Redtenbachers
Prinzipien
d. Mechanik

PRINZIPIEN

DER

MECHANIK UND DES MASCHINENBAUES.

Von

F. Redtenbacher,
Professor.

Mit fünf lithographirten Tafeln.

Mannheim.
Verlag von *Friedrich Bassermann.*

1852.

Druck von *Malsch und Vogel* in Carlsruhe.

VORREDE.

Das vorliegende Werk behandelt die allgemeinen Prinzipien der Mechanik und des Maschinenbaues im Wesentlichen in derjenigen Weise und in dem Umfang, wie sie der Verfasser als allgemein wissenschaftliche Einleitung in das spezielle Studium des Maschinenwesens an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe vorträgt.

Auswahl und Behandlungsweise der Gegenstände sind theils durch die Vorkenntnisse der Zuhörer, theils durch das zu erreichende praktische Ziel hervorgerufen worden.

Diese Zuhörer haben Alle schon einmal Vorträge über Statik und Mechanik, und theilweise selbst auch über Maschinenlehre angehört; aber fast jeder in anderer, und viele in solcher Weise, wie es für das Studium des Maschinenwesens nicht geeignet ist.

Die Ungleichartigkeit und oftmals nicht genügende Gründlichkeit der Vorkenntnisse machte es durchaus zur Nothwendigkeit, mit den Prinzipien der Mechanik von Neuem zu beginnen, und dabei insbesondere diejenigen Lehren hervorzuheben, deren gründliches Verständniss den Erfolg dieses Studiums allein zu sichern vermag.

Aber obgleich diese Arbeit zunächst nur durch lokale Verhältnisse veranlasst wurde, so dürfte dieselbe doch weiter verbreiteten Bedürfnissen entsprechen, denn das denkende Erfassen der Prinzipien einer Wissenschaft und insbesondere der Prinzipien der Mechanik erfordert eine mehrmalige Wiederholung und Anwendung derselben, und die lokalen Erscheinungen entspringen oftmals aus sehr allgemein wirkenden Ursachen.

Carlsruhe, im März 1852.

Der Verfasser.

INHALT.

Dynamik der relativen Bewegung.

Allgemeine Bewegungsgesetze.

Das Gesetz der Thätigkeit der Kräfte.

Gesetze der Bewegung des Schwerpunktes eines Massensystems

Die Reibung.

II. Theil.

Prinzipien des Maschinenbaues.

Maschinenzeichnungen.

I. Theil.

Prinzipien der Mechanik.

Erster Abschnitt.

Die Bewegung als Erscheinung.

(Phoronomie.)

1) *Ruhe und Bewegung.* Ein Körper ist in Ruhe, wenn er seinen Ort im Raume nicht ändert, also an einem gewissen Ort verharret. Ein Körper ist in Bewegung, wenn er seinen Ort im Raum stetig ändert.

Wir betrachten zunächst dieses Beharren im Ort oder dieses Verändern des Ortes als Erscheinung, ohne an die Ursachen zu denken, durch welche Ruhe oder Bewegung hervorgebracht wird. Ruhe und Bewegung können absolut oder relativ gedacht werden. Ersteres ist der Fall, wenn der Zustand eines Körpers auf einen absolut ruhenden, letzteres wenn derselbe auf einen in Bewegung befindlichen Körper bezogen wird. Es gibt vielleicht keinen absolut ruhenden Körper. Alle Bewegungen sind in der Wirklichkeit absolute Bewegungen. Die relativen Bewegungen sind abstrakte Vorstellungen, aber gleichwohl sind die Bewegungen, welche man zu betrachten hat, der Mehrzahl nach relative Bewegungen.

2) *Bewegung eines Punktes.* Das, was sich in der Wirklichkeit bewegt, ist ein Körper oder eine Verbindung von Körpern. Die Bewegung des Ganzen kann nur dadurch mit vollkommener Genauigkeit und Schärfe bestimmt werden, wenn die Bewegung jedes einzelnen Punktes des Ganzen angegeben wird. Wir müssen daher zunächst die Bewegung eines isolirt gedachten Punktes ins Auge fassen, und dabei haben wir zu berücksichtigen: 1) die Bahn, welche der Punkt beschreibt, d. h. die Linie längs welcher sich der Punkt bewegt, indem derselbe seinen Ort im Raum mit Stetigkeit verändert. 2) Den Zustand, in welchem sich der Punkt in jedem Zeitaugenblick seiner Bewegung befindet. Ist demnach die Bahn und der Bewegungszustand für jeden Augenblick der Bewegung bekannt, so ist die Bewegung, als Erscheinung betrachtet, vollkommen bestimmt.

