quad ,$$

also durch Division mit ds^2 die Lösung der Aufgabe:

$$c^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu \left(\frac{d\cos s,x_\nu}{ds}\right)^2 \quad .$$

Aufgabe 2. Die Krümmung der Bahn darzustellen durch 106
die Änderungen der rechtwinkligen Koordinaten des Systems mit der Bahnlänge.

Unter Berücksichtigung von **72** haben wir (**100**):

$$\cos s,x_\nu = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}} \,.\, x'_\nu \quad ,$$

also

$$(\cos s,x_\nu)' = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}} \,.\, x''_\nu \quad ,$$

also nach **105** als Lösung der Aufgabe:

$$mc^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu m_\nu x''^2_\nu \quad .$$

Aufgabe 3. Die Krümmung der Bahn darzustellen durch 107
die Änderungen der rechtwinkligen Koordinaten, dieselben betrachtet als Funktionen einer beliebigen Variabelen τ.

Nach den Regeln der Differentialrechnung ist

$$x_\nu'' = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx_\nu}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{ds}\right) = \left(\frac{d\tau}{ds}\right)^3 \left\{\frac{ds}{d\tau}\cdot\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2} - \frac{dx_\nu}{d\tau}\cdot\frac{d^2s}{d\tau^2}\right\} \quad .$$

Setzen wir diesen Ausdruck in c^2 ein, und beachten, daſs (55)

a) $$m\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \left(\frac{dx_\nu}{d\tau}\right)^2 \quad ,$$

also

b) $$m\frac{ds}{d\tau}\cdot\frac{d^2s}{d\tau^2} = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \frac{dx_\nu}{d\tau}\cdot\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2}$$

ist, so folgt als Lösung der Aufgabe:

c) $$m\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^4 c^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \left(\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2}\right)^2 - m\left(\frac{d^2s}{d\tau^2}\right)^2 \quad ,$$

worin für $ds/d\tau$ und $d^2s/d\tau^2$ noch ihre Werte aus den vorigen Gleichungen zu setzen sind.

108 **Aufgabe 4.** Die Krümmung der Bahn darzustellen durch die Änderungen der allgemeinen Koordinaten p_ϱ des Systems mit der Bahnlänge.

Wir führen in den Ausdruck **106** an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten die p_ϱ ein, indem wir die x_ν'' ausdrücken durch die p_ϱ' und p_ϱ''. Zunächst ist nach **57 b**

$$x_\nu' = \sum_1^r{}_\varrho\, \alpha_{\nu\varrho} p_\varrho' \quad ,$$

also

$$x_\nu'' = \sum_1^r{}_\varrho\, (\alpha_{\nu\varrho} p_\varrho'' + \alpha_{\nu\varrho}' p_\varrho') \quad ,$$

also

$$x_\nu''^2 = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, (\alpha_{\nu\varrho}\alpha_{\nu\sigma} p_\varrho'' p_\sigma'' + 2\,\alpha_{\nu\varrho}'\alpha_{\nu\sigma} p_\varrho' p_\sigma'' + \alpha_{\nu\varrho}'\alpha_{\nu\sigma}' p_\varrho' p_\sigma') \quad .$$

Man bilde diese Gleichungen für alle ν, multipliziere eine jede mit m_ν/m, und addiere alle. Links entsteht c^2. Rechts kann die Summation nach ν mit Hülfe der schon eingeführten Grössen $a_{\varrho\sigma}$ in den ersten beiden Gliedern ausgeführt werden. Im ersten Glied ergiebt die Summation unmittelbar nach **57 c** $a_{\varrho\sigma}$. Als Faktor von p_σ'' im zweiten Gliede wird nach einander erhalten: **(108)**

