73) ***Dynamik der zusammengesetzten Bewegung eines Atoms.*** Im ersten Abschnitt Nr. 12 wurde gezeigt, wie aus einem Verein von einzelnen Bewegungen eine zusammengesetzte Bewegung entsteht und aufgefunden werden kann, und umgekehrt, wie jede wirkliche Bewegung auch durch die Vereinigung von gleichzeitig auftretenden Einzelnbewegungen hervorgebracht werden kann.

Hier ist nun der Ort zu zeigen, welche Bewegung durch ein gleichzeitiges Vorhandensein von verschiedenen Geschwindigkeiten und Kräften hervorgebracht wird, und wie umgekehrt ein System von Geschwindigkeiten und Kräften aufgefunden werden kann, welches eine Bewegung hervorbringt, die mit einer wirklich vorhandenen Bewegung übereinstimmt.

Um diese Fragen zu beantworten, muss man vor allem Andern wissen, wie bei einem gleichzeitigen Zusammenwirken von Kräften die Thätigkeit jeder einzelnen erfolgt, und dies kann, wie Alles was die innere Wesenheit der Materie und der Kräfte betrifft, nur durch die Erfahrung erkannt werden.

Dieser gemäss erfolgt bei einem gleichzeitigen Einwirken mehrerer Kräfte die Thätigkeit jeder einzelnen genau in der Weise, als ob alle anderen Kräfte nicht vorhanden wären.

Nach diesem Gesetze des wechselseitig unabhängigen Wirkens der Kräfte kann nun jede aus einzelnen Bewegungen zusammengesetzte Bewegung hervorgebracht werden durch das vereinte Auftreten aller Geschwindigkeiten und Kräfte, welche den einzelnen Bewegungen entsprechen würden, wenn jede derselben allein, die anderen aber nicht vorhanden wären. Ist also für eine dieser einzelnen Bewegungen V die Geschwindigkeit des Atoms in einem gewissen Augenblick, v die Geschwindigkeitsänderung des Atoms in dem nächstfolgenden Zeittheilchen t, ϱ der Krümmungshalbmesser des Kurvenstückchens, welches das Atom im Zeitelement t in seiner Bahn durchläuft; q das Gewicht des Atoms; so kann diese einzelne Bewegung hervorgebracht werden durch das gleichzeitige Vorhandensein 1) der Geschwindigkeit V nach der Richtung der Tangente an die Bahn, 2) der tangentialen Beschleunigungskraft $\frac{q}{g}\frac{v}{t}$, 3) der normalen Ablenkungskraft, $\frac{q}{g}\cdot\frac{V^2}{\varrho}$. Lässt man nun die allen einzelnen Bewegungen entsprechenden Geschwindigkeiten und Kräfte gleichzeitig vorhanden sein, so bringen sie die zusammengesetzte Bewegung wirklich hervor.

Nach jenem Erfahrungssatz findet man umgekehrt ein System von Geschwindigkeiten und Kräften, welche eine wirklich vorhandene Bewegung hervorzubringen vermögen, wenn man diese wirkliche Bewegung

in einzelne Bewegungen zerlegt, und dann die Geschwindigkeiten und Kräfte aufsucht, welche im Stande wären, diese einzelnen Bewegungen zu veranlassen

74) ***Gleichzeitiges und nach einander folgendes Wirken der Kräfte.*** Aus dem Gesetz des wechselseitig unabhängigen Wirkens der Kräfte folgt auch, dass durch ein nach einander folgendes Wirken der einzelnen Kräfte einer Gesammtheit von Kräften die gleichen Ortsveränderungen hervorgebracht werden, wie durch die gleichzeitige Thätigkeit der Kräfte.

Wenn also auf ein frei bewegliches und in Bewegung befindliches Atom von einem gewissen Augenblick an, in welchem es sich in einem Punkt A befindet, während einer gewissen Zeit t eine Gesammtheit von Kräften einwirkt, so gelangt dasselbe nach einem Punkt B, den es auch erreicht, wenn man das Atom zunächst während der Zeit t der Trägheit überlässt, es hierauf in Ruhe versetzt, und dann die Kräfte nicht gleichzeitig, sondern eine nach der andern, und jede durch die Zeit t einwirken lässt, dabei aber das Atom am Ende der Einwirkung jeder Kraft in Ruhe versetzt.

Dieser Ort B, nach welchem das Atom gelangt, kann durch die Aneinanderreihung von Linien gefunden werden, deren Richtungen mit der anfänglichen Bewegungsrichtung und mit den Richtungen der Kräfte parallel und die so lang sind, als die Wege, welche das Atom vermöge der anfänglichen Geschwindigkeit und vermöge jeder einzelnen Kraft in in der Zeit t zurücklegen würde. Der Endpunkt der letzten Linie dieses Liniensystems ist dann der gesuchte Punkt B.

75) ***Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.*** Unter der Zusammensetzung von Kräften versteht man die Auffindung einer einzigen Kraft, deren Thätigkeit der vereinten Thätigkeit einer Gesammtheit von Kräften äquivalent ist. Unter Zerlegung der Kräfte versteht man die Auffindung eines Systems von Kräften, deren Wirksamkeit mit der einer einzelnen Kraft übereinstimmt. Eine einzelne Kraft, welche eine Gesammtheit von Kräften zu ersetzen vermag, nennt man auch die resultirende Kraft, und ihre Auffindung unterliegt nach den in den vorigen Nummern gegebenen Erläuterungen keiner Schwierigkeit.

Nennt man, um die Sache ohne Verzeichnung einer Figur zu erklären, A . a . b . c . . . . B . die Endpunkte des Liniensystems, von welchem in voriger Nummer die Rede war, so ist die Seite A a der Weg, den das Atom vermöge der in A vorhandenen Geschwindigkeit in der Zeit t vermöge der Trägheit zurücklegt. Verbindet man den Punkt a direkt mit B durch eine gerade Linie, so stellt diese, sowohl der Richtung wie Grösse nach, den Weg vor, welcher der resultirenden Kraft entspricht, denn eine Kraft, die mit a B parallel wirkt, und die das

Atom in der Zeit t durch eine Weglänge gleich a B zu bewegen vermag, wird offenbar in Verbindung mit der anfänglichen Geschwindigkeit des Atoms die Ortsveränderung von A und B hervorbringen.

Wenn das Zeitintervall t unendlich klein gedacht wird, können die Intensitäten der Kräfte als unveränderlich angenommen werden, und dann sind die einzelnen Wege $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ $\overline{cd}$ $\overline{aB}$ den Intensitäten der Kräfte proportional. Verzeichnet man daher ein Liniensystem: $a_1\ b_1\ c_1\ d_1 \ldots B_1$, dessen Seiten mit a . b . c . . . . B parallel sind, deren Längen aber die wirklichen Intensitäten der Kräfte darstellen, so wird die Schlusslinie $a_1\ B_1$ dieses Systems der Richtung und Grösse nach die Resultirende der übrigen Kräfte darstellen.

Umgekehrt findet man ein System von Kräften, welchem eine einzige Kraft R äquivalent ist, wenn man die Endpunkte a_1 und B_1 der Linie, welche die Kraft R darstellt, durch ein beliebiges System $a_1\ b_1\ c_1 \ldots B$ von geraden Linien verbindet. Die Seiten dieses Liniensystems stellen dann der Richtung und Grösse nach das der Kraft R äquivalente Kräftesystem dar.

Dynamik der relativen Bewegung eines Atoms.

76) ***Kräfte der relativen oder scheinbaren Bewegung.*** Wir haben bereits im ersten Abschnitt die Beziehungen kennen gelernt, welche zwischen den absoluten Bewegungen zweier Körper und ihrer relativen Bewegung stattfinden, und haben gesehen, dass immer eine von diesen drei Bewegungen gefunden werden kann, wenn die beiden andern gegeben sind, und wie insbesondere die relative Bewegung eines Körpers gegen einen andern zu bestimmen ist, wenn die absoluten Bewegungen beider Körper bekannt sind.

Allein diese absoluten Bewegungen sind nicht immer von vorneherein bekannt, sondern in den meisten Fragen, welche die relative Bewegung betreffen, kennt man die absolute Bewegung eines Körpers und kennt man ferner die Kräfte und Geschwindigkeiten, welche die absolute Bewegung eines zweiten Körpers B veranlassen, und will vermittelst dieser Daten die relative Bewegung des Körpers B gegen den Körper A ausfindig machen. Dies ist z. B. der Fall bei manchen physikalischen Fragen, wenn es sich darum handelt, die Bewegung eines von gewissen Kräften affizirten Körpers gegen die in Bewegung befindliche Erde kennen zu lernen.

Diese relative Bewegung kann wie eine absolute Bewegung behandelt werden, wenn man diejenigen Kräfte und Geschwindigkeiten bestimmt, welche eine absolute Bewegung veranlassen würden, die mit der relativen Bewegung identisch wäre.

Diese Kräfte sind von Coriolis, welcher zuerst die dynamischen Gesetze der relativen Bewegung aufgefunden hat, die Kräfte der relativen oder scheinbaren Bewegung genannt worden, weil die relative Bewegung eines Körpers B gegen einen Körper A auf einen Beobachter, der unbewusst der Bewegung von A folgt, den Eindruck machen muss, als sei sie eine durch jene Kräfte veranlasste absolute Bewegung.

Wir werden im Folgenden zeigen, wie diese Kräfte der relativen oder scheinbaren Bewegung gefunden werden können, wenn die absolute Bewegung von A und die Elemente der absoluten Bewegung (Geschwindigkeiten und Kräfte) des Körpers B gegeben sind, werden aber dabei nicht den von Coriolis gewählten allgemein analytischen Weg einschlagen, sondern ziehen es vor, die Sache durch Betrachtung einer Reihe von speziellen Fällen vermittelst der Zerlegung der Bewegung zu behandeln.

77) ***Relative Bewegung eines Atoms in einer Ebene gegen eine Linie.*** Wir nehmen zunächst an, in einer Ebene bewege sich ein Atom und eine gerade Linie $\mathfrak{L}$, und legen uns die Frage vor, welche Geschwindigkeit das Atom in jedem Augenblick besitzen muss, und welche Kräfte auf dasselbe in jedem Augenblick unter folgenden Umständen einwirken müssen.

1) Wenn sich die Linie $\mathfrak{L}$ mit gleichförmiger Geschwindigkeit um einen in ihr liegenden Punkt O der Ebene dreht, und das Atom seinen Ort gegen die Linie $\mathfrak{L}$ nicht ändert.

2) Wenn sich die Linie $\mathfrak{L}$ mit gleichförmiger Geschwindigkeit um einen in ihr liegenden Punkt O der Ebene dreht, und sich das Atom gegen die Linie $\mathfrak{L}$ mit gleichförmiger Geschwindigkeit nach einer Richtung $\mathfrak{L}_1$ bewegt, die mit $\mathfrak{L}$ einen Winkel α bildet.

3) Wenn sich die gerade Linie $\mathfrak{L}$ mit gleichförmiger Geschwindigkeit um einen in ihr liegenden Punkt O der Ebene dreht, und das Atom gegen die gerade Linie $\mathfrak{L}$ eine krumme Linie mit ungleichförmiger Geschwindigkeit beschreibt.

4) Wenn sich die gerade Linie $\mathfrak{L}$ mit ungleichförmiger Geschwindigkeit um einen in ihr liegenden Punkt O dreht, der gleichzeitig in einer krummen Bahn mit ungleichförmiger Geschwindigkeit, aber in der Ebene fortschreitet, und wenn sich gleichzeitig das Atom gegen die Linie $\mathfrak{L}$ in einer krummen Bahn mit ungleichförmiger Geschwindigkeit bewegt.

Zerlegt man in jedem einzelnen dieser Fälle die wirkliche absolute Bewegung des Atoms in ein passendes System von einzelnen Bewegungen, durch deren gleichzeitiges Auftreten die wirklich stattfindende Bewegung hervorgebracht werden könnte, und sucht sodann die Geschwindigkeiten

und Kräfte, welche im Stande wären, jede dieser einzelnen Bewegungen hervorzubringen, wenn alle übrigen nicht vorhanden wären, so erhält man offenbar die Geschwindigkeiten und Kräfte, welche durch ihr vereintes Auftreten die wirkliche Bewegung des Atoms hervorbringen müssten, und die Resultirenden aus allen einzelnen Geschwindigkeiten und aus allen einzelnen Kräften müssen dann offenbar gleich sein der absoluten Geschwindigkeit des Atoms und der absoluten Kraft, welche auf dasselbe einwirkt. Wir wollen nun diese Kräfte und Geschwindigkeiten in den oben bezeichneten vier Fällen zu bestimmen suchen.

Erster Fall. Nennt man W die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich die Linie $\mathfrak{L}$ dreht, R die constante Entfernung des Atoms von dem Drehungspunkt O, q das Gewicht des Atoms, g die Beschleunigung durch die Schwere; so ist R W die absolute Geschwindigkeit, mit der sich das Atom in die Peripherie des Kreises, dessen Halbmesser gleich R ist, bewegt, und damit diess geschehen kann, muss auf das Atom eine nach radialer Richtung gegen den Drehungspunkt O einwärts zielende constante Ablenkungskraft $\mathfrak{C}$ einwirken, deren Intensität gleich ist der Centripetalkraft, welche einer solchen Kreisbewegung entspricht. Man hat daher $\mathfrak{C} = \frac{q}{g} W^2 R$.

Zweiter Fall. In diesem Falle besitzt das Atom in einem Augenblick, in welchem seine Entfernung von dem Drehungspunkt O gleich R ist, nicht nur längs der Linie $\mathfrak{L}_1$ eine Geschwindigkeit V, sondern auch nach einer auf R senkrechten Richtung eine Geschwindigkeit R W; seine absolute Geschwindigkeit ist daher in diesem Augenblick die resultirende aus V und aus R W.

Durch diese Geschwindigkeiten wird aber die wirklich vorhandene Bewegung noch nicht hervorgebracht, sondern es müssen noch zwei Ablenkungskräfte $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ einwirken, von denen die erstere $\mathfrak{C} = \frac{q}{g} W^2 R$ nach radialer Richtung einwärts zielend das Atom in der Entfernung R zu erhalten strebt, während die andere $\mathfrak{D}$ senkrecht auf die relative Geschwindigkeit V und im Sinne der Drehung wirken muss. Während sich nämlich die relative Bahn $\mathfrak{L}_1$ in einem Zeitelement t um einen Winkel W t wendet, bewegt sich das Atom nicht nur in seiner Bahn, sondern auch mit der Bahn; durch die Bewegung in der Bahn legt es in der Zeit t längs derselben einen Weg V t zurück; durch seine Bewegung mit der Bahn beschreibt es in der Zeit t einen Kreisbogen, welchem ein Halbmesser V t und ein Centriwinkel W t entspricht, dessen Länge also gleich V t × W t = V W t^2 ist; und um diesen Weg in der Zeit t zurückzulegen, muss senkrecht auf die Richtung von V eine Kraft $\mathfrak{D}$ wirken, die so gross ist,

als überhaupt eine Kraft sein muss, damit eine Masse $\frac{q}{2g}$ in einer Zeit t durch einen Weg V W t^2 bewegt wird. Man hat daher zur Bestimmung dieser Kraft $\mathfrak{D}$ die Gleichung

$$V W t^2 = \frac{1}{2} g \frac{\mathfrak{D}}{q} t^2$$

daher

$$\mathfrak{D} = 2 \frac{q}{g} V W$$

Es ist also in diesem zweiten Falle:

a) die absolute Geschwindigkeit des Atoms in einem gewissen Zeitaugenblick die Resultirende aus der relativen Geschwindigkeit V und aus der Drehungsgeschwindigkeit R W und dann ist ferner:

b) die Kraft, welche der absoluten Bewegung entspricht, die Resultirende aus den Ablenkungskräften $\mathfrak{C} = \frac{q}{g} W^2 R$ und $\mathfrak{D} = 2 \frac{q}{g} V W$, von denen die erstere nach radialer Richtung gegen den Drehungspunkt einwärts wirkt, während die zweite nach einer auf V senkrechten Richtung und im Sinne der Drehung thätig ist.

Dritter Fall. Diese Bewegung kann man veranlassen, wenn man zu den Geschwindigkeiten und Kräften, welche dem zweiten Fall entsprechen, noch die Kräfte der relativen Bewegung, d. h. diejenigen Kräfte hinzufügt, welche der Geschwindigkeitsänderung und Richtungsänderung entsprechen, die in der relativen krummlinigen Bewegung wirklich eintreten.

Nennt man v die Aenderung der relativen Geschwindigkeit des Atoms gegen die Linie $\mathfrak{L}$ im Zeitelement t, ϱ den Krümmungshalbmesser des Kurvenelementes der relativen Bahn, welches das Atom im Zeitelement t durchläuft, so sind $\mathfrak{R}_t = \frac{q}{g} \frac{v}{t}$ und $\mathfrak{R}_\varrho = \frac{q}{g} \frac{V^2}{\varrho}$ diese Kräfte der relativen Bewegung, von denen die erstere in der Ricktung von V, und die leztere in der Richtung von ϱ gegen den Krümmungsmittelpunkt hinzielend wirken muss. Wir wollen die Resultirende aus $\mathfrak{R}_t$ und $\mathfrak{R}_\varrho$ mit $\mathfrak{R}$ bezeichnen.

In diesem dritten Falle ist also, wie man sieht:

a) die absolute Geschwindigkeit in einem gewissen Zeitaugenblick die Resultirende aus der relativen Geschwindigkeit V und aus der Drehungsgeschwindigkeit R W, und es ist ferner:

b) die Kraft der absoluten Bewegung die Resultirende α) aus der Ablenkungskraft $\mathfrak{C} = \frac{q}{g} R W^2$, welche nach radialer Richtung gegen den

Drehungspunkt hinzielt; β) aus der Ablenkungskraft $\mathfrak{D} = 2\,\frac{q}{g}\,V\,W$, welche auf V senkrecht steht und im Sinne der Drehung wirkt; γ) aus der Kraft $\mathfrak{R}$ der relativen Bewegung, welche zerlegt werden kann in eine tangentiale Beschleunigungskraft $\mathfrak{R}_t = \frac{q}{g}\,\frac{v}{t}$ und in eine normale Ablenkungskraft $\mathfrak{R}_\varrho = \frac{q}{g}\,\frac{V^2}{\varrho}$

Vierter Fall. Diese Bewegung würde offenbar eintreten, wenn man zu den Geschwindigkeiten und Kräften, die dem dritten Fall entsprachen, noch die Geschwindigkeit und Kraft hinzufügt, welche der absoluten Bewegung des Punktes O und der Aenderung der Winkelgeschwindigkeit der Linie $\mathfrak{L}$ entsprechen. Nennt man C die absolute Geschwindigkeit, mit welcher sich der Punkt O in dem Augenblick bewegt, in dem die Grössen R V W ϱ ihre Geltung haben; c die Geschwindigkeitsänderung des Punktes O im nächstfolgenden Zeitelement t, r den Krümmungshalbmesser des vom Punkt O im Zeitelement t durchlaufenen Bahnelementes, w die Aenderung der Winkelgeschwindigkeit der Linie $\mathfrak{L}$: so sind $\mathfrak{F}_t = \frac{q}{g}\,\frac{c}{t}$ und $\mathfrak{F}_r = \frac{q}{g}\,\frac{C^2}{r}$ die Kräfte, welche parallel mit C und mit r wirkend in Verbindung mit der Geschwindigkeit C in dem Atom eine Bewegung veranlassen würden, welche mit der des Punktes O im Zeitelement t vollkommen übereinstimmen müsste. Dann aber muss noch in dem vorliegenden Fall senkrecht auf die Richtung von R eine Kraft $\frac{q}{g}\,\frac{R\,w}{t} = \mathfrak{T}$ wirken, welche der Aenderung der Winkelgeschwindigkeit der Bewegung von $\mathfrak{L}$ entspricht.

Die Resultirende aus $\mathfrak{F}_t$ und $\mathfrak{F}_r$ wollen wir mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen.

Für diesen vierten Fall ist also

a) die absolute Geschwindigkeit des Atoms die Resultirende α) aus der relativen Geschwindigkeit V des Atoms gegen die Linie $\mathfrak{L}$, β) aus der Drehungsgeschwindigkeit R W und γ) aus der absoluten Geschwindigdeit C des Punktes O, und es ist ferner:

b) die Kraft der absoluten Bewegung die Resultirende α) aus der nach R zielenden Ablenkungskraft $\mathfrak{C} = \frac{q}{g}\,W^2\,R$, β) aus der senkrecht auf R wirkenden Beshleunigungskraft, $\mathfrak{T} = \frac{q}{g}\,\frac{Rw}{t}$, γ) aus der im Sinne der Drehung und senkrecht auf V wirkenden Ablenkungskraft $\mathfrak{D} = 2\,\frac{q}{g}$ V W, δ) aus den Kräften $\mathfrak{F}_t = \frac{q}{g}\,\frac{c}{t}$ und $\mathfrak{F}_r = \frac{q}{g}\,\frac{C^2}{r}$, welche

der Fortschrittsbewegung des Punktes O entspreben, ε) aus den Kräften $\mathfrak{R}_t = \frac{q}{g}\,\frac{\mathfrak{D}}{t}$, $\mathfrak{R}_\varrho = \frac{q}{g}\,\frac{V^2}{\varrho}$, welche der relativen Bewegung entsprechen.

78) ***Kräfte der relativen Bewegung. Fortsetzung.*** Wir haben uns in den so eben besprochenen vier Fällen so benommen, als wenn die absolute Bewegung der Linie $\mathfrak{L}$ und die relative Bewegung des Atoms gegen $\mathfrak{L}$ gegeben wäre, und die absolute Geschwindigkeit des Atoms und die Kräfte der absoluten Bewegung gesucht werden sollten

Es unterliegt aber nun keiner weiteren Schwierigkeit, die relative Geschwindigkeit des Atoms und die Kräfte der relativen Bewegung ausfindig zu machen, wenn die absoluten Geschwindigkeiten des Atoms und der Linie und wenn ferner noch die absoluten auf das Atom wirklich einwirkenden Kräfte gegeben sind.

Es ist nämlich in diesem Falle:

a) die relative Geschwindigkeit des Atoms gleich und entgegengesetzt der Resultirenden aus den Geschwindigkeiten R W und C und aus der nach entgegengesetzter Richtung genommenen absoluten Geschwindigkeit des Atoms; und dann ist ferner;

b) die Kraft $\mathfrak{R}$ der relativen Bewegung (die Resultirende aus $\mathfrak{R}_t = \frac{q}{g}\,\frac{v}{t}$ und $R_\varrho = \frac{q}{g}\,\frac{V^2}{\varrho}$) gleich und entgegengesetzt der Resultirenden aus den Kräften $\mathfrak{C} = \frac{q}{g}\,W^2\,R$, $\mathfrak{T} = \frac{q}{g}\,\frac{wR}{t}$, $\mathfrak{D} = 2\,\frac{q}{g}\,V\,W$, $\mathfrak{F}_t = \frac{q}{g}\,\frac{c}{t}$, $\mathfrak{F}_r = \frac{q}{g}\,\frac{C^2}{r}$ und aus den nach entgegengesetzten Richtungen genommenen absoluten Kräften, welche auf das Atom wirklich einwirken.

Ist das Atom gezwungen, sich längs einer mit der Linie $\mathfrak{L}$ unveränderlich verbundenen krummen Linie zu bewegen, so kann man diese gezwungene Bewegung doch wie eine freie Bewegung behandeln, wenn man den Druck $\mathfrak{P}$ der Bahn wegen das Atom als eine von den äusseren auf das Atom wirklich einwirkenden Kräfte in Rechnung bringt.

79) ***Lebendige Kraft des Atoms in seiner relativen Bewegung. Bewegung in der Ebene.*** Die relative Bewegung eines Atoms erfolgt, wie wir gesehen haben, wie eine absolulte Bewegung, die durch Kräfte veranlasst würde, welche den Kräften der relativen Bewegung gleich wären. Nennen wir nun L und l die lebendigen Kräfte, welche den relativen Geschwindigkeiten des Atoms in zwei Zeitmomenten entsprechen, so muss die Aenderung L — l gleich sein der Wirkungsgrösse, welche die Kraft $\mathfrak{R}$ der relativen Bewegung während des Zeitintervalles entwickelt hat, in dem jene Aenderung L — l eingetreten ist. Da aber die

Kraft $\mathfrak{R}$ der relativen Bewegung gleich und entgegengesetzt ist der Resultirenden aus den Kräften $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{F}$ und aus den nach entgegengesetzten Richtungen genommenen absoluten äusseren Kräften, so ist jene Wirkungsgrösse auch gleich der Summe der Wirkungsgrössen aller äusseren Kräfte, mehr noch der Summe der Wirkungsgrössen, welche den nach entgegengesetzten Richtungen genommenen Kräften $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{F}$ entsprechen.

Die Berechnung dieser Wirkungsgrössen ist auf ähnliche Weise zu bewerkstelligen, wie schon früher ausführlich gezeigt wurde; nur darf man dabei nicht die von dem Atom wirklich beschriebenen, sondern man muss die Wegelemente der relativen Bewegung in Rechnung bringen, d. h. man muss, um das Element der Wirkung einer dieser Kräfte zu finden, die Kraft multipliziren mit der Projektion des relativen Wegelementes auf die Riehtung der Kraft.

Von diesen, in solcher Weise zu berechnenden Wirkungen ist unter allen Umständen diejenige gleich Null, welche der Ablenkungskraft $\mathfrak{D}$ entspricht, und ist ferner noch in dem Falle, wenn sich das Atom längs einer steifen krummen Bahn bewegen muss, die dem Druck $\mathfrak{P}$ der Bahn gegen das Atom entsprechende Wirkung von keinem Werth, denn die Richtungen dieser beiden Kräfte sind senkrecht gegen die Bahn, die Projektion eines Wegelementes auf jene Richtungen sind daher gleich Null.

Es ist mithin die Aenderung $L - l$ der lebendigen Kraft des Atoms in seiner relativen Bewegung gleich der Summe von folgenden Wirkungen: a) der Wirkung der Resultirenden $\mathfrak{A}$ aus allen äusseren Kräften, welche nebst dem Druck der Bahn gegen das Atom auf dasselbe wirklich einwirken; b) einer Kraft $-\mathfrak{F}$, deren Intensität gleich, deren Richtung aber entgegengesetzt ist derjenigen Kraft, die auf das Atom einwirken müsste, wenn es eine mit der Bewegung des Punktes O übereinstimmende Bewegung zu machen hätte; c) einer Kraft $-\mathfrak{C}$, deren Intensität gleich deren Richtung, aber der Centripetalkraft, welche der Drehung entspricht, entgegengesetzt ist; d) einer Kraft $-\mathfrak{T}$, deren Intensität gleich deren Richtung, aber entgegengesetzt ist derjenigen Kraft, welche der Aenderung der Winkelgeschwindigkeit entspricht. Bezeichnen wir die Wirkungen der Kraft $\mathfrak{A}, -\mathfrak{F}, -\mathfrak{C}, -\mathfrak{T}$ mit $\underset{\mathfrak{A}}{W}\ \underset{\mathfrak{F}}{W}\ \underset{\mathfrak{C}}{W}\ \underset{\mathfrak{T}}{W}$, so hat man, wenn dieselben positiv ausfallen, also in dem Sinne wirken, dass durch sie eine Zunahme der relativen Geschwindigkeit eintritt.

$$L - l = \underset{\mathfrak{A}}{W} + \underset{\mathfrak{F}}{W} + \underset{\mathfrak{C}}{W} + \underset{\mathfrak{T}}{W},$$

Die Wirkungen $\underset{\mathfrak{A}}{W}\ \underset{\mathfrak{F}}{W}\ \underset{\mathfrak{T}}{W}$ müssen in jedem speziellen Falle besonders

berechnet werden; die Wiskung $\underset{\mathfrak{C}}{W}$ hingegen kann für alle Fälle allgemein ermittelt werden.

Nennt man nämlich für denjenigen Augenblick der Bewegung, in welchem die Entfernung des Atoms von dem Punkt O gleich R ist, φ den Winkel, den die Richtungen von R und V bilden und s das unendlich kleine, im Zeitelement t vom Atom in seiner relativen Bahn durchlaufene Wegelement, so ist $\frac{q}{g} W^2 R s \cos \varphi$ das Element der Wirkung der Kraft $\mathfrak{C}$. Es ist aber $s \cos \varphi$ die Aenderung der Entfernung des Atoms im Zeitelement t vom Punkt O, mithin $s \cos \varphi = d R$. Das der Centrifugalkraft entsprechende Element der Wirkung ist demnach $\frac{q}{g} W^2 R\, d R$, man hat daher $\underset{\mathfrak{C}}{W} = \int_{R=R_1}^{R=R_2} \frac{q}{g} W^2 R\, d R$.

wobei R_1 und R_2 die Entfernungen des Atoms von dem Punkt O am Anfang und am Ende des Zeitraums sind, in welchem die lebendige Kraft von dem Werth l in den Werth L übergegangen ist.

Erfolgt die Drehung der Linie $\mathfrak{L}$ mit unveränderlicher Geschwindigkeit, so ist W constant und dann wird

$$\underset{\mathfrak{C}}{W} = \frac{q}{2g} W^2 \left(R_2^2 - R_1^2 \right)$$

Erfolgt überdiess die Bewegung des Punktes O mit gleichförmiger Geschwindigkeit oder bleibt derselbe ruhend, an einem gewissen Ort, so ist $\underset{\mathfrak{F}}{W} = 0$.

80) ***Druck des Atoms gegen die Bahn bei einer erzwungenen relativen Bewegung in einer Ebene.*** Ist ein Atom gezwungen, sich längs einer in Bewegung befindlichen Bahn von unveränderlicher Form zu bewegen, so übt es gegen dieselbe in jedem Augenblick einen Druck $\mathfrak{P}$ aus, welcher sich vermittelst der in dem Vorhergehenden gewonnenen Resultaten leicht bestimmen lässt.

Wir haben nämlich gesehen, dass die Resultirende aller äusseren auf das Atom einwirkenden Kräfte der Richtung und Grösse nach übereinstimmt mit der Resultirenden aus den Kräften $\mathfrak{C}$ $\mathfrak{D}$ $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{T}$. Zerlegt man nun jede dieser Kräfte in eine tangentiale und in eine normale Kraft, so muss die Summe aller aus $\mathfrak{C}$ $\mathfrak{D}$ $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{T}$ entspringenden Normalkräfte gleich sein der Summe der Normalkräfte aus sämmtlichen äusseren Kräften, zu welchen auch der Druck der Bahn gegen das Atom gehört.

Man hat daher, wenn man den Druck der Bahn gegen das Atom mit $\mathfrak{P}$, die Resultirende aller übrigen äusseren Kräfte mit $\mathfrak{A}$ und die Win-

kel, welche die Richtungen der Kräfte $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{C}$ $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{T}$ mit der Richtung von $\mathfrak{D}$ bilden, mit (F), (E), (A), (T) bezeichnet, folgende Gleichung

$$\mathfrak{D} + \mathfrak{R}\ \text{Cos.}\ (\mathfrak{R}) + \mathfrak{F}\ \text{Cos.}\ (\mathfrak{F}) + \mathfrak{C}\ \text{Cos.}\ (\mathfrak{C}) + \mathfrak{T}\ \text{Cos}\ (\mathfrak{T}) = \mathfrak{A}\ \text{Cos.}\ (\mathfrak{A}) + \mathfrak{P}$$

Je nachdem der aus dieser Gleichung sich ergebende Werth von $\mathfrak{P}$ positiv oder negativ ausfällt, erfolgt der Druk der Bahn gegen das Atom in der Richtung von $\mathfrak{D}$ oder in entgegengesetzter Richtung.

81) ***Relative Bewegung eines Atoms im Raume gegen ein in Bewegung befindliches Axensystem.*** Betrachten wir nun den allgemeinsten Fall der relativen Bewegung eines Atoms im Raume, nämlich die relative krummlinige Bewegung eines Atoms gegen ein rechtwinkliches Axensystem, das sich auf beliebige Weise im Raum bewegt, dessen Anfangspunkt O also in einer beliebigen krummen Linie mit beschleunigter Geschwindigkeit im Raume fortschreitet, während gleichzeitig die Axen O x, O y, O z des Systems ihren Ort und ihre Lage beliebig ändern.

In irgend einem bestimmten Zeitmoment wird sich das Atom relativ gegen das Axensystem an einem gewissen Ort befinden, und wird sich gegen die Axen nach einer gewissen Richtung mit einer gewissen relativen Geschwindigkeit V bewegen. Gleichzeitig wird sich das Axensystem um eine gewisse Momentanaxe drehen und wird der Anfangspunkt nach einer gewissen Richtung mit einer gewissen Geschwindigkeit im Raume fortschreiten. In dem auf jenen Zeitmoment folgenden unendlich kleinen Zeittheilchen t werden sich aber diese verschiedenen Geschwindigkeiten und Bewegungsrichtungen um unendlich wenig ändern.

Die absolute Bewegung des Atoms während dieses Zeittheilchens kann nun in folgende Bewegungen zerlegt werden:

1) In eine beschleunigte drehende Bewegung des Atoms um die Momentanaxe, d. h. in diejenige Bewegung, welche das Atom machen müsste, wenn es seinen relativen Ort gegen das Axensystem nicht änderte, und der Anfangspunkt O keine Bewegung hätte.

2) In eine fortschreitende Bewegung des Atoms nach einer Richtung, die zugleich senkrecht steht auf der Richtung der relativen Geschwindigkeit des Atoms und auf der Richtung der Momentanaxe. Denkt man sich nämlich durch das Atom eine Linie parallel mit der Momentanaxe gezogen und durch diese Linie und durch die Richtung der relativen Bewegung eine Ebene E gelegt, so ist dies die Ebene, in welcher sich das Atom während der Zeit t in seiner relativen Bewegung fortbewegt; allein diese Ebene selbst dreht sich um die Momentanaxe; das Atom hat also nicht nur eine Bewegung in der Ebene, sondern auch eine Bewegung mit derselben, also eine Bewegung nach einer auf diese Ebene senkrechten Richtung.

3) In eine Fortschrittsbewegung, die mit jener des Anfangspunktes O des Axensystems übereinstimmt.

4) In die relative Bewegung des Atoms gegen das Axensystem.

Bestimmt man nun die idealen Kräfte, welche im Stande wären, diese Einzelbewegungen zu veranlassen, so muss die Resultirende aus denselben gleich und gleich gerichtet sein der Resultirenden aller äusseren auf das Atom einwirkenden Kräfte, zu welchen äussern Kräften in dem Falle, wenn das Atom gezwungen wäre, sich auf einer starren Fläche oder Linie zu bewegen, der Druck gerechnet werden muss, mit welchem die Fläche oder Linie gegen das Atom wirkt.

Die Kräfte, welche diesen Einzelbewegungen entsprechen, sind nun folgende:

1) Der drehenden Bewegung des Atoms um die Momentanaxe entsprechen: a) eine Centripetalkraft $\mathfrak{C} = \frac{q}{g}\ W^2\ R$, wobei W die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Momentanaxe und R die Entfernung des Atoms von der Momentanaxe bezeichnet; b) eine auf R und auf die Richtung der Momentanaxe senkrecht gerichtete Kraft $\mathfrak{T} = \frac{q}{g}\ \frac{R\,w}{t}$, welche der Beschleunigung der Drehbewegung entspricht. In diesem Ausdruck bezeichnet w die Aenderung der Winkelgeschwindigkeit im Zeitelement t.