3) *Die Bahn,* welche ein Punkt beschreibt, kann geradlinig oder krummlinig sein. Diese Bahn kann ferner eine endlos fortlaufende oder in sich selbst zurückkehrende (geschlossene) sein. Die Bahn kann endlich von einem ganz isolirten körperlichen Punkt beschrieben werden, und dann ist ihre Gestalt eine Folge der Kräfte, welche während der

Bewegung thätig sind; oder sie kann von einem Punkt beschrieben werden, der mit gewissen Körpern in ganz bestimmtem geometrischem Zusammenhang steht, und dann ist die Gestalt der Bahn ganz unabhängig von den die Bewegung begleitenden Kräften, und richtet sich nur allein nach dem bestehenden geometrischen Zusammenhang. In ersterem Falle nennt man die Bewegung eine freie Bewegung, in letzterem eine gezwungene, oder besser erzwungene. Es liegt im Wesen der Maschinen, dass bei denselben in der Regel nur gezwungene Bewegungen vorkommen, und dass die Bahnen geschlossen sind. Eine Maschine darf nur eine gewisse Art von Bewegung machen können, weil sie nur für eine ganz bestimmte und eingeschränkte Thätigkeit bestimmt ist. Wegen der Bestimmtheit muss die Bewegung erzwungen, wegen der Beschränktheit müssen die Bahnen geschlossen sein. Die Bestimmung der Gestalt der Bahn ist daher bei den Maschinen in den meisten Fällen nur eine verhältnissmässig einfache geometrische Aufgabe.

4) *Die Bewegung in der Bahn. Geschwindigkeit.* Jede Bewegung erfolgt mit Stetigkeit im Raum und in der Zeit; d. h. die aufeinander folgenden Orte, nach welcher der Punkt in seiner Bewegung gelangt, bilden eine stetige Linie, und der Uebergang von einem Punkt der Bahn nach einem andern geschieht nicht in einem untheilbaren Zeitmoment, sondern in einer gewissen grössern oder kleinern Zeitintervalle. Wir erhalten eine Vorstellung von der Lebhaftigkeit oder Raschheit oder Geschwindigkeit der Bewegung, wenn wir den Weg, den der Punkt zurücklegt, mit der Zeit vergleichen, in welcher diese Erscheinung vor sich geht oder vor sich gehend gedacht wird; und je nachdem der Bewegungszustand ein sich stets gleichbleibender oder ein sich stets nach irgend einem Gesetz verändernder ist, nennen wir die Bewegung eine gleichförmige oder ungleichförmige.

5) *Gleichförmige Bewegung.* Wenn eine Bewegung gleichförmig erfolgt, d. h. wenn bei derselben die Bewegungszustände des Punktes in allen aufeinander folgenden Zeitmomenten ganz identisch sind, so müssen in allen gleich grossen Zeitintervallen gleich grosse Wege zurückgelegt werden, und die in zwei ungleichen Zeitintervallen zurückgelegten Wege müssen sich wie die Zeitintervalle verhalten. Nennt man **C** den Weg, der in jeder Sekunde und **S** den Weg, der in der Zeit von **T** Sekunden zurückgelegt wird, so geht aus dem Begriffe der gleichförmigen Bewegung hervor, dass:

$$\left.\begin{aligned} S &= C\,T \\ C &= \frac{S}{T} \\ T &= \frac{S}{C} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und der in jeder Sekunde zurückgelegte Weg **C** kann als das Maass der Geschwindigkeit genommen werden.

Man findet also die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung, indem man den Weg misst, der in irgend einer Sekunde zurückgelegt wird, oder auch, indem man den Weg misst, der in irgend einer grössern oder kleinern Zeit zurückgelegt wird, und denselben durch diese Zeit dividirt. Man kann sich die Bewegungsgesetze durch graphische Darstellungen versinnlichen, indem man die Zeiten als Abscissen und die zugehörigen Geschwindigkeiten als Ordinaten aufträgt; die gleichförmige Bewegung stellt sich dann als eine zur Abscissenaxe parallele Linie, a b c z, Tafel I. Fig. 1, dar, weil alle Geschwindigkeiten, und mithin auch alle Ordinaten **Aa Bb Cc** — gleich gross zu nehmen sind.

6) *Gleichförmig beschleunigte Bewegung.* Eine Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit in gleichen Zeitintervallen um gleich viel, oder proportionell mit der Zeit wächst, nennt man eine gleichförmig beschleunigte Bewegung (gleichmässig anwachsende Bewegung). Graphisch dargestellt erscheint dieselbe als eine gegen die Abscissenaxe geneigte gerade Linie **Az** Fig 2. Nennt man g die Geschwindigkeitszunahme in jeder Sekunde, und **C T S** wie früher, so hat man zunächst:

$$C = g\,T \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Der Raum, welcher in der Zeit **T** zurückgelegt wird, ergibt sich, wie aus folgenden Betrachtungen erhellen wird, durch Berechnung des Flächeninhaltes des Dreiecks **A Z z.**

Man kann nämlich die während eines unendlich kleinen Zeittheilchens **M N** erfolgende Bewegung als eine mit der Geschwindigkeit **M m** geschehende gleichförmige Bewegung betrachten, und dann findet man das im Zeitelement **M N** zurückgelegte Wegelement durch das Produkt $\overline{MN} \times \overline{Mm}$ oder durch den Flächeninhalt des Trapezes **Mm Nn.** Theilt man nun dies Dreieck durch unendlich viele Ordinaten in unendlich viele, unendlich schmale Streifen, so geben die Flächeninhalte derselben die Wegelemente, welche in den Zeitelementen beschrieben werden, und die Summe aller Flächeninhalte, d. h. der Flächeninhalt des ganzen Dreiecks gibt die Summe aller Wegelemente oder den ganzen Weg:

Ist also: $\overline{AZ} = T$, $\overline{Zz} = g\,T$, so folgt:

$$S = \tfrac{1}{2}\,\overline{AZ} \times \overline{Zz} = \tfrac{1}{2}\,g\,T^2 \quad \ldots \quad (3)$$

7) *Gleichförmig verzögerte Bewegung.* Dies ist eine Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit in jeder Sekunde um gleich viel abnimmt. Dieselbe wird durch eine gegen die Abscissenlinie niedergehende

gerade Linie dargestellt. Ist $C = \overline{Aa}$ Fig. 3 die Geschwindigkeit in irgend einem bestimmten Zeitaugenblick. $\underline{\ \ }g$ die Abnahme der Geschwindigkeit in jeder Sekunde. $V = \overline{Zz}$ die Geschwindigkeit nach Verlauf von $T = \overline{AZ}$ Sekunden, so hat man:

$$V = C - g\,T \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Der in der Zeit T zurückgelegte Weg S wird hier wiederum durch den Flächeninhalt $\overline{Aa\,Zz}$ der Fig. 3 ausgedrückt. Man hat daher

$$S = \tfrac{1}{2}\,\overline{AZ}\,\{Aa + Zz\}$$

oder: $$S = \tfrac{1}{2}\,T\,\{C + C - g\,T\}$$

demnach: $$S = C\,T - \tfrac{1}{2}\,g\,T^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

8) *Ungleichförmig beschleunigte Bewegung.* Jede Bewegung, bei welcher die in gleichen Zeitintervallen eintretenden Geschwindigkeitsänderungen nicht gleich gross sind, wird eine ungleichförmig beschleunigte genannt, wenn die Geschwindigkeit zunimmt, und eine ungleichförmig verzögerte, wenn die Geschwindigkeit abnimmt. Graphisch dargestellt erscheint diese Bewegung als eine krumme Linie a z (Fig. 4 und 5). Fig. 4 repräsentirt eine beschleunigte Bewegung, weil die Ordinaten (die Geschwindigkeiten) von A an bis Z hin wachsen. Fig. 5 repräsentirt eine verzögerte (abnehmende) Bewegung, indem die Ordinaten immer kleiner und kleiner werden, je mehr die Abscissen (Zeiten) wachsen. Ist das Gesetz bekannt, nach welchem sich die Geschwindigkeit mit der Zeit ändert, so kann die entsprechende Bewegungsfigur leicht dargestellt werden, und dann findet man durch Berechnung ihres Flächeninhaltes den Weg, welcher in einem bestimmten Zeitraum zurückgelegt wird. Denn während eines unendlich kleinen Zeitelements M N (Fig. 5) kann man die Bewegung als mit der Geschwindigkeit M m gleichförmig geschehend ansehen, und dann ist $\overline{Mm} \times \overline{MN}$, d. h Flächeninhalt M N m n der im Zeittheilchen M N zurückgelegte Weg. Theilt man also die ganze Figur durch unendlich viele Ordinaten, so sind die Flächeninhalte der Streifen die Wege, welche in den aufeinander folgenden Zeittheilchen zurückgelegt werden, und die Summe dieser Flächeninhalte, d. h. der Flächeninhalt A a Z z der ganzen Figur, ist der Weg, der in der Zeit A Z zurückgelegt wird.

Um sich ohne Hilfe einer graphischen Darstellung die bei einer ungleichförmigen Bewegung in irgend einem Zeitaugenblick stattfindende Geschwindigkeit anschaulich zu machen, muss man sich vorstellen, dass der bewegliche Punkt während einer ganzen Secunde in dem Bewegungszustand verbleibe, der in dem gewissen Augenblick vorhanden ist, und dann bestimmt der in dieser Secunde mit unveränderlicher Geschwindigkeit zurückgelegte Weg die Geschwindigkeit des Bewegungszustandes, welcher am Anfang dieser Zeitsekunde vorhanden war.

9) *Periodisch schwingende Bewegung.* Es gibt unzählige Arten von ungleichförmigen Bewegungen. Von besonderem, sowohl von wissenschaftlichem als auch von praktischem Interesse sind die periodischen und schwingenden Bewegungen. Die Wellenbewegung des Wassers, die Bewegungen der Luft, welche in uns die Empfindung des Tones und Schalles hervorrufen; die Bewegungen des Aethers, auf welchen die Lichterscheinungen, und wahrscheinlich auch die Wärme und Elektrizitäts-Erscheinungen beruhen; die Bewegung der Planeten um die Sonne gehören in die Klasse der periodischen und schwingenden Bewegungen. Aber nicht nur allein die Bewegungen, welche der Physiker und der Astronom zu betrachten hat, sondern auch jene, welche bei den Maschinen vorkommen, sind der Mehrzahl nach entweder gleichförmige oder periodisch schwingende, denn es liegt im Wesen einer jeden Maschine, dass sie nur eine ganz bestimmte Function oder Arbeit zu verrichten bestimmt sein kann, ihr Bewegungszustand wird also während sie arbeitet entweder immer fort der gleiche bleiben, oder wiederkehrend veränderlich sein. Die folgenden, durch Figuren erläuterten Beispiele werden genügend sein, von den mannigfaltigen schwingenden Bewegungen eine klare Vorstellung hervorzurufen. In allen diesen Figuren sollen, wie bisher immer geschehen ist, die Abscissen die Zeiten und die Ordinaten die Geschwindigkeiten vorstellen.