$$2\sum_1^r{}_\varrho\, p_\varrho' \sum_1^{3n}{}_\nu\, \frac{m_\nu}{m}\alpha_{\nu\sigma}\alpha_{\nu\varrho}' = 2\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\tau\, p_\varrho' p_\tau' \sum_1^{3n}{}_\nu\, \frac{m_\nu}{m}\alpha_{\nu\sigma}\frac{\partial\alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau}$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\tau\, p_\varrho' p_\tau' \sum_1^{3n}{}_\nu\, \frac{m_\nu}{m}\alpha_{\nu\sigma}\left(\frac{\partial\alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau} + \frac{\partial\alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\varrho}\right)$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\tau\, p_\varrho' p_\tau' \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} + \frac{\partial a_{\tau\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma}\right) \qquad \text{(nach \textbf{63})}$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\tau\, p_\varrho' p_\tau' \left(2\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma}\right) \quad .$$

Beim Übergang von der zweiten in die dritte Form und von der vierten in die fünfte Form ist Gebrauch gemacht von der Bemerkung, daſs, wenn $F(\varrho,\sigma)$ ein beliebiger Ausdruck ist, welcher die Indices ϱ und σ enthält, alsdann identisch

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, F(\varrho,\sigma) = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, F(\sigma,\varrho) \qquad \text{a)}$$

ist.

Der Faktor des dritten Gliedes läſst sich nicht durch die $a_{\varrho\sigma}$ ausdrücken. Um im Endresultat die Beziehung auf die rechtwinkligen Koordinaten gleichwohl verschwinden zu lassen, sei gesetzt:

$$a_{\varrho\sigma\lambda\mu} = \sum_1^{3n}{}_\nu\, \frac{m_\nu}{m}\cdot\frac{\partial\alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\lambda}\cdot\frac{\partial\alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\mu} \quad . \qquad \text{b)}$$

Es wird dann schliefslich erhalten als Lösung der Aufgabe:

$$\text{e)}\qquad c^2 = \sum_1^r{}^{\varrho}\sum_1^r{}^{\sigma}\left\{a_{\varrho\sigma}p''_\varrho p''_\sigma + \sum_1^r{}^{\tau}\left(2\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma}\right)p'_\varrho p'_\tau p''_\sigma + \sum_1^r{}^{\lambda}\sum_1^r{}^{\mu} a_{\varrho\sigma\lambda\mu}p'_\varrho p'_\sigma p'_\lambda p'_\mu\right\} .$$

Hierin sind also die $a_{\varrho\sigma}$ die in **57** eingeführten Funktionen der p_ϱ; die $a_{\varrho\sigma\lambda\mu}$ sind als neu eingeführte Funktionen derselben Grössen anzusehen. Die Zahl dieser neu eingeführten Funktionen beträgt $\frac{1}{4}r^2(r+1)^2$.

Abschnitt 4. Mögliche und unmögliche Verrückungen. Materielle Systeme.

Erläuterungen.

109 **1.** Zwischen einer Anzahl von materiellen Punkten besteht ein Zusammenhang, wenn aus der Kenntnis eines Teils der Komponenten der Verrückungen dieser Punkte eine Aussage in Bezug auf die übrigen Komponenten möglich ist.

110 **2.** Wenn zwischen den Punkten eines Systems Zusammenhänge bestehen, so ist damit ein Teil der denkbaren Verrückungen des Systems von der Betrachtung ausgeschlossen, diejenigen Verrückungen des Systems nämlich, deren Stattfinden den vorausgesetzten Aussagen widersprechen würde. Umgekehrt bildet jede Aussage, dafs von den denkbaren Verrückungen des Systems ein Teil von der Betrachtung auszuschliefsen sei, einen Zusammenhang zwischen den Punkten des Systems. Die Zusammenhänge der Punkte eines Systems sind vollständig gegeben, wenn für jede denkbare Verrückung des Systems bekannt gegeben ist, ob dieselbe zur Betrachtung zugelassen oder von derselben ausgeschlossen sei.