2) Der fortschreitenden Bewegung des Atoms nach einer Richtung, die zugleich senkrecht steht auf der Richtung der relativen Geschwindigkeit und auf der Richtung der Momentanaxe entspricht eine Kraft $\mathfrak{D} = 2 \cdot \frac{q}{g}\ V\ W\ \sin.\ \delta$, wobei V die relative Geschwindigkeit des Atoms und δ den Winkel bezeichnet, unter welchem die Richtung der relativen Geschwindigkeit gegen die Richtung der Momentanaxe geneigt ist.

Denkt man sich nämlich durch das Atom eine zur Momentanaxe parallele Linie gezogen, so entfernt sich das Atom von dieser Linie im Zeitelement t um $V\,t\ \sin.\ \delta$. Da sich aber gleichzeitig die Ebene E um einen Winkel $W\,t$ wendet, so legt das Atom nach einer auf E senkrechten Richtung einen Weg zurück, der gleich ist der Länge eines Kreisbogens, welchem ein Halbmesser $V\,t\ \sin.\ \delta$ und einem Centriwinkel $W\,t$ entspricht, dessen Länge also gleich $V\,t\ \sin.\ \delta \times W\,t = V\,W\ \sin.\ \delta\,t^2$ ist. Zur Bestimmung der Kraft $\mathfrak{D}$, welche diese Bewegung hervorzubringen vermöchte, hat man also die Gleichung

$$V\ W\ \sin.\ \delta\ t^2 = \frac{1}{2}\ g\ \frac{\mathfrak{D}}{q}\ t^2$$

demnach wird

$$\mathfrak{D} = 2\,\frac{q}{g}\,V\,W\,\sin.\,\delta$$

Was die Richtung dieser Kraft betrifft, so ist zu bemerken, dass sie im Sinne der Drehung wirkend gedacht werden muss.

3) Der Fortschrittsbewegung des Anfangspunktes O der Coordination entsprechen zwei Kräfte $\mathfrak{F}_t$ und $\mathfrak{F}_r$. Nennt man: C die Geschwindigkeit des Punktes O am Anfange des Zeitelements t, c die Geschwindigkeitsänderung desselben im Zeitelement t, r den Krümmungshalbmesser des vom Punkt O im Zeitelement t beschriebenen Bahnelementes, so sind die numerischen Werthe jener Kräfte:

$$\mathfrak{F}_t = \frac{q}{g}\frac{c}{t},\quad \mathfrak{F}_r = \frac{q}{g}\frac{C^2}{r}$$

Die Richtung der ersteren stimmt mit jener von C überein, oder ist ihr entgegengesetzt, je nachdem c eine Geschwindigkeitszunahme oder eine Geschwindigkeitsabnahme bedeutet.

Die Richtung der zweiten Kraft zielt parallel mit der Richtung, die von O nach dem Krümmungsmittelpunkt geht.

4) Die Kräfte, welche der relativen Bewegung entsprechen, bestehen wiederum aus einer tangentialen Beschleunigungskraft $\mathfrak{R}_t = \frac{q}{g}\,\frac{v}{t}$ und aus einer normalen Ablenkungskraft $R_\varrho = \frac{q}{g}\,\frac{V^2}{\varrho}$. Die Richtung der ersteren stimmt mit jener von V überein oder ist ihr entgegengesetzt, je nachdem v eine Geschwindigkeitszunahme oder eine Geschwindigkeitsabnahme bedeutet. Die Richtung der zweiten Kraft zielt von dem Atom aus nach dem Krümmungsmittelpunkt hin.

Um die Gleichungen der relativen Bewegung des Atoms aufzustellen, muss man eine freie Bewegung des Atoms von einer erzwungenen unterscheiden.

Im ersteren Falle erhält man zur Bestimmung der relativen Bewegung drei Gleichungen, die sich ergeben, indem man die Resultirende aller unter 1, 2, 3 und 4 bestimmten Kräfte gleich setzt der Resultirenden aller wirklich auf das Atom einwirkenden Kräfte.

Im letztern Falle müssen nicht nur die Beziehungen zwischen den Resultirenden der idealen und wirklichen äusseren Kräften, sondern auch noch die Gleichungen der Bahn oder der Fläche, welcher das Atom zu folgen gezwungen ist, berücksichtigt werden.

82) ***Bestimmung der lebendigen Kraft, welche der relativen Bewegung eines Massensystems gegen ein Axensystem entspricht.*** Alles, was in Nr. 79 über die relative Bewegung eines isolirten Atoms gegen ein in Bewegung befindliches Axensystem gesagt wurde, gilt auch von jedem Atom eines Atomsystems, das sich unter der Einwirkung von inneren und äusseren Kräften gegen ein in Bewegung befindliches Axensystem bewegt. Es muss nämlich die Resultirende aller idealen Kräfte, welche der Bewegung eines einzelnen Atoms des Systems entsprechen, gleich und gleich gerichtet sein der Resultirenden aller äusseren und inneren Kräfte, welche in der That auf dieses Atom einwirken, und es muss ferner die der relativen Bewegung des Atoms entsprechende in einer gewissen endlichen Zeit eintretende Aenderung der lebendigen Kraft gleich sein der Summe der relativen Wirkungen der nach entgegengesetzter Richtung genommenen Kräfte $\mathfrak{C}, \mathfrak{T}, \mathfrak{F}$ und der nach ihrer wirklichen Richtung genommenen Resultirenden $\mathfrak{A}$ aller äusseren und inneren Kräfte, welche in der That auf das Atom einwirken.

Nennt man also $\mathfrak{W}_{\mathfrak{C}}, \mathfrak{W}_{\mathfrak{T}}, \mathfrak{W}_{\mathfrak{F}}, \mathfrak{W}_{\mathfrak{A}}$ die relativen Wirkungen, welche diese Kräfte entwickeln, während die lebendige Kraft des Atoms von l in L übergeht, so hat man:

$$L - l = \mathfrak{W}_{\mathfrak{C}} + \mathfrak{W}_{\mathfrak{T}} + \mathfrak{W}_{\mathfrak{F}} + \mathfrak{W}_{\mathfrak{A}}$$

Werden die allen Atomen des Systems entsprechenden ähnlichen Gleichungen addirt, so erhält man:

$$\Sigma L - \Sigma l = \Sigma \mathfrak{W}_{\mathfrak{C}} + \Sigma \mathfrak{W}_{\mathfrak{T}} + \Sigma \mathfrak{W}_{\mathfrak{F}} + \Sigma \mathfrak{W}_{\mathfrak{A}}$$

wodurch die Aenderung der totalen lebendigen Kraft bestimmt ist.

Betrachtet man die Bedeutung der Kräfte $\mathfrak{C}, \mathfrak{T}, \mathfrak{F}$, so überzeugt man sich leicht, dass es diejenigen Kräfte sind, welche auf jedes Atom des Atomsystems einwirken müssten, wenn es seine relative Lage gegen das Axensystem nicht änderte.

Anwendungen der Gesetze der relativen Bewegung.

83) ***Erste Aufgabe.*** Eine Röhre, welche eine Kugel enthält, werde in einer horizontalen Ebene mit gleichförmiger Geschwindigkeit um einen Punkt O ihrer Axe gedreht; man soll die Bewegung der Kugel in der Röhre und ihren Druck gegen die Röhre bestimmen.

In diesem Falle wird die Kugel nur allein durch die Centrifugalkraft $\mathfrak{C} = \frac{q}{g}\,W^2 R$ längs der Röhre beschleunigt; man hat daher, wenn man die Geschwindigkeitszunahme der Kugel in einem Zeitelement dt mit dV bezeichnet zur Bestimmung von V die Gleichung:

$$\frac{q}{g}\cdot\frac{dV}{dt} = \frac{q}{g}\,W^2 R$$

oder:

$$\frac{dV}{dt} = W^2 R$$

Es ist aber auch $V = \frac{dR}{dt}$, daher

$$V\,dV = W^2\ R\,dR.$$

Ist V_0 die relative Geschwindigkeit der Kugel in einem Zeitmoment, in welchem ihre Entfernung vom Drehungspunkt O gleich R_0, so findet man durch Integration dieser Gleichung:

$$V = \sqrt{V_0^2 + W^2 (R^2 - R_0^2)}$$

Der Druck $\mathfrak{P}$ der Röhre gegen die Kugel ist gleich der Ablenkungskraft $\mathfrak{D}$. Man hat daher

$$\mathfrak{P} = 2\,\frac{q}{g}\,V\,W$$

oder wenn man für V seinen Werth setzt:

$$\mathfrak{P} = 2\,\frac{q}{g}\,W\ \sqrt{V_0^2 + W^2 (R^2 - R_0^2)}$$

Zweite Aufgabe. Eine gerade Röhre, welche eine Kugel enthält, werde durch ein constantes Drehungsmoment $\mathfrak{M}$ in einer horizontalen Ebene um einen in ihrer Axe liegenden Punkt O gedreht; man soll die Bewegung der Kugel in der Röhre und die Bewegung der Röhre bestimmen.

In diesem Fall hat man die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{q}{g}\frac{dV}{dt} &= \frac{q}{g}\,W^2\,R \\ V &= \frac{dR}{dt} \\ \mathfrak{M} &= \mathfrak{P}\,R = 2\,\frac{q}{g}\,V\,W\,R \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Die Werthe von dt und von W, welche sich aus der zweiten und dritten Gleichung ergeben, in die erste eingeführt, so erhält man:

$$V^3\,dV = \left(\frac{\mathfrak{M}\,g}{2\,q}\right)^2 \frac{dR}{R}$$

Hieraus folgt durch Integrationen:

$$V = \sqrt[4]{V_0^4 + 4\left(\frac{\mathfrak{M}\,g}{2\,q}\right)^2 \text{lognat.}\left(\frac{R}{R_0}\right)}$$

wobei V_0 die relative Geschwindigkeit der Kugel gegen die Röhre in dem Augenblick bezeichnet, in welchem ihre Entfernung von O gleich R_0 ist.

Durch Einführung dieses Werthes von V in die dritte der Gleichungen (a) findet man:

$$W = \frac{\frac{\mathfrak{M}\,g}{2\,q}}{R\sqrt[4]{V_0^4 + 4\left(\frac{\mathfrak{M}\,g}{2\,q}\right)^2 \text{lognat.}\left(\frac{R}{R_0}\right)}}$$

Dritte Aufgabe. Eine gerade Röhre, in welcher sich eine Kugel befindet, werde in einer horizontalen Ebene mit gleichförmiger Geschwindigkeit um einen Punkt O gedreht, dessen Abstand von der Axe der Röhre gleich e ist: zu bestimmen die Bewegung der Kugel in der Röhre und den wechselseitigen Druck derselben.

Hier kommen wiederum nur allein die Kräfte $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ in Betrachtung. Zerlegt man $\mathfrak{C}$ in zwei Kräfte, von denen die eine längs der Röhre, die andere senkrecht auf dieselbe gerichtet ist, so ist erstere die Beschleunigungskraft der relativen Bewegung, und bestimmt letztere in Verbindung mit $\mathfrak{D}$ den Druck der Kugel gegen die Röhre. Man hat daher:

$$\left.\begin{aligned} \frac{q}{g}\frac{dV}{dt} &= \mathfrak{C}\cos\varphi \\ \mathfrak{P} &= \mathfrak{D} + \mathfrak{C}\sin.\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

wobei φ den Winkel bezeichnet, den die Axe der Röhre mit R bildet.

Bezeichnet man durch x die auf der Axe der Röhre gemessene Entfernung des Mittelpunktes der Kugel von dem Fusspunkt des von O auf die Axe gefällten Perpendikels, so ist

$$\sin.\varphi = \frac{e}{R}$$

$$\cos.\varphi = \frac{x}{R}$$

$$V = \frac{dx}{dt}$$

und da man ferner auch noch hat:

$$\mathfrak{C} = \frac{q}{g}\,W^2\,R, \quad \mathfrak{D} = 2\,\frac{q}{g}\,V\,W$$

so verwandeln sich die Gleichungen (a) in folgende:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= W^2\,x \\ \mathfrak{P} &= \frac{q}{g}\left\{2\,V\,W + W^2\,e\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Aus der ersteren dieser Gleichungen folgt wegen:

$$V\,dt = dx$$
$$V\,dV = W^2\,x\,dx$$

demnach durch Integration:

$$V = \sqrt{V_0^2 + W^2\,(x^2 - x_0^2)}$$

wobei V_0 die relative Geschwindigkeit bezeichnet, welche in dem Moment vorhanden ist, in dem x gleich x_0.

Setzt man diesen Werth von V in die zweite der Gleichungen (b), so erhält man:

$$\mathfrak{P} = \frac{q}{g} W \{ 2\sqrt{V_0^2 + W^2\,(x^2 - x_0^2)} + We \}$$

Vierte Aufgabe. Eine ebene aber krumme Röhre, welche eine Kugel enthält, werde mit gleichförmiger Geschwindigkeit um einen Punkt O gedreht, der in der Ebene der Röhre liegt: die Bewegung der Kugel in der Röhre und den wechselseitigen Druck zwischen Kugel und Röhre zu bestimmen.

Nennt man α den Winkel, den die Richtungen von R und V bilden, und zerlegt die Centrifugalkraft $\mathfrak{C}$ in eine tangentiale und in eine normale Kraft, so bestimmt erstere die Beschleunigungskraft der relativen Bewegung und letztere in Verbindung mit $\mathfrak{D}$ und mit dem Druck $\mathfrak{P}$ der Röhre gegen die Kugel die normale Ablenkungskraft der relativen Bewegung. Man hat daher:

$$\frac{q}{g}\frac{dV}{dt} = \frac{q}{g} W^2\,R\cos.\alpha$$

$$\frac{q}{g}\frac{V^2}{\varrho} = 2\frac{q}{g} W\,V - \frac{q}{g} W^2\,R\sin.\alpha + \mathfrak{P}$$

Multiplizirt man die erstere dieser Gleichungen mit $V\,dt$ und lässt den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{q}{g}$ weg, so ergibt sich:

$$V\,dV = W^2\,R\,V\cos.\alpha\,dt$$

allein es ist $V\,dt$ das Wegelement, das der Mittelpunkt der Kugel in seiner relativen Bewegung im Zeitelement dt zurücklegt, demnach $V\cos.\alpha\,dt$ die Projektion dieses Wegelements auf der Richtung von R, daher $V\cos.\alpha\,dt = dR$ und

$$V\,dV = W^2\,R\,dR$$

Durch Integration dieser Gleichung findet man auch hier wiederum:

$$V = \sqrt{V_0^2 + W^2\,(R^2 - R_0^2)}$$

Der Werth von $\mathfrak{P}$ wird:

$$\mathfrak{P} = \frac{q}{g}\left\{W^2\,R\sin.\alpha + \frac{V^2}{\varrho} - 2\,W\,V\right\}$$

Allgemeine Bewegungsgesetze.

84) ***Mittlere Werthe eines Massensystems.*** In jedem Massensystem entspricht in jedem bestimmten Augenblick seines ruhigen oder bewegten Seins jedem einzelnen Massenpunkt in irgend einer Hinsicht ein gewisser Werth. Jeder Massenpunkt befindet sich z. B. in einem gewissen Zeitmoment in einer gewissen Entfernung von einem beliebig gewählten fixen oder beweglichen Punkt, oder jeder Massenpunkt befindet sich in einer gewissen Entfernung von einer willkührlich angenommenen Ebene, oder jeder Massenpunkt hat eine gewisse Geschwindigkeit oder eine gewisse lebendige Kraft.

Der mittlere Werth, welcher dem Massensystem in irgend einer Hinsicht zukommt, ist nun derjenige constante Werth, den jede Masse besitzen müsste, damit der totale Werth des Massensystems dem wirklich vorhandenen Werth gleich käme.

Nennt man $m, m_1, m_2 \ldots$ die einzelnen Massentheilchen des Systems, $y, y_1, y_2 \ldots$ die Werthe (Entfernungen, Geschwindigkeiten etc.), welche den Massenpunkten in irgend einem Zeitmoment entsprechen, Y den mittleren Werth, aller y für das ganze System, so hat man:

$$Y(m + m_1 + m_2 + \ldots) = ym + y_1 m_1 + y_2 m_2 \ldots$$

oder

$$Y = \frac{y\,m + y_1\,m_1 + y_2\,m_2 + \ldots}{m + m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\Sigma\,my}{\Sigma\,m}$$

Man kann sich die Sache auch graphisch anschaulich machen.

Scheidet man auf eine gerade Linie einzelne Längen ab, von denen jede einzelne so viele Längeneinheiten misst, als die einzelnen Massen Masseeinheiten enthalten; errichtet in den Abschnittspunkten Perpendikel und trägt auf dieselben die den einzelnen Massenpunkten zukommenden Werthe von $y\ y_1$ auf, so ist die Summe der Flächeninhalte aller Rechtecke gleich

$$my + m_1\,y_1 + m_2\,y_2 \ldots$$

und der mittlere Werth von y ist nun, dem Begriff vom mittleren Werth einer Grösse gemäss, nichts anderes, als die Höhe Y eines Rechtecks, das einen eben so grossen Flächeninhalt darbietet, als alle einzelnen Rechtecke zusammen. Es ist also:

$$Y(m + m_1 + m_2 + \ldots) = my + m_1\,y_1 + \ldots$$

demnach:

$$Y = \frac{my + m_1\,y_1 + \ldots}{m + m_1 + \ldots} = \frac{\Sigma\,my}{\Sigma\,m}$$

Wir wollen von diesem Satz einige Anwendungen machen.

85) ***Der Mittelpunkt eines Massensystems.*** Der Ort jedes Punktes

eines Massensystems kann durch seine Coordinaten in Bezug auf drei unter rechtem Winkel sich schneidende fixe Ebenen bestimmt werden. Nennt man m m_1 m_2 ... die Massen der einzelnen Punkte des Systems x, y, z x_1 y_1 z_1 ... die Coordinaten dieser Massenpunkte in Bezug auf die drei aufeinander senkrecht stehenden Ebenen, X, Y, Z die Coordinaten des mittleren Ortes des Massensystems, welchen Ort wir den Mittelpunkt des Massensystems nennen wollen, so hat man zur Bestimmung desselben die Gleichungen:

$$X = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \quad Y = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}, \quad Z = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}$$

86) ***Mittlere fortschreitende Bewegung eines Massensystems.*** Nennt man u, v, w u_1 v_1 w_1 ... die Geschwindigkeiten, mit welchen die Massen m m_1 m_2 ... eines in Bewegung befindlichen Systems nach drei auf einander senkrechten Richtungen fortschreiten, U, V, W die mittlere Fortschrittsgeschwindigkeit des Systems nach den gleichen Richtungen, so ist:

$$U = \frac{\Sigma m u}{\Sigma m}, \quad V = \frac{\Sigma m v}{\Sigma m}, \quad W = \frac{\Sigma m w}{\Sigma m}$$

und diese Werthe von U, V, W sind nichts anderes, als die Geschwindigkeit, mit welcher während der Bewegung aller einzelnen Massen des Systems der denselben in jedem Augenblick entsprechende Mittelpunkt nach jenen drei Richtungen sich bewegt.

87) ***Innere und äussere Kräfte eines Massensystems.*** Die Bewegungen, welche die Dynamik betrachtet, betreffen entweder einen einzelnen grösseren oder kleineren Körper, oder eine Gesammtheit von Körpern, die in einer gewissen Beziehung zu einander stehen, und in diesem Falle ein System von Körpern genannt werden, oder endlich: sie betreffen die Gesammtheit aller Körper, also das Weltall. Streng genommen ist nur das Atom als ein einfacher Körper anzusehen; einzelne starre, elastische, weiche oder flüssige Massen sind bereits als Massensysteme zu betrachten. Um so viel mehr werden Zusammensetzungen aus solchen Körpern, wodurch die Maschinen entstehen, Massensysteme genannt werden müssen. Eben so bilden Theile der ganzen Erde oder die Erde selbst, so wie die Gesammtheit der Planeten mit der Sonne, Massensysteme.

Um die Bewegung eines Massensystems kennen zu lernen, muss man die Gesammtheit der Kräfte in Betrachtung ziehen, welche auf alle einzelnen Theile oder Punkte desselben einwirken, und die Gesammtheit dieser Kräfte kann in zwei Klassen getheilt werden.

Die Kräfte der ersten Art nennt man *innere* Kräfte, und begreift darunter die Anziehungen oder Abstossungen der Atome unter einander, aus welchen das Massensystem besteht.

Jede innere Kraft hat also ihren Sitz in einem Atom, das dem System angehört, und wirkt anziehend oder abstossend auf ein anderes ebenfalls dem System angehöriges Atom.

Die Kräfte der zweiten Art nennt man äussere Kräfte des Systems, und begreift darunter die Anziehungen oder Abstossungen, welche Körper, die dem System nicht angehören, gegen die Massen des Systems ausüben. Jede äussere Kraft hat also ihren Sitz in einem Atom, das nicht zum Massensystem gehört, wirkt dagegen auf die Atome des Massensystems.

Aus dem Gesetz der Wechselwirkung zweier Atome auf einander folgt, dass die inneren Kräfte immer paarweise, die äusseren Kräfte dagegen nur einzelweise vorhanden sind. Denn wenn ein Atom A, das dem System angehört, auf ein anderes Atom B des Systems anziehend oder abstossend einwirkt, so wirkt auch B auf A mit gleicher Energie anziehend oder abstossend zurück, und beide Kräfte haben auf die Bewegung des Systems Einfluss. Wenn dagegen ein Atom C, das einem Körper angehört, der nicht als zum System gehörig gerechnet wird, auf ein Atom D des Systems anziehend oder abstossend wirkt, so findet zwar auch eine Rückwirkung von D auf C statt; diese kommt aber nicht in Betrachtung, wenn die Bewegung des Systems, welchem A, B und D angehört, aufgefunden werden soll.

Dieses paarweise Auftreten der inneren und einzelnweise Vorhandensein der äusseren Kräfte, begründet einen wesentlichen Unterschied in den dynamischen Erfolgen, welche sie hervor bringen, und dies ist der Grund ihrer Sonderung.

Zur Erläuterung dieses Gegenstandes werden nachstehende Beispiele geeignet sein.

Auf einen in die Luft geworfenen Stein wirken ein a) die anziehenden und abstossenden Kräfte der Atome des Steins gegen einander. b) Die Anziehung der Erde. c) Die Anziehung aller im Weltraum befindlichen Massen. d) Der Luftwiderstand, und es sind die ersteren unter a) angeführten Kräfte die inneren, alle übrigen zusammen die äusseren auf den Stein einwirkenden Kräfte.

Bei einem fliegenden Vogel sind die Muskelkräfte, durch welche die Theile seines Körpers gegen einander bewegt werden, so wie überhaupt alle Kräfte, womit die Theile des Körpers gegen einander anziehend oder abstossend einwirken, die inneren Kräfte; der Luftwiderstand und die Anziehung der Erde sind dagegen die äusseren Kräfte.

Wenn ein Wagenzug durch eine Lokomotive auf einer Eisenbahn fortbewegt wird, sind die auf den ganzen Train einwirkenden inneren Kräfte a) die Repulsivkraft des Dampfes; b) die sämmtlichen Molekularkräfte, durch welche die Theile des Körpersystems gegen einander wirken; c) die wechselseitige Pressung aller in Berührung stehenden

Körper mit Ausnahme der Pressung der Räder gegen die Bahn; d) die Reibungen aller Theile, welche in Berührung stehen und gegen einander gepresst werden, mit Ausnahme der Reibung der Räder auf der Bahn. Die äusseren Kräfte sind dagegen: a) die Wirkungen der Bahn gegen die Räder; b) die Anziehung der Erde gegen alle Theile des Wagenzuges; c) der Luftwiderstand etc.

Wenn eine Mahlmühle, die mit einem Wasserrad versehen ist, durch Wasser getrieben wird, sind zu den äusseren Kräften zu zählen: a) der Druck des Wassers gegen die Schaufeln oder Zellen des Rades; b) die Gewichte aller Theile des Mühlenbaues; zu den inneren Kräften dagegen gehören: a) die wechselseitigen Pressungen der in Berührung stehenden Maschinentheile; b) die aus diesen Pressungen entspringenden Reibungen etc.

88) ***Bewegung eines trägen Systems.*** Befindet sich eine einzelne starre Masse oder ein System von Massen in Bewegung, und ist es dabei ganz und gar seiner eigenen Trägheit überlassen, also weder von treibenden noch von hemmenden Kräften gestört, so ist kein Grund zu einer Aenderung der in dem ganzen System in irgend einem Zeitmoment enthaltenen lebendigen Kraft vorhanden; diese Bewegung muss also in der Art vor sich gehen, dass die lebendige Kraft des ganzen Systems, d. h. dass die Summe der lebendigen Kraft aller einzelnen Massenpunkte für jeden Zeitmoment den gleichen Werth hat. Dieses Gesetz hat man das Gesetz der Erhaltung der lebendigen Kraft eines Systems von trägen Massen genannt. In manchen Fällen wird demselben Genüge gethan, wenn jeder Massenpunkt seine lebendige Kraft unveränderlich beibehält, und dann erfolgt die Bewegung jedes Punktes mit Gleichförmigkeit. In andern Fällen kann, vermöge des zwischen den Massen des Systems bestehenden Zusammenhanges, eine solche Gleichförmigkeit des Beharrungszustandes nicht eintreten, und dann erfolgt die Bewegung in der Regel so, dass sich die lebendige Kraft und die Geschwindigkeit jedes Massenpunktes periodisch ändert, ohne dass eine Aenderung in der totalen Summe der lebendigen Kräfte sämmtlicher Massenpunkte eintritt. Wird eine einzelne starre Masse oder ein System von Axen, das durch runde Zahnräder oder durch Rollen und Riemen im Zusammenhang steht, sich selbst überlassen, so erfolgt die Bewegung jedes Punktes mit Gleichförmigkeit. Wird dagegen ein System von Axen, die durch unrunde, z. B. durch elyptisch gestaltete Zahnräder in Verbindung stehen, oder ein System von Massen, von denen einzelne sich um Axen drehen, während andere gezwungen sind, eine geradlinig oder bogenförmig hin- und hergehende Bewegung zu machen, sich selbst überlassen, so erfolgt die Bewegung nicht mit Gleichförmigkeit, sondern mit Periodizität. Der Massenzusammenhang des Kolbens, der Kolbenstange, der Schubstange

oder Kurbel und des Schwungrades einer Dampfmaschine bedingt z. B. einen periodischen Beharrungszustand. Um den Gewichtseinfluss dieser Körper auf die Bewegung zu beseitigen, braucht man nur die Axe des Cylinders horizontal und die Axe des Schwungrades vertikal anzunehmen; oder man kann sich die ganze Maschine nach dem Mittelpunkt der Erde versetzt denken, wobei die Gewichte ganz verschwinden, während die Massen bleiben. Ist der Kolben in der Mitte seines Schubes, so ist in den hin- und hergehenden Massen eine gewisse lebendige Kraft enthalten; befindet sich dagegen der Kolben am Anfange oder am Ende eines Schubes, so haben diese Massen keine Geschwindigkeit, also auch keine lebendige Kraft; dafür muss aber nun die lebendige Kraft des Schwungrades grösser sein, als da wo der Kolben auf halbem Schub war. Da die Massen, welche hin- und hergehen am Anfang und am Ende eines jeden Schubes keine Geschwindigkeit besitzen, so müssen sie während der ersten Hälfte des Schubes von dem Schwungrad nachgeschleppt werden, wo sie hingegen während der zweiten Hälfte des Schubes auf das Schwungrad treibend wirken. Die Geschwindigkeit des letzteren nimmt also in der ersten Hälfte des Schubes fortwährend ab, in der zweiten Hälfte dagegen fortwährend zu. Bei halbem Schub ist seine Geschwindigkeit ein Minimum; am Anfang und Ende jedes Schubes ein Maximum.

Denkt man sich zwei Drehungsaxen, die einen Winkel bilden und sich scheiden, durch einen Hook'schen Schlüssel (Universalgelenk) verbunden und jede derselben mit einem Schwungrad versehen, so hat man ebenfalls ein System von Massen, das, wenn es in Bewegung versetzt und sich dann überlassen wird, einen periodischen Beharrungszustand annimmt. Durch dieses Universalgelenk werden nämlich die Axen in der Art verbunden, dass das Verhältniss ihrer Winkelgeschwindigkeit nicht constant, sondern eine gewisse Funktion des, von irgend einer Position des Gelenkes an gerechneten, Wendungswinkels einer dieser Axen ist. Nennt man z. B. M M_1 die Trägheitsmomente der Schwungräder sammt den Axen, mit welchen sie verbunden sind, $f(\varphi)$ jene Funktion des Wendungswinkels, W die Winkelgeschwindigkeit von M in irgend einem Zeitmoment, so ist $W f(\varphi)$ die Winkelgeschwindigkeit von M_1 in dem gleichen Zeitmoment. Die Bewegung muss nun so erfolgen, dass

$$M W^2 + M_1 W^2 f^2(\varphi) = \text{const.}$$

d. h. es ist:

$$W^2 = \frac{\text{const.}}{M + M_1 f^2(\varphi)}$$

Bewegung eines Massensystems unter der Einwirkung von Kräften, die sich das Gleichgewicht halten.

89) ***Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit.*** Wenn ein in Bewegung befindliches System von starren Massen von Kräften begleitet wird, die sich in jedem Augenblick das Gleichgewicht halten, so muss die Bewegung so erfolgen, wie wenn diese Kräfte gar nicht vorhanden und das ganze Massensystem nur seiner Trägheit überlassen wäre. Die Bewegung erfolgt demnach in der Art, dass die totale lebendige Kraft des Massensystems in jedem Augenblick während der Bewegung den gleichen Werth hat.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus dem Begriff des Gleichgewichtes. Kräfte halten sich an einem ruhenden System von Körpern das Gleichgewicht, wenn sie keine Bewegung hervor bringen, und an einem bewegten System, wenn ihre Anwesenheit auf die Bewegung keinen Einfluss hat.

Die Bedingungen, bei deren Erfüllung ein System von Kräften im Gleichgewicht ist, können vermittelst des Begriffes von Wirkungsgrösse leicht aufgefunden werden. Ist das System im Zustand der Bewegung, so werden die Angriffspunkte der Kräfte gewisse Wege zurück legen, es werden daher in jedem Zeitelement gewisse Wirkungen produzirt und consumirt; wenn aber dennoch die Bewegung so erfolgt, wie wenn die Kräfte gar nicht vorhanden wären, so muss nothwendig die Summe der Wirkungen, welche in einem Zeitelement produzirt werden, eben so gross sein, als die Summe der consumirten Wirkungen.

Nennt man also $K_1, K_2, K_3 \ldots$ die Kräfte, welche die Bewegung begünstigen, deren Angriffspunkte also während eines gewissen Zeitelements t vorwärts schreiten; $H_1, H_2, H_3 \ldots$ die Kräfte, welche die Bewegung zu hindern suchen, deren Angriffspunkte demnach zurück weichen; $k_1, k_2, k_3 \ldots h_1, h_2, h_3 \ldots$ die Projektionen der Wege, welche die Angriffspunkte im Zeitelemente t zurück legen, auf die Richtungen der Kräfte, so sind $K_1 k_1$, $K_2 k_2$, $K_3 k_3 \ldots$ die produzirten, $H_1 h_1$, $H_2 h_2$, $H_3 h_3 \ldots$ die consumirten Wirkungrn, und die Bedingung des Gleichgewichts ist demnach:

$$K_1 h_1 + K_2 k_2 + K_3 k_3 \ldots = H_1 h_1 + H_2 h_2 + \ldots$$

oder:

$$\Sigma K k = \Sigma H h. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Halten sich die Kräfte fortdauernd das Gleichgewicht, so muss dieser Bedingungsgleichung in jedem Zeitelement entsprochen werden. Halten sie sich nur in einem einzelnen Zeitmoment das Gleichgewicht, so ist diese Gleichung nur für den Gleichgewichtsmoment richtig. Wird das System

in irgend einem Augenblick seiner Bewegung angehalten, so dass es in Ruhe kommt, dann aber wiederum frei gelassen, so werden die Kräfte $K, K_1 \ldots H_1, H_2 \ldots$ der Bedingungsgleichung (1) entsprechen und keine Bewegung hervor bringen. Verschiebt man aber nun das ganze System um unendlich wenig aus seiner Gleichgewichtsposition, so werden dabei die Kräfte abermals gewisse Wirkungen theils produziren, theils consumiren; es ist aber klar, dass dabei die Summe der produzirten Wirkungen gleich der Summe der consumirten sein muss.

Diese Grundbedingung des Gleichgewichts der Kräfte hat man das »Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit« genannt, und es kann nun vermittelst des einmal festgesetzten Begriffes von Wirkung ganz einfach ausgedrückt werden, wie folgt:

1) Wenn Kräfte an einem ruhenden System von Körpern im Gleichgewichte sind, so ist, wenn man das ganze System um unendlich wenig aus seiner Gleichgewichtsposition verschiebt, die Summe der Wirkungen, welche dabei die Kräfte entwickeln, deren Angriffspunkte in Folge der Verschiebung vorwärts schreiten, eben so gross, als die Summe der Gegenwirkungen, welche den Kräften entspricht, deren Angriffspunkte zurückweichen.

2) Wenn Kräfte an einem bewegten System im Gleichgewichte sind, so ist die Summe der Wirkungen, welche während jedes einzelnen Zeitelementes von denjenigen Kräften entwickelt werden, deren Angriffspunkte vorwärts schreiten, eben so gross, als die Summe der Gegenwirkungen der Kräfte, deren Angriffspunkte bei der Bewegung zurückweichen.

Dieses Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit drückt nichts anderes aus, als die Bedingungen des Unthätigseins der Kräfte; man könnte es daher füglich das Gesetz des Unthätigseins der Kräfte nennen. Maupertuis nennt es das Gesetz der Ruhe; eine Benennung, die desshalb nicht zweckmässig ist, weil, wie wir gesehen haben, ein Gleichgewichtsverhältniss der Kräfte auch bei einem bewegten System statt finden kann

Eine Vergleichung der speziellen Gesetze des Gleichgewichtes der Kräfte an den sogenannten einfachen Maschinen hat zur Entdeckung dieses Gesetzes zu einer Zeit geführt, in der die Begriffe von der Wirkung einer Kraft noch nicht bekannt waren.

Es wird noch jetzt oftmals als eine empirische Thatsache von intelligenten Arbeitern, die beständig mit Maschinen umzugehen haben, aufgefunden. Jeder Mechaniker weiss aus Erfahrung, dass man vermittelst einer Maschine mit einem mässigen Druck eine sehr grosse Last heben, oder einen sehr intensiven Widerstand überwinden kann, wenn dieselbe so eingerichtet ist, dass der Angriffspunkt des Widerstandes bedeutend langsamer geht, als der Angriffspunkt der Kraft, dass man aber an Ge-

schwindigkeit genau so viel verliert, als man an Kraft (Druck) gewinnt. Diess ist aber nichts anderes, als das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit in seiner Anwendung auf das Gleichgewicht zweier Kräfte, die an einer Maschine wirken.

Bei allen Maschinen, welche in einen gleichförmigen Beharrungszustand gerathen, halten sich die Kräfte und die Widerstände in jedem Zeitmoment dieses beharrenden Bewegungszustandes das Gleichgewicht, so dass diese Maschinen so fortlaufen, wie wenn gar keine Kräfte auf sie einwirkten.

Diess ist z. B. der Fall bei einer Mahlmühle, die durch ein Wasserrad oder durch eine Turbine getrieben wird, vorausgesetzt, dass der Wasserzufluss einerseits und die Getreidezuleitung andererseits vollkommen gleichförmig statt findet. Auch bei einem Wagenzug, der durch eine Lokomotive auf einer Eisenbahn fortbewegt wird, erfolgt die Bewegung, wenn einmal die Periode der Massenbeschleunigung vorüber ist, so, wie wenn weder Kräfte noch Widerstände, sondern nur träge Massen vorhanden wären. In diesem Beharrungszustand der Bewegung erfüllen also die Kräfte und Widerstände vollkommen die Bedingung, welche das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit für das Gleichgewichtsverhältniss der Kräfte vorschreibt.