Fig. 6 stellt eine periodisch wiederkehrende hin und her schwingende Bewegung dar. Die ganze Dauer der Periode ist A Z, und zerfällt in zwei gleiche Hälften: A M und M Z. Da die Geschwindigkeiten in der zweiten Hälfte negativ sind, so deutet dies darauf hin, dass die Bewegungsrichtung während der Zeit M Z jener, die in der Zeit A M statt findet, entgegengesetzt ist. Man wird leicht finden, dass diese Schwingung mit der eines Pendelpunktes übereinstimmt. A M entspricht einer Hin-, M Z der darauf folgenden Herschwingung. A entspricht dem Anfang der Schwingung, die Geschwindigkeit ist in diesem Augenblick = o. B entspricht dem Moment, wann der Pendelpunkt die grösste Geschwindigkeit erreicht hat u. s. w. Aehnlich der Pendelschwingung sind alle diejenigen Schwingungen, welche um eine Gleichgewichtsposition eines Punktes erfolgen. Bei derartigen Schwingungen ist der schwingende Punkt stets bemüht, in seine Gleichgewichtsposition zurückzukehren, ohne dass ihm sein Vorhaben dauernd gelingt.

Fig 7 stellt eine periodisch schwingende Bewegung dar, die als eine regelmässig gestörte gleichförmige Bewegung betrachtet werden kann. Man kann sich nämlich die Sache so vorstellen, als wenn der Punkt das Bestreben hätte, sich unausgesetzt mit der Geschwindigkeit A a gleichförmig fortzubewegen, und als würde er durch irgend eine regelmässig wirkende Ursache fort und fort von seinem Ziele abgelenkt, so dass es ihm nur in einzelnen Zeitmomenten bei a, m, z gelingt, diese normale Geschwindigkeit zu erreichen. Die gerade Linie a m z drückt so zu sagen eine ideale gleichförmige Bewegung aus, um welche der Punkt in seiner wirklichen Bewegung a b m c z herumschwingt.

Fig. 8 stellt eine schwingende Bewegung dar, die als eine gestörte gleichförmig beschleunigte Bewegung betrachtet werden kann. Die Bewegung hat das Ansehen, als wollte der Punkt die gleichförmig beschleunigte Bewegung machen, welche der geraden Linie A b e d entspricht, und als würde er in diesem Bestreben regelmässig gestört, so dass der wirkliche Bewegungszustand um den gleichförmig beschleunigten herumschwankt.

Fig. 9 ist eine gestörte gleichförmig verzögerte Bewegung. Die wirkliche Bewegung des Punktes erfolgt nämlich abwechselnd schneller und langsamer als die gleichförmig verzögerte Bewegung, welche der geraden Linie a b c d entsprechen würde.

Fig. 10. Hier schwankt die wirkliche, durch die wellenförmige Linie dargestellte Bewegung um eine ungleichförmig beschleunigte durch die punktirte Linie a b c d dargestellte Bewegung herum

Fig. 11. Diese Bewegung hat Aehnlichkeit mit der vorhergehenden, unterscheidet sich aber von derselben dadurch, dass hier die Abweichungen oder Schwankungen ungleich gross sind. Diese Abweichungen wachsen nämlich anfangs bis zu einer gewissen Grenze, nehmen dann wiederum ab und verlieren sich zuletzt fast ganz, so dass also der wirkliche Bewegungszustand immer mehr und mehr den schwankenden Zustand verliert und in einen ungleichförmig beschleunigten übergeht.

10) *Drehende Bewegung eines festen Körpers.* Wenn ein fester Körper sich um eine mit demselben unveränderlich verbundene ihrer Lage nach unbewegliche Axe dreht, bleibt die Lage jedes Punktes des Körpers gegen die Drehungsaxe unverändert, und jeder Punkt des Körpers bewegt sich dabei in einem Kreis, dessen Halbmesser gleich ist seiner Entfernung von der Axe, dessen Mittelpunkt in der Drehungsaxe liegt und dessen Ebene auf der Axe senkrecht steht. Bei jeder Umdrehung der Axe beschreibt jeder Punkt einen vollständigen Kreis. Alle in gleicher Entfernung von der Axe befindlichen Punkte beschreiben gleich grosse Kreise, ihre Geschwindigkeiten sind demnach gleich gross. Die Geschwindigkeit zweier Punkte, welche sich in ungleicher Entfernung r und R von der Axe befinden, beschreiben Kreise von ungleicher Grösse, ihre Geschwindigkeiten werden daher nicht gleich gross sein, sondern werden