3. Die zur Betrachtung zugelassenen Verrückungen 111
heifsen mögliche Verrückungen, die übrigen unmögliche. Die möglichen Verrückungen werden auch virtuelle genannt. Mögliche Verrückungen heifsen sie stets, wenn sie als engerer Begriff den denkbaren gegenübergestellt werden; virtuelle Verrückungen werden sie nur dann genannt, wenn sie als weiterer Begriff einem engeren, z. B. den wirklichen Verrückungen entgegengestellt werden.

4. Mögliche Bahnen heifsen alle Bahnen, welche sich 112
aus möglichen Verrückungen zusammensetzen. Mögliche Lagen sind alle Lagen, welche durch mögliche Bahnen erreicht werden können.

5. Es sind also alle Lagen möglicher Bahnen mögliche 113
Lagen. Aber es geht aus dem Gesagten nicht hervor, und es soll auch nicht gesagt sein, dafs jede denkbare Bahn durch mögliche Lagen auch eine mögliche Bahn sei. Vielmehr kann eine Verrückung auch zwischen unendlich benachbarten möglichen Lagen als eine unmögliche Verrückung bezeichnet sein.

6. Zwischen zwei möglichen Lagen giebt es immer eine 114
mögliche Bahn. Denn führt von irgend einer wirklichen Lage zu beiden Lagen auch nur e i n e mögliche Bahn, so bilden diese beiden Bahnen zusammen schon eine mögliche Bahn zwischen den beiden Lagen; führte zu einer von beiden keine mögliche Bahn, so wäre diese Lage auch keine mögliche Lage.

Definition 1. Ein Zusammenhang eines Systems heifst 115
ein stetiger, wenn er den folgenden drei Voraussetzungen nicht widerspricht:

1. Dafs die Angabe aller möglichen endlichen Verrückungen enthalten sei in der Angabe aller möglichen unendlich kleinen Verrückungen, (Stetigkeit im Endlichen);

2. dafs jede mögliche unendlich kleine Verrückung in gerader, stetiger Bahn durchlaufen werden könne, (Stetigkeit im Unendlichkleinen);

3. dafs jede unendlich kleine Verrückung, welche aus einer bestimmten Lage möglich ist, auch möglich ist aus jeder unendlich benachbarten Lage, abgesehen von Abweichungen

von der Ordnung der Entfernung der Lagen oder von höherer Ordnung, (stetige Veränderlichkeit der möglichen Verrückungen).

116 **Folgerung.** Wenn in einem System nur stetige Zusammenhänge sich finden, so ist die Summe irgend welcher möglichen unendlich kleinen Verrückungen aus derselben Lage wieder eine mögliche Verrückung aus der gleichen Lage. (Superposition unendlich kleiner Verrückungen.)

Denn nach **115,** 3 müssen sich die einzelnen Verrückungen hinter einander durchlaufen lassen, und nach **115,** 2 ist dann die direkte Verrückung aus der Anfangs- in die Endlage selbst auch eine mögliche Verrückung.

117 **Definition 2.** Ein Zusammenhang eines Systems heifst ein innerer, wenn er nur die gegenseitige Lage der Punkte des Systems betrifft.

118 **Folgerung.** Wenn in einem System nur innere Zusammenhänge sich finden, so ist jede Verrückung des Systems, welche die Konfiguration nicht ändert, eine mögliche Verrückung, und umgekehrt.

119 **Definition 3.** Ein Zusammenhang eines Systems heifst ein gesetzmäfsiger, wenn er unabhängig von der Zeit besteht.

Ein gesetzmäfsiger Zusammenhang besteht also in der Aussage, dafs von den denkbaren Verrückungen des Systems zu jeder Zeit, oder unabhängig von der Zeit, gewisse Verrückungen möglich, andere unmöglich sind.

120 **Anmerkung.** Solange wir von der Geometrie der Systeme handeln, kommt der Unterschied zwischen gesetzmäfsigem und ungesetzmäfsigem Zusammenhange nicht in Betracht, da unsere Überlegungen die Zeit nicht enthalten. Sind die Zusammenhänge eines Systems zu zwei Zeiten verschieden, so haben wir es für unsere jetzige Betrachtung zu beiden Zeiten mit zwei verschiedenen Systemen zu thun. Es läuft praktisch auf dasselbe hinaus, wenn wir voraussetzen, dafs in diesem ersten Buche die Zusammenhänge sämtlich gesetzmäfsige seien.