90) ***Erläuterungen über den Gebrauch des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeit.*** Um vermittelst des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeit die Bedingungen aufzufinden, unter welchen sich Kräfte an einem ruhenden System von Körpern das Gleichgewicht halten, muss man die Wirkungen und Gegenwirkungen berechnen, welche die Kräfte entwickeln und die Widerstände consumiren, wenn das ganze System um unendlich wenig aus seiner Gleichgewichtsposition verschoben wird, ohne den Zusammenhang zu stören, der zwischen den einzelnen Bestandtheilen des Systems besteht. Die Summe der Wirkungen der Summe der Gegenwirkungen gleich gesetzt, so erhält man dann die Bedingung, bei deren Erfüllung die Kräfte gerade diejenige Bewegung nicht hervorbringen werden, welche bei der wirklich vorgenommenen Verschiebung in der That zum Vorschein gekommen sind.

Wenn der Gleichgewichtszustand eines Systems von starren Körpern zu bestimmen ist, so findet man die nach den Richtungen der Kräfte geschätzten Wege, welche die Angriffspunkte in Folge der vorgenommenen Verschiebung zurücklegen, durch rein geometrische Betrachtungen aus den Bestimmungselementen des geometrischen Zusammenhanges, und dadurch ist die Lösung der Gleichgewichtsprobleme, welche starre Körper betreffen, in das Gebiet der Geometrie zurückgeführt.

Gestattet der Zusammenhang nur eine einzige Verschiebung oder gestattet er zwei derselben, von denen eine der andern genau entgegen-

gesetzt ist, so ist zum Bestehen des Gleichgewichts auch nur eine einzige Bedingung nothwendig, die man erhält, wenn man das Prinzip auf eine dieser erlaubten Verschiebungen anwendet. Ist hingegen der Zusammenhang von der Art, dass verschiedene Verschiebungen möglich sind, so erfordert das Bestehen des Gleichgewichts die Erfüllung .mehrerer Bedingungen, die sich auf zweierlei Art auffinden lassen; nämlich entweder dadurch, dass man die allgemeinste von allen zulässigen Verschiebungen vornimmt, und darauf das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit anwendet, oder aber dadurch, dass man mehrere und zwar so viele spezielle Verschiebungen vornimmt, als die Anzahl der unbekannten Grössen beträgt, die für das Bestehen des Gleichgewichts bestimmte Werthe haben müssen, und dann auf jede dieser Verschiebungen das Prinzip anwendet. Im erstern Fall erhält man zunächst nur eine einzige allgemeine Bedingungsgleichung, die aber nothwendig so viele willkührliche Grössen enthalten, und daher in so viele spezielle Gleichungen zerfallen muss, als die Anzahl der Bedingungen beträgt, die erfüllt werden müssen, damit das Gleichgewicht bestehen kann.

Im letzteren Falle liefert jede von den speziellen Verschiebungen unmittelbar eine Bedingungsgleichung des Gleichgewichts. Wenn z. B. die Bedingungen aufgefunden werden sollen, unter welchen Kräfte an einen starren aber vollkommen frei beweglichen Körper sich das Gleichgewicht halten, so kann man diesen Körper auf ganz beliebige Weise um unendlich wenig aus seiner Gleichgewichtsposition verschieben. Eine solche Verschiebung hängt von sechs willkührlichen Grössen ab, von denen drei derselben die Veränderung des Orts und drei andere die Veränderung der Lage des Körpers bestimmen. Wendet man nun das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit auf diese allgemeine Verschiebung an, so ergibt sich zunächst eine einzige Gleichung, deren Bestandtheile sich so gruppiren lassen, dass sie aus sechs Gliedern besteht, von denen jedes mit einer der sechs willkührlichen Grössen multiplizirt erscheint. Dieser Gleichung kann aber nur entsprochen werden, wenn jeder von den Faktoren, mit welchen die willkührlichen Grössen multiplizirt sind, für sich gleich Null gesetzt wird, und dadurch ergeben sich die bekannten sechs Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts der Kräfte an einem starren Körper.

Zu diesen Gleichungen gelangt man aber auch durch sechs spezielle Verschiebungen, indem man mit dem Körper drei Fortschreitungen nach drei auf einander senkrechten Richtungen, und drei Drehungen um drei der Richtung nach auf einander senkrecht stehende Axen vornimmt, und dann auf jede dieser speziellen Verschiebungen das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit anwendet.

Die speziellen Verschiebungen führen in den meisten Fällen schneller

zum Ziele, veranlassen in der Regel nur wenige und einfache analytische Operationen, und sind den allgemeinen Verschiebungen insbesondere in dem Fall vorzuziehen, wenn es sich für irgend einen wissenschaftlichen oder praktischen Zweck nur darum handelt, den Gleichgewichtswerth eines einzelnen Elementes, z. B. einer gewissen Kraft, oder eines gewissen Winkels kennen zu lernen. Die Methode der allgemeinen Verschiebungen verdient dagegen den Vorzug, wenn allgemeinere Gleichgewichtsprobleme zur Lösung gebracht werden sollen, und wenn nicht nur einzelne, sondern wenn sämmtliche Bedingungen aufgefunden werden sollen, von deren Erfüllung das Bestehen des Gleichgewichts abhängt; sie erfordert aber in der Regel zu ihrer Durchführung einen sehr complizirten analytischen Apparat, und kann desshalb nur von Denjenigen mit Erfolg gehandhabt werden, die sich mit Selbstständigkeit im Gebiete der Analysis zu bewegen wissen.

Will man die Bedingungen kennen lernen, unter welchen Kräfte an einem frei beweglichen aber nachgiebigen Körper im Gleichgewicht sind, so kann man zunächst solche Verschiebung vornehmen, bei welcher alle Punkte des Körpers ihre relative Lage, die sie gegen einander im Gleichgewichtszustand annehmen, nicht ändern, und dann erhält man die bekannten sechs Bedingungsgleichungen, welche dem Gleichgewicht eines starren Körpers entsprechen. Will man aber auch über den innern Molekularzustand Aufschluss erhalten, so muss man auch Verschiebungen eintreten lassen, wobei die Punkte ihre relative Lage gegen einander ändern, so dass also auch die innern Molekularkräfte in Thätigkeit kommen.

Will man die Pressungen kennen lernen, welche im Gleichgewichtszustand eines Systems von starren oder von nachgiebigen Körpern gegen unbewegliche Stützpunkte, die etwa im System vorkommen, ausgeübt werden, so wie auch jene Pressungen, mit welchen die einzelnen Körper des Systems, da, wo sie in Berührung stehen, gegen einander wirken; so muss man zunächst ein solches System aus seinem gezwungenen Verhältnisse, in dem es sich befindet, befreien, indem man in Gedanken das ganze System in alle seine Theile zerlegt und die Stützpunkte beseitigt, dafür aber Kräfte anbringt, welche jenen Pressungen gleich und entgegen gesetzt sind. Wenn man dann auf jeden einzelnen, der auf diese Weise unabhängig gewordenen Körper das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit anwendet, und dabei Verschiebungen vornimmt, durch welche die Angriffspunkte jener unbekannten Pressungen gewisse Wege zurücklegen, so ergeben sich dieselben, und die Aufgabe ist dann gelöst.

Uebungen im Gebrauch des Prinzipes der virtuellen Gechwindigkeit.

91) ***Das Parallelogramm der Kräfte.*** Wenn zwei Kräfte X und Y nach aufeinander senkrechten Richtungen auf einen frei beweglichen Punkt wirken, so kann kein Gleichgewicht bestehen, sondern es wird dieser Punkt nach einer gewissen Richtung mit einer gewissen Intensität R getrieben, und diese Kraft R nennt man die Resultirende der Kraft X und Y. Bringt man an den Punkt eine Kraft an, die der Resultirenden der Intensität nach gleich und der Richtung nach ihr entgegengesetzt ist, so werden sich diese drei Kräfte X Y R das Gleichgewicht halten, und die Bedingungen dieses Gleichgewichts können nun mit dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit leicht gefunden werden.

Nehmen wir zuerst eine allgemeine Verschiebung vor, wobei der allen Kräften gemeinschaftliche Angriffspunkt O (Fig. 1 Taf. IV.) von O nach O_1 geschoben wird und setzen wir $O\,O_1 = \varrho$, $\widehat{O_1\,O\,X} = \varphi$, so sind ϱ und φ zwei ganz willkührliche Grössen, weil wegen der ganz freien Beweglichkeit des Punktes O jede beliebige Verschiebung vorgenommen werden darf, nur muss ϱ als eine unendlich kleine Grösse betrachtet werden. Fällt man nun von O_1 aus auf die Richtungen der Kräfte die Perpendikel O_1x, O_1y, O_1r, so sind offenbar Ox, Oy, Or die Projektionen des Weges, die der allen Kräften gemeinschaftliche Angriffspunkt zurückgelegt hat, und da O in Bezug auf X und Y vorwärts, in Bezug auf R aber zurückgetreten ist, so hat man zu setzen:

$$R\,\overline{Or} = X\,\overline{Ox} + Y\,\overline{Oy}.$$

Es ist aber: $\overline{Ox} = \varrho \cos.\,\varphi$, $\overline{Oy} = \varrho \sin.\,\varphi$, $\overline{Or} = \varrho \cos.\,(\varphi - \alpha)$. Demnach:

$$\varrho\,R \cos.\,(\varphi - \alpha) = \varrho\,X \cos.\,\varphi + \varrho\,Y \sin.\,\varphi \quad . \quad . \quad (1)$$

Hieraus folgt:

$$(\varrho \cos.\,\varphi)\,\{\,R \cos.\,\alpha - X\,\} + (\varrho \sin.\,\varphi)\,\{\,R \sin.\,\alpha - Y\,\} = 0.$$

Da diese Gleichung für alle Werthe der willkührlichen Grössen ϱ und φ richtig sein muss, so wird man gezwungen, die in den grösseren Klammern enthaltenen Ausdruck gleich Null zu setzen; man erhält demnach als Bedingung des Gleichgewichts der Kräfte X, Y, R.

$$\left.\begin{aligned} X &= R \cos.\,\alpha \\ Y &= R \sin.\,\alpha. \end{aligned}\right\}$$

die bekanntlich ganz richtig sind.

Verschiebt man den Punkt O statt nach O_1 nach der Richtung von X. so findet man:

$$R \cos. \alpha = X.$$

Verschiebt man den Punkt in der Richtung von Y, so ergibt sich:

$$R \sin. \alpha = Y.$$

Verschiebt man den Punkt nach der Richtung von R, so folgt:

$$R = X \cos. \alpha + Y \sin. \alpha.$$

Hieraus sieht man, dass auch jede spezielle Verschiebung zu einem wahren Resultat führt, und dass die allgemeinen Bedingungen sowohl durch eine allgemeine, als auch durch mehrere spezielle Verschiebungen erhalten werden können.

92) ***Gleichgewicht der Kräfte am Hebel.*** Es seien an dem zweiarmigen Hebel $\overline{A\,C\,B}$ (Fig. 2 Taf. IV.) die Kräfte P und Q im Gleichgewicht. Verschiebt man den Hebel in die Position $A_1\ C\ B_1$, und fällt aus A_1 und B_1 die Perpendikel $A_1\,a$ und $B_1\,b$, so sind $\overline{A\,a}$ und $\overline{B\,b}$ die Projektionen der Wege, welche die Angriffspunkte der Kräfte P und O zurückgelegt haben, und da der Angriffspunkt von P vorwärts, jener von O zurückgetreten ist, so hat man:

$$P\,\overline{A\,a} = O\,\overline{B\,b} \text{ oder}$$

$$\frac{P}{O} = \frac{\overline{B\,b}}{\overline{A\,a}}$$

Es ist aber, wie man leicht sieht: $\dfrac{\overline{B\,b}}{\overline{A\,b}} = \dfrac{\overline{B_1\,C}}{\overline{A_1\,C}} = \dfrac{\overline{B\,C}}{\overline{A\,C}}$

demnach:

$$\frac{P}{O} = \frac{\overline{B\,C}}{\overline{A\,C}}$$

und dies ist das bekannte Gesetz des Hebels.

93) ***Gleichgewicht bei der schiefen Ebene.*** Ein Körper, dessen Gewicht = Q ist, liege auf einer schiefen Ebene, und werde auf derselben durch eine Kraft P erhalten, deren Richtung mit jener der schiefen Ebene parallel ist (Fig. 3 Taf. IV.).

Verschiebt man den Körper längs der schiefen Ebene, so dass z. B. sein Schwerpunkt von A nach A_1 kommt, und fällt das Perpendikel $\overline{A_1\,a}$, so sind offenbar $\overline{A\,A_1}$ und $\overline{A\,a}$ so lang als die Wege, welche die Angriffspunkte der Kräfte P und Q, nach ihren Richtungen geschätzt, zurücklegen. Nimmt man nun an, dass keine Reibung stattfinde, so hat man nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit

$$P\,\overline{A\,A_1} = Q\ \overline{A\,a} \text{ oder } \frac{P}{Q} = \frac{\overline{A\,a}}{\overline{A\,A_1}}$$

Nun ist aber dieses letztere Verhältniss auch gleich $\dfrac{\overline{D\,C}}{\overline{B\,C}}$, daher hat man als Bedingung des Gleichgewichts dieser Kräfte das bekannte Gesetz:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\overline{D\,C}}{\overline{B\,C}} = \sin. \overset{\frown}{C\,B\,D}.$$

94) ***Gleichgewichtsverhältniss zwischen Kraft und Last bei einer aus Räderwerken bestehenden Winde.*** Fig. 4 Taf. IV. stellt in Grund- und Aufriss eine mit Räderwerk versehene Winde dar. Sie hat vier Drehungsaxen a, b, c, d. Es sind verbunden: mit der Axe a eine Welle w und ein grosses Zahnrad R, mit der Axe b ein grosses Rad R_1 und ein kleines Getrieb r, mit der Axe c ein grosses Rad R_2 und ein Getrieb r_1, mit der Axe d ein Getrieb r_2 und eine Kurbel K.

Die Zähne von R und r, von R_1 und r_1, von R_2 und r_2 greifen in einander ein. Wird nun die Kurbel nach der Richtung, welche der Pfeil andeutet, gedreht, so wird dadurch die Last Q, welche an einem Seil hängt, das am Umfang der Welle w befestigt ist, gehoben. Um nun die Kraft P zu bestimmen, welche senkrecht auf den Kurbelgriff wirken muss, um die Last Q zu heben, muss man berechnen, um wie viel Q gehoben wird, wenn der Kurbelgriff etwas bewegt wird. Bezeichnet man durch w, R, R_1, R_2, r, r_1, r_2 K die Halbmesser der Welle der Räder und der Kurbel, und nennt man s den Weg, um welchen man den Kurbelgriff fortbewegt, so ist der Weg den gleichzeitig zurückgelegt:

ein Punkt am Umfang von r_2 und R_2 . . . s $\dfrac{r_2}{K}$

„ „ „ „ „ r_1 „ R_1 . . . s $\dfrac{r_2}{K}\dfrac{r_1}{R_2}$

„ „ „ „ „ r „ R . . . s $\dfrac{r_2}{K}\dfrac{r_1}{R_2}\dfrac{r}{R_1}$

„ „ „ „ „ w . . . . . s $\dfrac{r_2}{K}\dfrac{r_1}{R_2}\dfrac{r}{R_1}\dfrac{w}{R}$,

und so gross wie dieser letztere Werth, ist auch der Weg, den die Last zurücklegt.

Wenn man nun von den verschiedenen Reibungen ganz absieht, so ist für das Bestehen des Gleichgewichts zwischen P und Q erforderlich, dass sei:

$$P\,s = Q\,s\,\frac{r}{R}\,\frac{r_1}{R_1}\,\frac{r_2}{R_2}\,\frac{w}{K}$$

oder wenn man die willkührliche Verschiebung s weg lässt:

$$P = Q \frac{r}{R} \frac{r_1}{R_1} \frac{r_2}{R_2} \frac{W}{K}$$

und

$$Q = P \frac{R}{r} \frac{R_1}{r_1} \frac{R_2}{r_2} \frac{K}{W}.$$

Die Verhältnisse $\frac{R}{r} \frac{R_1}{r_1} \ldots \frac{K}{W}$ nennt man Uebersetzungszahlen. Man kann daher sagen, das Verhältniss zwischen Last und Kraft ist bei einer Winde mit Räderwerken gleich dem Produkt aus sämmtlichen Uebersetzungszahlen, vorausgesetzt jedoch, dass man die verschiedenen Zahnreibungen, Axenreibungen und sonstigen kleineren Hindernisse der Bewegung nicht in Anschlag bringt.

Das Gesetz der Thätigkeit der Kräfte.

95) ***Entwicklung dieses Gesetzes.*** Der dynamische Zustand eines in Bewegung befindlichen Massensystems, auf welches mannigfaltige äussere und innere Kräfte einwirken, wird sich im Allgemeinen in jedem Zeittheilchen während der Einwirkung der Kräfte verändern. In einem gewissen Zeitmoment wird jedes Atom des Systems einen gewissen Ort einnehmen und eine gewisse Geschwindigkeit und lebendige Kraft besitzen. Auch werden die Kräfte nach bestimmten Richtungen mit gewissen Intensitäten zur Bewegung anregen. Nach Verlauf einer gewissen Zeit wird der Gesammtzustand ein anderer sein. Die Atome werden andere Orte einnehmen, andere Geschwindigkeiten und lebendige Kräfte besitzen, und auch die Richtungen und Intensitäten der Kräfte werden anders sein. Wir wollen diese beiden Zustände, um von denselben bequem sprechen zu können, den ersteren A den letzteren Z nennen.

Während das System aus dem Zustand A in den Zustand Z übergeht, legen die Angriffspunkte sämmtlicher Kräfte gewisse Wege zurück, jede einzelne dieser Kräfte wird daher eine gewisse Wirkung produziren oder consumiren, je nachdem ihr Angriffspunkt nach der Richtung der Kraft geschätzt vorwärts gedrungen ist oder rückwärts gedrängt wurde.

Die Gesammtheit der Kräfte, deren Angriffspunkte vorwärts geschritten sind, wird daher eine gewisse Gesammtsumme von Wirkungen produziren, und die Gesammtheit der Kräfte, deren Angriffspunkte zurückgedrängt wurden, wird dagegen eine gewisse Gesammtsumme von Wirkungen consumiren. Nehmen wir an, dass die Summe der produzirten Wirkungen grösser sei, als die Summe der consumirten, so ist

wohl klar, dass der Ueberschuss der ersteren über die letzteren als eine freie Thätigkeit zu betrachten ist, die von den Massen des Systems aufgenommen werden muss, wodurch die totale lebendige Kraft um so viel zunehmen muss, als jener Ueberschuss an produzirten Wirkungen beträgt.

Man kann daher den Satz aussprechen, dass sich die lebendige Kraft eines Massensystems während einer gewissen Zeit um so viel ändern wird, als der Unterschied zwischen den in derselben Zeit produzirten und consumirten Wirkungen beträgt.

Nennt man l die lebendige Kraft, die das System im Zustand A, L die lebendige Kraft, die es im Zustand Z besitzt, W w die Summe der Wirkungen, welche die Kräfte bei dem Uebergange aus A in Z produziren und consumiren, so ist:

$$L - l = W - w.$$

Nennt man ferner $\underset{a}{W}\ \underset{a}{w}$ die Wirkungen welche die äusseren, $\underset{i}{W}\ \underset{i}{w}$ die Wirkungen welche die inneren Kräfte produziren und consumiren, so hat man:

$$W = \underset{a}{W} + \underset{i}{W}$$

$$w = \underset{a}{w} + \underset{i}{w}$$

und es wird:

$$\left(\underset{a}{W} + \underset{i}{W}\right) - \left(\underset{a}{w} + \underset{i}{w}\right) = L - l$$

oder:

$$\left(\underset{a}{W} - \underset{a}{w}\right) + \left(\underset{i}{W} - \underset{i}{w}\right) = L - l.$$

Dieses ganz allgemeine und höchst einfache Gesetz, dass die Differenz zwischen den in einer gewissen Zeit produzirten und consumirten Wirkungen von den Massen des Systems aufgenommen wird, und dass hierdurch die lebendige Kraft des ganzen Systems um so viel zunimmt, als jene Differenz beträgt, nenne ich das Gesetz der Thätigkeit der Kräfte.

Für das genaue Verständniss und eine richtige Anwendung desselben ist vor allem andern nothwendig, dass man die Wirkungsgrössen und die lebendigen Kräfte richtig zu berechnen wisse; es wird daher gut sein, wenn hierüber einige Erläuterungen gegeben werden.

96) ***Bestimmung des Massensystems.*** Zunächst muss man sich, um dieses Gesetz auf einen vorliegenden Fall richtig anzuwenden, mit aller Bestimmtheit erklären, welche Massenpunkte als zum System gehörend angesehen werden sollen. In dieser Hinsicht halte man sich an die Regel,

dass alle Massenpunkte zum Systeme gehören, die irgend wie ein Ganzes bilden, und deren Bewegungszustände man kennen lernen will.

Will man z. B. die Bewegungen einer auf einem Schiffe befindlichen Dampfmaschine kennen lernen, die Bewegung des Schiffes und jene des Wassers, in dem es fährt, aber nicht, so gehören zum Massensystem nur allein alle Theile, aus welchen die Maschine besteht. Will man nebst der Bewegung der Maschine auch jene des Schiffes betrachten, so gehören zu dem Massensystem nicht nur die Massen der Maschine, sondern auch die Massen des Schiffbaues. Will man endlich die gleichzeitige Bewegung der Maschine, des Schiffes und des Wassers, in dem es fährt, untersuchen, so sind die Massen der Maschine, des Schiffes und des Wassers in das System aufzunehmen.

Oft ist es der Fall, dass man zwar nur die Bewegung einer ganz speziellen Masse kennen lernen will, dass jedoch die Bewegung dieser Masse mit den Bewegungen anderer Massen zusammen hängt. Dann ist es angemessen, alle Massen, die auf die zu bestimmende Bewegung Einfluss haben, ebenfalls in das System aufzunehmen. Will man z. B. die wahre Bewegung des Erdkörpers um die Sonne ganz genau bestimmen, so muss auch der Einfluss aller Planeten auf den Erdkörper berücksichtigt werden, und dies ist nicht anders möglich, als dadurch, dass man überhaupt die Bewegungen aller Planeten um die Sonne bestimmt. Man muss also die Massen aller Planeten in das System aufnehmen.

97) ***Innere und äussere Kräfte des Systems.*** Nachdem man sich über die Grenzen des Systems erklärt hat, muss man die Gesammtheit der Kräfte ausfindig zu machen suchen, welche auf das System einwirken, und sie in innere und äussere Kräfte eintheilen. Hierbei muss man die Begriffe festhalten, dass eine äussere eine solche ist, die ihren Sitz in einem Atom hat, der nicht zum System gehört, aber auf ein Atom des Systems einwirkt. Dass dagegen eine innere Kraft eine solche ist, die ihren Sitz in einem Atom des Systems hat, und auf ein Atom des Systems einwirkt. Aeussere Kräfte sind demnach:

a) Die Kräfte, mit welchen äussere Körper auf die Massen des Systems anziehend oder abstossend einwirken. Handelt es sich um die Bewegung einer Maschine, so sind die Gewichte der Theile äussere Kräfte, denn es sind Kräfte, welche in einem nicht zur Maschine gehörigen Körper — der Erde — ihren Sitz haben und auf die Massen des Systems anziehend einwirken.

b) Pressungen, welche äussere Körper gegen Körper des Systems, mit welchen sie in Berührung stehen, ausüben.

c) Die Reibungen zwischen äusseren und inneren Körpern des Systems. Die Reibung zwischen zwei Körpern ist wechselseitig, ist für beide

Körper gleich gross, und die Richtungen, nach welchen sie auf beide Körper einwirkt, sind einander gerade entgegengesetzt. Daher kommt es, dass die Reibungen zwischen inneren Körpern des Systems auf die Bewegung seines Schwerpunktes keinen Einfluss haben.

Die inneren Kräfte eines Systems sind: a) Anziehungen oder Abstossungen zwischen Atomen, die dem System angehören; b) Pressungen zwischen den in Berührung befindlichen Körpern des Systems gegen einander; c) die Reibungen zwischen den in Berührung befindlichen Körpern des Systems.

98) ***Berechnung der Wirkungen welche produzirt und consumirt werden.*** Es ist schon früher ausführlich erklärt und durch Beispiele erläutert worden, wie die Wirkungen der Kräfte zu berechnen sind. Dieser Gegenstand kann also als erledigt angesehen werden, und ich beschränke mich hier darauf, die Umstände aufzuführen, unter welchen eine einzelne oder eine Gesammtheit von Kräften weder eine Wirkung produzirt noch eine solche consumirt. In dieser Hinsicht gelten nun folgende Sätze:

1) Wenn der Angriffspunkt einer Kraft seinen Ort nicht verändert, oder sich nach einer auf die Richtung der Kraft senkrechten Richtung bewegt, so wird weder eine Wirkung produzirt noch eine Wirkung consumirt.

2) Die Gewichte eines Massensystems bringen bei dem Uebergang desselben aus einem Zustand A in einen Zustand Z keine Wirkungen hervor und consumiren auch keine Wirkung, wenn der Schwerpunkt des Massensystems seinen Ort nicht ändert, oder eine Linie beschreibt, die in einer horizontalen Ebene liegt.

3) Wenn der Schwerpunkt eines Massensystems bei dem Uebergang desselben aus einem Zustand A in einen Zustand Z eine beliebige Bahn beschreibt, zuletzt aber einen Ort erreicht, der mit jenem, in welchem sich der Schwerpunkt im Zustand A befand, auf gleicher Höhe liegt; so ist die Wirkung, welche die Gewichte während dieses Vorgangs entwickeln, eben so gross, als die Wirkung, welche sie consumiren; die totale Wirkung der Gewichte ist also gleich Null.

4) Wenn in einem System Körper vorkommen, die sich berühren und sich wechselseitig pressen, wie dies z. B. zwischen den Bestandtheilen einer Maschine der Fall ist, so entspringt hieraus keine Totalwirkung, denn die Pressungen sind von gleicher Grösse, wirken einander gerade entgegengesetzt und ihre Angriffspunkte legen in jedem Zeittheilchen gleich grosse Wege zurück; es wird daher die Wirkung, welche eine der beiden Pressungen entwickelt, durch die Wirkung der anderen Pressung consumirt.

5) Die anziehenden und abstossenden Kräfte der Atome eines Systems

entwickeln keine Wirkung und consumiren auch keine, wenn sich bei dem Uebergang des Systems aus einem Zustand A in einen Zustand Z die gegenseitigen Entfernungen der Atome nicht ändern.

6) Die relative Lage der Atome eines Systems gegen einander mag sich bei dem Uebergange eines Systems aus einem Zustand A in einen Zustand Z wie immer verändern, so entspringt daraus doch aus der Gesammtthätigkeit der inneren Atomkräfte keine Totalwirkung, wenn die Atomgruppirungen in beiden Zuständen vollkommen übereinstimmen.

Berechnung der lebendigen Kraft eines Massensystems.

99) ***Lebendige Kraft eines Systems von Punkten, deren Geschwindigkeiten gleich gross sind.*** Die lebendige Kraft eines Systems von Punkten ist die Summe der Produkte aus allen Massentheilchen in die Quadrate der Geschwindigkeiten, welche sie in einem gewissen Zeitmoment besitzen. Sind nun die Geschwindigkeiten aller Punkte in einem gewissen Zeitmoment gleich gross, so ist jene Summe gleich dem Produkte aus dem Quadrat der gemeinsamen Geschwindigkeit in die Summe aller Massen oder in die totale Masse des Systems. Dieser Satz findet seine Anwendung auf einen starren Körper, welcher sich so fortbewegt, dass alle Punkte identische Bahnen beschreiben.

100) ***Lebendige Kraft eines starren Körpers, der sich um eine fixe Axe dreht, mit welcher er verbunden ist.*** Nennt man ω die Winkelgeschwindigkeit des Körpers, r, r_1, r_2 ... die senkrechten Entfernungen der Massenpunkte m, m_1, m_2 .... von der Axe, so sind $r\omega$, $r_1\omega_1$, $r_2\omega$ .. die Geschwindigkeiten der Punkte, mithin $m r^2 \omega^2$, $m_1 r_1^2 \omega^2$, $m^2 r_2^2 \omega^2$ ... die lebendigen Kräfte, demnach

$$m r^2 \omega^2 + m_1 r_1^2 \omega^2 + m_2 r_2^2 \omega_2^2 \ldots = \omega^2 \Sigma m r^2$$

Die lebendige Kraft des Körpers wird also gefunden, wenn man das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehungsaxe mit dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit der drehenden Bewegung multiplizirt.

101) ***Lebendige Kraft eines starren Körpers, der sich wie immer im Raume bewegt.*** Es seien m, m_1, m_2 ... die Massenpunkte des Körpers, U, V, W die Geschwindigkeiten des Schwerpunktes des Körpers, nach drei auf einander senkrechten Richtungen u v w, u_1 v_1 w_1 .... die relativen Geschwindigkeiten der Massenpunkte gegen den Schwerpunkt nach den gleichen Richtungen geschätzt, nach welchen U, V, W

genommen wurden. Dann sind $U+u$, $V+v$, $W+w$, $U+u_1$, $V+v_1$, $W+w_1$ ... die absoluten Geschwindigkeiten der Massenpunkte nach den drei auf einander senkrechten Richtungen, und es ist demnach:

$$L = \Sigma m [(U+u)^2 + (V+v)^2 + (W+w)^2]$$

die totale lebendige Kraft des Körpers. Entwickelt man den Ausdruck in den Klammern, so findet man auch

$$L = \Sigma m (U^2+V^2+W^2) + \Sigma m (u^2+v^2+w^2) + 2U \Sigma m u + 2V \Sigma m v + 2W \Sigma m w$$

Allein, wenn der Punkt, dessen Geschwindigkeiten U V W sind, der Schwerpunkt ist, so hat man

$$\Sigma m u = 0, \quad \Sigma m v = 0, \quad \Sigma m w = 0$$

d. h. man findet die lebendige Kraft eines starren Körpers, der irgend eine Bewegung hat, durch die Summe aus der lebendigen Kraft $(U^2+V^2+W^2)\Sigma m$ die dem Körper entsprechen würde, wenn alle Punkte die Geschwindigkeit des Schwerpunktes hätten, und der lebendigen Kraft, die der relativen Bewegung der Punkte gegen den Schwerpunkt entspricht.

Da bei einem starren Körper die relative Bewegung aller Punkte gegen den Schwerpunkt nichts anderes ist, als eine drehende Bewegung des Körpers um eine durch den Schwerpunkt gehende und mit demselben fortschreitende Axe, die jedoch im Allgemeinen in jedem Augenblick ihre Lage verändert, so ist die lebendige Kraft $\Sigma m (u^2+v^2+w^2)$ auch gleich dem Produkt aus dem Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Axe, um welche er sich in einem gewissen Augenblick dreht, in das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit, mit der die Drehung in diesem Augenblick statt findet.

Heisst man also M die Masse des Körpers, G die Geschwindigkeit des Schwerpunktes in einem gewissen Zeitaugenblick, μ das Moment der Trägheit des Körpers in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Axe, um welche er sich in diesem Zeitmoment dreht, endlich K die Winkelgeschwindigkeit, die der Drehung entspricht, so ist demnach:

$$L = M G^2 + \mu K^2.$$

Das Carnot'sche Prinzip.

102) Der Satz, dass die Differenz zwischen den von den Kräften in einer gewissen Zeit produzirten und von den in derselben Zeit von den Gegenkräften oder Widerständen consumirten Wirkungen gleich ist der totalen Aenderung der lebendigen Kraft, ist unter allen Umständen vollkommen

richtig, wenn alle Wirkungen und lebendigen Kräfte in Rechnung gebracht werden.

Dies ist aber in dem Falle, wenn Stösse vorkommen, die Formänderungen und Vibrationen veranlassen, mit beinahe unüberwindbaren Schwierigkeiten verbunden, weil das dabei eintretende Spiel der Molekularkräfte mit mathematischer Genauigkeit verfolgt werden müsste.

Diesen mit einer mathematischen strengen Behandlung des Stosses unvermeidlich verbundenen Schwierigkeiten kann man entgehen, wenn man sich mit einer Annäherung an die Wahrheit begnügt, indem man sich erlaubt, wie in Nr. 56 geschehen ist, statt der wirklichen mit Masse und Molekularkräften begabten stossenden Körper ideale starre Massen anzunehmen, die in den Stosspunkten mit zusammendrückbaren Federn versehen sind, welche, wenn sie zusammengedrückt worden sind, in ihren ursprünglichen Zustand zurückzukehren streben oder nicht, je nachdem die wirklichen Körper, für welche diese idealen Körper gesetzt werden, elastisch oder unelastisch sind.

Für ein solches System von idealen Körpern ist die Differenz der lebendigen Kräfte, welche in dem Massensystem in zwei Zeitmomenten vorhanden ist, innerhalb welchen ein stossweises Gegeneinanderwirken statt gefunden hat, gleich der Differenz der Wirkungen, welche in diesem Zeitintervall die äusseren Kräfte entwickelt und die äusseren Widerstände und Gegenkräfte consumirt haben, weniger der Summe der Wirkungsgrössen, welche der Zusammendrückung der Federn entspricht.

In dem Fall, wenn die Federn, nachdem sie während des Stosses zusammengedrückt worden sind, ein Bestreben haben, in ihren natürlichen Zustand zurückzukehren, so ist, wenn diese Wiederherstellung des ursprünglichen Zustandes in der That erfolgt, die Summe der Wirkungen, welche dem Spiele der Federn entspricht, gleich Null, und dann ist die Differenz der lebendigen Kräfte, welche im Massensystem in zwei Zeitmomenten vorhanden sind, innerhalb welchen ein stossweises Gegeneinanderwirken der Massen statt gefunden hat, gleich der Differenz der Wirkungen, welche in diesem Zeitintervall die äusseren Kräfte entwickelt und die äusseren Gegenkräfte consumirt haben.

Wenn wir dagegen annehmen, dass die Federn der idealen Körper kein Bestreben haben, in ihren natürlichen Zustand zurückzukehren, so wird die Differenz L — l der lebendigen Kräfte gleich zu setzen sein der Differenz W — w zwischen den produzirten und consumirten Wirkungen, weniger der Wirkung $\mathfrak{B}$, welche der Zusammendrückung sämmtlicher Federn entspricht. Man hat daher in diesem Fall:

$$L - l = W - w - \mathfrak{B}$$

oder

$$W - w = L - l + \mathfrak{B}.$$

Das stossweise Wechselwirken der Körper erfolgt immer mit so grosser Geschwindigkeit, dass während dieses Vorganges die auf das Massensystem einwirkenden äusseren Kräfte und Gegenkräfte keine merkliche Wirkung hervorbringen können; die Zusammendrückung der Federn kann daher nur auf Kosten der in dem Massensystem enthaltenen lebendigen Kraft geschehen. Jener Wirkungsverlust $\mathfrak{B}$ ist daher auch gleich der durch den Stoss beinahe plötzlich eintretenden Schwächung der lebendigen Kraft.

Durch Rechnungen, deren Durchführung wegen ihrer Weitläufigkeit hier nicht am Platz wäre, findet man, dass dieser Verlust $\mathfrak{B}$ an lebendiger Kraft gleich ist der Summe der lebendigen Kräfte, welche den relativen Geschwindigkeiten der Massen vor dem Stosse gegen die Geschwindigkeiten der Massen nach dem Stosse entsprechen.