sich verhalten wie die Längen der Peripherien dieser Kreise, mithin wie die Halbmesser oder wie die Entfernungen r und R. Um nun sowohl die Geschwindigkeit der drehenden Bewegung des ganzen Körpers, als auch die jedes einzelnen Punktes anzugeben, braucht man nur zu wissen, wie gross die Geschwindigkeit eines um die Längeneinheit von der Axe entfernten Punktes ist, d. h. man braucht nur den Weg zu kennen, den ein solcher Punkt in jeder Secunde zurücklegt, denn man findet dann die Geschwindigkeit eines in einer Entfernung r von der Axe befindlichen Punktes, wenn man jene, die in der Entfernung Eins statt findet r mal grösser nimmt. Man nennt die Geschwindigkeit, mit welcher sich ein in der Entfernung Eins befindlicher Punkt bewegt, die Winkelgeschwindigkeit der drehenden Bewegung. Bezeichnet man dieselbe mit w, so findet man die Geschwindigkeit für einen Punkt, dessen Entfernung von der Axe r ist durch

$$w\, r.$$

Durch die Winkelgeschwindigkeit wird zwar die drehende Bewegung vollkommen bestimmt, aber dennoch ist diese Messungsart für technische und überhaupt practische Zwecke nicht passend, indem dieselbe keine lebhafte Anschauung hervorruft. Wenn man z. B. sagt: die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher ein Körper sich dreht sei 3 Metres, so wird gewiss Jedermann ziemlich lange zu thun haben, um eine sinnlich lebhafte Vorstellung von der Raschheit dieser drehenden Bewegung zu erhalten, und dies kommt daher, weil man fast nie in den Fall kommt, diese Winkelgeschwindigkeit verwirklicht vor Augen zu haben.

Tritt man vor eine in Bewegung befindliche, mit Axen und Rädern versehene Maschine, so erhält man zunächst von der Raschheit der drehenden Bewegungen eine sinnliche Vorstellung, und wenn man diese Geschwindigkeit so messen will, dass das Maass der Vorstellung, und dass die Vorstellung das Maass hervorzurufen im Stande sein soll, so denkt gewiss Niemand daran, dies durch die Winkelgeschwindigkeit erreichen zu wollen, sondern es ist klar, dass man angeben wird, wie oftmal eine jede Axe in einer bestimmten Zeit, z. B. in jeder Minute, sich umdreht. Das natürliche Gefühl leitet also dahin, die Schnelligkeit der drehenden Bewegung durch die Anzahl der in einer bestimmten Zeit erfolgenden Umdrehungen zu messen, und man darf sich daher nicht wundern, dass diese Messungsart in der technischen Praxis allgemein eingeführt worden ist; ja man hat sogar ohne alle Verabredung überall die gleiche Zeiteinheit gewählt, und zwar nicht der Sekunde, sondern der Minute, weil dieses Zeitenmaass den Vortheil gewährt, dass man es dann in den meisten und gewöhnlichen Fällen mit ganzen Zahlen zu thun hat, was fast nie der Fall wäre, wenn man sich der Sekunde bedienen würde. Wir werden also in der Folge die Geschwindigkeit der drehenden Bewegung durch die Anzahl der Umdrehungen, die in einer Minute gemacht werden, messen. Nennt man diese Anzahl n, so lässt sich ganz leicht die Umdrehungszahl n durch die Winkelgeschwindigkeit und umgekehrt berechnen. Denkt man sich nämlich einen Punkt, dessen Entfernung von der Drehungsaxe = 1 ist, so wird dieser bei einer Umdrehung des Körpers einen Weg 2π, bei n Umdrehungen $2\pi n$ zurücklegen; dies ist also der Weg, der in einer Minute, also in 60 Sekunden zurückgelegt wird. Demnach ist der in einer Sekunde zurückgelegte Weg, d. h. die Winkelgeschwindigkeit $\frac{2\pi n}{60}$. Man hat daher

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{2\pi}{60}\cdot n. \\ n &= \frac{60}{2\pi}\cdot w. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Nennt man ferner v die wahre Geschwindigkeit eines in der Entfernung r befindlichen Punktes, so hat man: $v = r\,w$ demnach auch.

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{2\pi}{60}\cdot nr. = 0{\cdot}10472.\ nr \\ n &= \frac{60}{2\pi}\cdot\frac{v}{r} = 9.548\,\frac{v}{r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

11) *Der mittlere Werth einer veränderlichen Grösse.* Der mittlere Werth einer veränderlichen Grösse ist ein gewisser constanter Werth, der in irgend einer Hinsicht das gleiche Resultat hervorbringt, wie die veränderliche Grösse. Beispiele werden diesen Begriff erklären.

Zwei Personen gehen gleichzeitig von einem gewissen Ort aus und verfolgen den gleichen Weg. Die eine Person A gehe ganz gleichförmig, die andere B hingegen sehr ungleichförmig fort, aber beide, nehmen wir an, erreichen das Ziel im gleichen Zeitmoment. Dann ist gewiss diese unveränderliche Geschwindigkeit von A von dem gleichen Werth, wie die veränderliche Geschwindigkeit von B, und desshalb ist die erstere der mittlere Werth der letztern. Stellen wir das so eben Ausgesprochene graphisch dar (Fig. 12), indem wir die Zeit durch die Abscissen und die Geschwindigkeiten durch die Ordinaten darstellen, so wird Aa$\mathfrak{Z}$Z die Bewegung der Person B und A$\mathfrak{A}\mathfrak{Z}$Z die Bewegung von A darstellen können, und weil beide in einerlei Zeit den gleich grossen Weg zurückgelegt haben, so muss der Flächeninhalt des Rechtecks A$\mathfrak{A}$Z$\mathfrak{Z}$ gleich sein dem Flächeninhalt der Figur AazZ.