121 **Definition 1.** Ein System materieller Punkte, welches keinen anderen als stetigen Zusammenhängen unterworfen ist, nennen wir ein materielles System.

Definition 2. Ein materielles System, welches keinen anderen als inneren und gesetzmäfsigen Zusammenhängen unterworfen ist, nennen wir ein freies System. 122

Definition 3. Ein materielles System, zwischen dessen möglichen Lagen alle denkbaren stetigen Übergänge zugleich auch mögliche Übergänge sind, heifst ein holonomes System. 123

Der Name soll andeuten, dafs ein solches System integralen (ὅλος) Gesetzen (νόμος) gehorcht, während die materiellen Systeme im allgemeinen nur Differentialgesetzen unterworfen sind. (Vergleiche **132** ff.)

Analytische Darstellung.

Bemerkung. Ein System materieller Punkte genügt den Bedingungen eines materiellen Systems, wenn die Differentiale seiner rechtwinkligen Koordinaten keinen anderen Bedingungen unterworfen sind als einer Anzahl homogener linearer Gleichungen, deren Koefficienten stetige Funktionen möglicher Werte der Koordinaten sind. 124

Denn die erste Art der Stetigkeit, welche die Definition (**115**) verlangt, mufs vorausgesetzt werden, wenn überhaupt von Differentialen der Koordinaten des Systems gesprochen wird; den beiden andern Arten wird durch die Einschränkung der zugelassenen Differentiale genügt.

Umkehrung. Genügt ein System materieller Punkte den Bedingungen eines materiellen Systems, so sind die Differentiale seiner rechtwinkligen Koordinaten keinen anderen Einschränkungen unterworfen, als einer Anzahl homogener linearer Gleichungen unter sich, deren Koefficienten stetige Funktionen möglicher Werte der Koordinaten sind. 125

Zum Beweise fassen wir eine mögliche Lage des Systems ins Auge und die möglichen Verrückungen aus ihr. Für eine beliebig herausgegriffene dieser Verrückungen mögen sich die $3n$ Änderungen dx_ν verhalten wie:

$$\varepsilon_{11} : \varepsilon_{12} : \ldots\ldots : \varepsilon_{1\,3n} \quad .$$

(125) Verstehen wir nun unter du_1 eine ganz beliebige unendlich kleine Gröſse, so ist durch den Satz von Gleichungen:

$$dx_\nu = \varepsilon_{1\nu}\, du_1$$

ein Satz möglicher Verrückungen gegeben. Entweder sind nun in demselben alle möglichen Verrückungen überhaupt enthalten, oder dies ist nicht der Fall. Trifft letzteres zu, so wählen wir eine beliebige zweite Verrückung aus, welche nicht durch jene Form dargestellt werden kann, und es mögen für diese die $3n$ Änderungen dx_ν sich verhalten wie:

$$\varepsilon_{21} : \varepsilon_{22} : \ldots\ldots : \varepsilon_{2\,3n} \quad .$$

Verstehen wir nun unter du_2 eine zweite beliebige unendlich kleine Gröſse, so ist durch das System der Gleichungen:

$$dx_\nu = \varepsilon_{1\nu}\, du_1 + \varepsilon_{2\nu}\, du_2$$

nach Voraussetzung (116) ein allgemeinerer Satz möglicher Verrückungen gegeben. Entweder sind nun wenigstens in diesem alle möglichen Verrückungen enthalten, oder dies ist nicht der Fall. Wenn letzteres eintritt, so verfahren wir wie vorher, indem wir eine neue Gröſse du_3 einführen, und wir wiederholen das Verfahren so lange, bis es wegen Erschöpfung aller möglichen Verrückungen sich nicht wiederholen lässt. Seine Fortsetzung wird spätestens unmöglich, wenn wir $3n$ Gröſsen du_λ eingeführt haben; denn alsdann stellt die Form:

$$dx_\nu = \sum_1^{3n}{}_\lambda\, \varepsilon_{\lambda\nu}\, du_\lambda$$

alle möglichen Verrückungen des Systems auch dann dar, wenn alle denkbaren Verrückungen möglich sind, wenn also gar keine Zusammenhänge zwischen den Punkten des Systems bestehen. Im allgemeinen muss also das Verfahren notwendig früher zu Ende kommen, und es lassen sich daher alle möglichen Verrückungen des Systems darstellen durch Bedingungsgleichungen der Form:

$$dx_\nu = \sum_1^{l}{}_\lambda\, \varepsilon_{\lambda\nu}\, du_\lambda \quad , \qquad \textbf{a)}$$

in welcher unter allen Umständen

$$l \leqq 3n$$

ist. Damit aber dieser Form durch willkürlich gewählte dx_ν genügt werden könne, ist hinreichende Bedingung, daſs die dx_ν den $3n - l$ homogenen linearen Gleichungen genügen, welche durch Elimination der du_λ aus den Gleichungen **a)** sich ableiten lassen. Die Gröſsen $\varepsilon_{\lambda\nu}$ müssen nach **115,3** stetige Funktionen der Lage sein. Weiteren Einschränkungen als diesen brauchen aber nach **124** die dx_ν nicht unterworfen zu werden.

Anmerkung. Die Zahl und der Inhalt der Gleichungen, **126**
welche wir zwischen den dx_ν nach dem angegebenen Verfahren ableiten, ist unabhängig von der besonderen Wahl der benutzten Verrückungen.

Denn benutzen wir andere Verrückungen wie vorher, und drücken daher die dx_ν durch andere Gröſsen dv_λ aus, so können wir die Werte der dx_ν in diesen in die vorher erhaltenen Eliminationsgleichungen einsetzen. Würden dieselben nicht identisch befriedigt, so wären die dv_λ nicht unabhängig von einander, was gegen die Voraussetzung ginge, unter welcher sie bestimmt wurden. Jene Gleichungen werden also identisch befriedigt, und sie können daher nicht verschieden sein von den Gleichungen oder von linearen Kombinationen der Gleichungen, welche durch Elimination der dv_λ aus den Formen erhalten werden, in welchen sie die dx_ν darstellen. Gröſser als die Zahl der mit Hülfe der dv_λ zu erhaltenden Gleichungen kann demnach die Zahl der mit Hülfe der du_λ erhaltenen nicht sein; sie kann aber auch nicht kleiner sein, sonst würde das umgekehrte Verfahren erlauben, zu erweisen, daſs die du_λ nicht unabhängig von einander wären.

Folgerung 1. Der Zusammenhang eines materiellen Sy- **127**
stems kann analytisch vollständig beschrieben werden durch Angabe einer einzigen möglichen Lage des Systems und eines

Satzes homogener linearer Gleichungen zwischen den Differentialen seiner rechtwinkligen Koordinaten.

Denn Beziehungen zwischen diesen Differentialen können nach **125** nicht anders als durch einen solchen Satz von Gleichungen gegeben werden. Dies hindert allerdings nicht, dafs zwischen den Koordinaten auch endliche Gleichungen bestehen. Aber alle diese endlichen Gleichungen liefsen sich vollständig ersetzen durch eine einzige mögliche Lage und ebensoviele homogene lineare Gleichungen zwischen den Differentialen. Diese letzteren aber können den unmittelbar gegebenen Differentialgleichungen nicht widersprechen; sie gehen also entweder aus denselben hervor oder sind ihnen zur Erzielung einer vollständigen Beschreibung hinzuzufügen.