Nennt man demnach v und n die Geschwindigkeiten einer Masse oder eines Massentheilchens m vor und nach dem Stoss, α den Winkel, unter welchen die Richtungen von v und n gegen einander geneigt sind, so ist:

$$\sqrt{v^2 + n^2 - 2\,v\,n\cos.\,\alpha}$$

die relative Geschwindigkeit der absoluten Geschwindigkeiten, welche die Masse vor und nach dem Stosse besitzt, demnach ist:

$$m\,(v^2 + n^2 - 2\,n\,v\cos.\,\alpha).$$

Der Verlust an lebendiger Kraft, welcher durch den Stoss in der Masse m eintritt, und

$$\mathfrak{B} = \Sigma\, m\,(v^2 + n^2 - 2\,V\,n\cos.\,\alpha).$$

der totale Verlust an lebendiger Kraft des ganzen Massensystems', wobei das Zeichen Σ andeutet, dass die Summe der Verluste für sämmtliche Massen genommen werden soll.

Oftmals sind die stossenden Massen im Vergleich zu den gestossenen ungemein klein, so zwar, dass diese letzteren durch den Stoss in ihrer Bewegung nicht merklich alterirt werden, daher auch keine beachtenswerthe Aenderung der lebendigen Kraft erleiden. In diesem Falle ist der totale Verlust an lebendiger Kraft des Systems gleich der Summe der Verluste, welche in den stossenden Massen eintreten. Das Summezeichen Σ ist demnach in diesem Falle nur auf die stossenden Massen auszudehnen.

Gesetze der Bewegung des Schwerpunktes eines Massensystems.

103) ***Zerlegung der totalen Bewegung eines Massensystems.*** Die Bewegung eines Massensystems ist nur dann vollständig bestimmt, wenn die Bewegung jedes einzelnen zum Massensystem gehörenden Punktes bestimmt ist, d h. wenn man den Ort jedes einzelnen Punktes in jedem Augenblick anzugeben vermag.

Diese Ortsbestimmung sämmtlicher Punkte eines Massensystems geschieht in der Regel am leichtesten und für das Vorstellungsvermögen am anschaulichsten, wenn für jeden Augenblick der Ort angegeben wird, in welchem sich der Schwerpunkt befindet, welcher der in diesem Augenblick stattfindenden Massengruppirung entspricht, und wenn ferner noch für diesen Augenblick die relative Position jeder einzelnen Masse des Systems gegen den Schwerpunkt angegeben wird.

Dadurch wird die totale Bewegung des Massensystems als eine Bewegung betrachtet, die zusammengesetzt ist aus der absoluten Bewegung des Schwerpunktes, und aus der relativen Bewegung der einzelnen Massen des Systems gegen den Schwerpunkt, und wir werden uns nun mit der Entwicklung der äusserst merkwürdigen Gesetze beschäftigen, nach welchen die Bewegung des Schwerpunktes eines Massensystems erfolgt.

104) ***Bewegung des Schwerpunktes, wenn nur eine Masse des Systems ihren Ort verändert.*** Wir gehen zunächst von dem ganz speziellen Fall aus, wenn nur eine einzelne Masse des Systems ihren Ort verändert, alle übrigen Massen dagegen in Ruhe verbleiben. Es sei in irgend einem Zeitmoment B (Fig. 5 Taf. IV.) der Schwerpunkt des ganzen Massensystems, M die Summe aller Massen, C der Schwerpunkt einer einzelnen Masse m, A der Schwerpunkt, der dem Massensystem entsprechen würde, wenn die Masse m nicht existirte. Dies vorausgesetzt, so folgt aus dem Begriff vom Schwerpunkt:

1) dass die Punkte A, B, C in einer geraden Linie liegen müssen.

2) dass sich die Entfernungen $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ verkehrt wie die Massen M — m und m verhalten müssen.

Es ist daher $$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{M-m}$$

so wie auch: $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{m}{M} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Wenn sich nun die Masse m durch was immer für eine Ursache von C nach C_1 bewegt, alle ührigen Massen aber ruhig an ihrem Ort ver-

bleiben, so ändert der Schwerpunkt von M — m seinen Ort nicht, bleibt also in A; der Schwerpunkt des totalen Massensystems ändert dagegen seinen Ort und gelangt nach einem Punkt B_1, der in der geraden Linie AC_1 liegt, und dessen Entfernung von A so gross ist, dass man hat:

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{m}{M} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt aber, dass die Dreiecke ABB_1 und ACC_1 ähnlich sind, dass demnach $\overline{BB_1}$ zu $\overline{CC_1}$ parallel lauft, und dass der Weg BB_1, den der Schwerpunkt B beschreibt, wenn die Masse m von C nach C_1 rückt, im Verhältniss $\frac{m}{M}$ kleiner ist, als $\overline{CC_1}$.

Hieraus folgt aber nun, dass die Bahn, die der Schwerpunkt beschreibt, wenn sich eine einzelne Masse m bewegt, alle übrigen Massen aber in Ruhe verbleiben, geometrisch ähnlich ist, mit der Bahn, welche die Masse m beschrieben hat. Der Schwerpunkt des totalen Massensystems kopirt also gleichsam in einem kleineren Maassstabe, nämlich im Verhältniss $\frac{m}{M}$ die von der Masse beschriebene Bahn.

Hieraus folgt aber ferner auch, dass sich auch die Geschwindigkeiten der Massen m und M, so wie die Geschwindigkeitsänderungen, die in denselben in irgend einem kleinen Zeittheilchen eintreten, verhalten müssen, wie $\frac{m}{M}$.

Nennt man $\binom{C}{m}$ und $\binom{C}{M}$ diese Geschwindigkeitsänderungen der Punkte C und B in irgend einem kleinen Zeittheilchen t, so ist:

$$\frac{\binom{C}{m}}{\binom{C}{M}} = \frac{M}{m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Fragen wir nun nach den Kräften $\binom{K}{m}$ und $\binom{K}{M}$, welche in diesem Zeittheilchen nach den Richtungen CC_1 und BB_1 auf die Massen einwirken mussten, um die erwähnten Geschwindigkeitsänderungen hervorzubringen, so erhalten wir zu deren Bestimmung nach den Gesetzen der beschleunigten Bewegung:

$$\binom{C}{m} = \frac{1}{2}\,\frac{\binom{K}{m}t}{m}$$

$$\binom{C}{M} = \frac{1}{2}\,\frac{\binom{K}{M}t}{M}$$

Durch Division dieser Gleichungen folgt:

$$\frac{\binom{C}{m}}{\binom{C}{M}} = \frac{\binom{K}{m}}{\binom{K}{M}} \frac{M}{m} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

und aus dieser und der Gleichung (3) ergibt sich:

$$\frac{\binom{K}{m}}{\binom{K}{M}} = 1 \text{ oder } \binom{K}{m} = \binom{K}{M}$$

Die Kräfte $\binom{K}{m}$ und $\binom{K}{M}$ stimmen also nicht nur hinsichtlich ihrer Richtung überein, sondern haben auch gleiche Intensitäten; ein Resultat, das auch ohne alle Rechnung leicht eingesehen werden kann, wenn man bedenkt, dass die Bewegung von M so oftmal kleiner sein soll als die Bewegung von m, so oftmal M selbst grösser ist, als m.

Durch die Bewegung einer einzelnen Masse m des Systems ändert sich demnach der Ort des Schwerpunktes des totalen Systems gerade so, als ob in dem Schwerpunkt die ganze Masse M des Systems wirklich vereinigt wäre, und auf diese vereinigte Masse eine Kraft einwirkte, die mit jener, welche die Bewegung von m hervorgebracht hat, sowohl hinsichtlich der Richtung, als auch hinsichtlich der Intensität vollkommen übereinstimmt.

105) ***Bewegung des Schwerpunktes eines Massensystems, wenn alle Massen ihren Ort verändern.*** Nun ist es nicht mehr schwierig zu sagen, wie die Bewegung des Schwerpunktes eines Massensystems erfolgen wird, wenn jede einzelne Masse des Systems durch Kräfte getrieben wird, und jede ihren Ort verändert. Denn wenn durch die Bewegung einer einzelnen Masse m der Schwerpunkt des ganzen Systems seinen Ort in der Weise verändert, als ob die ganze Masse M in ihm vereinigt wäre, und durch eine Kraft getriehen würde, die mit jener, welche die Bewegung von m hervorgebracht, der Richtung und Intensität nach übereinstimmt, so muss wohl, wenn sämmtliche Massen durch Kräfte getrieben werden, und gleichzeitig ihren Ort verändern, die Bewegung des Schwerpunktes gerade so erfolgen, als ob in ihm die Masse des ganzen Systems vereinigt wäre, und nach demselben jede Kraft des Systems parallel zu ihrer wirklichen Richtung versetzt würde.

106) ***Unabhängigkeit der Bewegung des Schwerpunktes von der Wirkung der inneren Kräfte.*** Wir haben schon in Nr. 87 erklärt, dass die inneren Kräfte eines Systems immer paarweise vorhanden sind,

indem die Einwirkungen je zweier Atome auf einander immer wechselseitig und mit gleicher Energie erfolgen. Werden nun diese inneren Kräfte ihren Richtungen nach parallel in den Schwerpunkt versetzt, so heben sie sich daselbst wechselseitig auf, können daher auf die Bewegung des Schwerpunktes keinen Einfluss ausüben. Die Bewegung des Schwerpunktes eines Massensystems erfolgt demnach so, wie wenn in demselben die ganze Masse des Systems vereinigt wäre, und sämmtliche äussere Kräfte ihren Richtungen parallel auf diese vereinigte Masse einwirkten. Um also die Bewegung des Schwerpunktes einer starren, weichen, elastischen oder flüssigen Masse zu bestimmen, hat man die innern Molekularkräfte gar nicht zu berücksichtigen, sondern nur allein die äussern Kräfte, denn diese Bewegung des Schwerpunktes ist ganz unabhängig von dem Spiel der innern Kräfte.

107) ***Bewegung eines Massensystems, auf welches keine äusseren Kräfte einwirken.*** Wenn auf ein Massensystem gar keine äusseren Kräfte einwirken, so muss die Bewegung des Schwerpunktes erfolgen, wie die Bewegung eines Massenpunktes, auf welchen gar keine oder solche Kräfte einwirken, die sich in jedem Augenblick das Gleichgewicht halten. Der Schwerpunkt wird demnach in diesem Fall in einem unveränderlichen Zustand des Seins verharren, also entweder in Ruhe verbleiben oder nach einer geraden Linie mit unveränderlicher Geschwindigkeit fortschreiten. Ob das eine oder das andere eintritt, hängt von dem Zustand ab, in welchem sich der Schwerpunkt in dem Augenblick befand, von welchem an das System der Einwirkung der inneren Kräfte überlassen wurde. War er damals in Ruhe, so verlässt er seinen Ort nie mehr, so lange nur innere Kräfte auf ihn einwirken; hatte er damals nach einer gewissen Richtung eine gewisse Geschwindigkeit, so ist dies auch die Richtung und Geschwindigkeit seiner Bewegung während der ganzen Dauer der Einwirkung der inneren Kräfte.

Diese Eigenschaft der Bewegung des Schwerpunktes, welche man das Prinzip der Selbsterhaltung der Bewegung des Schwerpunktes genannt hat, gewährt eine sehr anschauliche Vorstellung über die Art und Weise, wie die Bewegungen eines Massensystems unter mannigfaltigen Umständen erfolgen, und es spricht sich in dieser Eigenschaft die passive Natur der Materie einerseits, und das Prinzip der Wechselwirkung der Atome andererseits sehr deutlich aus. Die Bewegung des Schwerpunktes steht nicht unter der Herrschaft der inneren Kräfte, sondern nur die relative Bewegung der einzelnen Massen gegen den Schwerpunkt wird theilweise durch die Thätigkeit der inneren Kräfte bedingt.

Anwendungen der entwickelten Gesetze auf spezielle Fälle.

108) ***Bewegung des Schwerpunktes eines starren Körpers.*** Der Schwerpunkt einer starren Masse hat gegen sämmtliche Punkte derselben eine unveränderliche Lage. Seine Bewegung erfolgt so, als ob alle äusseren Kräfte, die auf die verschiedenen Massentheilchen des ganzen Körpers einwirken, an ihm thätig wären, und als ob er mit einer trägen Masse begabt wäre, die so gross ist, als die Gesammtmasse des Körpers. Wenn z. B. ein starrer Körper in der Luft gegen die Erde fällt, wird jeder Punkt des Körpers von jedem Punkt der Erdmasse angezogen; überdies aber übt die den fallenden Körper umgebende Luft in jedem Augenblick der Bewegung und auf jeden Punkt seiner Oberfläche nach normaler Richtung einen gewissen Druck aus. Denkt man sich alle Anziehungskräfte nach paralleler Richtung in den Schwerpunkt des Körpers versetzt, und die Resultirende aus allen diesen Kräften gesucht; denkt man sich ferner auch sämmtliche Luftpressungen nach dem Schwerpunkt gebracht und auch die denselben entsprechende Resultirende bestimmt, so wird die Bewegung des Schwerpunktes gerade so erfolgen, wie wenn derselbe ein einziger aber wirklicher Massenpunkt wäre, dessen Masse so gross wie die des ganzen Körpers, und als ob auf dieselbe die beiden resultirenden Kräfte unmittelbar einwirkten. Fallen die Richtungen dieser Resultirenden in jedem Augenblick in eine und dieselbe Linie, was z. B. der Fall sein wird, wenn der Körper eine Kugel ist, und ist ferner dem Körper am Anfang seiner Bewegung nach keiner Richtung irgend eine Geschwindigkeit ertheilt worden, so fällt der Körper nach vertikaler Richtung nieder, und wird dabei in jedem Augenblick mit einer Kraft getrieben, die gleich ist der Differenz der genannten resultirenden Kräfte. Weicht dagegen die Richtung der Resultirenden aus den Luftpressungen von der vertikalen Richtung, d. h. von der Richtung der Resultirenden aller Erdanziehungen ab, so erfolgt die Bewegung des Schwerpunktes nach einer krummen Linie, die in vielen Fällen ein äusserst zusammengesetztes Bildungsgesetz haben kann. Hiervon kann man sich leicht überzeugen, wenn man z. B. ein Kartenblatt von einem hohen Thurme herabfallen lässt.

Sind die Intensitäten und Richtungen der äusseren Kräfte ganz unabhängig von der Lage des Körpers, so ist die Bewegung des Schwerpunktes ebenfalls unabhängig von den Veränderungen, welche in der Lage des Körpers während der Bewegung eintreten. Die Bewegung des Schwerpunktes eines in luftleerem Raum geworfenen Steines erfolgt demnach in dem Falle, wenn dem Stein anfänglich nicht nur eine fortschreitende, sondern auch eine drehende Bewegung mitgetheilt wurde, gerade auf die gleiche Weise, wie in dem Fall, wenn dem Körper nur eine fortschreitende, aber keine drehende Bewegung mitgetheilt wird.

109) ***Bewegung eines Körpers von veränderlicher Form.*** Wenn die Form eines Körpers durch was immer für Ursachen mit der Zeit veränderlich ist, so ändert sich auch der Ort des Schwerpunktes gegen die einzelnen Massenpunkte des Körpers. Die Aufeinanderfolge der Orte, in welchen sich während der Bewegung eines solchen Körpers die Schwerpunkte befinden, die den in allen Zeitmomenten stattfindenden Gruppirungen der Massentheilchen des Körpers entsprechen, nennt man die Bahn des Schwerpunktes eines solchen Körpers, und die Art und Weise, wie alle diese Schwerpunktspositionen im Raume fortschreiten, die Bewegung des Schwerpunktes.

Sind die äusseren auf einen solchen Körper einwirkenden Kräfte oder ist die in dem Schwerpunkt construirt gedachte Resultirende aller äussern Kräfte unabhängig von der Form des Körpers, was z. B. bei einem im luftleeren Raum geworfenen vibrirenden Körper der Fall ist, so erfolgt die Bewegung des Schwerpunktes gerade so, wie wenn der Körper ganz starr wäre.

Ist dagegen die Richtung oder Intensität der Resultirenden aller äusseren Kräfte abhängig von der Gestalt des Körpers, wie dies z. B. der Fall ist bei einem in lufterfülltem Raume fallenden Körper, so veranlasst allerdings die Formveränderung des Körpers eine Aenderung in der Bewegung seines Schwerpunktes

110) ***Stoss der Körper.*** Wenn zwei oder mehrere Körper gewaltsam zusammenstossen, und dabei ihre Bewegungsrichtungen oder ihre Geschwindigkeiten, so wie auch ihre Formen plötzlich ändern, oder sich wechselseitig zertrümmern, so geschehen alle diese Vorgänge durch innere repulsirende Kräfte; die Bewegung des dem Massensystem gemeinsamen Schwerpunktes kann daher durch alle genannten Veränderungen und Wechselwirkungen nicht im Geringsten verändert werden, sondern sie erfolgt auch während und nach dem Stosse gerade so, wie wenn die Körper ohne Störung ihrer Bewegungen durcheinander gegangen wären.

111) ***Explodirende Körper.*** Wenn ein Körper durch innere Kräfte, etwa durch explodirende Substanzen, mit welchen er versehen ist, zertrümmert oder heftig erschüttert wird, bewegt sich während und nach diesem Vorgang der Schwerpunkt des Ganzen so fort, als ob gar nichts geschehen wäre; denn seine Bewegung ist absolut unempfindlich gegen alle Wirkungen, die von innern Kräften herrühren.

112) ***Bewegung der Erde um die Sonne.*** Die Bewegung des Schwerpunktes der Erde um die Sonne kann durch die Wechselwirkung der irdischen Körper gegen einander nicht im Mindesten gestört werden. Das ganze innere Leben des Erdkörpers und alle Veränderungen, welche in demselben durch die Thätigkeiten der unorganischen und organischen Kräfte eintreten, z. B. Erdbeben, vulkanische Ausbrüche, Wasserfluthen, Bergstürze etc. vermögen nichts über die Bewegung des Schwerpunktes. Dieser bewegt sich, was auch auf und im Innern der Erde vorgehen mag, ungestört in seiner elyptischen Bahn um die Sonne herum, und die Umlaufszeit der Erde oder die Dauer des Jahres bleibt, trotz aller Wirkungen der Erde auf sich selbst, stets von gleicher Grösse. Dies ist aber für den Bestand und für die Entwicklung alles organischen und geistigen Lebens von höchster Wichtigkeit; denn wenn die Erde durch ihre Einwirkungen auf sich selbst die Bewegung ihres Schwerpunktes und mithin auch die Dauer des Jahres ändern könnte, so würden immer nach einer Reihenfolge von Jahren Verhältnisse eintreten können, bei welchen ein organisches und geistiges Leben ganz unmöglich wäre. Eine bedeutende Abnahme der Dauer des Jahres würde z. B. zur Folge haben, dass die Früchte während eines Sommers nicht zur Reife kämen, und in dem darauf folgenden Winter durch die Kälte zu Grunde gingen. Eine bedeutende Zunahme der Dauer des Jahres würde zur Folge haben, dass in dem ersten langen Winter alles organische Leben von Grund aus zerstört würde, so dass die Sonne in dem darauf folgenden langen Sommer ihre wärmenden Strahlen vergeblich auf den verödeten Planeten niedersenden würde.

Wir haben gesagt, dass sich der Schwerpunkt der Erde in einer Elypse um die Sonne bewege. Dies ist aber nicht genau richtig. Sie würde sich allerdings in dieser Weise bewegen, wenn nur allein die Sonne nach dem Gravitationsgesetz auf sie einwirkte, allein dieses Gravitationsgesetz besteht, wie wir schon wissen, zwischen allen Körpern; die Erde wird daher nicht blos von der Sonne, sondern auch von allen Planeten des Planetensystems angezogen; ihr Schwerpunkt bewegt sich daher in jedem Augenblick entsprechend der Resultirenden aus allen Anziehungen, welche die Sonne und die Planeten auf sie ausüben, und so kömmt es denn, dass ihre Bahn nicht genau eine Elypse sein kann, sondern in der That eine äussert zusammengesetzte krumme Linie ist. Man hat durch Anwendung der raffinirtesten Mittel, welche die Analysis darbietet, diese wirkliche Bahn zu bestimmen gesucht, und diese Untersuchungen haben zu dem äusserst merkwürdigen Resultat geführt, dass die Umlaufszeit der Erde um die Sonne, so wie auch die Umlaufszeit aller übrigen Planeten ungeachtet ihrer Wechselwirkung auf einander dennoch unveränderlich ist.

Das Planetensystem ist demnach so eingerichtet, dass sein Fortbestand weder durch die nach dem Gravitationsgesetz erfolgenden Wechselwirkungen der Planeten und der Sonne, noch durch die Wirkungen der Planeten auf sich selbst im mindesten gefährdet ist.

113) ***Der Schwerpunkt des Weltalls.*** Die Gesammtheit aller existirenden Körper, d. h. das Weltall, ist in dynamischer Hinsicht als ein Massensystem zu betrachten, das nur allein von inneren Kräften afficirt wird. Der Schwerpunkt des ganzen Weltalls muss daher entweder absolut ruhen, oder mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einer geraden Linie ins Grenzenlose fortschreiten. Zu dieser Folgerung wird man genöthigt, wenn man von der durch die Gesammtheit der physikalischen und chemischen Thatsachen hervorgerufenen Ansicht ausgeht, dass alle in der Natur existirenden, auf die Massen einwirkenden Kräfte in den Massen selbst ihren Sitz haben. Sollte es in der Natur Kräfte geben, die gar keines materiellen Wohnsitzes bedürften, so würden diese als äussere die Bewegung des Schwerpunktes beherrschende Kräfte zu betrachten sein.

114) ***Bewegungen einer frei hängenden Lokomotive.*** Sehr deutlich kommen auch bei den Maschinen die Gesetze der Bewegungen des Schwerpunktes zum Vorschein. Wenn man eine Lokomotive an Ketten aufhängt, so dass sie frei in der Luft schwebt, und sich wie ein Pendel hin und her bewegen kann, hierauf den Kessel heizt und den Dampf auf die Maschine wirken lässt, so gerathen nicht nur die Kolben in eine hin- und hergehende und die Triebräder in eine drehende Bewegung, sondern es entsteht auch in dem ganzen Wagenbau mit dem damit verbundenen Kessel eine Bewegung, die aus einem Vor- und Rückwärtsschreiten und aus einem Hin- und Herdrehen zusammengesetzt ist. Die drehenden Bewegungen der Triebaxe und des Wagenbaues erfolgen nach gewissen Gesetzen, die wir hier nicht berühren wollen. Die Vor- und Rückwärtsbewegung der Massen erfolgt aber getreu nach den Gesetzen, die wir für die Bewegung des Schwerpunktes aufgefunden haben. Eine auf die beschriebene Weise aufgehängte Lokomotive ist, wenn sie durch ihre eigene Dampfkraft bewegt wird, als ein Massensystem anzusehen, das nur allein durch innere Kräfte bewegt wird, es muss daher der Schwerpunkt der sämmtlichen Massen, aus welchen die Lokomotive besteht, unveränderlich in dem Ort verbleiben, in welchem er sich befand, bevor die Maschine ihre Bewegung anfing. Dies ist aber, da die Kolben so wie auch die Kurbelkörper gegen das Wagengestell vor- und rückwärts laufen, nicht anders möglich, als dadurch, dass die Masse des Wagenbaues gleichzeitig entgegengesetzte Bewegungen macht, und es ist auch ohne Rechnung nicht schwierig,

diese Bewegungen des Wagenbaues ausfindig zu machen. Schreiten beide Kolben vorwärts, so weicht der Wagenbau zurück. Bewegen sich beide Kolben rückwärts, so geht der Wagenbau vorwärts. Gehen die Kolben mit gleicher Geschwindigkeit nach entgegengesetzter Richtung, so ändert sich in einem solchen Augenblick die Lage des den beiden Kolben entsprechenden gemeinsamen Schwerpunktes gegen den Wagenbau nicht; der Wagenbau kann daher in diesem Augenblick seinen Ort nicht verändern, d. h. er ruht. Gehen beide Kolben nach entgegengesetzter Richtung, aber mit verschiedener Geschwindigkeit, z. B. der vorwärtseilende schneller als der zurückweichende, so muss der Wagenbau gleichzeitig im Zurückweichen begriffen sein. Man sieht also, dass der ganze Wagenbau während jeder vollen Umdrehung der Triebaxe eine ganze Hin- und Herschwingung machen muss, und dass ferner alle einzelnen Schwingungen von gleicher Grösse sind.

Wenn die Kurbeln der beiden Maschinen parallel gestellt werden, stimmen die Bewegungen der beiden Kolben in jedem Augenblick hinsichtlich der Richtung und Geschwindigkeit überein, und dann wird die Bewegung des Wagenbaues in jedem Augenblick jener der Kolben entgegengesetzt sein und mit einer Geschwindigkeit erfolgen, die um so viel Mal kleiner ist, als jene der Kolben, so viel Mal die Masse des Wagenbaues grösser ist, als die Massen der beiden Kolben und Schubstangen.

Stellt man die Kurbeln so, dass sie einander entgegengesetzt sind, so haben die beiden Kolben gegen den Wagenbau in jedem Augenblick gleich grosse Geschwindigkeiten nach entgegengesetzter Richtung, ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt kann daher seine Lage gegen den Wagenbau nicht ändern, was zur Folge hat, dass dieser letztere weder vor- noch rückwärts schreitet, sondern nur allein eine drehende Schwingung um den Schwerpunkt annimmt.

115) *Winkelbewegung eines Massensystems um irgend eine fixe Axe.* Man denke sich irgend ein in Bewegung befindliches Massensystem, ferner irgend eine gerade aber unbewegliche Linie A, und durch dieselbe nach den Massenpunkten des Systems Ebenen gelegt, die den Massenpunkten in ihrer Bewegung folgen. Diese Ebenen e e_1 . . werden sich während der Bewegung des Systems nach gewissen Gesetzen um die Linie A als Axe drehen, und wir wollen uns nun mit der Auffindung der drehenden Bewegung dieser Ebenen beschäftigen.

Schneidet man diese beweglichen Ebenen e e_1 . . durch eine auf die Axe A senkrechte Ebene B, so entsteht ein System von radialen Linien, deren gegenseitige Neigungen die wahren Maase der Winkel sind, welche die Ebenen gegen einander bilden. Beschreibt man in der Ebene B mit einem Halbmesser gleich der Längeneinheit einen Kreis C, so wird

derselbe von dem System der radialen Linien in verschiedenen Punkten geschnitten und die Bewegung dieser Punkte in der Peripherie des Kreises C kann als das wahre Maas der Winkelbewegung aller Massenpunkte um die als Axe angenommene Linie A angesehen werden.

Es sei nun (Fig. 6 Taf. IV.) m irgend ein Massenpunkt des Systems. Zerlegt man die Resultirende aller auf diesen Punkt einwirkenden Kräfte, in drei der Richtung nach auf einander senkrecht stehende Kräfte H I K, von welchen H parallel mit A, I senkrecht auf A und K senkrecht auf I und H wirkt, so kommt bei der vorgelegten Untersuchung nur allein die letztere dieser Kräfte in Betrachtung, denn diese Kraft K ist es, welche die Winkelbewegung des Massenpunktes um A verändert.

Nun ist bereits bei der Bewegung eines Körpers um eine fixe Axe in Nr. 61 gezeigt worden, dass die Winkelbewegung eines Massenpunktes m, der sich in einer Entfernung r von der Drehungsaxe befindet und auf welchen direkt eine auf r senkrecht stehende Kraft K einwirkt, genau übereinstimmt mit der Winkelbewegung einer Masse, die so gross ist, als das Trägheitsmoment $m r^2$ der Masse m, wenn man dieselbe in einer Entfernung gleich der Einheit von der Axe anbringt und auf dieselbe eine Kraft von der Grösse des statischen Momentes K r senkrecht auf die Richtung, welche ihre kürzeste Entfernung von der Axe misst, einwirken lässt.

Bringt man also in dem Durchschnittspunkt a, der durch m und durch die Axe A gelegten Ebene mit dem Kreis C eine Masse $m r^2$ an, und lässt auf dieselbe eine Kraft K r einwirken, deren Richtung in der Ebene des Kreises C liegt, und auf den Radius O a senkrecht steht, so erfolgt die Winkelbewegung derselben genau so, wie jene der Masse m.

Wiederholt man dieses Verfahren mit allen Massenpunkten des Systems, so erhält man in der Peripherie des Kreises C ein System von Massenpunkten, dessen Winkelbewegungen mit jenen des wirklichen Massensystems genau übereinstimmt.

Gelingt es also, das Gesetz der Winkelbewegung dieses idealen Massensystems ausfindig zu machen, so hat man auch das Gesetz der Winkelbewegung des wirklichen Massensystems.

Nun ist klar, dass die Wege, welche die idealen Massen $m r^2$, $m_1 r_1^2$ . . auf der Peripherie des Kreises C zurücklegen, so gross sind, als sie in dem Falle wären, wenn alle Massen $m r^2$, $m_1 r_1^2$ . . in eine gerade Linie gestellt und längs derselben durch die Kräfte K r, K r_1 . . getrieben würden. Dann aber würde sich der allen Massen gemeinsame Schwerpunkt so bewegen, wie wenn in demselben sämmtliche Massen und Kräfte conzentrirt wären.

Wir wollen denjenigen Punkt der Peripherie des Kreises, dessen Bogenentfernungen von allen Massenpunkten so gross sind, als die Ent-

fernung des wahren Schwerpunktes von allen Massenpunkten wäre, wenn dieselben in eine gerade Linie gestellt würden, den Mittelpunkt der Trägheitsmomente des Massensystems nennen, und können nun den Satz aussprechen, dass sich der Mittelpunkt der Trägheitsmomente so bewegt, wie wenn in demselben in jedem Augenblick der Bewegung eine Masse vereinigt wäre, die so gross ist, als das totale Trägheitsmoment, welches in demselben Augenblick der Massengruppirung entspricht, und auf diese vereinigte Masse nach tangentialer Richtung eine Kraft wirkte, deren Intensität so gross ist, als die Summe der statischen Momente sämmtlicher auf das Massensystem in diesem Augenblick einwirkenden Kräfte.

Hierdurch ist die Winkelbewegung des Massensystems auf die Bewegung eines einzelnen Punktes zurückgeführt, ähnlich wie die fortschreitende Bewegung auf jene des Schwerpunktes.

Diese Winkelbewegung eines Massensystems ist von der Thätigkeit der inneren Kräfte ganz unabhängig, denn die Summe der statischen Momente der anziehenden oder abstossenden Kräfte, mit welchen zwei Massenpunkte des Systems auf einander wirken, ist gleich Null, und wenn diese Kräfte nach dem Mittelpunkt der Trägheitsmomente versetzt werden, heben sie sich daselbst auf, können daher auf die Bewegung der idealen Masse keinen Einfluss ausüben.

Besonders merkwürdig ist die Winkelbewegung eines Massensystems in dem Falle, wenn auf dasselbe nur innere oder solche Kräfte einwirken, deren Richtungen nach der als Drehungsaxe angenommenen Linie A hinzielen, denn dann heben sich alle nach dem Mittelpunkt der Trägheitsmomente versetzten Kräfte auf. Der Mittelpunkt der Trägheitsmomente müsste sich daher, wenn die in demselben vereinigte Masse $\Sigma m r^2$ constant wäre, mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortbewegen; da aber die Masse $\Sigma m r^2$ im Allgemeinen veränderlich ist, so muss sich der Mittelpunkt der Trägheitsmomente so bewegen, wie eine sich selbst überlassene Masse $\Sigma m r^2$ von veränderlicher Grösse. Es kann daher nicht die Geschwindigkeit der Masse, sondern es muss das Produkt aus der Geschwindigkeit in der Masse constant sein.

Nennt man also W die Winkelgeschwindigkeit des Mittelpunktes der Trägheitsmomente, so ist

$$W \Sigma m r^2 = \text{const.}$$

oder

$$W = \frac{\text{const.}}{\Sigma m r^2}$$

Die Winkelgeschwindigkeit des Mittelpunktes der Trägheitsmomente oder der mittleren Winkelgeschwindigkeit des Massensystems, das nur von inneren oder von solchen Kräften affizirt wird, deren Richtungen

nach der als Drehungsaxe angenommenen Linie A zielen, hängt also nur allein von dem totalen Trägheitsmoment ab, und ist demselben verkehrt proportional.

Dieses Gesetz gilt auch in dem Fall, wenn die Körper des Systems durch Stösse gegen einander oder durch Explosionen von gewissen Substanzen, die Theile des Massensystems sind, erschüttert oder zertrümmert werden; nur wird nach dem oben ausgesprochenen Gesetz die mittlere Geschwindigkeit der Winkelbewegung nach einem solchen Ereigniss grösser oder kleiner sein, als vor demselben, je nachdem das totale Trägheitsmoment ab- oder zugenommen hat.

Die Bedeutung der constanten Grösse ergibt sich durch den Begriff von dem mittleren Werth der Winkelgeschwindigkeit. Es ist nämlich allgemein:

$$W = \frac{\Sigma m r^2 w}{\Sigma m r^2}$$

wenn w die Winkelgeschwindigkeit eines einzelnen Massenpunktes des Systems bedeutet. Man hat daher in dem Falle, wenn keine äusseren Kräfte thätig sind:

$$\Sigma m r^2 w = \text{const.}$$

d. h. man findet die constante Grösse durch die Summe der Produkte der Trägheitsmomente aller Massen in ihren Winkelgeschwindigkeiten, und diese Summe muss für alle Momente der Bewegung den gleichen Werth liefern.

Noch in anderer Weise kann das Gesetz der Winkelbewegung ausgedrückt werden. Nennt man nämlich $s s_1 s_2 \ldots$ die Bogenlängen, welche die Massen $m r^2$, $m_1 r_1^2 \ldots$ in einem bestimmten aber sehr kleinen Zeittheilchen zurücklegen, so ist:

$$w = \frac{s}{t}, \; w_1 = \frac{s_1}{t}, \; w_2 = \frac{s_2}{t} \ldots$$

und wenn man diese Werthe in den Ausdruck

$$\Sigma m r^2 w = \text{const.}$$

einführt, so findet man

$$\Sigma m r^2 s = \text{const.} \times t.$$

Aber es ist in dem Falle, wenn s mit t unendlich klein sind $r^2 s \ldots r^2 s_1 \ldots$ das Doppelte der Dreiecksflächen, welche die Radien $r r_1 \ldots$ während des Zeittheilchens t beschreiben. Bezeichnet man diese Flächenräume mit $f f_1 f_2 \ldots$ so hat man demnach

$$\Sigma m f = \text{const.} \times t.$$

Es ist also die Summe der Produkte der Massen des Systems in die Flächenräume, welchen die Radienvektoren während eines kleinen Zeitintervalles beschreiben, der Dauer dieses Zeitintervalles proportional.

Nun kann aber für alle auf einander folgenden Zeitintervallen ganz das Gleiche gesagt werden, folglich darf man auch den Satz aussprechen, dass die Summe der Produkte aus allen Massentheilchen in die Flächenräume, welchen die den Massentheilchen entsprechenden Radienvektoren während einer endlichen Zeit beschreiben, der Dauer dieser Zeit proportional ist.

Diesen Satz nennt man »den Grundsatz der Erhaltung der Flächenräume.“ Für die quantitativen Bestimmungen ist jede Ausdrucksweise dieses Gesetzes gleichwerthig, für das Vorstellungsvermögen verdient jedoch die früher erklärte Ausdrucksweise den Vorzug.