Die mittlere Temperatur eines Ortes für einen gewissen Zeitraum, ist diejenige gleichförmige Temperatur, bei welcher in dem gleichen Zeitraum eine eben so grosse Wärme entwickelt würde, wie durch die wirklich statt findende veränderliche Temperatur Die Wärme, welche in einer gewissen Zeit producirt wird, ist aber offenbar der Intensität der Temperatur und der Zeitdauer ihrer Einwirkung proportional. Wenn wir nun die Sache wiederum graphisch durch die vorige Fig. 12 darstellen, so bedeuten die Ordinaten der Fig. AazZ die wirkliche veränderliche Temperatur, die in dem Zeitraum A Z statt findet, und dann ist der Flächeninhalt dieser Figur die totale Wärmemenge, die in der Zeit A Z entwickelt wird. Dagegen aber wird die Ordinate A$\mathfrak{A}$, oder die Höhe des Rechtecks $\mathfrak{A}$AZ$\mathfrak{Z}$, die mittlere Temperatur vorstellen, wenn der Flächeninhalt desselben jenem der Fig. AaZz gleich ist

Die mittlere Erhebung eines Landes, einer Insel z. B. ist diejenige Höhe, welche über die ganze Ausdehnung der Insel eintreten würde, wenn man durch Abgrabung der Berge und Ausfüllung der Thäler, eine vollkommene Horizontalfläche herstellte.

Diese mittlere Höhe findet man leicht durch Rechnung, indem man das Volumen des ganzen über das Wasser hervorragenden Erdkörpers, welcher die Insel bildet, durch den Flächeninhalt der durch die Uferlinie gebildeten Figur (Flächeninhalt der Insel) dividirt. Denn nennt man $\mathfrak{V}$ das Volumen der Insel, S ihren Flächeninhalt, und $\mathfrak{H}$ die mittlere Höhe so ist klar dass man hat

$$\mathfrak{V} = S\,\mathfrak{H},\ \text{mithin}\ \mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{V}}{S}$$

Diese drei Beispiele werden einstweilen genügen, um einen deutlichen Begriff von dem mittleren Werth einer Grösse zu erhalten. Allgemein kann man nun zur Bestimmung des mittleren Werthes einer veränderlichen Grösse folgende Regel aufstellen:

Es sei y eine von x abhängige veränderliche Grösse. Diese Abhängigkeit kann graphisch durch eine krumme Linie dargestellt werden, indem man (Fig. 12) die Werthe von $x = AP$ als Abscissen und die entsprechenden Werthe von $y = MP$ als Ordinaten aufträgt. Wenn nun x alle zwischen o und $AZ = x$ liegenden Werthe annimmt, so erhält man den diesen sämmtlichen Annahmen entsprechenden mittleren Werth der Ordinaten, indem man den Flächeninhalt der Fig. AaZz durch die Abscisse $AZ = x$ dividirt, oder mit andern Worten wenn man die Höhe eines Rechteks berechnet, dessen Flächeninhalt jenem der Fig. AaZz gleich und dessen Länge gleich A Z ist.

Mit Hilfe der Differenzialrechnung und Integralrechnung findet man den mittleren Werth (y_m) durch folgenden Ausdruck:

$$y_m = \frac{\int_{x=o}^{x=x} y\,dx}{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Dieser Ausdruck ist jedoch nur dann zur wirklichen Berechnung anwendbar, wenn die Abhängigkeit zwischen x und y durch eine analystische Formel gegeben ist, und wenn die Aenderungen von y innerhalb der Grenze x = o und x = x mit Stetigkeit erfolgen. In allen andern Fällen, und insbesondere dann, wenn y sprungweise veränderlich ist, muss man die Fig. A a Z z zuerst graphisch darstellen, und dann lässt sich ihr Flächeninhalt jederzeit leicht berechnen, indem man die ganze Figur in vertikale Streifen theilt, den Flächeninhalt derselben berechnet und ihre Summe bildet.

12) ***Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen.*** Die wirkliche Bewegung eines Punktes oder Körpers entsteht oftmals durch das gleichzeitige Zusammenwirken zweier oder mehrerer Bewegungen, welchen der Körper zu folgen gezwungen ist. Die Auffindung der wahren Bewegung aus den Einzelbewegungen nennt man die Zusammensetzung der Bewegungen, und diese zusammengesetzte Bewegung selbst wird die „resultirende Bewegung“ genannt.