128 **Bezeichnung.** Die Gleichungen, welche den Zusammenhang eines materiellen Systems in den rechtwinkligen Koordinaten desselben darstellen, sollen in Zukunft dauernd in der Form geschrieben werden:

$$\sum_{1}^{3n}{}_{\nu}\, x_{\iota\nu}\, dx_{\nu} = 0 \quad .$$

Dabei wird angenommen, dafs i solcher Gleichungen vorhanden seien, und es sind also dem ι in den einzelnen Gleichungen die Werte 1, 2, etc. bis i beizulegen. Die Gröfsen $x_{\iota\nu}$ sind als stetige Funktionen der x_{ν} zu betrachten.

129 **Folgerung 2.** Der Zusammenhang eines materiellen Systems, dessen Lagen durch allgemeine Koordinaten dargestellt sind, kann analytisch vollständig beschrieben werden durch Angabe einer einzigen möglichen Lage und eines Satzes homogener linearer Gleichungen zwischen den Differentialen der Koordinaten.

Durch Benutzung der allgemeinen Koordinaten p_{ϱ}, deren Zahl r kleiner als $3n$ ist, ist bereits ein Zusammenhang zwischen den Punkten des Systems gesetzt. Denken wir uns deshalb den Zusammenhang zuerst nach **128** vollständig beschrieben durch die rechtwinkligen Koordinaten. In den entsprechenden Differentialgleichungen seien die Werte der dx_{ν} in den dp_{ϱ} nach Gleichung **57 b** eingetragen. Die entstehenden

linearen homogenen Gleichungen müssen sich so ordnen lassen, dass unter ihnen $3n - r$ identisch erfüllt sind infolge der $3n - r$ Gleichungen, welche ausdrücken, dafs die $3n$ Gröfsen x_{ν} Funktionen der r Gröfsen p_{ϱ} sind. Die übrig bleibenden $k = i - 3n + r$ Gleichungen zwischen den dp_{ϱ} ersetzen bei Benutzung der p_{ϱ} vollständig die sämtlichen Gleichungen zwischen den dx_{ν} und genügen daher, nach **127**, zusammen mit der Angabe einer möglichen Lage zur vollständigen Beschreibung des Zusammenhanges des Systems.

Bezeichnung. Die Gleichungen, welche den Zusammenhang eines materiellen Systems in den allgemeinen Koordinaten p_{ϱ} desselben darstellen, sollen in Znkunft dauernd in der Form geschrieben werden: 130

$$\sum_{1}^{r}{}_{\varrho}\, p_{\varkappa\varrho}\, dp_{\varrho} = 0 \quad .$$

Die Zahl dieser Gleichungen wird gleich k angenommen, und es sind also dem $\varkappa$ nach einander die Werte 1, 2, etc. bis k zu erteilen. Die Gröfsen $p_{\varkappa\varrho}$ sind als stetige Funktionen der p_{ϱ} zu betrachten.

Anmerkung. Die Gleichungen **128** bez. **130** werden auch die Differentialgleichungen oder die Bedingungsgleichungen des Systems genannt werden. 131

Lehrsatz. Lassen sich aus den Differentialgleichungen eines materiellen Systems eine gleiche Zahl von endlichen Gleichungen zwischen den Koordinaten des Systems ableiten, so ist das System ein holonomes System (**123**). 132

Denn die Koordinaten einer jeden möglichen Lage müssen alsdann den endlichen Gleichungen genügen. Die Unterschiede der Koordinaten zweier benachbarter Lagen genügen also einer gleichen Zahl von homogenen linearen Differentialgleichungen, und da diese der ebenso grofsen Zahl der gegebenen Differentialgleichungen des Systems nicht widersprechen können, auch diesen letzteren. Die Verrückung zwischen irgend zwei möglichen Lagen ist also eine mögliche Verrückung, welches die Behauptung ist.

133 **Umkehrung.** Ist ein materielles System ein holonomes System, so lassen seine Differentialgleichungen eine ebenso grofse Zahl von endlichen oder Integralgleichungen zwischen den Koordinaten selbst zu.