Das Gesetz der mittleren Winkelbewegung eines Massensystems, das nur von inneren Kräften affizirt wird, gilt nicht nur in Bezug auf eine beliebig angenommene fixe Axe, sondern es ist auch richtig in Bezug auf eine Axe, die durch den nach gerader Linie mit unveränderlicher Geschwindigkeit fortschreitenden Schwerpunkt des Massensystems gelegt wird. Von dieser Wahrheit wird man sich durch folgende Betrachtung überzeugen.

Denkt man sich ein Massensystem, dessen Schwerpunkt ruht, so ist klar, dass der in Rede stehende Satz für jede Axe gilt, die man durch den ruhenden Shwerpunkt legen mag. Denkt man sich aber ferner, dass allen Massenpunkten gleich grosse Geschwindigkeiten nach paralleler Richtung mitgetheilt werden, so wird dies zur Folge haben, dass der gemeinsame Schwerpunkt nach derselben Richtung und mit derselben Geschwindigkeit gleichförmig fortschreitet. Allein bei diesem Vorgang werden die inneren Kräfte der relativen Geschwindigkeiten die Massentheile gerade eben so verändern, wie sie früher, als der Schwerpunkt ruhte, die absoluten Geschwindigkeiten verändert haben. Man sieht also, dass das Gesetz der durch den Schwerpunkt gelegten und mit demselben gleichmässig fortschreitenden Axe richtig ist, d. h. es ist die mittlere Winkelgeschwindigkeit eines Massensystems in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gelegte und mit demselben gleichmässig fortschreitende Axe dem Trägheitsmoment des ganzen Massensystems in jedem Augenblick verkehrt proportional.

Die Reibung.

116) *Erfahrungsgesetze.* Bekanntlich wird der Widerstand, welcher sich äussert, wenn Körper, die gegen einander gedrückt sind, auf einander hingleiten, Reibungswiderstand genannt. Die Gesetze, nach welchen sich dieser Widerstand richtet, sind zuerst von Colomb und in neuerer Zeit von Morin auf experimentalem Wege aufgesucht worden; sie lauten:

1) Der Reibungswiderstand befolgt nur dann ein einfacheres bestimmbares Gesetz, wenn die Berührungsflächen der sich an einander reibenden Körper einen gewissen Grad von Ebenheit und Glätte besitzen, und wenn durch die Reibung weder eine merkliche Erwärmung der Körper noch eine auffallende Abnützung an ihren Berührungsflächen eintritt.

2) Der Reibungswiderstand richtet sich nach der materiellen Natur der Körper und nach der Beschaffenheit und dem Zustand ihrer Berührungsflächen. Holz reibt sich auf Holz minder, wenn sich die Fasern durchkreuzen, als wenn sie parallel laufen. Feuchtigkeit und Oel vermehrt, Talg, Seife und Gravit vermindert die Reibung der Hölzer. Oele und Schweinfett vermindern die Reibung der metallischen Körper.

3) Der Reibungswiderstand ist beim Beginn einer Bewegung, die nach einem Ruhezustand, der längere Zeit dauert, eintritt, grösser, als einige Zeit nach dem Anfang der Bewegung.

4) Der Reibungswiderstand ist bei rund umlaufenden Körpern, z. B. bei Zapfen und Wellen geringer, als bei Körpern, die eine fortschreitende Bewegung haben.

5) Der Reibungswiderstand ist unabhängig von der Grösse der Berührungsfläche, vorausgesetzt, dass diese letztere hinreichend gross ist, so dass weder eine merkliche Erwärmung noch eine merkliche Abnützung eintrittt.

6) Der Reibungswiderstand ist unabhängig von der Geschwindigkeit, mit welcher die Körper auf einander gleiten, vorausgesetzt, dass diese Geschwindigkeit eine gewisse Grenze nicht überschreitet, bei welcher eine merkliche Erwärmung und Abnützung der Körper eintritt.

7) Der Reibungswiderstand ist innerhalb der in den vorhergehenden Nummern bezeichneten Grenzen dem Druck proportional, mit welchem die Körper gegen einander gedrückt sind.

Nennt man demnach für zwei bestimmte Körper f den Reibungswiderstand, welcher durch einen Druck von 1 Kilogramm, F jenen der durch einen Druck von P Kilogramm verursacht wird, und v die Geschwindigkeit, mit welcher die Körper auf einander gleiten, E den in

Kilogramm-Meter ausgedrückten Effekt, welcher der Ueberwindung des Reibungswiderstandes entspricht, so ist:

$$F = P f$$

$$E = P f v.$$

Die Grösse f nennt man den Reibungscoeffizienten. Die Werthe desselben sind für die verschiedenartigsten Substanzen und für mannigfaltige Zustände der Berührungsflächen von Colomb und Morin durch Versuche aufgefunden worden, und sind in den „Resultaten für den Maschinenbau" Seite 85 bis 87 zu finden. Vermittelst derselben unterliegt es keiner Schwierigkeit, nach den bekannten Gesetzen der Statik den Reibungswiderstand und dessen Einfluss auf das Gleichgewicht und auf die Bewegung der Körper zu berechnen.

117) ***Ursache des Reibungswiderstandes und Erklärung der obigen Erfahrungssätze.*** Die Ursache des Reibungswiderstandes liegt wohl hauptsächlich darin, dass die Körper nie vollkommen glatte Flächen haben, sondern an ihrer Oberfläche immer mit Unebenheiten versehen sind, deren Grösse jedoch bei glatten metallischen Flächen so unmerklich sind, dass sie sowohl für den Tastsinn, als auch für das unbewaffnete Auge ganz verschwinden. Befinden sich nun zwei solche Körper nicht nur in einer geometrischen Berührung, sondern sind sie auch durch irgend eine Kraft gegen einander gepresst, so müssen die Unebenheiten der Körper ähnlich wie verzahnte Räder in einannder eingreifen, und wenn ein Aufeinandergleiten eintreten soll, so kann dies nur dadurch geschehen, wenn die Erhöhungen umgebogen oder weggebrochen werden, wozu dann natürlich ein grösserer Kraftaufwand nothwendig ist.

Die Wirkung des Netzens und Oelens der Berührungsflächen erklärt sich auf folgende Weise: werden die Flächen mit Substanzen versehen, gegen welche die Körper keine hyproskopische einsaugende Wirkung ausüben, so füllen diese Substanzen die Zwischenräume (Poren), die Unebenheiten aus, diese letztern können daher nicht so tief in einander eingreifen, und daher ist leicht einzusehen, dass unter diesen Umständen der Reibungswiderstand vermindert wird. Werden dagegen die Körper mit Substanzen versehen, gegen welche die Körper hyproskopisch einsaugend wirken, so dringen die Substanzen tiefer ins Innere der Körper ein, es findet keine Ausfüllung der Poren statt, und die Körper werden, in Folge der Molekularatraktion, welche zwischen den in die Körper eindringenden Substanzen vorhanden ist, gegen einander gezogen, so dass dadurch die Unebenheiten tiefer in einander eindringen und den Widerstand vermehren. Sind die Berührungsflächen sehr glatt und mit einer dünnen fettigen oder flüssigen Substanz belegt, so kann es geschehen, dass am Umfang der Berührungsfläche ein luftdichter Verschluss

entsteht, und dann werden die Körper durch den äusseren atmosphärischen Druck gegen einander gepresst, wodurch die Reibung vermehrt wird.

Die Thatsache, dass der Reibungswiderstand bei rundumlaufenden Zapfen kleiner ist, als bei Körpern, welche sich in ebenen Flächen berühren, und eine geradlinige fortschreitende Bewegung haben, scheint durch zweierlei Ursachen erklärt werden zu müssen. Eine dieser Ursachen liegt in dem Umstande, dass bei einem fortschreitenden Aufeinandergleiten der Körper nicht nur die Reibung, sondern auch der Widerstand zu überwältigen ist, der aus dem Eindringen des kleineren der beiden Körper in den grösseren ausgedehnteren entsteht, indem dabei fort und fort das Material des letzteren unmittelbar von dem ersteren zusammengedrückt werden muss. Ist noch überdies der kleine Körper an der vordern Grenze seiner Berührungsfläche etwas scharfkantig, so wirkt derselbe hobelartig auf den andern Körper ein, wodurch der Widerstand noch mehr vergrössert wird. Ein zweiter Grund des Unterschiedes zwischen fortschreitender und drehender Reibung liegt in dem Umstande, dass die Zapfen, wenn sie gut geölt sind und unter einem nicht zu starken Druck längere Zeit, z. B. ein Jahr lang, laufen, einen Zustand von Glätte annehmen, welcher durch die gewöhnlichen Mittel zur Bearbeitung der Metallflächen kaum hervorgebracht werden kann; denn es fällt wohl Niemanden ein, eine Mettallfläche ein Jahr lang zu schleifen, um sie recht glatt zu machen. Hierdurch erklärt es sich auch, wesshalb alle Maschinen nicht in ganz neuem Zustande, sondern erst dann, wenn sie sich einige Zeit „eingelaufen« haben, den geringsten Widerstand verursachen, und es unterliegt keinem Zweifel, dass dieser Widerstand fort und fort bis zu einer gewissen Grenze hin abnehmen muss, wenn nicht mit der Zeit durch das wechselseitige Abnützen der Theile das genaue Zusammenpassen aller Organe aufhören würde.

Dass der Reibungswiderstand von der Grösse der Berührungsfläche unabhängig ist, so lange keine Erwärmung der Körper eintritt, ist leicht zu begreifen. Denn ist die Berührungsfläche klein, so ist zwar die Intensität der Reibung an jedem einzelnen Punkt der Fläche gross, dafür sind aber dann um so viel weniger Punkte vorhanden, an welchen Reibung statt findet. Ist dagegen die Berührungsfläche gross, so gibt es zwar viele reibende Punkte, die Intensität ist aber dann an jedem einzelnen Punkt gering.

Dass der Reibungswiderstand von der Geschwindigkeit der Bewegung nicht abhängt, ist höchst wahrscheinlich nur annähernd richtig. Der Reibungswiderstand ist gleich der Kraft, welche erforderlich ist, um die Unebenheiten umzulegen oder wegzubrechen, mehr der Kraft, die es braucht, um der umgebogenen oder weggerissenen Masse Ge-

schwindigkeit zu ertheilen; so lange aber die Geschwindigkeit der Bewegung nicht extravagant ist, kann der Betrag der letzteren dieser beiden Kräfte nicht sehr gross ausfallen, und gegen die erstere vernachlässigt werden, woraus sich ergibt, dass der Reibungswiderstand bei mässiger Geschwindigkeit von dieser letztern fast unabhängig ist.

Dass der Reibungswiderstand mit dem Druck der Körper gegen einander wächst, ist für sich klar; es dürfte jedoch schwer halten, zu beweisen, dass die Reibung genau in dem Verhältniss wächst, in welchem der Druck zunimmt.

118) *Abnützung und Erwärmung durch Reibung.* Die Kenntniss der Gesetze, nach welchen sich der Wirkungswiderstand richtet, hat durchaus kein selbstständiges wissenschaftliches Interesse, sondern ist einzig und allein nur für das Maschinenwesen von praktischer Wichtigkeit. Diese Wichtigkeit ist aber bis jetzt in den verschiedenen Werken, welche über Mechanik und Maschinenbau handeln, nur theilweise und einseitig aufgefasst und dargestellt worden, indem man die Reibung immer nur in so fern betrachtet, als sie als Hinderniss der Bewegung auftritt, und ganz und gar ausser Acht liess, dass durch dieselbe die Maschinenorgane an ihren heikelsten Stellen abgenützt und deformirt werden, wodurch zweckwidrige, stossende und vibrirende Bewegungen veranlasst werden, welche den geordneten Zusammenhang aller Theile wesentlich stören, den zum Betrieb der Maschinen erforderlichen Kraftaufwand vermehren, und was das allernachtheiligste und misslichste ist: häufige kostspielige Reparaturen veranlassen. Man würde sich in den meisten und wichtigsten Fällen den Kraftverlust, der durch die Reibung entsteht, gerne gefallen lassen, wenn nur das Warmlaufen und Abnützen nicht wäre. Bei Wasserrädern, Turbinen, Dampfmaschinen, und selbst bei den Lokomotiven ist der Reibungswiderstand hinsichtlich des Kraftaufwandes, den seine Bewältigung erfordert, bei weitem nicht so nachtheilig, als die Empfindlichkeit der Wasserräder und Turbinenzapfen, und als die rasche Abnützung der Dampfmaschinen und Lokomotive. Indem man nun die Reibung ganz einseitig und nur in so fern, als dieselbe einen Widerstand verursacht, betrachtete, dagegen ihre schädlichste Wirkung, die Abnützung, ganz ausser Acht liess, hatte die bisherige Theorie der Reibung dem praktischen Maschinenbau nur selten genützt, sondern im Gegentheil oftmals geschadet, indem diese Lehre sich damit begnügt, die Berechnung des Reibungswiderstandes mit einem grossen Aufwande von weitläufigen Formeln zu lehren, statt die Mittel anzugeben, durch welche man sich gegen den schädlichen Einfluss derselben in jeder Hinsicht zu schützen im Stande ist.

119) *Ursache der Erwärmung und Abnützung.* Es scheint, dass Körper, wenn sie an einander gerieben werden, sich nur dann an ihren

Berührungsflächen angreifen und aufreiben, wenn eine Erwärmung derselben eintritt, , d. h. wenn der in den beiden Körpern enthaltene Aether in heftige vibrirende Bewegung versetzt wird. Allein wenn zwei Körper sich an einander reiben, gibt es keine andere Quelle der Wärmeerregung, als die Vibrationen der Körpermolekule; man kann daher mit grosser Wahrscheinlichkeit sagen, dass durch die Reibung ein wechselseitiges Angreifen der Körper nur dann eintritt, wenn heftige Vibrationen zunächst in den Körpermolekulen und hierauf in den Aethertheilchen hervorgerufen werden. Es ist also die Frage, durch welche Umstände diese Vibrationen hervorgebracht werden und deren gibt es nun mehrere.

Zunächst ist klar, dass Vibrationen entstehen müssen, wenn die zahnartigen Erhöhungen an den Oberflächen der Körper in einander eingreifen und sich wechselseitig umlegen oder gar losreissen. Auch ist leicht einzusehen, dass die Erschütterungen um so heftiger sein werden, je tiefer die Zähne in einander eingreifen und je rascher die Körper über einander hingleiten. Die Tiefe des Eingriffs ist aber nach der Intensität des Druckes zu beurtheilen, mit welchem die Körper gegen einander gepresst sind, d. h. nach dem Druck auf die Flächeneinheit der Berührungsfläche, welcher gefunden wird, wenn man den totalen Druck, der die Körper gegen einander presst, durch den Flächeninhalt der Berührungsflächen dividirt. Die Grösse der Berührungsfläche, oder wie man sich auch auszudrücken pflegt, die Reibungsfläche, die auf den Reibungswiderstand keinen Einfluss hat, ist demnach hinsichtlich der Erwärmung und der hieraus entstehenden Aufreibung der Fläche ein höchst wichtiges Constructionselement, und es ist klar, dass man sich gegen die abnützende Wirkung der Reibung, bei bedeutenden Geschwindigkeiten, nur durch hinreichende Grösse der Reibungsflächen schützen kann. Auch ist dieses Schutzmittel um so mehr zu empfehlen, als durch die Anwendung desselben weder der Reibungswiderstand vermehrt, noch auch sonstige nachtheilige Wirkungen hervorgebracht werden.

Die Vibrationen, welche durch das Aneinanderreiben der Körper entstehen, können noch bedeutend gesteigert werden, wenn in dem ganzen Bau einer Maschine heftige Molekularerschütterungen vorkommen, die sich durch die Organe einer Maschine als Vibrationen fortpflanzen, und theilweise in die Luft übergehen, theilweise aber durch die sich aneinander reibenden Bestandtheile aus der Maschine entweichen und in den Erdboden übergehen. Dies ist insbesondere bei den Zapfen der Fall. Ein Wasserrad steht z. B. nur durch die Zapfen seiner Welle mit dem Erdboden in Berührung. Die Vibrationen, welche in dem ganzen Bau eines solchen Rades durch den stossweisen Eintritt des Wassers, und durch die nie ganz starre Verbindung seiner Theile unter einander entstehen, haben

keinen Ausweg, als die Oberflächen der Zapfen. Dieselben sind daher den heftigsten Erschütterungen ausgesetzt, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man sich in die Nähe der Zapfenlager hinstellt oder dieselben mit der Hand berührt. Wegen dieser Erschüttungen ist es auch durchaus nothwendig, die Lagerplatten dieser Zapfenlager auf einen soliden Quaderbau zu legen, und sie mit demselben durch starke eiserne Stangen zu befestigen.

Aehnlich verhält es sich auch bei den Transmissionen. Das ganze System von Körpern, welches eine Transmission bildet, nämlich die Wellen, Räder, Rollen und Kupplungen, steht durch mehrere Zapfen und Hälse theils mit dem Erdboden, theils mit den Mauern und Decken eines Gebäudes in Berührung; und alle Erschütterungen, die theils durch den unvollkommenen Eingriff in die Zahnräder, theils durch andere Ursachen entstehen, müssen durch diese Zapfen und Hälse aus der Transmission entweichen. Diese Theile sind daher heftigen Erschütterungen unterworfen, und müssen äusserst sorgfältig ausgeführt und befestigt werden, um den zerstörenden Einwirkungen zu widerstehen.

Am auffallendsten tritt diese Wirkung der Erschütterungen bei den Turbinenzapfen hervor. Eine Turbine entwickelt, wenn sie zweckmässig angeordnet und sorgfältig ausgeführt und fehlerfrei aufgestellt ist, einen Nutzeffekt von 75 %. Nehmen wir beispielsweise an, der absolute Effekt der Wasserkraft betrage 100 Pferdekraft, so werden davon 75 Pferdekraft gewonnen und 25 gehen verloren. Nun ist die Frage, wo diese 25 Pferdekräfte hinkommen? Sie müssen sich irgend wo wieder finden, denn absolut vernichtet wird keine Wirkung. Es sind nun dreierlei Körper vorhanden, in welchen sich diese 25 Pferdekräfte, so zu sagen, verbergen können, und zwar: a) Das Wasser, welches vom Turbinenrad wegfliesst; b) die Masse des Turbinenrades; c) die Masse des das Turbinenrad umgebenden Mantels. In dem vom Turbinenrad wegfliessenden Wasser ist allerdings jederzeit eine bedeutende lebendige Kraft enthalten, die nicht nur nach der Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung dieses Wassers, sondern nach dem mittleren Werth der absoluten Geschwindigkeit zu berechnen ist, welche die Wassertheilchen in ihrer durcheinander wirbelnden Bewegung besitzen. Nehmen wir beispielsweise an, diese lebendige Kraft betrage 15 Pferdekräfte, so bleibt noch immer ein Verlust von 10 Pferden zu erklären übrig. Nehmen wir weiter an, dass hiervon die Hälfte, also 5 Pferde, durch Erschütterungen, welche durch den Stoss des Wassers gegen die Schaufeln entstehen, in die Masse des Turbinenrades übergehen, so nimmt diese in jeder Sekunde eine Wirkungsgrösse von $5 \times 75 = 275$ Kilogrammes-Meter in sich auf, pflanzt dieselbe nach der Turbinenaxe vorwärts fort, und findet daselbst keinen andern Ausweg, als den Zapfen. Dieser wird also eben-

falls in jeder Sekunde durch 275 Kilogrammes-Meter erschüttert. Bedenkt man nun, wie klein die Masse und die Oberfläche eines solchen Zapfens ist, so wird man leicht begreiflich finden, dass in demselben äusserst heftige Molekularerschütterungen eintreten müssen, und wenn nun diese Zapfen, wie es häufig der Fall ist, mit ansehnlicher Geschwindigkeit sich drehen, und mit bedeutender Kraft gegen die Grundfläche der Pfanne, so wie auch gegen deren Umfassungsfläche gepresst sind, so wird man sich wohl nicht wundern, wenn unter solchen Umständen ein heftiges Erhitzen und Aufreiben der Berührungsflächen eintritt.

Die Erhitzung des Zapfens bringt auf zweifache Weise die Zerstörung desselben hervor. So wie die Erwärmung eine gewisse Grenze überschreitet, trocknet das Oel ein und bildet sich eine klebrige Masse, welche die Zu- und Ableitungsröhren verstopft. Ist dieser Zustand eingetreten, so lauft der Zapfen trocken in der Pfanne; die eigentliche, von dem Druck herrührende Reibung wird dann ausserordentlich gross, man vernimmt dann gewöhnlich ein durchdringendes Knarren oder Schreien, und gleichzeitig steigert sich die Erhitzung oft in so hohem Grade, dass schmiedeiserne Theile zusammenschweissen, und Theile aus Kanonenmetall, Gusseisen oder Stahl bis zum Schmelzen gebracht werden.

Fassen wir nun alle Einzelnheiten übersichtlich zusammen, so ergeben sich als Schutzmittel gegen das Warmlaufen, Erhitzen und gegen die hieraus entstehende Abnutzung der sich reibenden Körper folgende Regeln:

1) Möglichste Verminderung des Druckes der sich reibenden Körper.

2) Möglichst gleichförmige Vertheilung dieses Druckes auf die ganze Ausdehnung der Berührungsfläche zwischen den Körpern.

3) Hinreichend grosser Flächeninhalt der Berührungsflächen, damit die Intensität des Druckes, auf die Flächeneinheit bezogen, gemässigt wird.

4) Möglichste Vermeidung grosser Geschwindigkeiten.

5) Reichliche und continuirliche Oelung, so dass die Flächen stets mit reinem Oel versehen und nicht nur fortwährend eingefettet, sondern auch fort und fort mit Oel, so zu sagen, gewaschen werden, damit alle Körpertheile, welche losreissen, auch sogleich entfernt werden. Dies kann ökonomisch geschehen, wenn man einen Oelstrom zwischen die Berührungsflächen leitet, und dann das abfliessende Oel wiederum auffängt, um es in der Folge abermals zu minder heikeln Oelungen zu benutzen.

6) Möglichste Vermeidung von Erschütterungen und Vibrationen, und Ableitung derselben durch solche Maschinentheile, die nicht so leicht dem Warmlaufen ausgesetzt sind.

7) Zweckmässige Wahl des Materials für die sich reibenden Theile. Die Gussmetalle (Kanonenmetall und Gusseisen) scheinen vor den schweissbaren Metallen (Schmiedeeisen und Stahl) den Vorzug zu verdienen.

Zur Erläuterung dieser Regeln folgen nun einige Anwendungen derselben auf die Construction der Zapfenlager.

Construction der Zapfenlager für schnelllaufende Wellen.

A. *Liegende Zapfen und Wellen.* In den gewöhnlichen Fällen werden die Zapfen und Wellen ohne Rücksicht auf das Warmlaufen und Abnützen so bestimmt, dass sie den Anforderungen einer hinreichenden Festigkeit entsprechen. Der Durchmesser der eigentlichen Zapfen, die nur allein auf respektive Festigkeit in Anspruch genommen sind, werden diesem gemäss der Quadratwurzel aus dem Druck, welchen sie auszuhalten haben, proportional gemacht, und ihre Länge wird gewöhnlich um $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$ grösser genommen, als der Durchmesser.

Die Durchmesser der Wellen, welche einen gewissen Effekt durch Torsion zu übertragen haben, werden nach der Formel $d = 16\sqrt[3]{\frac{N}{n}}$ Centimeter (wobei N den Effekt in Pferdekräften und n die Anzahl der Umdrehungen der Welle per 1 Minute bezeichnet) berechnet, wodurch sie alle eine gleiche Torsionsfestigkeit erhalten.

Die Länge der Hälse, welche in die Lager gelegt werden, macht man wie die Zapfen um $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$ länger als die Durchmesser. Die Lager für diese Zapfen und Hälse erhalten im Innern und Aeussern abgedrehte Schalen aus Messing oder Rothgussmetall, so zwar, dass sich die Wellen nur allein um ihre geometrischen Axen drehen können, gegen jede andere Bewegung aber gehindert sind.

Diese Einrichtung ist zwar für die gewöhnlichen Fälle, und namentlich wenn die Geschwindigkeit nicht zu gross ist, und nicht mehr als 200 Umdrehungen in 1 Minute beträgt, genügend; sie ist aber unter allen Umständen mangelhaft, und wird für grosse Geschwindigkeiten unzureichend. Dies wird aus folgender Beurtheilung erhellen:

1) Die gewöhnliche Länge der Zapfen ($\frac{5}{4}$ d bis $\frac{4}{3}$ d) ist für grössere Geschwindigkeiten zu klein, weil die Intensität des Druckes wegen des geringen Flächeninhaltes der Reibungsfläche zu gross ausfällt. Man sollte nun meinen, dass diesem Uebelstande leicht abgeholfen werden könnte, wenn man die Zapfen und Hälse, und eben so auch die innere Fläche der Schalen länger machte; allein dies geht nicht an, denn

es würde dann der geringste Fehler in der Aufstellung der Lager sogleich zur Folge haben, dass die Hälse und Zapfen nicht mehr der ganzen Länge nach in den Schalen aufliegen, sondern nur an den Enden, und daselbst würde dann die Intensität des Druckes so gross ausfallen, dass ein Warmlaufen und Aufreiben eintreten müsste.

2) Eine gleichförmige Vertheilung des Druckes auf die ganze Länge der Zapfen und Hälse ist bei diesen Lagern mit unbeweglichen cylindrisch abgedrehten Schalen nur durch eine mathematisch vollkommene, also praktisch nie erreichbare Aufstellung der Lager möglich.

3) Selbst eine annähernd richtige Aufstellung dieser Lager ist jederzeit und insbesondere bei längeren Wellen, die durch mehr als zwei Lager getragen werden, sehr schwierig; und wenn sie auch anfänglich gelingt, so wird doch der fehlerfreie Zustand sehr leicht gestört, wenn die Stützpunkte für die Lager etwas weichen, was fast immer eintritt, wenn die Lager gegen Steinfundamente, Mauern oder Balken geschraubt werden. Eine unveränderliche Stellung der Lager ist nur dann zu erwarten, wenn sie auf einen starren Gusseisenkörper befestigt werden können.

4) Wenn überhaupt eine absolut starre Gegeneinanderbefestigung der Lager gar nicht möglich ist, wie z. B. bei Dampfschiffen, so kann der Bedingung einer ganz gleichmässigen Vertheilung des Druckes gar nicht dauernd entsprochen werden.

5) Zuweilen erfordert es der Zweck, dass eine Welle ihre Lage verändern könne, wie dies z. B. bei den Axen der Holländertrommeln der Fall ist, und dann können diese starren unbeweglichen Lager gar nicht gebraucht werden.

Allen diesen Uebelständen kann gründlichst abgeholfen werden, wenn man die Lagerschalen innen cylindrisch lässt, aussen aber kugelförmig abdreht und die Lagerkörper entsprechend ebenfalls kugelförmig ausbohrt, so dass die beiden Schalenhälften zusammen einen Körper bilden, der in den Lagern um einen Punkt (dem Mittelpunkt der Kugel) frei drehbar ist, so dass die in den Schalen liegende Welle innerhalb gewisser Grenzen jede beliebige Richtung annehmen kann, und dabei doch immer die Zapfen und Hälse ihrer ganzen Länge nach in den Schalen aufliegen, wie lang sie auch sein mögen. Diese Lager mit kugelförmigen Schalen werden bereits schon längere Zeit von Bodmer in England mit bestem Erfolg angewendet und verdienen in der That allgemein im Maschinenbau eingeführt zu werden, denn sie schützen vortrefflich gegen das Warmlaufen und Aufreiben, und sind noch überdies weit leichter zu montiren, als die Lager mit cylindrischen Schalen, weil bei jenen nur der Bedingung zu entsprechen ist, dass die Mittelpunkte der Schalen aller Lager, die eine gerade Welle zu tragen haben, in einer geraden

Linie liegen, wo hingegen die Lager mit cylindrischen Schalen so zu montiren wären, dass die geometrischen Axen aller Lagerhöhlungen in eine und dieselbe gerade Linie, und zwar in die geometrische Drehungsaxe der Welle fallen. Gegen diese Lager mit Kugelschalen hat man mehrere Einwendungen gemacht, die aber gar nicht begründet sind und leicht beseitigt werden können. Zunächst hat man eingewendet, dass ihre Anfertigung mit Schwierigkeiten verbunden sei, aber man braucht ja nur ein Support zu construiren, vermittelst welchem man auf einer Drehbank das kugelförmige Abdrehen der Schalen und Ausbohren der Lagerkörper bewerkstelligen kann, und dies ist mit keiner grossen Schwierigkeit verbunden, indem eine so ausserordentlich grosse Genauigkeit bei der Herstellung dieser Kugelform gar nicht nöthig ist, weil die Schalen keine Bewegung machen sondern nur der Welle gestatten sollen, ihre Richtung ohne Zwang ändern zu können. Diese Lager mit Kugelschalen werden dann auch oft unrichtig beurtheilt, weil man sie wegen ihrer runden Form mit den Kugelzapfen verwechselt, die sich überall, wo man sie angewendet hat, nicht gut bewährt haben. Diese Verwechslung beruht aber auf einer sehr oberflächlichen Betrachtung der Sache; sieht man dieselbe genauer an, so findet man, dass zwischen den kugelförmigen Schalen und den kugelförmigen Zapfen ein wesentlicher Unterschied besteht, und dass die letzteren eine fehlerhafte Construktion genannt werden müssen; denn

1) ist bei dem Kugelzapfen die Berührungsfläche zwischen Zapfen und Pfanne noch kleiner als bei den gewöhnlichen cylindrischen Zapfen.

2) Ist bei den Kugelzapfen der Druck keineswegs auf die ganze Berührungsfläche gleichförmig vertheilt, sondern im Gegentheil fast nur in einem Punkt conzentrirt.

3) Ist es ungemein schwierig, die Kugelzapfen so genau abzudrehen, und die Schalen entsprechend kugelförmig auszudrehen, wie es für eine grössere Bewegungsgeschwindigkeit durchaus nothwendig ist, wo hingegen, wie schon oben bemerkt wurde, die kugelförmigen Theile bei der Anordnung mit Kugelschalen gar nicht mit besonderer Sorgfalt hergestellt zu werden brauchen, indem die äusseren Flächen der Kugelschalen keine Bewegung machen. Man sieht also, dass es sich mit den Kugelschalen ganz anders verhält, als mit den Kugelzapfen.

B *Zapfen und Lager für aufrecht stehende Wellen.* Die gewöhnliche Einrichtung der Zapfenbüchse für aufrecht stehende Wellen ist Fig. 4 Taf XI. der Resultate für den Maschinenbau, 2. Auflage, dargestellt. Die Zapfenbüchse hat die Form eines cylindrischen Topfes mit ebenem Boden und ist in der Regel von Rothgussmetall. Dieselbe wird ganz genau in einen cylindrischen gusseisernen Topf eingepasst, welcher auf irgend eine passende Weise in der Lage erhalten wird, die der geometrischen

Axe der Welle entspricht. Bei aufrechten Transmissionswellen geschieht diese Befestigung des Pfannentopfes in der Weise, wie Fig. 4 zeigt. Ist das Ganze einmal aufgestellt und befestigt, so steht die Pfanne unbeweglich fest und gestattet dem Zapfen keine andere Bewegung, als die Drehung um seine geometrische Axe. Diese Einrichtung ist wiederum für die gewöhnlichen Fälle genügend, bei ungünstigen Umständen, und namentlich bei schnell laufenden und grosse Betriebskräfte entwickelnden Turbinen aber nicht. Sie setzt eigentlich voraus, 1) dass die untere Ebene des Zapfens vollkommen senkrecht sei auf der geometrischen Axe der Welle; 2) dass die Bodenfläche der Pfanne vollkommen senkrecht sei auf der geometrischen Axe der Pfanne; 3) dass die ganze Einrichtung so aufgestellt werde, dass die geometrischen Axen der Pfanne und des Zapfens zusammen fallen; 4) dass die Wellen während ihrer Drehung kein Bestreben haben, die richtige und normale Stellung ihrer geometrischen Axe zu verändern. Eine gleichzeitige und dauernde Erfüllung dieser Bedingungen ist aber in der That mit der gewöhnlichen Einrichtung unerreichbar; so wie aber eine dieser Bedingungen nicht erfüllt ist, so entsteht sehr leicht bei einiger Geschwindigkeit der drehenden Bewegung entweder ein Angreifen der Umfangsflächen oder ein Aufreiben der Bodenfläche.

Auch diesen Uebelständen kann man abhelfen, wenn man die Einrichtung trifft, dass die Grundfläche dez Zapfens und die Bodenfläche der Pfanne unter allen Umständen nach ihrer ganzen Ausdehnung gleichmässig intensiv gedrückt werden, und dass die ganze Pfanne absolut nachgiebig wird, so dass sie jeder Richtungsveränderung, welche die Axe annehmen will, leicht folgen kann. Auf Tafel XIII., Figur 5 der Resultate für den Maschinenbau, 2. Auflage, ist eine solche Anordnung dargestellt. Die Pfanne besteht aus zwei Theilen, von denen der eine den Zapfen umfasst, der andere hingegen die Bodenplatte bildet. Beide befinden sich in einem gusseisernen unten kugelförmig gerundeten Topf, der auf einer entsprechend ausgehöhlten Platte steht, und dessen Axe mithin innerhalb gewisser Grenzen jede beliebige Richtung annehmen kann Die Bodenplatte ist ebenfalls halbkugelförmig gebildet Man sieht, dass bei dieser Einrichtung die untere Fläche des Zapfens stets ihrer ganzen Ausdehnung nach gleichförmig gegen die Bodenplatte der Pfanne drücken muss, weil diese letztere nach jeder Richtung beweglich, also nur dann im Gleichgewicht ist, wenn sie gleichmässig gedrückt wird; dass ferner, wenn auch die Welle ihre Stellung verändern sollte, dennoch ein Angreifen am Umfang des Zapfens nicht eintreten kann, weil der ganze Pfannentopf ohne Schwierigkeit jeder Richtungsveränderung der Welle folgen kann. Auch ist hier für eine sehr sorgfältige Oelung gesorgt. Das Oel wird nämlich aus einem Topf, der sich in angemessener

Höhe über dem Zapfen befindet, und von Zeit zu Zeit mit Oel gefüllt wird, durch ein Rohr und durch den obern Rand des Topfes geleitet, gelangt von da durch eine Wanddurchbohrung in einen Ringkanal, sodann durch einige Oeffnungen in Längenfurchen, und bestreicht somit zunächst die Umfangsfläche des Zapfens. Hierauf begibt es sich durch die in der Bodenplatte angebrachten Furchen nach dem Zentrum derselben, wobei es die Berührungsflächen zwichen Zapfen und Bodenplatte einfettet, und fliesst zuletzt durch Kanäle, von denen einer nach einem Gefäss führt, in welchem sich das Oel zu sammeln hat, aus der Maschine ab. Das so aufgesammelte Oel kann dann zu minder delikaten Oelungen noch einmal gebraucht werden. Die Raschheit des Oeldurchzugs kann noch durch einen Hahn, den man in dem Zuflussrohr anbringt, nach Erforderniss regulirt werden.

Es erübrigt noch zu bemerken, dass der in das untere Ende der Welle eingeschraubte Zapfenkörper und die beiden Pfannenköper aus Gussmetall sein sollen.

120) ***Zapfen, die nicht rund umlaufen.*** Oefters kommen Zapfen vor, die nicht rund umlaufen, sondern sich nur hin- und herdrehen. Dies ist z. B bei den verschiedenen Zapfen der Fall, mit welchen die Balanciers der Dampfmaschinen versehen sind. Die Geschwindigkeit, mit welcher die Drehung erfolgt, ist meistens so gering, dass ein Warmlaufen dieser Zapfen nicht leicht eintreten kann, dagegen ist der Umstand sehr misslich, dass sie sich nicht rund herum gleichmässig abnützen, sondern nur an einzelnen Stellen, was dann zur Folge hat, dass sie unrund werden und stockende Bewegungen veranlassen. Man kann diesem Uebelstande dadurch begegnen, dass man diese Zapfen in Zeitintervallen, innerhalb welchen keine merkliche Abnützung eintreten kann, um einen gewissen Winkel von ungefähr 30° verwendet in den Körpern befestigt.