Umgekehrt kann man jede wirkliche, durch was immer für Ursachen hervorgebrachte Bewegung, durch das gleichzeitige Auftreten von zweien oder mehreren Einzelbewegungen hervorbringen. Die Auffindung eines solchen Systems von gleichzeitig wirkenden Einzelbewegungen, die eine mit einer wirklich vorhandenen Bewegung vollkommen übereinstimmende Bewegung hervorzubringen vermögen, durch welche also die wirkliche Bewegung entstanden sein könnte, oder durch welche sie entstanden gedacht werden darf, nennt man: die Zerlegung einer Bewegung. Die folgenden Beispiele werden geeignet sein, diesen Gegenstand zu erläutern.

Eine Kugel (Fig. 13) sei an einen Stab A d gesteckt und werde auf demselben mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortbewegt, so zwar, dass dieselbe auf dem Stab in jeder Sekunde eine gleich grosse Wegstrecke A a = a b = b c = . — zurücklegt Gleichzeitig aber werde der Stab senkrecht auf seiner eigenen Richtung bewegt, und ebenfalls mit gleichförmiger Geschwindigkeit, so z. B., dass er nach der 1., 2., 3. Sekunde nach 1, 2, 3, gelangt. Nun ist leicht einzusehen, dass diese Kugel in ihrer wahren Bewegung längs des Stabes hingleiten und gleichzeitig mit dem Stab nieder gehen wird. Ist nun der Stab nach der 1. Sekunde in 1 angekommen, so wird die Kugel gleichzeitig um ein Stück A a auf dem Stab fortgerückt sein; sie wird sich offenbar nach der 1. Sekunde in I d. h. im Endpunkt der Diagonale des Rückecks A a I, befinden, dessen Seite die Geschwindigkeiten A a und A i sind. Am Ende der 2ten Sekunde befindet sich der Stab in 2 und die Kugel wird während dieser 2ten Sekunde auf dem Stab den Weg gleich a b zurückgelegt haben, sie befindet sich also am Ende der zweiten Sekunde im Punkt II, d. h. am Endpunkt der Diagonale, welche dem mit A b und A 2 beschriebenen Rechteck angehört u. s. f. Es ist also klar, dass die Richtung die wahre Bewegung der Kugel in der Linie A, I, II . . . IV. und mit einer Geschwindigkeit A I = I II = II III . . . . erfolgen wird, und man findet demnach die Richtung und Geschwindigkeit der wahren Bewegung, wenn man nach der Richtung des Stabs die Geschwindigkeit A a der Kugel auf dem Stab, nach der Bewegungsrichtung des Stabs die Geschwindigkeit A 1 aufträgt, dann das Rechteck A 1 a I verzeichnet und die Diagonale A I zieht.

Noch anschaulicher dürfte diese Bewegung vermittelst zweier Stäbe (Fig 14) hervorgebracht werden. Denkt man sich z. B. einen Körper nach zwei auf einander senkrechten Richtungen durchbohrt, aber so, dass die beiden Löcher sich nicht begegnen, dann durch jedes derselben einen Stab y y und x x gesteckt; den ersteren mit einer Geschwindigkeit A B nach horizontaler und letztern mit einer Geschwindigkeit A C nach vertikaler Richtung bewegt, so muss der Körper offenbar in der Richtung der Diagonale A Z des Rechtecks, welches aus A B und A C konstruirt werden kann, fortschreiten, und die Länge der Diagonale ist zugleich auch die wahre Geschwindigkeit. Die Bewegungen A B und B C längs der beiden Stäbe werden die componirende und die Bewegung nach der Diagonele die resultirende oder die zusammengesetzte Bewegung genannt. Man kann auch A B und A C die relativen Bewegungen des Körpers gegen die beiden Stäbe und A D die absolute Bewegung desselben nennen.

Ein Körper sei an zwei Stäbe (Fig. 1. Taf II) x x und y y gesteckt, deren Richtungen irgend einen beliebigen Winkel x A y bilden; der Stab x x werde parallel zu sich selbst in einer Sekunde um A B der Stab y y gleichzeitig parallel zu sich selbst um A C fortbewegt. Diese Bewegungen der beiden Stäbe werden den Körper zwingen, nach der Diagonale A D des Parallelogrammes A B CD und mit einer Geschwindigkeit A D fortzuschreiten.