Man betrachte von den r Koordinaten des Systems, zwischen deren Differentialen die k Gleichungen bestehen, irgend welche $r-k$, etwa die ersten $r-k$ als unabhängig veränderlich. Man gehe von einer beliebigen Anfangslage des Systems auf verschiedenen möglichen Bahnen zu einer Lage über, für welche die unabhängigen Koordinaten bestimmte Werte haben. Käme man nun mit stetig sich ändernder Bahn zu stetig sich ändernden Werten der übrigen Koordinaten, also zu verschiedenen Lagen, so wären diese Lagen mögliche Lagen, die Verrückungen zwischen ihnen also nach Voraussetzung mögliche Verrückungen. Es gäbe also von Null verschiedene Wertsysteme der Differentiale, welche den Differentialgleichungen genügen, obwohl die ersten $r-k$ dieser Differentiale gleich Null gesetzt sind. Dies ist nicht möglich, da die Gleichungen homogen und linear sind. Also kommen wir stets zu denselben Werten nicht nur der ersten $r-k$, sondern auch der übrigen Koordinaten. Die letzteren sind also bestimmte Funktionen der ersteren. Die k endlichen Gleichungen, welche dies ausdrücken, sind, da sie den Differentialgleichungen nicht widersprechen können, Integralgleichungen derselben.

Bewegungsfreiheit.

134 **Definition.** Die Zahl der willkürlich anzunehmenden unendlich kleinen Änderungen der Koordinaten eines materiellen Systems heifst die Zahl der Bewegungsfreiheiten des Systems oder auch der Grad der Freiheit seiner Bewegung.

Bemerkungen dazu.

135 1. Die Zahl der Freiheiten eines Systems ist gleich der Zahl seiner Koordinaten, vermindert um die Zahl der Differentialgleichungen des Systems.

2. Die Zahl der Freiheiten eines materiellen Systems ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten. 136

In der Bezeichnung von **128—130** ist die Zahl der Freiheiten gleich $r-k$, also (**129**) gleich $3n-i$, also stets dieselbe Zahl, welche Zahlen auch durch r und k dargestellt sind.

3. Die Zahl der Freiheiten eines Systems ändert sich nicht mit der Lage des Systems. 137

Da der Zusammenhang ein stetiger ist, so kann sich die Zahl der Freiheiten in benachbarten Lagen nicht um ein Endliches unterscheiden, also, da eine stetige Änderung dieser Zahl ausgeschlossen ist, auch nicht in endlich entfernten Lagen.

4. Der Beweis des Satzes **125** enthält eine Lösung der Aufgabe: Die Zahl der Bewegungsfreiheiten eines vollständig bekannten materiellen Systems, allerdings nicht ohne Probieren, zu finden. Die Zahl l der nach der Methode jenes Beweises gefundenen Hülfsgröfsen du_λ ist die gesuchte Zahl. 138

Ist von vornherein bekannt, dafs die möglichen Lagen des Systems sich durch r allgemeine Koordinaten p_ϱ darstellen lassen, so können in jenem Beweise auch diese Koordinaten anstatt der x_ν benutzt werden.

Definition. Eine Koordinate eines materiellen Systems, deren Änderungen unabhängig von den Änderungen aller übrigen Koordinaten geschehen können, heifst eine freie Koordinate des Systems. 139

Folgerung. Eine freie Koordinate kommt in den Differentialgleichungen ihres Systems nicht vor, und umgekehrt ist jede Koordinate, welche in den Differentialgleichungen nicht vorkommt, eine freie Koordinate. 140

Anmerkung 1. Ob eine bestimmte Koordinate eines Systems eine freie Koordinate ist, oder nicht, hängt ab von der Wahl der übrigen, gleichzeitig benutzten Koordinaten. 141

Denn kommt eine gewisse Koordinate in den Differentialgleichungen des Systems nicht vor, und wählen wir nun an Stelle einer der Koordinaten, welche in diesen Gleichungen vorkommen, eine Funktion dieser und jener ersten als Koordi-