121) ***Oelung bei Hin- und Herbewegungen.*** Wenn auf einer ruhenden Fläche A ein Körper B hin- und hergleitet, kann die Oelung in der Regel am vollkommensten bewerkstelligt werden, wenn man in oder mit dem beweglichen Körper B ein Oelmagazin in Verhindung bringt, von diesem aus einen Kanal nach der Reibungsfläche führt, und dann in dieser Fläche eine Furche anbringt, deren Richtung mit jener der Bewegung einen rechten Winkel bildet Auf diese Weise werden die beiden sich an einander reibenden Flächen continuirlich geölt, wo hingegen das Oel, wenn es auf die Bahn gebracht wird, von dem Körper B bei jeder Hin- und Herbewegung weggeschoben wird, so dass es sich an den Enden des Bewegungsraumes zwecklos ansammelt. Diese Regel hat jedoch ihre Ausnahme; oftmals kann eine gleichmässige Oelung auf

einfachere Weise erzielt werden. So z. B. bei dem Kolben und der Kolbenstange vertikalstehender Dampfcylinder, wo es genügt, wenn das Oel auf die obere Fläche des Kolbens und in den Becher der Stopfbüchse gethan wird, indem es dann bei jedem Niedergang des Kolbens an der Cylinderwand und bei jeder Aufwärtsbewegung desselben an der Kolbenstange hängen bleibt. Bei horizontal liegenden Cylindern ist eine sorgfältige Oelung des Kolbens und der Kolbenstange nicht leicht zu erreichen.

II. Theil.

Prinzipien des Maschinenbaues.

Prinzipien des Maschinenbaues.

1) ***Das freie und das erzwungene Wirken der Naturkräfte.*** Der reale Stoff, aus welchem die materielle Welt besteht, ist durch die demselben innwohnenden mannigfaltigen Kräfte beständigen Umwandlungen unterworfen. Ein Beharren des Stoffes in irgend einem Zustande des ruhigen oder bewegten Seins findet nur bei einem Gleichgewichtsverhältniss aller auf denselben einwirkenden Kräfte statt. Da aber ein solches Verhältniss in der Regel immer nur in einzelnen Zeitmomenten, nie aber dauernd vorhanden ist, so muss man sich die ganze materielle Welt und jeden einzelnen ihrer Bestandtheile als etwas sich stets Veränderndes und sich stets Umbildendes vorstellen. Dabei wird aber kein neuer Stoff geschaffen, noch der einmal vorhandene existirende Stoff vernichtet, sondern die Kräfte schaffen nur aus dem in gewissen Formen und Gebilden vorhandenen Stoffe neue Gebilde. Der Stoff gehorcht dabei den Kräften; wo sie ihn hinschieben, geht er hin; wie sie ihn gruppiren, verbleibt er; er ist das Geistlose, die Kräfte sind das Geistige, Belebende, Verändernde, Gestaltende. Das Gehorchen des Stoffes besteht darin, dass er einer Anziehung folgt, einer Abstossung weicht, und dass sich dies nur nach der Intensität richtet. Ist die Kraft, welche auf den Stoff einwirkt, so beschaffen, dass sie nur auf eine ganz bestimmte unveränderliche Weise wirken kann, so wird an dem daraus entstehenden Gebilde keine Freiheit, sondern nur Zwang und Nothwendigkeit zu erkennen sein. Ist dagegen die Kraft so beschaffen, dass sie mit vollkommener Freiheit, durch freie Selbstbestimmung ihre Einwirkung auf den Stoff in aller und jeder Hinsicht abändern kann, so wird das aus einer solchen Thätigkeit hervorgehende Gebilde auch das Gepräge dieser Freiheit an sich tragen, obgleich der Stoff, aus dem es besteht, das Gegentheil von Freiheit, nämlich ein rein passives Ding ist.

Das einfachste, geistloseste Verhalten eines Stoffes ist ein Zustand absoluter Ruhe, ein Zustand des absoluten Nichtsthuns und Nichtsleidens. Eine Stufe höher steht schon das Verharren in einem bewegten Zustande

nach den rein passiven Eigenschaften der Trägheit, wobei sich nur allein der Ort des Seins ändert, alles Uebrige aber gleich bleibt.

Wiederum eine Stufe höher ist zu stellen eine Bewegung mit Geschwindigkeits- und Richtungsveränderungen; hier ist ein Anfang von Leben zu erkennen, weil eine Veränderung des Seins statt findet. Diese drei Zustände, in welchen sich die Körper und die Materie befinden, sind rein dinamischer Art; die Körper bleiben dabei unverändert, und nur allein ihre Stellung, gegen das was sie umgibt, verändert sich.

Die einfachsten Veränderungen, welche nicht nur die Körper als Ganzes, sondern auch den Zusammenhang betreffen, in welchem ihre Theile zu einander stehen, sind: Dichtigkeitsveränderung, Formveränderung, Theilung. Bei diesen Veränderungen ist der Vorgang, durch welchen sie geschehen, mit Bewegungen verbunden, das Resultat der Veränderung ist dagegen ein neuer Gleichgewichtszustand des Ganzen oder der Theile.

Die wichtigsten Veränderungen, welche in der unorganischen Natur vorkommen, sind jene, die durch das Spiel der Molekularkräfte hervorgebracht werden. Es beruhen hierauf die Mehrzahl der physikalischen und chemischen Erscheinungen. Sehr viele physikalische Erscheinungen beruhen auf schwingenden Bewegungen der kleinsten Körpertheilchen um eine gewisse Gleichgewichtsposition. Die chemischen Erscheinungen dagegen treten auf, wenn durch das wechselseitige Einwirken der Molekularkräfte zweier oder mehrerer Substanzen Aenderungen in der Gruppirung der Molekule und Atome entstehen. Hier treten bereits Gebilde auf, bei deren Entstehung die Kräfte gleichsam nach einer Idee gearbeitet haben, d. h. in der Art thätig waren, als wollten sie etwas sich von vorneherein Gedachtes und Vorgestelltes realisiren. Bei genauer Betrachtung des Vorganges ist aber zu erkennen, dass hier durchaus keine Freiheit waltet, sondern dass Alles nothwendig so vor sish geht, wie es die Verhältnisse und Umstände bedingen. Es ist ein Molekularbau nach statischen Gesetzen, und es kann nur das entstehen, was nach den Kräften und nach der Form der Molekule und Atome nach statischen Gesetzen ins Gleichgewicht gerathen kann.

So wie der Bau der unorganischen Körper durch Gleichgewichtsgruppirungen der Atome und Molekule hervorgeht, so beruht der Bau der Pflanzen auf Bildung von Zellen und Gruppirung derselben zu Gebilden. Die erste primitive Zelle im Samenkorn zieht von Aussen ungestalteten Elementarstoff an, nimmt denselben auf, gestaltet daraus, jene Primitivzelle als Vorbild benutzend, neue Zellen und gruppirt dieselben auf mannigfaltige Weise neben einander. Jede Pflanze spinnt so gleichsam Fäden, und webt daraus ihre besonderen Desseins, die aber als eine nothwendige Folge des primitiven Zellenbaues zu betrachten sind. Dieser

Zellenbau erscheint als etwas Begreifliches, aber die Entstehung der Primitivzelle ist eine Erscheinung, die wenigstens gegenwärtig jeder Erklärung sich entzieht. Wir müssen es daher einstweilen als Thatsache hinnehmen, dass jede Pflanze durch unzähligemaliges Wiederholen der Primitivzellen entsteht, und es der Zukunft überlassen, ob eine wahre Erklärung dieses Vorganges jemals aufgefunden werden kann.

Die Pflanze besteht aus Zellen, die im Wesentlichen unter einander keine Verschiedenheit zeigen. Jede einzelne Zelle ist gleichsam ein Individuum, das für sich selbst besteht, und ohne Mitwirkung der übrigen Zellen aus dem gestaltlosen Elementarstoffe ihresgleichen hervorbringt. Das Thier stimmt mit der Pflanze darin überein, dass es ebenfalls aus einem Zellenbau besteht, weicht aber darin ab, dass bei demselben Zellen verschiedener Art vorkommen, die nicht selbstständig bestehen und entstehen, sondern nur durch das Vorhandensein des ganzen mannigfaltigen Zellenbaues, welcher den Leib des Thieres bildet, aus dem Elementarstoff erzeugt werden. In der Pflanze scheint das leibliche Leben der alleinige Zweck zu sein; die Blüthe und der aus ihr sich entwickelnde Same ist der Gipfelpunkt ihres thätigen Seins. Anders ist es bei den Thieren, insbesondere bei den höher organisirten und bei dem Menschen. Hier scheint das leibliche Leben nicht der Zweck, sondern nur das Mittel für das Seelenleben zu sein.

Alle Thätigkeiten, Veränderungen, Umbildungen und Neubildungen, welche die Natur ohne Einwirkung des Menschen hervorbringt, scheinen zunächst ohne allen Zweck zu geschehen; es bildet sich, entsteht und vergeht, was vermöge der vorhandenen Umstände und Kräfte möglich ist. Die Erde dreht sich um ihre Axe und um die Sonne, unbekümmert, ob dies zu irgend einem Zweck dient. Das Wasser befindet sich beständig in einem Kreislauf, steigt als Dunst in die Höhe, fällt als Regen oder Schnee auf die Erde, und fliesst in Bächen und Flüssen dem Meere zu. Auch die Kräfte im Innern der Erde schaffen, bilden, verändern und zerstören ohne Unterlass und ohne Rücksicht. Die Pflanzen gedeihen, so wie dem Samen Feuchtigkeit, Wärme und etwas Erde geboten ist. Die zahllosen Thiere, welche die Luft, das feste Land und die Wasser beleben, sie alle entstehen und vergehen scheinbar zwecklos. Jedes dieser Dinge scheint nur zu existiren, nicht um irgend einen Zweck zu erfüllen, sondern es existirt, weil überhaupt die Stoffe und Kräfte da sind, durch deren Thätigkeit Alles entsteht und vergeht.

Inmitten dieser stets thätigen, aber scheinbar zwecklos thätigen Welt steht nun der Mensch mit seinem Leib und seiner Seele, theilweise vielleicht sogar ein Produkt dieses ganzen Thätigkeitsprozesses. Auf einer tieferen Stufe der Kultur stehend, sucht er zunächt sich zu erhalten und die Triebe seiner Seele zu befriedigen. Hat er eine höhere Stufe erreicht,

so erwachen in seiner Seele Bestrebungen höherer Art; es ist ihm nicht mehr genug, überhaupt zu existiren, und den augenblicklich und vorübergehend wirkenden Trieben seiner Seele zu folgen, sondern er ahnt, dass er mit seinen Seelenkräften nach einem gewissen Ziele hinstreben soll, und dass dies nur durch ein zweckvolles Sein und Wirken möglich ist. Angekommen auf dieser Stufe, sieht er sich um in der ihn umgebenden Welt, und findet nur theilweise die Mittel, welche zu seiner leiblichen Existenz und zur Verfolgung seiner geistigen Zwecke nothwendig sind. Er wendet nun seine geistigen Kräfte an, um sich diese Mittel in reicherem Maase, als sie die Natur darbietet, und auch in einem für seine Zwecke passenderen Zustand zu verschaffen. Hier macht er aber die Erfahrung, dass er mit seinem Geiste weder einen Stoff schaffen, noch die vorhandenen Stoffe vermehren oder vernichten kann; er besitzt keine Zauberkraft. Ja noch mehr, er macht sogar die Erfahrung, dass er den vorhandenen Naturkräften nicht gebieten kann, dass diese, ganz rücksichtslos und unbekümmert um seine Zwecke, ihre Thätigkeiten und Bildungen vollbringen. Die Naturkräfte scheinen ihm feindlich gegenüber zu stehen, aber dieser Schein dauert nur so lange, bis er sich mit dem Spiel dieser Kräfte genauer vertraut gemacht hat; ist dies geschehen, so entdeckt er in seinem Geist die Mittel, wodurch die Kräfte veranlasst werden können, dass sie, der ihrem Wesen ureigenen Natur folgend, dennoch solche Veränderungen an den vorhandenen Stoffen hervorbringen, wodurch dieselben für seine Zwecke brauchbar und nützlich werden.

Hier nun erscheint die Technik in ihrer vollen Wichtigkeit und Bedeutung, denn ihre Aufgabe ist es, die Naturkräfte so zu lenken und zu beherrschen, dass sie die Mittel zur Erreichung der vielfachen menschlichen Zwecke in grösserer Menge, an den geeignetsten Orten und in der tauglichsten und besten Beschaffenheit liefern, ohne desshalb ihrer inneren Natur ungetreu zu werden.

Kein menschliches Wort vermag ein Samenkorn zu schaffen, aber indem der Mensch die Natur in ihrem Wirken belauscht, erkennt er, wie sie es anfängt, um aus einem Samenkorn eine grosse Zahl der gleichen Art hervorzubringen; und so entsteht der Feldbau, durch welchen der Mensch in der Nähe seines Wohnortes aus einigen eingesammelten oder erkauften Samenkörnern seinen Lebensunterhalt sich verschafft.

Keines Menschen Wort ist so mächtig, den Produktenreichthum, welchen die Natur in entfernteren Ländern hervorbringt, herbeizuzaubern. Sein Geist in Verbindung mit seiner physischen Kraft leisten aber auch hier mit einigem Aufwand von Zeit und Mühe, was das Wort nicht vermag. Er baut sich grosse und kleine Schiffe mit Masten und Segel, beobachtet den Stand und Lauf der Gestirne, erfindet die Magnetnadel, und findet

so die Bahn durch das Meer nach dem fernen Strand, um, mit den gewünschten Schätzen bereichert, zurückzukehren; so entsteht Handel und Schiffahrt.

Zahllose Dinge, welche die Natur freiwillig hervorbringt, sind in dem Zustande, wie sie aus der Thätigkeit der Naturkräfte hervorgehen, für menschliche Zwecke nicht brauchbar. Sie müssen erst, um als Nahrung und zur Kleidung oder zu anderen Zwecken zu dienen, umgestaltet und verändert werden, und dazu sind oftmals Kraftäusserungen nothwendig, die der Mensch selbst nicht zu entwickeln vermag. Der Geist weiss sich aber auch hier zu helfen; er erkennt zunächst das Vorhandensein der mächtigen Gewalten, die in den Wasserströmungen und im Dampf des Wassers verborgen sind; und weiss dann die Mittel ausfindig zu machen, wodurch er diese Mächte zwingen kann, dass sie, ohne ihrer innern Natur ungetreu zu werden, dennoch gerade die gewünschten Veränderungen an den Naturprodukten hervorbringen. Das Wasser eines Baches wird gezwungen, aus Getreide Mehl zu machen, wenn man es auf ein Wasserrad leitet, das mit einer Mühle in Verbindung steht. So entsteht die mechanische Technik.

Diese Leitung, Bewältigung und Beherrschung der Naturkräfte, wodurch sie veranlasst werden, für unsere Zwecke thätig zu sein, für uns zu arbeiten, ist vorzugsweise erst in unserer Zeit von Bedeutung geworden. Man hat es darin in kurzer Zeit zu einer grossen Virtuosität gebracht, und die Geschichte wird einstens nicht verkennen, was in dieser Hinsicht in der ersten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts geleistet worden ist. Leider ist über dieses technische Treiben gar Vieles vernachlässigt worden oder ganz unterblieben, was durchaus gepflegt und fortgebildet werden muss, um zu einem erfreulichen Dasein zu gelangen, und so ist es denn gekommen, dass die Früchte dieser angestrengten Thätigkeiten theilweise sehr zu beklagen sind.

Die Erfahrung, und zwar eine bittere, wird aber auch hier dahin leiten, von dieser Meisterschaft des technischen Wirkens einen vernünftigen und weisen Gebrauch zu machen, und dann darf man wohl mit Zuversicht hoffen, dass die ausgebildete Technik zum Heil und zum Segen, aber nicht zum Fluch der Menschen wirken wird.

2) ***Der mechanische Prozess und die Maschine.*** Jeder mechanische Prozess, derselbe mag durch das freie Spiel der Naturkräfte oder durch eine erzwungene Thätigkeit derselben hervorgebracht werden, ist entweder eine Ortsveränderung oder eine Formveränderung eines Körpers. Die Körper widerstehen aber entweder durch ihre inneren Molekularkräfte oder durch ihren Zusammenhang mit den sie umgebenden Köpern jeder Aenderung ihres Zustandes; es muss also, wenn eine mechanische Veränderung eines Körpers geschehen soll, immer eine

äussere Kraft vorhanden sein, die im Stande ist, die Widerstände zu bewältigen, die der Veränderung entgegen wirken; und da die Kräfte nie isolirt erscheinen, sondern immer in gewissen Substanzen ihren Sitz haben, so ist klar, dass jede Veränderung nur durch die Wechselwirkung zweier Körper geschehen kann.

Körper, welche mit Kräften begabt sind, durch die sie auf andere Körper verändernd einzuwirken vermögen, werden „motorische Körper" oder Motoren genannt, und jeder mechanische Prozess besteht also in einer dauernden Einwirkung eines motorischen Körpers auf einen zu verändernden Körper.

Die Einwirkung des Motors kann unmittelbar oder mittelbar statt finden. Bei den mechanischen Prozessen, welche in der Natur durch das freie Spiel der Kräfte ohne Mitwirkung des Menschen vorkommen, wirkt immer der Motor unmittelbar auf den zu verändernden Körper ein, das Resultat ist daher von mancherlei Zufälligkeiten abhängig, daher nur selten für unsere Zwecke brauchbar und nützlich. Auch bei den mechanischen Prozessen, die durch Menschenkraft ohne Zuhilfenahme eines Werkzeuges oder einer Maschine durchgeführt werden, findet eine unmittelbare Einwirkung des Motors statt; allein das Resultat ist in diesem Falle, wegen der Intelligenz des Motors, keinen Zufälligkeiten unterworfen, und daher entsteht aus einer solchen Thätigkeit in den meisten Fällen ein nützliches Resultat. Bedient sich aber der Mensch zur Verrichtung einer Arbeit eines Werkzeuges, so erfolgt die Einwirkung des Motors auf den zu verändernden Körper nicht mehr unmittelbar. Wenn eine mechanische Arbeit durch einen der verstandeslosen Motoren, nämlich durch Wasser- oder Dampfkraft etc., verrichtet werden soll, kann eine unmittelbare Einwirkung des Motors niemals zum gewünschten Ziele führen, sondern es ist in diesem Fall ein vermittelnder Körper, oder ein System von vermittelnden Körpern, eine Maschine, nothwendig, deren Einrichtung so beschaffen sein muss, dass wenn gewisse Bestandtheile derselben durch den Motor in Bewegung gesetzt werden, andere Theile die zu verändernden Stoffe ergreifen, und mit denselben solche Bewegungen vornehmen, wie es der Zweck erfordert. Bei einem durch Vermittlung einer Maschine erfolgenden mechanischen Prozess kommen also dreierlei Körper in Betrachtung, nämlich: 1) der Motor, welcher das aktive Prinzip in sich enthält; 2) der zu verändernde Körper, welcher sich gleichsam vertheidigend verhält; 3) die vermittelnde Maschine, welche einerseits mit dem Motor, andererseits mit dem zu verändernden Körper in Verbindung sein muss.

Diese wenigen Andeutungen über den Zweck einer Maschine lassen erkennen, dass dieselbe in dem mechanischen Prozess nicht als selbstständiges aktives Prinzip wirkt, sondern dass sie nur die Wirkungen,

welche der Motor entwickelt, in sich aufnimmt, und auf passende und geschickte Weise auf die zu verändernden Körper überträgt. Wie die Maschine beschaffen sein muss, um diesem Zweck zu entsprechen, wird in der folgenden Nummer im Allgemeinen näher erklärt werden.

3) ***Die wesentlichen Bestandtheile jeder Maschine.*** In jeder Maschine muss wenigstens Ein Bestandtheil vorkommen, der mit dem Motor in unmittelbare Berührung kommt und von demselben zunächst getrieben wird. Diesen Bestandtheil oder, wenn deren mehrere vorhanden sind, ihre Gesammtheit nennt man den Receptor (Empfänger, Kraftaufsammler). Er ist an jeder Maschine leicht zu erkennen. Bei den Maschinen, die durch Menschen getrieben werden, besteht der Receptor aus einem Tritt oder Griff, Handhabe etc.; bei den Wasserrädern und Turbinen sind es die Schaufelflächen und Zellenwände, bei den Dampfmaschinen ist es der Kolben.

Der ganze Kraftaufsammlungsapparat, d. h. der Inbegriff aller Theile, welche vorhanden sein müssen, damit die Receptoren ihre Funktionen zweckmässig verrichten können, nennt man die Betriebsmaschine, auch Kraftmaschine. Betriebsmaschinen sind demnach: Wasserräder, Turbinen, Dampfmaschinen, Pferdegöpel.

In jeder vollständigen Maschine muss ferner wenigstens Ein Bestandtheil vorhanden sein, welcher mit dem zu verändernden Körper in unmittelbare Berührung tritt, und auf denselben in der Art und Weise einwirkt, wie es die zu vollbringende Arbeit erfordert. Diesen Bestandtheil nennt man das Werkzeug. Gewöhnlich sind die zur Bewegung des Werkzeuges erforderlichen Bestandtheile in der Art angeordnet und verbunden, dass sie in Verbindung mit den Werkzeugen ein selbstständiges Ganzes bilden. Den Inbegriff dieser Theile nennt man eine Werkzeugmaschine.

Oftmals ist der mechanische Prozess, welcher vermittelst der Maschine durchgeführt werden soll, so zusammengesetzt, dass er in eine Reihe von einfacheren Prozessen, von denen jeder ein besonderes Werkzeug oder eine besondere Werkzeugmaschine erfordert, aufgelöst werden muss. In diesem Falle erfordert die Durchführung des mechanischen Prozesses ein ganzes System von Werkzeugen, oder von Werkzeugmaschinen. Als Beispiel zur Erläuterung kann eine Mahlmühle dienen. Die Steine, welche das Getreide zerreiben, sind die Werkzeuge. Die Steine mit allem Zubehör und mit dem Mühlgerüste, kurz alle Theile zusammen, die da sein müssen, damit das Getreide zerrieben werden kann, also der sogenannte Mahlgang bilden die Werkzeugmaschinen. Ist es eine Mühle von neuerer Einrichtung, so kommen in derselben, nebst der eigentlichen Mühle, noch eine grössere Anzahl von Hilfsmaschinen

vor, von denen jede eine besondere Arbeit verrichtet. Diese Maschinen zusammen bilden ein System von Arbeitsmaschinen.

Zuweilen ist es zweckmässig, die Arbeitsmaschinen eines solchen Maschinensystems so an einander zu reihen und in Verbindung zu setzen, dass gleichsam eine einzige grosse Maschine entsteht, in den meisten Fällen ist jedoch eine Trennung der einzelnen Maschinen des ganzen Systems vorzuziehen. Das erstere ist der Fall bei der Maschine zur Verfertigung des endlosen Papiers, das letztere bei den Spinnmaschinen.

Bei jeder vollständigen Maschine müssen endlich gewisse Bestandtheile vorhanden sein, welche den Receptor mit dem Werkzeug oder die Kraftmaschinen mit den Arbeitsmaschinen verbinden. Bei grösseren und complizirten Prozessen, die ein ganzes System von Arbeitsmaschinen und manchmal auch mehrere Kraftmaschinen erfordern, befinden sich diese verschiedenen Maschinen in grossen geräumigen Lokalitäten und in beträchtlicher Entfernung von einander aufgestellt, müssen aber dennoch in einen solchen Zusammenhang gebracht werden, dass alle Werkzeuge ihre Funktionen regelmässig verrichten, wenn die Kraftmaschine durch den Motor getrieben wird.

Den Inbegriff aller Theile, welche den Zusammenhang zwischen der Kraftmaschine und den Werkzeugmaschinen herstellen, nennt man gewöhnlich die Transmission (Kraftleitung), auch Triebwerk.

Aus dieser Erklärung geht hervor, dass ein vollständiges Maschinenwerk aus folgenden wesentlichen Bestandtheilen besteht:

1) Für einen einfachen Arbeitsprozess: aus Kraftmaschine, Transmission und Werkzeug.
2) Für einen complizirten Arbeitsprozess: aus Kraftmaschine, Transmission und Werkzeugmaschine.
3) Für ein System von Arbeitsprozessen: aus Kraftmaschine, Transmission und einem System von Arbeitsmaschinen.

Die Grenze zwischen Kraftmaschine und Transmission und jene zwischen Transmission und Arbeitsmaschine kann nicht immer scharf angegeben werden, und gewöhnlich enthalten die Kraftmaschinen und die Arbeitsmaschinen einen Theil der gesammten Transmission.

4) *Der geometrische Zusammenhang.* Aus der Bestimmung der Maschine geht hervor, dass in derselben keine Freiheit walten könne, sondern dass alle in ihr vorkommenden Bewegungen nothwendiger Weise unfreie Zwangsbewegungen sein müssen. Man will ja den Motor zwingen, auf den zu verändernden Körper vermittelst der Maschine in der Art einzuwirken, dass derselbe ganz bestimmte Orts- oder Formveränderungen erleide; dies kann aber nur geschehen, wenn der Receptor mit den Werkzeugen durch eine Gliederung von Körpern so in Verbindung gesetzt wird, dass durch die Einwirkung des Motors auf die Maschine in allen Theilen derselben keine andern Bewegungen entstehen können, als jene, welche der Zweck erfordert. Zunächst muss der Receptor durch die Einwirkung des Motors diejenige Bewegung und Geschwindigkeit annehmen, welche für die Kraftaufsammlung die geeignetste ist, und dann müssen gleichzeitig sämmtliche Werkzeuge in solche Bewegungen und in solche Geschwindigkeiten gerathen, wie es durch die zu verrichtende Arbeit vorgeschrieben wird. Diese Verbindung der Maschinentheile, wodurch dieselben gezwungen werden, ganz bestimmte Bewegungen zu machen, nennt man die geometrische Gliederung oder den geometrischen Zusammenhang.

Dieser Zusammenhang ist nothwendig von der Art, dass die Gestalt der Bahn, welche irgend einen Punkt eines Maschinentheiles beschreibt einzig und allein von diesem Zusammenhang abhängt, demnach von der treibenden Kraft, von der Geschwindigkeit des Ganges der Maschine, so wie auch von den Massen derselben ganz nnabhängig ist. In der Regel sind diese Bahnen geschlossene, in sich selbst zurückkehrende oder gerade Linien.

Durch den geometrischen Zusammenhang wird ferner auch das Geschwindigkeitsverhältniss irgend zweier Punkte der Maschine vollständig bestimmt, und auch dieses ist, wie die Getalt der Bahn von den Kräften und Massen und auch von der absoluten Geschwindigkeit der Bewegung ganz unabhängig.

Da die complizirten Arbeitsprozesse jederzeit in einfachere Prozesse aufgelöst werden, von denen jeder durch eine besondere Maschine verrichtet wird, so sind die bei den Maschinen vorkommenden Bewegungsarten in der Regel nicht sehr mannigfaltig. Sehr oft, ja sogar in den meisten Fällen, bewegen sich alle Bestandtheile einer Maschine mit gleichförmiger Geschwindigkeit im Kreise um gewisse Axen herum, in welchem Falle die Maschine in jedem Augenblick den gleichen Bewegungszustand darbietet. In andern Fällen durchlaufen die Werkzeuge und andere Bestandtheile einen Cyclus von Bewegungszuständen, den sie dann fort und fort wiederholen. Die Bewegungszustände sind daher in der Regel entweder ganz gleichförmig oder periodisch wiederkehrend.

Man kann sich das so eben über den geometrischen Zusammenhang Gesagte theils durch eine Mahlmühle, theils durch eine Sägmühle anschaulich machen. Bei einer durch ein Wasserrad oder durch eine Turbine getriebenen Mahlmühle kommen, mit Ausnahme der Schüttelbewegung, nur drehende Bewegungen um freie Schwerpunktsaxen vor. Der geometrische Zusammenhang ist hier von der Art, dass sich jeder Punkt der Maschine in einem ganz bestimmten Kreise bewegt, und dass die Geschwindigkeit jedes Punktes unveränderlich die gleiche bleibt, so

wie dies bei irgend einem bestimmten Punkt der Maschine der Fall ist. Das Verhältniss der Geschwindigkeiten von irgend zwei Punkten des ganzen Werkes wird einzig und allein durch die unveränderlichen Abmessungen der Räderhalbmesser bestimmt.

Bei einer Brettsäge von ganz gewöhnlicher Einrichtung kommen schon viel mannigfaltigere Bewegungen vor. Angenommen, sie werde durch ein Wasserrad bewegt, so machen das Wasserrad, die Zahnräder und die Kurbel drehende Bewegungen um unveränderliche Axen. Die Säge und der Rahmen, in welchen sie eingespannt ist, machen geradlinige auf- und niedergehende Bewegungen mit ungleichförmiger Geschwindigkeit. Die Kurbelstange, vermittelst welcher der Sägrahmen mit der Kurbel in Verbindung steht, hat eine ziemlich complizirte Bewegung, indem der oberste Punkt derselben mit der Säge geradlinig auf und niedergeht, während der unterste Punkt mit der Kurbel im Kreis herum geht. Nebst diesen Bewegungen kommt dann noch die nach jedem Niedergang der Säge plötzlich eintretende Fortschiebung des Blockwagens vor.

Bei der Mühle ist die Bewegung, wenn sie einmal in den Normalzustand ihrer Thätigkeit gerathen ist, in jedem Augenblick die gleiche. Bei der Säge dagegen ist der Bewegungszustand ein periodisch wiederkehrender. Es erfolgt ein Schnitt wie der andere, aber der Bewegungszustand wechselt in der Zeit von einem Schnitt bis zum nächst folgenden.

Dieser unfreie gezwungene Zustand, in dem sich alle Theile einer Maschine befinden, und sich nothwendig befinden müssen, unterscheidet ihre Bewegungen und Wirkungen wesentlich von den freien Thätigkeiten, wie sie in der Natur vorkommen. In der Natur gibt es keinen derartigen Zwang; Alles bewegt, gruppirt, gestaltet und bildet sich wie es vermöge der vorhandenen Kräfte möglich und nothwendig ist; sie hat desshalb in allen ihren Thätigkeiten innerhalb gewisser Grenzen einen freien Spielraum, der einen Wechsel von Bildungen zulässt. Bei den freien Bewegungen ist die Gestalt der Bahn, welche einen Punkt des bewegten Körpers beschreibt, im Wesentlichen durch die Kräfte bedingt, welche auf denselben einwirken. Die Bahnen der Planeten sind nur desshalb Elypsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht, weil die allgemeine Gravitation herrschend ist; bei jeder andern Anziehungskraft würde auch die Bahn eine andere Gestalt haben. Bei einer Maschine verhält es sich nun ganz anders, ihre Bewegung und Thätigkeit ist von der speziellen Natur der treibenden Kraft ganz unahhängig, wenn nur der geometrische Zusammenhang zweckmässig gewählt ist, kann mit jeder Art von Kraft das gleiche Resultat erzielt werden. Es gibt Wasser-, Dampf-, Luft- und Rossmühlen. Der geometrische Zusammenhang beherrscht alles, unterwirft sich alles, hebt jede Freiheit auf, lässt keine Willkühr zu. Die Maschine als solche ist etwas absolut Lebloses, sie

enthält in sich kein thätiges Prinzip, lebendig, bewegt, thätig wird sie nur durch den Motor, der nicht ein Theil der Maschine ist. Sie nimmt die Thätigkeit des Motors in sich auf, pflanzt die empfangene Wirkung durch alle ihre Glieder weiter fort, consumirt dabei einen Theil, und gibt den Rest an den zu verändernden Körper ab.

5) *Von den Motoren.* Motoren (Triebkräfte) werden diejenigen Körper oder Stoffe genannt, welche die Fähigkeit besitzen, auf sich selbst oder auf andere Körper andauernd mit einer namhaften Intensität bewegend oder verändernd einzuwirken. Wenn man will, kann man jeden Körper Motor nennen, denn jeder ist mit Molekularkräften begabt, die zwar nicht immer, aber doch unter gewissen Umständen Wirkungen hervorzubringen vermögen. In technischer Hinsicht kann man jedoch nur solche Körper, die sich in grosser Menge in der Natur vorfinden und bedeutende Wirkungen hervorzubringen vermögen, Motore nennen.

Die vorzüglichsten technischen Motoren sind: 1) die Kraft der Menschen und Thiere; 2) das Wasser; 3) der Wind; 4) der Wasserdampf; 5) das Schiesspulver und andere explodirende Substanzen. Ausser diesen Körpern werden auch noch ausnahmsweise 6) elastische Federn, 7) gehobene Gewichte, 8) der Elektromagnetismus als Motoren angewendet.

Es ist hier nicht der geeignete Ort, die besondere Beschaffenheit jedes einzelnen dieser Motoren genauer zu untersuchen; es wird dies erst dann geschehen, wenn die einzelnen Motoren und die zu ihrer Benutzung geeigneten Kraftmaschinen behandelt werden. Hier soll von den Motoren nur das denselben Gemeinsame in so weit besprochen werden, als es für das Verständniss der Bewegungs- und Wirkungsgesetze der Maschine nothwendig ist.

Zuvörderst einige Bemerkungen über den Sitz des aktiven Prinzips in den oben genannten Motoren.

Der Mensch und die Thiere verdanken ihre motorische Wirkungsfähigkeit der von ihrem Willen abhängigen Zusammenziehbarkeit ihrer Muskeln.

Das Wasser ist, an und für sich als Substanz betrachtet, kein Motor, es wird nur Motor, wenn es sich in einem bewegten Zustand befindet, durch die seiner Masse innwohnende lebendige Kraft, oder wenn es sich an einem Ort befindet, von welchem aus es unter der Einwirkung der Erdschwere nach einem tiefer gelegenen Ort niederfliessen kann.

Auch der Wind, d. h. die in Bewegung befindliche atmosphärische Luft ist nur durch einen bewegten Zustand durch die lebendige Kraft seiner Masse motorisch. Die atmosphärische Luft und alle Gasarten können aber auch, wenn sie sich in einem comprimirten Zustand in einem Gefäss befinden, motorische Wirkungen hervorbringen, wenn denselben Gelegenheit zur Ausdehnung geboten wird.

Der Wasserdampf verdankt seine grosse motorische Wirkungsfähigkeit der Repulsivkraft der in ihm thätigen Wärme; er ist streng genommen kein primitiver, sondern nur ein sekundärer Motor, denn das primitiv Bewegende ist die Repulsivkraft der Wärme, die durch Verbrennung der Brennstoffe entwickelt wird.

Das Schiesspulver gehört in die Klasse der explodirenden Substanzen; durch Entzündung desselben entwickelt sich zunächst eine höchst comprimirte Gasmasse, die sich mit enormer Energie auszudehnen strebt, und die, wenn die Ausdehnung wirklich erfolgt, eine höchst bedeutende Wirkung hervorzubringen vermag.

Stahlfedern und andere elastische Körper vermögen nur dann Wirkungen zu entwickeln, wenn sie durch irgend eine äussere Kraft aus ihrem natürlichen Gleichgewichtszustand gebracht, und sodann wiederum in ihren natürlichen Zustand zurückzukehren streben.

Gehobene Gewichte wirken als Motoren, wenn sie unter der Einwirkung der Schwere nieder sinken.

Die allgemeinsten Eigenschaften der Motoren oder das allen Motoren Gemeinsame besteht nun in Folgendem:

1) Jeder individuelle Motor oder jede bestimmte Quantität einer motorischen Substanz besitzt nur eine beschränkte und bestimmte Wirkungsfähigkeit in sich. Ohne Nachtheil für die Gesundheit kann ein Mensch von mittlerer Stärke in jeder Sekunde eine Wirkung von 6 bis 7 Kilogramm-Meter, ein Pferd eine Wirkung von 60 bis 70 Kiogramm-Meter entwickeln. Eine bestimmte Wassermenge, z. B. 1 Kubik-Meter, die sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit von 5 Meter bewegt, enthält eine Wirkungsfähigkeit in sich, die durch ihre lebendige Kraft bestimmt wird, demnach $1000\frac{5^2}{2\times 9.81} = 1270$ Kilogramm-Meter beträgt.

Eine Wassermenge von 1000 Kilogramm Gewicht, die von einer Höhe von 2^m niederfliessen kann, vermag dabei eine Wirkungsgrösse $= 2 \times 1000 = 2000$ Kilogramm-Meter zu entwickeln. Eine bestimmte Quantität Dampf, z. B. 1 Kilogramm, von einer bestimmten Spannkraft, z. B. 5 Atmosphären, enthält ebenfalls nur eine ganz bestimmte Wirkungsfähigkeit, die bei vollständiger Ausdehnung derselben entwickelt wird. Eine bestimmte Quantität Schiesspulver von gewisser chemischer Zusammensetzung und Güte enthält eine ganz bestimmte Wirkungsfähigkeit in sich, die entwickelt wird, wenn es sich im entzündeten Zustand vollständig ausdehnen kann. Aehnlich verhält es sichmit allen übrigen Motoren.

2) Die totale Wirkung, welche ein Motor im thätigen Zustande entwickelt, ist gleich derjenigen Wirkung, die zur Bewegung und Beschleunigung seiner eigenen Masse nothwendig ist, mehr der Wirkung, mit der er einen äusseren Widerstand überwältiget. Wenn ein Arbeiter

irgend eine mechanische Arbeit verrichtet, muss der Organismus nicht nur diejenige Thätigkeit entwickeln, welche die Ueberwindung des äusseren Widerstandes erfordert, sondern er muss auch noch die mannigfaltigen Contraktionen der Muskeln und Beschleunigungen ihrer Massen hervorbringen. Da nun die totale Wirkung, welche der Organismus eines Individuums zu entwickeln vermag, als eine constante Grössse zu betrachten ist, so ist klar, dass bei einem gewissen Grad von körperlicher Anstrengung die äussere Arbeitswirkung dann gross sein wird, wenn die innere klein ist, und umgekehrt darf man keine bedeutende Arbeitswirkung erwarten, wenn die Thätigkeit von der Art ist, dass sie eine heftige Bewegung der Gliedmassen erfordert.

3) Der Druck eines Motors gegen einen Receptor ist stets von der Geschwindigkeit des letzteren abhängig. Eine Zunahme der Geschwindigkeit hat stets eine Verminderung, ein Abnehmen der Geschwindigkeit dagegen eine Steigerung jenes Druckes zur Folge. Von der Wahrheit dieses Ausspruches überzeugt man sich am leichtesten durch spezielle Fälle. Wenn ein Arbeiter (Motor) vermittelst einer Kurbel (Receptor) eine Maschine bewegt, vermag er, bei einem gewissen Grad von körperlicher Anstrengung, einen ziemlich starken Druck auszuüben, so lange dieselbe ruht oder nur mit mässiger Geschwindigkeit im Kreise herumgeht; so wie aber diese Geschwindigkeit mehr und mehr wächst, muss der Körper, damit die Hand der Kurbel folgen kann, fort und fort schneller hin und her, auf und nieder bewegt werden, und dabei nimmt der Druck der Hand gegen die Kurbel fortwährend ab, und hört sogar ganz auf, wenn einmal die Geschwindigkeit so gross geworden ist, dass die volle Kraft des Organismus nothwendig ist, um den Körper so schnell zu bewegen, dass die Hand dem Kurbelgriff folgen kann. Aehnlich ist es auch mit dem Zug der Pferde; bei geringer Geschwindigkeit ist die Zugkraft gross, bei grosser Geschwindigkeit ist sie klein. Wenn Wasser gegen die Schaufeln eines unterschlächtigen Rades hinströmt, übt es gegen dieselben, so lange sie ruhen oder mit geringer Geschwindigkeit fortschreiten, einen ansehnlichen Druck aus, dieser nimmt aber mit der Zunahme der Geschwindigkeit der Schaufeln fortwährend ab, und hört sogar ganz auf, wenn die Geschwindigkeit der Schaufeln mit jener des zuströmenden Wassers übereinstimmt. Aehnlich verhält es sich auch bei oberschlächtigen Rädern, Turbinen, bei den Flügeln einer Windmühle. Bei den thierischen Motoren, so wie auch beim Wasser, liegt der Grund der Abnahme des Druckes zwischen Motor und Receptor, wenn die Geschwindigkeit des letztern zunimmt, in dem Umstande, dass die Bewegung der Masse des Motors eine bedeutende Wirkung erfordert; beim Dampf liegt der Grund der gleichen Erscheinung in einer andern Ursache. Die Kenntniss der gewöhnlichen Einrichtung einer Dampfmaschine vor-

ausgesetzt, denke man sich, dass in dem Kessel durch gleichmässige Feuerung gleichmässig Dampf gebildet werde, und dass die Maschine entweder durch die Wirkung des Dampfes oder durch andere äussere Kräfte aus dem Zustand der Ruhe in jenen der Bewegung versetzt, und hierauf mit wachsender Geschwindigkeit bewegt werde. Nehmen wir an, die Spannung des Dampfes betrage im Moment, wenn die Bewegung beginnt, 5 Atmosphären und im Kessel werde in jeder Sekunde 1 Kilogramm Dampf gebildet, also 1 Kilogramm Wasser verdampft, so ist klar, dass die Spannung des Dampfes nach einiger Zeit, wenn einmal die Geschwindigkeit des Kolbens so gross geworden ist, dass in jeder Sekunde mehr als 1 Kilogramm Dampf aus dem Kessel in die Maschine strömt, abnehmen muss, denn wenn aus dem Kessel in einer gewissen Zeit mehr Dampf heraus kömmt, als in der gleichen Zeit produzirt wird, muss wohl die Spannung im Kessel abnehmen. So wie aber die Spannung abnimmt, ist dies auch mit dem Druck des Dampfes (Motor) gegen den Kolben (Receptor) der Fall, denn die Spannung des Dampfes im Cylinder muss, damit der Dampf aus dem Kessel in den Cylinder übertreten kann, kleiner sein, als jene, welche im Kessel herrscht. Man sieht also, dass eine fortdauernde Geschwindigkeitszunahme des Kolbens zunächst eine Abnahme der Spannkraft des Dampfes im Kessel, und sodann eine Verminderung des Dampfdruckes gegen den Kolben zur Folge haben muss. Diese Eigenschaften der Wirkung der Motore sind für die Erklärung des sogenannten Beharrungszustandes der Bewegung der Maschinen von besonderer Wichtigkeit.

6) ***Der Anlauf, Fortlauf und Endlauf der Maschine.*** Wir übergehen einstweilen alles, was die Erfindung, den Entwurf, die Ausführung und Aufstellung einer Maschine betrifft; wir nehmen an, eine Maschine existire bereits, sei mit dem Körper, auf welchen sie einzuwirken bestimmt ist, in Verbindung gesetzt, und legen uns nun die Frage zur Beantwortung vor, wie ihre Bewegung erfolgen wird, wenn wir den Motor durch längere Zeit auf dieselbe einwirken lassen, dann aber diese Einwirkung wiederum aufheben. Vorausgesetzt, dass der Motor mit hinreichender Energie zu wirken vermag, wird die Maschine in einem gewissen Augenblick in Bewegung gerathen, hierauf eine gewisse Folge von Bewegungszuständen durchlaufen, und zuletzt, einige Zeit nachdem die Einwirkung des Motors aufgehört hat, wiederum in den Ruhezustand zurückkehren.

In dieser ganzen Bewegungsdauer lassen sich drei wesentlich verschiedene charakteristische Zeitabschnitte unterscheiden. Während des ersten Zeitabschnittes, der mit der Bewegung der Maschine beginnt, findet eine allmählige Entwicklung des Bewegungszustandes statt, wobei die Geschwindigkeit im Allgemeinen fort und fort zunimmt, und die

Geschwindigkeitsänderungen entweder fort und fort kleiner oder geregelter werden, so zwar, dass nach Verlauf einer gewissen Zeit ein Beharren in einem gewissen Zustand eintritt. Diesen ersten Zeitabschnitt nennen wir den Anlauf der Maschine, und die Thätigkeit, welche dabei der Motor entwickelt, den Antrieb desselben.

In dem zweiten Zeitabschnitt setzt die Maschine ihre Bewegungen und Funktionen unabänderlich in dem Zustande fort, welchen sie am Ende des ersten Zeitabschnittes erreicht hat, und verrichtet darin ihre regelmässige Arbeit. Dieser Zeitabschnitt umfasst also die regelmässige Arbeitsdauer der Maschine; den Bewegungszustand, in welchem sie sich dabei befindet, nennt man den Fortlauf oder Beharrungszustand, und die Art der Thätigkeit des Motors den Forttrieb.

In dem dritten Zeitabschnitt, welcher in dem Augenblick beginnt, wenn die Einwirkung des Motors beseitigt wird, nimmt die Baschheit der Bewegung allmählig ab, bis die Maschine zuletzt ganz in Ruhe gelangt. Diesen dritten Zeitabschnitt nennen wir den Endlauf oder Auslauf.

Bevor wir zur Erklärung der Gesetze schreiten, nach welchen die Bewegungen während des An-, Fort- und Endlaufes erfolgen, wollen wir vorerst nachzuweisen suchen, dass überhaupt ein Beharrungszustand der Bewegung eintreten muss, und die Beschaffenheit desselben unter verschiedenen Umständen zu erklären suchen.

Dass innerhalb der Bewegungsdauer einer Maschine ein Beharrungszustand eintreten muss, ist bis jetzt in den Werken, welche die Bewegungslehre der Maschinen behandeln, noch niemals nachgewiesen worden, obgleich dies für das Verständniss der Wirkungsweise der Maschinen von grosser Wichtigkeit ist. Die Ursache dieser Erscheinung liegt theils in der Beschaffenheit des geometrischen Zusammenhanges, insbesondere aber in dem Umstande, dass der Druck des Motors gegen den Receptor bei zunehmender Geschwindigkeit des letzteren fortwährend abnimmt. Hieraus folgt nämlich, dass die Geschwindigkeit einer Maschine nie über eine gewisse Grenze anwachsen kann, denn ein fortwährendes Wachsen der Geschwindigkeit setzt voraus, dass der Druck des Motors gegen den Receptor fortwährend stärker wirkt, als zur Ueberwindung sämmtlicher der Bewegung der Maschine entgegenwirkenden Widerstände nothwendig ist; da aber dieser Druck bei zunehmender Geschwindigkeit fort und fort abnimmt, so muss nothwendig ein Zeitmoment eintreten, von welchem an Kraft und Widerstände ins Gleichgewicht treten, und dann ist kein Grund zu fernerer Geschwindigkeitsänderung vorhanden; der Bewegungszustand muss sich daher allmählig einer gewissen Grenze nähern, d. h. es muss ein Beharrungszustand eintreten.

Die Zeit, welche verfliesst, bis dieser Zustand eintritt, kann streng genommen nicht bestimmt werden. Will man die Sache mit mathe-

matischer Schärfe nehmen, so muss man sagen, dass der Beharrungszustand gar nie wirklich eintritt, sondern dass derselbe nur die Grenze, nur das Ziel ist, welchem sich der wirkliche Bewegungszustand ohne Ende nähert, ohne es je vollkommen zu erreichen. Allein bei allen Maschinen ist der Bewegungszustand kurze Zeit nachdem die Bewegung begonnen hat, schon so wenig verschieden von dem Grenzzustand, dem sich die wirkliche Bewegung ohne Ende nähert, dass man in allen praktischen Fragen diese Verschiedenheit ganz vernachlässigen, sich demnach so benehmen darf, wie wenn die Grenze des Bewegungszustandes in der That schon nach einigen Sekunden oder Minuten wirklich vorhanden wäre. Es verhält sich mit der genauen Bestimmung der Dauer des Anlaufes ähnlich wie mit der Bestimmung der Zeit, in der sich ein Gefäss, das keine Nachfüllung erhält, durch eine Bodenöffnung gänzlich entleert. Auch da findet man, dass eine vollständige Entleerung niemals eintritt; fragt man jedoch, in welcher Zeit die Entleerung so weit fortschreitet, bis der Wasserstand im Gefäss nur noch einen Millimeter beträgt, so findet man, dass dies sehr bald, nach einigen Sekunden oder Minuten eintritt.

Damit überhaupt irgend ein Beharrungszustand eintritt, ist weiter nichts nothwendig, als dass die Maschine durch die Einwirkung des Motors in Gang komme; ist dies der Fall, so macht sich schon ein Beharrungszustand von selbst, wie auch die Einrichtung der Maschine beschaffen sein mag. Allein für die Thätigkeit einer Maschine ist es nicht genug, dass überhaupt irgend ein beliebiger Beharrungszustand eintritt, sondern es muss derjenige eintreten, welcher für die Benutzung der Betriebskraft einerseits und für die Thätigkeit der Werkzeuge andererseits der vortheilhafteste ist, und damit dies bei einer neu erbauten Maschine wirklich geschieht, muss dieselbe allerdings in ihrer Construktion gewissen Bedingungen entsprechen, welche wir in der Folge werden kennen lernen.

Der Beharrungszustand kann gleichförmig oder periodisch veränderlich, oder unregelmässig veränderlich sein. Er ist gleichförmig, wenn sich jeder Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, wie dies bei einer im regelmässigen Gang befindlichen Mahlmühle der Fall ist. Die Bedingungen seines Eintretens sind: 1) dass in der Maschine keine anderen Bewegungen vorkommen, als drehende um beliebige Vertikalaxen, oder um horizontale Schwerpunktsaxen; 2) dass der Motor mit unveränderlicher Intensität auf die Maschine einwirke; 3) dass auch die Widerstände, welche der Bewegung entgegenwirken, unveränderlich seien. Diesen Bedingungen ist eben bei einer Mahlmühle, die durch ein Wasserrad oder durch eine Turbine getrieben wird, entsprochen.

Der Beharrungszustand ist periodisch veränderlich, wenn die Maschine, nachdem sie einen gewissen Cyklus von Bewegungszuständen durchlaufen

hat, wiederum in denjenigen Zustand zurückkehrt, welcher am Anfang des Cyklus vorhanden war, um dann von neuem einen ganz identischen Cyklus von Bewegungszuständen zu beginnen. Ein derartiger Bewegungszustand tritt jederzeit ein: 1) wenn die Kraft periodisch veränderlich wirkt; 2) wenn die Widerstände periodisch veränderlich sind; 3) wenn der Schwerpunkt des ganzen Maschinenwerkes abwechselnd steigt und fällt; 4) wenn in der Maschine Massen vorkommen, die eine periodische hin- und hergehende Bewegung machen; 5) wenn periodisch wiederkehrende Massenstösse vorkommen; endlich tritt dieser Bewegungszustand auch dann ein, wenn zwei oder mehrere der so eben angeführten Umstände gleichzeitig vorhanden sind, wie dies bei einer Brettsäge, die durch eine Dampfmaschine getrieben wird, der Fall ist.

Der Beharrungszustand ist endlich unregelmässig veränderlich, wenn die Bewegung unregelmässig ab- und zunimmt, vielleicht sogar zeitweise ganz aufhört. Ein solcher Zustand tritt ein, wenn die Umstände, welche auf die Bewegung Einfluss haben, nämlich Kraft, Widerstand, Masse und Gewicht etc. ohne irgend ein Gesetz zu befolgen, sich verändern, am häufigsten jedoch, wenn die Widerstände bald sehr gross, bald wiederum sehr klein sind, wie dies z. B. bei den Eisenwalzwerken der Fall ist.

Die allgemeinen Gesetze, nach welchen die Bewegungen und Wirkungen der Maschine erfolgen, können am leichtesten durch Betrachtung einer Reihe von einzelnen besonderen Fällen eingesehen und begriffen werden. Hat man sich einmal klar gemacht, wie der Gang einer Mahlmühle unter verschiedenen Umständen erfolgt, so erkennt man leicht die allgemeinen Gesetze, nach welchen überhaupt die Bewegungen und Wirkungen derjenigen Maschinen erfolgen, die in einen gleichförmigen Behaarungszustand gerathen. Ebenso kommt man auch leicht zur Einsicht über die periodisch und unregelmässig wirkenden Maschinen durch Betrachtung einer Säge und eines Eisenwalzwerkes. Wir werden daher in den folgenden Nummern durch Betrachtung von speziellen Fällen die allgemeinen Bewegungsgesetze der Maschinen zu erklären suchen.

7) ***Bewegung der Maschinen mit gleichförmigem Beharrungszustand.*** Wir betrachten zur Erklärung der Maschine, die in einen gleichförmigen Beharrungszustand gerathen, eine Mahlmühle mit einem Mahlgang, die durch Wasser vermittelst eines unterschlächtigen Rades getrieben wird. Die Einrichtung und Anordnung einer solchen Maschine können wir als bekannt voraussetzen, so weit dies für die folgenden Betrachtungen erforderlich ist.

Die Widerstände, welche der Bewegung entgegen wirken, entspringen theils aus den Zapfen- und Zahnreibungen, vorzugsweise aber durch die

Getreidekörner, welche zwischen den Steinen zu Mehl und Gries zerrieben werden sollen.

Die Berechnung dieser Widerstände übergehen wir, und nehmen an, dass wenn die Steine regelmässig mit Getreidekörner gespeisst werden, am Umfange des Wasserrades ein Druck von 200 Kilogramm erforderlich sei, um jene Widerstände sämmtlich zu bewältigen. Die Mühle kann daher nicht eher in Gang kommen, als bis der Druck des Wassers gegen die Umfangsschaufeln des Rades 200 Kilogramme beträgt. Auch ist klar, dass die Mühle, wenn sie einmal in Gang gekommen ist, in irgend einem Augenhlick ihre Geschwindigkeit nicht verändern wird, wenn in diesem Augenblick der Druck des Wassers gegen die Schaufeln genau 200 Kilogramme beträgt, dass dagegen ihre Geschwindigkeit zu- oder abnehmen wird, wenn jener Druck, beziehungsweise, grösser oder kleiner als 200 Kilogramme ist. Ist nämlich der Druck gleich 200 Kilogramme, so ist er gerade hinreichend, um den Widerständen das Gleichgewicht zu halten; es ist also kein Grund zu einer Aenderung der lebendigen Kraft der Massen der Maschine vorhanden, und folglich kann auch, weil bei der Mühle nur drehende Bewegungen vorkommen, keine Geschwindigkeitsänderung eintreten. Ist dagegen der Druck des Wassers gegen die Schaufeln in irgend einem Augenblick grösser, als 200 Kilogromme und z. B. 210 Kilogramme, so wirkt die Kraft um 10 Kilogramme stärker, als zur Bewältigung der Widerstände erfordert wird, und dieser Ueberschuss von 10 Kilogrammen muss nothwendig auf Massenbeschleunigung wirken. Ist endlich jener Druck kleiner als 200 Kilogramme, z. B. 190 Kilogramme, so reicht er nicht hin, die Widerstände zu überwinden Die der Bewegung entgegenwirkenden Kräfte sind um 10 Kilogramme grösser, als die vorwärts treibende Kraft; es muss daher eine Geschwindigkeitsabnahme eintreten.

Diese Bemerkungen vorausgeschickt, wollen wir nun sehen, wie die Bewegung der Mühle unter verschiedenen Umständen erfolgen wird. Wir denken uns zu diesem Behufe, dass mit der Mühle eine Reihe von Bewegungsversuchen angestellt werden, um auf diese Weise den Einfluss jedes einzelnen Momentes kennen zu lernen.

8) *Erster Versuch.* Indem wir nun diese Versuche beginnen, wollen wir zunächst nur eine sehr kleine Wassermenge dem Rade zuströmen lassen, dann wird der Druck gegen die Schaufeln, der von dem Augenblick an beginnt, in welchem das erste Wassertheilchen anschlägt, und sodann allmählig grösser wird, noch nicht den Werth von 200 Kilogrammen erreichen; die Mühle kann also gar nicht in Gang kommen. Eben so verhielte es sich auch, wenn überhaupt die ganze Wassermasse, die zur Zuleitung vorhanden ist, nicht hinreichte, um einen Druck von mehr als 200 Kilogrammen hervorzubringen.

9) *Zweiter Versuch. Erscheinungen während des An-, Fort- und Endlaufes.* Wir wollen nun annehmen, dass eine bedeutende Wassermasse aus dem Zuflusskanal vermittelst des Schützen dem Rade zugeleitet werde. Dann wird der Druck des Wassers gegen die Schaufeln von Null an sehr rasch zunehmen und in kurzer Zeit den Werth von 200 Kilogrammen erreichen. Ist dieser Moment eingetreten, so ist in demselben Kraft und Widerstand im Gleichgewicht. Die Mühle ist aber noch immer nicht in Bewegung, sondern diese beginnt erst dann, wenn durch das weitere Zuströmen des Wassers jener Druck grösser als 200 Kilogramme zu werden beginnt, und die Geschwindigkeit der Bewegung muss fort und fort, so lange die Kraft stärker wirkt, als die Ueberwindung der Widerstände erfordert, zunehmen. Diese Beschleunigung kann aber nicht immer fortdauern, denn wenn einmal die Geschwindigkeit der Schaufeln eine gewisse Grenze erreicht hat, weichen sie vor dem nachströmenden Wasser so schnell aus, dass der Druck auf die Schaufeln, von einem gewissen Augenblick an, in welchem er einen grössten Werth erreicht hat, wiederum abnehmen, und zuletzt abermals bis auf 200 Kilogramme herabsinken muss. Von nun an ist aber kein Grund zu einer Geschwindigkeitsänderung vorhanden, denn wenn Kraft und Widerstand im Gleichgewicht sind, kann sich die Geschwindigkeit nicht ändern, und wenn diese ihren Werth nicht ändert, so ist auch kein Grund zu einer weiteren Aenderung des Druckes vorhanden. Man sieht also, dass die Bewegung beginnt, wenn zum ersten Mal Kraft und Widerstand in's Gleichgewicht kommen, dass dagegen der Beharrungszustand eintritt, wenn jenes Gleichgewicht zum zweiten Mal zum Vorschein kommt. In diesem Beharrungszustand verbleibt nun die Maschine so lange, als der Wasserzufluss einerseits, und die Getreidezuleitung andererseits nicht geändert wird. Wird aber der Wasserzufluss nach einiger Zeit aufgehoben, während die Getreidezuleitung fortdauert, so wird von diesem Augenblick an die Geschwindigkeit der Maschine allmählig abnehmen und die Bewegung wird nur noch so lange fortdauern, bis die Wirkungsgrösse, welche in sämmtlichen Massen in dem Moment, als der Wasserzufluss aufgehoben wurde, als lebendige Kraft enthalten war, durch die Widerstände der Maschine erschöpft ist.

Man kann sich den ganzen Verlauf der Erscheinungen, die in dieser Bewegungsdauer der Maschine vorkommen, durch eine graphische Darstellung am besten versinnlichen. Wenn man nämlich den Weg, den irgend ein Punkt des Radumfanges zurücklegt, als Abscisse, und die in jedem einzelnen Zeitaugenblick entsprechenden Werthe der Kraft, des Widerstandes und der lebendigen Kraft sämmtlicher Massen als Ordinaten aufträgt, so erhält man drei Kurven, an welchen die Bewegungserschei-

nungen sehr bequem verfolgt werden können. Fig. (1) Taf. V. zeigt eine solche graphische Darstellung.

$\overline{AC}$ ist der Weg, den ein Punkt des Radumfanges zurücklegt, bis der Beharrungszustand eintritt. $\overline{AC}$ entspricht daher der Zeit des Anlaufes. $\overline{CD}$ ist der Weg, den der gleiche Punkt während der Dauer des Beharrungszustandes beschreibt. $\overline{DZ}$ endlich der Weg des Endlaufes $\overline{Aa} = \overline{Cc} = \overline{Dd} = \overline{Zz}$ der fortwährend gleiche Widerstand von 200 Kilogrammen, welcher in der ganzen Bewegungsdauer der Bewegung entgegen wirkt. Die Linie a b c d D Z, welche aus dem wellenförmigen Theil a b c, und den geraden Stücken c d und D z zusammengesetzt ist, stellt durch ihre Ordinaten den Druck des Wassers gegen die Schaufeln dar. Die krumme Linie A c_1 d_1 Z endlich gibt durch ihre Ordinaten die lebendige Kraft, welche in sämmtlichen Massen während der ganzen Bewegungsdauer enthalten ist.

Während des Anlaufes ist fortwährend ein Ueberschuss an Kraft vorhanden. Dieser Ueherschuss wächst von A bis B, erreicht bei B ein Maximum $= \beta$ b, nimmt dann wiederum ab und verschwindet bei c. Der Flächeninhalt des Rechteckes A a C c ist die Wirkungsgrösse, welche während des Anlaufes durch die Widerstände consumirt wird. Der Flächeninhalt der oben krummlinig begrenzten Figur A a b c C bestimmt die Wirkungsgrösse, welche dem Wasserrad durch den Motor während des Anlaufes mitgetheilt wird. Der Flächeninhalt von a b c β ist demnach der Unterschied der Wirkungen, die während des Anlaufes produzirt und consumirt werden, und muss demnach, in Zahlen ausgedrückt, gleich sein der lebendigen Kraft C c sämmtlicher Massen der Maschine am Ende des Anlaufes.

Das allmählige Ansteigen der Kurve A c_1 zeigt, dass die lebendige Kraft der Massen während des Anlaufes fortwährend wächst, von C bis D unverändert bleibt, und während des Endlaufes D Z wiederum allmählig abnimmt. Während des Beharrungswiderstandes fällt die Kraftkurve mit der Widerstandskurve zusammen, weil in dieser Zeit der Druck des Motors gegen den Receptor so gross ist, als der auf den letzteren reduzirte Widerstand der Maschine. Der Flächeninhalt des Rechteckes C c D d ist demnach sowohl die während des Beharrungszustandes produzirte, als auch die während dieser Zeit consumirte Wirkung. Während des Endlaufes wird durch den Widerstand eine Wirkungsgrösse D d Z z consumirt, die, in Zahlen ausgedrückt, gleich sein muss der lebendigen Kraft D d_1 = C c_1, und ferner noch gleich ist dem Unterschied a b c β der Wirkungen, die während des Anlaufes produzirt und consumirt werden. Die totalen Wirkungen, welche während der ganzen Bewegungsdauer produzirt und consumirt werden, sind

demnach gleich gross oder es ist: Flächeninhalt des Rechteckes A a Z z = Flächeninhalt: A a b c d D.

10) *Dritter Versuch. Einfluss des Wasserzuflusses.* Diesen Versuch wollen wir in der Absicht anstellen, um den Einfluss des Wasserzuflusses auf die Bewegung kennen zu lernen. Nehmen wir an, das Wasserrad sei so geräumig, dass es eine noch einmal so grosse Wassermenge fassen kann, als jene, die beim zweiten Versuch wirkte. Beim zweiten Versuch sei die Wassermenge 1 Kubik-Meter gewesen, und nun wollen wir den Schützen so weit aufziehen, dass in jeder Sekunde 2 Kubik-Meter gegen das Rad strömen. Es werden sich nun folgende Erscheinungen zeigen.

Die Bewegung beginnt auch jetzt erst dann, wenn der Druck des Wassers gegen die Schaufeln 200 Kilogramm geworden ist. Dieser Druck wird aber wegen der grossen Masse des zufliessenden Wassers sehr rasch und bedeutend über 200 Kilogramm anwachsen; es wird daher sehr bald eine sehr lebhafte Beschleunigung der Massen der Maschine also ein sehr rascher Gang der Mühle eintreten. Doch aber kann auch hier der Druck des Wassers gegen die Schaufeln nicht unausgesetzt wachsen, sondern er wird, wie es beim zweiten Versuche der Fall war, nur ein gewisses Maximum erreichen und dann wiederum so lange fort abnehmen, bis er auf den Werth von 200 Kilogrammen herabsinkt. Bis zu diesem Moment wird die Geschwindigkeit der Maschine fortwährend zugenommen haben, ist aber dieser Moment eingetreten, so ist wegen des vorhandenen Gleichgewichtszustandes zwischen Druck und Widerstand kein Grund zu einer weiteren Geschwindigkeitsänderung vorhanden; die Maschine befindet sich demnach in einem gleichförmigen Beharrungszustande, der sich von jenem des zweiten Versuches durch eine viel grössere Geschwindigkeit unterscheidet; denn da nun durch einen Wasserzufluss von 2 Kubik-Meter doch nur ein Druck von 200 Kilogramm ausgeübt wird, so kann dies offenbar nur bei einer viel grösseren Geschwindigkeit eintreten, als wenn der gleiche Druck durch einen Wasserzufluss von 1 Kubik-Meter hervorgebracht wird. Die Dauer des Anlaufes wird hier ungefähr so gross sein, wie beim zweiten Versuch, denn es ist zwar die Geschwindigkeit am Ende des Anlaufes, dafür aber auch der Wasserzufluss weit grösser, als beim zweiten Versuch. Die Dauer des Endlaufes muss aber nun grösser ausfallen, indem durch den gleich gebliebenen Widerstand von 200 Kilogramm eine weit grössere lebendige Kraft zu konsumiren ist.

Durch die Vermehrung des Wasserzuflusses ist demnach 1) die Dauer des Anlaufes nur wenig oder gar nicht verändert; 2) die Geschwindigkeit der Bewegung im Beharrungszustand vergrössert; 3) die Dauer des Endlaufes bedeutend vermehrt worden. Der Druck, den der Motor gegen

den Receptor im Beharrungszustand ausübt, ist aber ganz unverändert geblieben.

11) *Vierter Versuch. Einfluss des Widerstandes.* Um den Einfluss des Widerstandes auf dem Verlauf der ganzen Bewegung kennen zu lernen, wollen wir nun einen weiteren Versuch machen, indem wir wie beim zweiten Versuch 1 Kubik-Meter Wasser zuströmen lassen, dagegen die Getreidezuleitung so weit vermindern, dass zur Ueberwindung sämmtlicher Widerstände am Umfange des Rades nur noch ein Druck von 100 Kilogramm nothwendig ist.

Die Bewegung der Maschine wird schon beginnen, wenn das Wasser auf die Schaufeln einen Druck von 100 Kilogramm ausübt, und ihre Geschwindigkeit wird wegen des im Verhältniss zum Widerstand starken Wasserzuflusses schnell wachsen, aber eben desshalb werden die Radschaufeln vor dem nachströmenden Wasser bald so schnell ausweichen, dass der Druck gegen dieselben in kurzer Zeit ein Maximum erreicht, und dann wiederum bis zu 100 Kilogramm herabsinken wird, und von diesem Augenblick an ist der Beharrungszustand vorhanden. Die Geschwindigkeit der Maschine muss aber in diesem Zustande offenbar weit grösser sein, als beim zweiten Versuch, denn der Wasserzufluss ist der Voraussetzung gemäss in beiden Versuchen gleich gross, und dennoch ist der Druck gegen die Schaufeln beim vierten Versuch 100 Kilogramm, also halb so gross, als beim zweiten, und dies ist offenbar nur möglich, wenn die Geschwindigkeit der Radschaufeln sehr gross ist. Was die Dauer des Endlaufs betrifft, so wird dieser hier viel länger dauern, als im zweiten Versuche, denn es ist die zu erschöpfende lebendige Kraft sehr gross, und der während des Endlaufs wirkende Widerstand nur 100 Kilogramm.

Aus dieser Betrachtung geht hervor, dass die Grösse des Widerstandes zur Folge hat: 1) dass die Anlaufzeit der Grösse des Widerstandes ungefähr proportional ist; 2) dass die Geschwindigkeit des Beharrungszustandes durch eine Verminderung des Widerstandes wächst, durch eine Vermehrung des Widerstandes abnimmt; 3) dass die Dauer des Endlaufes und der Widerstand in einem umgekehrten Verhältniss stehen; ein geringer Widerstand hat einen langdauernden, ein starker Widerstand dagegen einen kurzdauernden Endlauf zur Folge.

12) *Fünfter Versuch. Einfluss der Massen.* Um den Einfluss der Massen kennen zu lernen, wollen wir mit einer der Drehungsaxen der Maschine ein Schwungrad verbinden, in jeder anderen Hinsicht aber Alles lassen, wie beim zweiten Versuch. Wir nehmen also an: einen Wasserzufluss von 1 Kubik-Meter und ein Widerstand von 200 Kilogramm.

Es ist klar, dass der Beharrungszustand eintreten wird, wenn der Druck des Wassers gegen die Schaufeln zum zweiten Male 200 Kilogramm geworden ist. Nun gibt es aber offenbar nur Eine Geschwindigkeit, bei welcher ein Wasserzufluss von 1 Kubik-Meter einen Druck von 200 Kilogramm hervorbringt, es muss demnach die Geschwindigkeit des Beharrungszustandes nun so gross sein, als beim zweiten Versuch, woraus zu ersehen ist, dass die Grösse der Massen auf diese Geschwindigkeit des Beharrungszustandes keinen Einfluss haben kann. Weil aber nun die Maschine mit dem Schwungrad eben so schnell geht als ohne Schwungrad, so ist in ihr um so viel mehr lebendige Kraft enthalten, als die lebendige Kraft des Schwungrades ausmacht, und daraus folgt, dass sowohl die Dauer des Anlaufes, als auch jene des Endlaufes durch das Vorhandensein des Schwungrades vergrössert wird.

Die Massen der Maschine haben also, wie man sieht, keinen Einfluss auf die Bewegung im Beharrungszustand, sondern nur allein auf die Dauer des An- und Endlaufes. Sodann ist aber auch klar, dass die totale Wirkungsgrösse, welche während der ganzen Bewegungsdauer dem Receptor mitgetheilt wird, genau so gross ist, als die Wirkungsgrösse, welche in derselben Zeit durch sämmtliche Widerstände consumirt wird; es ist also klar, dass die Massen auch die Effektverhältnisse ganz ungeändert lassen.

13) *Sechster Versuch. Einfluss des geometrischen Zusammenhangs.* Wir wollen endlich noch einen Versuch machen, um den Einfluss des geometrischen Zusammenhanges kennen zu lernen. Wir nehmen aus der Mühle zwei Räder heraus und setzen dafür zwei andere ein. Angenommen, die zwei herausgenommenen Räder seien zwei in einandergreifende von gleicher Grösse, und von den zwei dafür eingesetzten sei das eine (das treibende) noch einmal so klein, als das andere (das getriebene). Dann ist der geometrische Zusammenhang in der Art verändert, dass bei ungeänderter Geschwindigkeit des Wasserrades die Mühlsteine nur halb so schnell gehen, oder dass das Wasserrad noch einmal so schnell gehen muss, als früher, wenn die Geschwindigkeit der Mühlsteine die gleiche bleiben soll. Dann ist aber auch die Kraft, welche am Umfange des Wasserrades wirken muss, um sämmtliche Widerstände zu überwinden, nicht mehr 200, sondern nur 100 Kilogramm. So gross wird also auch der Druck des Wassers gegen die Schaufeln sein, wenn einmal der Beharrungszustand eingetreten ist, und die Geschwindigkeit der Bewegung des Rades in demselben wird genau so gross sein, als beim vierten Versuch, wo durch Verminderung der Getreidezuleitung der Widerstand bis zu 100 Kilogramm abgenommen hat. Wenn nun die Geschwindigkeit des Rades genau zwei Mal so gross wäre als beim zweiten Versuch, so würden die Mühlsteine genau so

schnell laufen als beim zweiten Versuch. Ist dagegen die Geschwindigkeit des Rades mehr oder weniger als zwei Mal so gross, so würden die Mühlsteine im ersteren Falle schneller, im letzteren langsamer laufen als beim zweiten Versuch. Nach der Geschwindigkeit der Mühlsteine ist aber die Leistung der Mühle zu beurtheilen. Gehen die Mühlsteine bei unverändertem Widerstand schnell, so vermahlen sie viel, gehen die Steine langsamer, so vermahlen sie wenig.

Hieraus sieht man, dass eine Veränderung des Räderwerkes, oder allgemein gesprochen, des geometrischen Zusammenhangs der Maschine, nicht nur eine Veränderung der Bewegungserscheinungen, sondern auch eine Veränderung der Leistungen der Maschine zur Folge haben kann.

Wenn wir nun die Resultate zusammenfassen, welche sich durch Betrachtung der sechs Versuche ergeben haben, so erhalten wir für die Maschinen mit gleichförmigem Beharrungszustand folgende Regeln oder wenn man will, Gesetze, ihrer Bewegungen und Wirkungen.

14) ***Gesetze des Anlaufes, Fortlaufes und Auslaufes.***

In Betreff des Anlaufes gelten folgende Sätze:

1) Der Anlauf beginnt in dem Augenblick, wenn der Druck des Motors gegen den Receptor zum ersten Mal mit den sämmtlichen Widerständen in's Gleichgewicht tritt, also so gross ist, als der auf den Receptor reduzirte Gesammtwiderstand der Maschine.

2) Während der ganzen Dauer des Anlaufes ist der Druck des Motors gegen den Receptor grösser, als der auf den Receptor reduzirte Widerstand; nur im ersten und letzten Moment des Anlaufes findet Gleichgewicht statt. Vermöge dieses fortwährend vorhandenen Ueberschusses an Kraft nimmt die Geschwindigkeit ohne Unterbrechung zu, erreicht aber am Ende des Anlaufes eine gewisse Grenze, welche während des Beharrungszustandes unveränderlich vorhanden bleibt.

3) Die während des Anlaufes von dem Motor entwickelte und dem Receptor mitgetheilte Wirkungsgrösse ist grösser als jene, welche durch den Widerstand der Maschine in der gleichen Zeit consumirt wird. Die Differenz dieser Wirkungsgrössen wird von den Massen der Maschine aufgenommen und erscheint durch den bewegten Zustand als lebendige Kraft.

4) Die Dauer des Anlaufes richtet sich überhaupt nach allen Umständen, die auf die Bewegung Einfluss haben; vorzugsweise aber wird sie bedingt durch den Wasserzufluss und durch die Massen der Maschine. Sind die Massen klein und ist der Wasserzufluss gross, so tritt der Beharrungszustand bald ein; sind dagegen die Massen gross und ist der Wasserzufluss klein, so dauert es lang, bis der Anlauf vorüber ist

Ist der Beharrungszustand eingetreten, so findet folgendes statt:

1) Die Geschwindigkeit jedes Punktes der Maschine ist unveränderlich gleichförmig und die lebendige Kraft sämmtlicher Massen der Maschine hat während der ganzen Dauer des Beharrungszustandes den gleichen Werth.

2) Wenn die Maschine durch einen flüssigen Motor bewegt wird, also durch Wasser, Dampf oder Wind, ist der Zufluss, so wie auch der Abfluss desselben vollkommen gleichmässig und die zu- und abfliessenden Quantitäten sind in jedem einzelnen Augenblick von gleicher Grösse.

3) Der Druck des Motors gegen den Receptor ist im Beharrungszustand der Bewegung ganz unabhängig von der Quantität der auf die Maschine wirkenden motorischen Substanz und von den Massen der Maschine; dieser Druck richtet sich einzig und allein nur nach dem Betrag des auf den Receptor reduzirten Widerstandes. Kraft und Widerstand sind während der ganzen Dauer des Beharrungszustandes im Gleichgewicht. In jedem Zeittheilchen und auch in jeder endlichen Zeitintervalle sind die von dem Motor produzirten und von den Widerständen consumirten Wirkungsgrössen gleich gross; folglich ist auch der in einer Sekunde produzirte Effekt gleich dem in einer Sekunde consumirten Effekt.

4) Die Geschwindigkeit des Beharrungszustandes ist von den Massen der Maschine gänzlich unabhängig, und richtet sich vorzugsweise theils nach dem Betrag des auf den Receptor reduzirten Widerstandes, dann aber auch, wenn ein flüssiger Motor wirkt, nach der Quantität der motorischen Substanz, die pr. 1 Sekunde auf die Maschine wirkt.

In Betreff des Endlaufes ist zu bemerken:

1) Die Bewegung der Maschine ist während des Endlaufes eine gleichförmig verzögerte, vorausgesetzt, dass der Widerstand constant und von der Geschwindigkeit unabhängig ist.

2) Die Dauer des Endlaufes ist der Beharrungsgeschwindigkeit und den auf den Receptor reduzirten Massen direkt, und dem auf den Receptor reduzirten Widerstand verkehrt proportional.

3) Während des Endlaufes wird durch die Widerstände die in den Massen enthaltene lebendige Kraft consumirt; die Massen geben also die Wirkungsgrösse, welche sie während des Anlaufes in sich aufgenommen haben, wiederum ab.

Im Allgemeinen ist noch folgendes zu bemerken:

1) Die Wirkungsgrösse, welche während der ganzen Bewegungsdauer, also während des An-, Fort- und Endlaufes der Motor dem Receptor mittheilt, ist gleich der Wirkungsgrösse, die in derselben Zeit von sämmtlichen Widerständen consumirt wird; denn während des Beharrungszustandes ist in jeder Zeitintervalle die produzirte Wirkung so

gross, als die consumirte, und der Ueberschuss an Wirkung, der während des Anlaufes produzirt wird, wird während des Endlaufes consumirt. Die Maschine selbst produzirt also keine Wirkung, sie nimmt nur die Wirkungen, welche der Motor entwickelt, in sich auf, und gibt sie dann wiederum ab, und so viel sie empfangen hat, gibt sie auch wiederum ab. Eine Maschine kann mit einer Wasserleitung verglichen werden aus der auch gerade so viel Wasser ausfliesst, als in sie hineingeleitet wurde, und so wie aus einer Röhrenleitung durch die Ausmündungen immer etwas weniger Wasser ausfliesst, als in sie eingetreten ist, weil an den verschiedenen Verbindungsstellen wegen unvollkommener Dichtung immer etwas Wasser entweicht, eben so ist auch die Gesammtwirkung, die bei einer Maschine auf die Werkzeuge übertragen wird, immer kleiner als jene, die der Motor dem Receptor mitgetheilt hat, weil von dieser letzteren immer ein Theil durch die verschiedenen Reibungen und Nebenhindernisse consumirt wird. Man darf im Allgemeinen eine Maschine hinsichtlich der Kraftübertragung gut construirt nennen, wenn sie drei Viertheile von der empfangenen Wirkung auf die Werkzeuge überträgt.

2) Die Massen der Maschine haben nur allein Einfluss auf die Dauer des An- und Endlaufes; die Geschwindigkeit des Beharrungszustandes und das Verhältniss zwischen Kraft und Widerstand in denselben sind aber von den Massen der Maschine ganz unabhängig; sie sind demnach bei Maschinen, die in einen gleichförmigen Beharrungszustand gerathen, von keiner besondern Wichtigkeit. Da jedoch die Bedingungen eines solchen Bewegungszustandes in der Wirklichkeit niemals dauernd vollkommen genau erfüllt sind, so sind die Massen auch bei den Maschinen mit gleichförmigem Beharrungszustand nicht ganz gleichgültig. Wenn sich nämlich Kraft und Widerstand von Zeit zu Zeit etwas und in der Art ändern, dass sie nicht in jedem Augenblick während des Beharrungszustandes im Gleichgewicht sind, so wird die Bewegung nicht vollkommen gleichförmig erfolgen, sondern sie wird, wenn die Kraft überwiegend ist, etwas beschleunigt, und wenn die Widerstände überwiegend sind, etwas verzögert; allein diese Geschwindigkeitsänderungen bleiben immer unbedeutend, wenn die Massen gross sind; sie bewirken also, weil sie grössere Geschwindigkeitsänderungen nicht aufkommen lassen, eine Regulirung der Bewegung. Die Anbringung eines Schwungrades ist aber bei den Maschinen mit gleichförmigem Beharrungszustand nie nothwendig, denn die Dimensionen, welche die Bestandtheile einer solchen Maschine erhalten müssen, um hinreichende Festigkeit zu gewähren, bringen bereits so viel Masse hervor, dass aus den zufälligen Aenderungen in der Wirkung der Kraft und den Widerständen eine merkliche Unregelmässigkeit der Bewegung nicht mehr entspringen kann.

15) ***Analytische Berechnung der Bewegung einer Mahlmühle.*** Die in voriger Nummer ohne Zuhilfenahme einer Rechnung aufgefundenen Bewegungsgesetze einer Mahlmühle lassen sich weit kürzer und mit grösserer Bestimmtheit auf analytischem Wege ausfindig machen.

Nennt man:

Q das Gewicht der Wassermenge, welche per 1 Secunde dem unterschlächtigen Rade zufliesst,

V die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser gegen die Schaufeln des Rades hinströmt,

v die Geschwindigkeit der Schaufeln, nachdem die Bewegung eine Zeit t gedauert hat,

dv die Geschwindigkeitsänderung der Schaufeln in dem nächstfolgenden Zeitelement d t,

R den auf den Umfang des Rades reduzirten Gesammtwiderstand oder den Druck, mit welchem auf die Schaufeln des Rades gewirkt werden muss, um den Widerständen das Gleichgewicht zu halten,

μ die auf den Umfang des Rades reduzirte Masse der Maschine. Es ist also μ eine ideale Masse, welche, wenn sie eine Geschwindigkeit v besitzt, eine eben so grosse lebendige Kraft enthält, wie die gesammte lebendige Kraft aller Massen der Mühle, wenn die Umfangsgeschwindigkeit des Rades gleich v ist.

Dies vorausgesetzt, ist nach der Lehre vom Stosse des Wassers $\frac{Q}{g}(V - v)$ der Druck, welchen das zufliessende Wasser nach Verlauf der Zeit t gegen die Schaufeln ausübt, und $\frac{Q}{g}(V - v) - R$ der Ueberschuss des Druckes über den Widerstand oder die Kraft, welche die sämmtlichen Massen beschleuniget; es ist demnach die Gleichung der Bewegung

$$dv = \tfrac{1}{2}\,\frac{\frac{Q}{g}(V-v)-R}{\mu}\,dt.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dv}{Q(V-v)-Rg} = \frac{dt}{2g\mu}$$

und man findet durch Integration:

$$-\frac{1}{Q}\,\text{lognat.}\,[Q(V-v)-Rg] + \text{const.} = \frac{t}{2g\mu}$$

Für den Anfang der Bewegung, d. h. für $t = o$ ist aber $v = o$ demnach:

$$-\frac{1}{Q}\,\text{lognat.}\,[QV - Rg] + \text{const.} = o.$$

Durch Subtraktion dieser zwei letzten Gleichungen folgt:

$$\frac{1}{Q} \text{ lognat. } \left[\frac{Q\,V - R\,g}{Q\,(V-v) - R\,g}\right] = \frac{t}{2\,g\,\mu}$$

und hieraus findet man leicht:

$$v = \left[V - \frac{R\,g}{Q}\right]\left[1 - e^{-\frac{Q}{2\,g\,\mu}\,t.}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Diese Gleichung enthält das Gesetz der Bewegung der Mühle bis zum Beginn des Endlaufes.

Da der Werth der Exponentialgrösse $e^{-\frac{Q}{g\,\mu}\,t}$ mit dem Wachsen der Zeit t fortwährend abnimmt, so sieht man, dass die Geschwindigkeit der Bewegung sich immer mehr und mehr der Grenze $V - \frac{R\,g}{Q}$ nähert, ohne sie jedoch jemals zu erreichen. Streng genommen tritt also ein gleichförmiger Beharrungszustand niemals ein, sondern dieser ist nur ein idealer Grenzzustand, welchem sich der wirkliche Bewegungszustand fort und fort nähert. Bezeichnen wir diese Geschwindigkeitsgrenze mit u, setzen demnach:

$$u = V - \frac{R\,g}{Q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

so kann man statt der Gleichnng (a) auch leicht folgende auffinden:

$$\frac{u - v}{u} = e^{-\frac{Q}{2\,g\,\mu}\,t.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Nun ist aber $\frac{u - v}{u}$ das Verhältniss, das den Grad der Annäherung des wirklichen Bewegungszustandes an den idealen Beharrungszustand ausdrückt, denn es gibt an, um den wievielten Theil der Grenzgeschwindigkeit sich die wirkliche Geschwindigkeit noch ändern muss, bis die Grenzgeschwindigkeit erreicht wird. Man kann also für praktische Beurtheilungen den Beharrungszustand als wirklich eingetreten ansehen, so wie der Werth von $\frac{u - v}{u}$ nur noch einen gewissen Betrag hat, z. B. $= {}^1/_{10}$ oder ${}^1/_{20}$ geworden ist. Setzt man also:

$$\frac{u - v}{u} = p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (d)$$

so folgt aus (c)

$$t = -\frac{2\,g\,\mu}{Q} \text{ lognat. } p. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

und diese Gleichung gibt die Zeit an, nach Verlauf von welcher sich der

wirkliche Bewegungszustand dem mathematischen wahren Beharrungszustand bis auf das Maas, das durch p ausgedrückt wird, angenähert hat, oder mit andern Worten, es gibt dieser Werth von t die Dauer des Anlaufes. Diese ist mithin der reduzirten Masse μ direkt, und dem Wasserzufluss Q verkehrt proportional.

Aus dem Werth von u, den die Gleichung (b) darbietet, ersieht man auch, dass die Geschwindigkeit des Beharrungszustandes von der Masse μ der Maschine ganz unabhängig ist, und dass der Unterschied V — u zwischen der Geschwindigkeit des Wassers und jener der Schaufeln im Beharrungszustand dem Widerstand R direkt und dem Wasserzufluss Q verkehrt proportional ist.

Da während des Endlaufes keine treibende Kraft; sondern nur der constante Widerstand R thätig ist, so muss diese Bewegung mit gleichförmig verzögerter Geschwindigkeit erfolgen, und man hat für diese Bewegung:

$$w = u - \frac{R}{2\,\mu}\,t.$$

wobei w die Geschwindigkeit ausdrückt, mit der sich der Umfang des Rades noch bewegt, nachdem der Widerstand R durch t Sekunden gewirkt hat. Für das Ende des Endlaufes ist w = o und man findet demnach für die Dauer des Endlaufes

$$t = \frac{2\,\mu\,u}{R}.$$

Diese Dauer ist demnach der Beharrungsgeschwindigkeit u und der reduzirten Masse μ direkt, dagegen dem reduzirten Widerstand R verkehrt proportional.

16) ***Bewegung und Wirkung der Maschinen mit periodischem Beharrungszustand.*** Es ist schon früher gesagt worden, unter welchen Umständen bei einer Maschine ein periodisch wiederkehrender Beharrungszustand eintritt. Um die Bewegungen und Wirkungen der Maschinen dieser Art genauer kennen zu lernen, ist es wiederum am zweckmässigsten, einen speziellen Fall ins Auge zu fassen und denselben bis in alle Einzelnheiten zu verfolgen. Wir wählen zu diesem Behufe eine Mahlmühle, die durch eine Dampfmaschine getrieben wird. Die Einrichtung eines solchen Maschinenwerkes können wir als bekannt voraussetzen.

Wir nehmen an: 1) dass die Verdampfung des Wassers im Dampfkessel durch gleichförmige Feuerung ganz gleichförmig erfolge; 2) dass die Maschine mit einem geradlinig hin- und hergehenden Kolben, ferner mit Schubstange, Kurbel und Schwungrad versehen sei; 3) dass der Dampf, nachdem er den Kolben durch einen Schub fortbewegt hat, aus dem Cylinder in die freie Luft entweiche; 4) dass den Mühlsteinen gleichförmig Getreide zugeleitet werde.

Unter diesen Umständen entspringt die Periodizität der Bewegung des Beharrungszustandes nur allein durch den geometrischen Zusammenhang des Kolbens mit der Schwungradswelle vermittelst der Kurbel.

Um die Bewegungserscheinungen der Grösse nach angeben zu können, wollen wir noch folgende Bestimmungen festsetzen: 1) es werde in jeder Sekunde $\frac{1}{10}$ Kilogramm Wasser in Dampf verwandelt; 2) die Mühle habe vier Paar Mühlsteine oder vier Mahlgänge; 3) der Querschnitt des Dampfcylinders sei $\frac{1}{10}$ Quadrat-Meter und der Kolbenschub betrage $\frac{1}{2{\cdot}4} = 0{\cdot}4166$ Meter; 4) das Räderwerk der Transmission sei so angeordnet, dass ein Druck won 2000 Kilogramm auf den Kurbelzapfen und senkrecht auf den Kurbelhalbmesser wirken muss, um die Widerstände, welche der Bewegung entgegen wirken, zu überwältigen; 5) dass anfänglich der Kolben auf halbem Schub stehe, so dass Kurbel und Schubstange einen rechten Winkel bilden. Es kann demnach die Bewegung der Maschine beginnen, wenn der Kolben mit einer Kraft von 2000 Kilogramm getrieben wird; endlich wollen wir annehmen, dass 6) die Communikation zwischen Kessel und Cylinder erst dann hergestellt wird, wenn die Spannung des Dampfes im Kessel 5 Atmosphären beträgt.

Um den Druck zu finden, welchen der Kolben in irgend einem Augenblick gegen den Kurbelzapfen ausübt; muss man, nebst dem Druck des Dampfes auf den Kolben auch noch den atmosphärischen Gegendruck und den Reibungswiderstand der Maschine in Rechnung bringen. Der Raum vor dem Kolben cummunizirt nämlich der Voraussetzung zur Folge stets mit der freien Luft, es wirkt desshalb der Bewegung des Kolbens immer der Druck der Atmosphäre auf die vordere Fläche des Kolbens entgegen, und dieser Gegendruck beträgt auf jeden Quadrat-Centimeter der Kolbenfläche nahe 1 Kilogramm. Zur Ueberwindung der Reibungswiderstände der Dampfmaschine ist ferner auch eine gewisse Kraft erforderlich, und man darf annehmen, dass auf jeden Quadrat-Centimeter der Kolbenfläche ein Druck von 0·6 Kilogramm ausgeübt werden muss, damit dieser Reibungswiderstand bewältigt wird. Man muss also von dem Druck des Dampfes auf jeden Quadrat-Centimeter der Kolbenfläche $1 + 0{\cdot}6 = 1{\cdot}6$ Kilogramm abziehen, um die Kraft zu finden, mit welcher der Kolben wirklich fortgetrieben wird.

In dem Moment, wenn die Communikation zwischen Kessel und Cylinder hergestellt wird, beträgt die Spannung des Dampfes der Voraussetzung gemäss, 5 Atmosphären, demnach der Druck per 1 Quadrat-Centimeter nahe 5 Kilogramm; es wird folglich jeder Quadrat-Centimeter der Kolbenfläche mit einem Druck von $5 - 1{\cdot}6 = 3{\cdot}4$ Kilogramm getrieben. Die Mühle verursacht dagegen per 1 Quadrat-Centimeter der Kolbenfläche nur einen Widerstand von 2 Kilogramm. Jeder Quadrat-Centimeter der Kolbenfläche wird demnach mit $3{\cdot}4 - 2 = 1{\cdot}4$ Kilogramm stärker getrieben, als zur Ueberwindung sämmtlicher Widerstände mit Einschluss des atmosphärischen Gegendruckes nothwendig ist; es muss demnach die Bewegung sogleich beginnen, so wie die Communikation zwischen Kessel und Cylinder hergestellt wird.

Die Bewegungsveränderungen, welche Anfangs eintreten, sind so complizirt, dass sie selbst mit raffinirten analytischen Hilfsmitteln kaum verfolgt werden können; wir müssen daher auf eine Erklärung der Erscheinungen während des Anlaufes verzichten und uns damit begnügen, den Beharrungszustand genauer kennen zu lernen.

Es ist klar, dass die Bewegung vom Anfange an mit wachsender Geschwindigkeit erfolgen wird. Die Geschwindigkeitszunahme kann jedoch nur bis zu einer gewissen Grenze steigen, denn mit jedem Kolbenschub wird ein Cylinder voll Dampf aus dem Kessel, so zu sagen, herausgepumpt; wenn die Kolbengeschwindigkeit einmal eine gewisse Grenze erreicht hat, wird daher während eines Schubes eben so viel Dampf aus dem Kessel entfernt, als in der gleichen Zeit durch die Verdampfung des Wassers entsteht, und so wie dieser Zeitmoment eingetreten ist, kann sich auch die Spannung des Dampfes im Kessel nicht mehr ändern. Man sieht also zunächst, dass die Geschwindigkeit der Bewegung so lange zunehmen wird, bis die Dampfconsumtion eben so gross geworden ist, als die Dampfproduktion, und dass sodann, im Mittel genommen, eine gleichförmige Bewegung, d. h. ein Beharrungszustand eintreten wird. Allein die Unveränderlichkeit der Dampfspannung ist nur möglich, wenn, im Mittel genommen, der Druck des Dampfes gegen den Kolben mit sämmtlichen Widerständen im Gleichgewicht ist. Wenn also der Beharrungszustand eingetreten ist, zeigen sich folgende Erscheinungen.

1) Es geschehen alle einzelnen Kolbenschube in gleichen Zeiten, und die der Reihe nach vorkommenden Bewegungszustände der Maschine sind bei einem Kolbenschub wie bei jedem andern. 2) Dampferzeugung und Dampfverbrauch sind während eines Kolbenschubes gleich gross. 3) Die Spannung des Dampfes ist unveränderlich und so gross, dass der Druck auf dem Kolben im Mittel genommen den sämmtlichen Widerständen das Gleichgewicht hält.

Diese Dampfspannung, welche im Beharrungszustand eintritt, kann auf folgende Art bestimmt werden. Da am Anfange und am Ende eines Kolbenschubes die Bewegungszustände der Maschine vollkommen übereinstimmen, so muss die Wirkungsgrösse, welche der hinter dem Kolben wirkende Dampfdruck während eines Schubes entwickelt, eben so gross

sein, als die Wirkungsgrösse, die durch sämmtliche Widerstände während eines Schubes consumirt wird. Nennt man nun x den unbekannten Druck des Dampfes auf einen Quadrat-Centimeter, so ist der Druck auf die ganze Kolbenfläche von $^1/_{10}$ Quadrat-Meter oder 1000 Quadrat-Centimeter Oberfläche 1000 x Kilogramm; hievon sind aber wegen des Luft- und Reibungswiderstandes $1{\cdot}6 \times 1000$ Kilogramm abzuziehen; es ist demnach die Kraft, mit welcher auf den Kurbelzapfen gewirkt wirkt: $1000\ x - 1{\cdot}6 \times 1000 = 1000\ (x - 1{\cdot}6)$ Kilogramm, und da diese Kraft während eines Schubes um die Länge desselben fortschreitet, so beträgt die Wirkungsgrösse für einen Schub $1000\ (x - 1{\cdot}6)\ l$ Kilogramm-Meter, wobei l die Länge des Schubes bezeichnet. Nun ist aber der auf den Kugelzapfen reduzirte Widerstand der Mühle 2000 Kilogramm und dieser Widerstand wird während eines Schubes durch die halbe Peripherielänge des Kurbelkreises, also durch einen Weg $\frac{1}{2}\ l\ \pi$ überwunden; die Wirkungsgrösse, welche der Ueberwindung der Widerstände der Mühle entspricht, ist demnach $\frac{1}{2}\ l\ \pi\ 2000 = 1000\ l\ \pi$; es besteht demnach folgende Gleichheit: $1000\ (x - 1{\cdot}6)\ l = 1000\ l\ \pi$ und hieraus folgt: $x = \pi + 1{\cdot}6 = 3{\cdot}142 + 1{\cdot}6 = 4{\cdot}742$ Kilogramm. Dies ist demnach der Druck, welchen der Dampf auf jeden Quadrat-Centimeter der Kolbenfläche ausübt, wenn einmal der Beharrungszustand der Bewegung eingetreten ist. Von diesem Dampf wiegt 1 Kubik-Meter 2·4 Kilogramm; die Dampfmenge von $\frac{1}{10}$ Kilogramm, welche per 1 Secunde produzirt und consumirt wird, nimmt demnach ein Volumen ein gleich $\frac{0{\cdot}1}{2{\cdot}4} = \frac{1}{24}$ Kubik-Meter, und so gross ist auch das Volumen, welches der Kolben in jeder Sekunde beschreibt. Nun ist aber, der Voraussetzung gemäss, der Querschnitt des Cylinders $\frac{1}{10}$ Quadrat-Meter und der Kolbenschub $0{\cdot}4166 = \frac{1}{2{\cdot}4}$ Meter; folglich das Volumen, das der Kolben bei einem Schub beschreibt $\frac{1}{10} \times \frac{1}{2{\cdot}4} = \frac{1}{24}$ Kubik-Meter, also genau so gross, als das Volumen, das der Kolben in einer Sekunde beschreiben muss. Somit ergibt sich, dass bei den angenommenen Verhältnissen der Kolben in jeder Sekunde genau einen ganzen Schub machen wird, oder dass die Schwungradswelle in jeder Minute 30 Mal umgehen wird. Auf ähnliche Weise, wie so eben verfahren wurde, kann man jederzeit die Spannung des Dampfes und die Geschwindigkeit des Ganges der Maschine bestimmen.

Obgleich ein Kolbenschub wie jeder andere erfolgt, so ist doch die Geschwindigkeit der Maschine während eines Kolbenschubes nicht

unveränderlich, es bleibt uns daher noch zu untersuchen übrig, wie sich die Geschwindigkeit des Schwungrades während jedes Kolbenschubes verändert.

Zur Erleichterung dieser Untersuchung wollen wir annehmen, dass die Schubstange im Verhältniss zur Kurbel ausserordentlich lang sei, so dass wir annehmen dürfen, ihre Richtung E D (Fig. 7, Taf. IV.) bleibe zum Durchmesser A B des Kurbelkreises stets parallel.

Wir haben gefunden, dass im Beharrungszustand der in der Schubstange wirkende Druck $1000\ (x - 1{\cdot}6) = 1000\ \pi = 3142$ Kilogramm beträgt. Bezeichnen wir diesen Druck mit P und zerlegen denselben in zwei Kräfte P sin. φ = H D und P cos. $\varphi = \overline{F\ D}$, von denen die erstern nach der Richtung der Tangente, und die letztern nach der Richtung des Radius wirkt, so ist klar, dass P cos. φ keinen Einfluss auf die Bewegung ausüben kann. Nennen wir ferner Q = 2000 Kilogramm den auf den Kurbelzapfen reduzirten Widerstand der Mühle, so ist klar, dass die Bewegung derselben so erfolgen wird, wie wenn nach der Richtung H D der Tangente in jedem Augenblick eine Kraft P sin. φ — Q treibend wirkte. Nun ist aber diese Differenz mit dem Winkel φ veränderlich, und somit ist klar, dass die Bewegung nicht gleichförmig erfolgen kann. Um die Bewegungsveränderungen der Maschine anschaulich zu machen, wollen wir eine graphische Darstellung derselben zu Hilfe nehmen, indem wir die Bogenlänge A D als Abscissen, und die jeder Bogenlänge entsprechenden Werthe von P sin. φ, von Q und von der lebendigen Kraft der Massen der Maschine als Ordinaten auftragen. Auf diese Weise erhalten wir die Figur 2 Tafel V und es bedeutet in derselben A Z die halbe Peripherie des Kurbelkreises, A a = B b = D d_2 = C c = Z z = Q = 2000 Kilogramm den auf den Umfang des Kurbelkreises reduzirten unveränderlichen Widerstand der Mühle. Die Ordinaten der Linie A b d c z sind die Werthe der veränderlichen Kraft P sin. φ, welche für $\varphi = 90°$ ihren grössten Werth D d = 3142 Kilogramm erreicht, und in den Punkten b und c dem Widerstand Q gleich ist. Die Ordinaten der Kurve a_1 b_1 d_1 c_1 z_1 sind die lebendigen Kräfte sämmtlicher Massen der Maschine in den auf einander folgenden Zeitmomenten der Bewegung. Von A bis B ist der Widerstand Q fortwährend grösser, als die Kraft P sin. φ, es muss also die lebendige Kraft vom Beginne des Schubes an abnehmen, bis der Weg A B zurückgelegt ist. Von B bis C ist dagegen die Kraft fortwährend grösser, als der Widerstand, die lebendigen Kräfte der Massen der Maschine müssen daher von B bis C ohne Unterbrechung wachsen. Von C bis Z wirkt wiederum der Widerstand stärker, als die Kraft; die lebendige Kraft nimmt daher ab, bis sie zuletzt so gross wird, als sie anfangs war. Da nun die lebendige Kraft von A bis B abnimmt, von B bis C wächst, und

zuletzt von C bis Z wiederum abnimmt, so muss sie bei B ein Minimum und bei C ein Maximum erreichen. Weil in B und C Kraft und Widerstand gleich gross sind, so hat man zur Bestimmung dieser Punkte $P \sin. \varphi = Q$ und da $P = 3142$ und $Q = 2000$ ist, so findet man: $\sin. \varphi = \frac{2000}{3142} = \frac{2}{\pi}$. Diesem Werth von $\sin. \varphi$ entsprechen die zwei Winkel $39^\circ + 32'$ und $180^\circ - (39^\circ + 32')$. Der erstere derselben bestimmt die Stellung der Kurbel, welche dem Punkt B, also dem Minimum der lebendigen Kraft entspricht; der zweite Winkel dagegen den Punkt C, wo das Maximum der lebendigen Kraft eintritt. Die Aenderung der lebendigen Kraft ist in den Punkten A, D und Z, in welchen die Differenz zwischen Kraft und Widerstand die grössten Werthe hat, am grössten.

Die Bewegung erfolgt also in der Weise, dass die lebendige Kraft vom Beginn des Kurbelkreises an abnimmt, bis die Kurbel einen Winkel von $39^\circ + 32'$ zurückgelegt hat, dass sie daselbst ein Minimum erreicht und hierauf wiederum fortwährend wächst, bis sie, wenn die Kurbel den Winkel $180 - (39^\circ + 32')$ beschrieben hat, ein Maximum erreicht, und endlich von da an wiederum bis zu ihrem anfänglichen Werth abnimmt. Die Flächeninhalte des Rechteckes A a Z z und der krummlinigen Figur A b d c Z drücken die Wirkungsgrössen aus, welche während eines ganzen Schubes von den Widerständen der Mühle consumirt und von der Kraft P produzirt werden. Diese beiden Flächeninhalte sind demnach gleich gross. Werden alle Längen und Flächeninhalte in Zahlen ausgedrückt, so ist ferner 1) der Flächeninhalt des Dreiecks A a b gleich dem Unterschied der Ordinaten A a_1 und B b_1; 2) der Flächeninhalt der Figur b d c d_2 b gleich dem Unterschied der Ordinaten C c_1 und B b_1; endlich 3) der Flächeninhalt des Dreiecks c Z z gleich dem Unterschied der Ordinaten C c_1 und Z z_1, denn diese Flächeninhalte sind die Differenzen zwischen den von A bis B, von B bis C und von C bis Z produzirten und consumirten Wirkungsgrössen, müssen also den Aenderungen der lebendigen Kraft gleich sein. So viel die Massen an lebendiger Kraft von A bis B und von C bis Z verlieren, eben so viel gewinnen sie von B bis D und von D bis C. Von A bis B und von C bis Z helfen die Massen mit treiben, von B bis C, wo ihre Geschwindigkeit zunimmt, werden sie getrieben.

Um den Einfluss kennen zu lernen, den die Grösse des Dampfcylinders, die Verdampfung die Widerstände und die Massen der Maschine auf die Bewegung haben, müssen wir auf ähnliche Weise, wie es früher bei der durch ein Wasserrad getriebenen Mahlmühle der Fall war, eine Reihe von Versuchen vornehmen, indem wir bei jedem derselben eines der genannten Elemente verändern.

17) ***Zweiter Versuch. Einfluss der Verdampfung.*** Wir wollen die Einrichtung und die Massen der Maschine und ferner noch den auf die Kurbel reduzirten Widerstand ungeändert lassen, dagegen eine noch einmal so grosse Dampfproduktion annehmen, nehmen also an, dass in jeder Sekunde $^2/_{10}$ Kilogramm Wasser in Dampf verwandelt werden, und dass die Communikation zwischen Kessel und Cylinder erst dann hergestellt werde, wenn im Kessel eine Spannung von 5 Atmosphären eingetreten ist.

Wir übergehen zunächst die Erscheinungen des Anlaufes und betrachten nur die Bewegungen, wenn einmal der Beharrungszustand eingetreten ist, was dann der Fall sein wird, wenn 1) alle Kolbenspiele auf identische Weise erfolgen; 2) Kraft und Widerstände in's Gleichgewicht gekommen sind, und wenn 3) Dampfverbrauch und Dampfentwicklung gleich gross geworden sind.

Da der auf den Kurbelkreis reduzirte Widerstand nicht geändert wurde, so muss im Beharrungszustand die Dampfspannung eben so gross sein als beim ersten Versuch, bei welchem der Druck per 1 Quadrat-Centimeter 4·724 Kilogramme betrug. Weil nun die Dichte des Dampfes ungeändert geblieben ist, die Dampfproduktion aber der Voraussetzung zur Folge verdoppelt wurde, so muss nun der Kolben der Maschine offenbar noch einmal so schnell gehen, als beim ersten Versuch. Man sieht also, dass die Geschwindigkeit der Maschine, wenn alles Uebrige ungeändert bleibt, der Dampfproduktion genau proportional ist.

Will man auch diese Erscheinungen des Beharrungszustandes durch eine graphische Darstellung anschaulich machen, so erhält man eine Figur, die von Fig. 2 Taf. V. einzig und allein nur darin abweicht, dass die Linie a_1 b_1 d_1 c_1 z_1, welche der lebendigen Kraft entspricht, weiter hinaufgerückt erscheinen wird. In der Figur, welche die Erscheinungen des Beharrungszustandes im zweiten Versuch darstellt, müssen nämlich, weil die mittlere Geschwindigkit der Bewegung noch einmal so gross ist, als beim ersten Versuch, die Ordinaten A a_1, D d_1, Z z_1 viermal so lang sein als in Fig. 2. Die Gestalt der Linie a_1 b_1 d_1 c_1 z_1 erleidet aber nicht die geringste Aenderung, indem die Linie, welche Kraft und Widerstand darstellen, ungeändert geblieben sind.

Weil aber die Differenzen der lebendigen Kräfte (die nach den Quadraten der Geschwindigkeit zu messen sind) in beiden Versuchen gleich gross, die Geschwindigkeiten aber beim zweiten Versuch grösser sind, als beim ersten, so folgt daraus, dass die Differenz zwischen der grössten und kleinsten Geschwindigkeit, und dass insbesondere auch das Verhältniss zwischen dieser Differenz und der mittleren Geschwindigkeit, wornach der Gleichförmigkeitsgrad der Bewegung zu beurtheilen ist, bei dem zweiten Versuch (beim schnellen Gang der Maschine) kleiner sein