Mannigfaltige und sehr anschauliche Beispiele von zusammengesetzten Bewegungen kommen bei den Maschinen, und insbesondere bei denjenigen vor, welche in den Maschinenwerkstätten angewendet werden. Bei den meisten Hobelmaschinen wird der Meisel in einen Support eingespannt, der nach zwei aufeinander senkrechten Richtungen beweglich ist, wodurch es möglich wird, die Meiselspitze nach jeder beliebigen ebenen, krummen Linie fortzubewegen. Wenn es irgend ein praktischer Zweck erfordert, kann man auch ganz leicht eine Einrichtung treffen, bei welcher irgend ein Körper oder ein Punkt, z. B. eine Meiselspitze, nach irgend einer beliebigen Linie von doppelter Krümmung bewegt würde. Es ist dazu nur ein System von drei unter rechten Winkeln gegen einander beweglichen Schlitten nothwendig. Wenn man z. B. auf die Bahn einer Hobelmacshine oder Drehbank einen Schlitten stellt und eine Einrichtung trifft, um denselben auf der Bahn hin und her zu bewegen; wenn man dann auf diesem Schlitten einen zweiten Schlitten anbringt, und denselben mit einem Mechanismus versieht, durch welchen er leicht nach vertikaler Richtung auf und nieder bewegt werden kann; wenn man endlich auf diesen Schlitten noch einen dritten Schlitten anbringt, der nach horizontaler Richtung und senkrecht gegen die Bahn der Maschine beweglich ist, so wird ein mit diesem dritten Schlitten verbundener Meisel, wenn alle drei Schlitten gleichzeitig bewegt werden, nach jeder beliebigen krummen Linie im Raum fortgeführt werden können. Diese Supportbewegungen sind Beispiele über die Zusammensetzung von geradlinigen Bewegungen zu gerad- oder krummlinigen Bewegungen, und zeigen dann auch klar, dass aus geradlinigen Bewegungen jede beliebige krummlinige Bewegung zusammengesetzt werden könne, so wie auch, dass man jede beliebige krummlinige Bewegung, durch zwei oder durch drei geeignet angeordnete geradlinige Bewegungen hervorbringen kann. Die Drehbänke und Bohrmaschinen geben Beispiele über die Zusammensetzung von geradlinigen und drehenden Bewegungen. Bei den vollkommenen, selbstwirkenden Drekbänken wird der abzudrehende Gegenstand um eine Axe gedreht, und der Drehstahl wird parallel zu dieser Axe mit gleichförmiger, jedoch geringer Geschwindigkeit fortbewegt. Durch Zusammenwirken dieser beiden Bewegungen beschreibt die Spitze des Meisels relativ gegen den Körper eine Schraubenlinie, deren einzelne Umwindungen gewöhnlich so nah aufeinander folgen, dass sie nur bei aufmerksamer Besichtigung erkannt werden

Bei den Bohrmaschinen wird der Meisel in einen Körper eingespannt, der mit einer starken Drehungswelle (der Bohrspindel) so verbunden ist, dass er sich mit derselben herumdrehen muss, jedoch längs derselben verschoben werden kann So wie nun die Axe gedreht und der Körper gleichzeitig längs derselben fortgeschoben wird, so beschreibt die Spitze des Meisels in ihrer wahren Bewegung, die also aus einer drehenden und einer geradlinigen fortschreitenden Bewegung zusammengesetzt ist, eine Schraubenlinie, die je nach dem Verhältniss zwischen der drehenden und fortschreitenden Geschwindigkeit mehr oder weniger Steigung haben wird.

Wenn man eine runde Scheibe um eine Axe dreht, die durch ihren Mittelpunkt geht und auf ihrer Ebene senkrecht steht, so beschreibt

irgend ein Punkt ihres Umfangs einen Kreis. Bewegt man diese Scheibe, während sie sich um ihre Axe dreht, noch nach einer geraden oder krummen Linie fort, so wird jener Punkt eine zusammengesetzte Bewegung machen, und er wird Linien beschreiben, die im Allgemeinen in die Klasse der cycloidischen Kurven gehören.

Diese Beispiele werden wohl genügen, um eine klare Anschauung zu erhalten, wie aus einfachen Bewegungen zusammengesetzte Bewegungen entstehen, und dass die Richtung und Geschwindigkeit derselben nun leicht durch Konstruktionen aufgefunden werden kann. Ist nämlich die Bewegung aus zwei einfachen Bewegungen A und B zusammengesetzt, so findet man die resultirende R durch die Diagonale des Parallelograms, welches aus der Geschwindigkeit von A und B construirt werden kann. Ist die Bewegung aus drei oder mehreren Bewegungen A, B, C, — zusammengesetzt, so sucht man zuerst die resultirende R aus A und B, dann die resultirende aus R und C und fährt so fort, bis alle einzelnen Bewegungen in der Construction an die Reihe gekommen sind. Die resultirende, welche zuletzt zum Vorschein kommt, ist dann das Resultat der vereinten Thätigkeit aller Bewegungen.

Es ist aber nun auch leicht einzusehen, dass man umgekehrt jede Bewegung eines Punktes auf unzählige verschiedene Arten durch das Zusammenwirken von einfachen Bewegungen sich entstanden denken kann, und dies nennt man eben das Zerlegen der Bewegung, d. h. das Ausfindigmachen von zwei oder mehreren einfachen Bewegungen, durch deren gleichzeitiges Auftreten eine vorhandene Bewegung hervorgebracht werden kann, oder als hervorgebracht gedacht werden darf.

13) *Zusammensetzung und Zerlegung der Drehbewegungen.* Drehende Bewegungen können auf ähnliche Weise wie fortschreitende zusammengesetzt und zerlegt werden.

Es sei Fig. 6 Taf. II. $O\,x\,y\,z$ ein mit dem Körper, dessen Drehung untersucht werden soll, unveränderlich verbundenes Axensystem. Dreht man den Körper um eine Axe $O\,A$, die mit den Axen $O\,x$ $O\,y$ $O\,z$ drei Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ bildet, um einen Winkel w, so gelangt das Axensystem aus der Position $O\,x\,y\,z$ in die Position $O\,x_1\,y_1\,z_1$. In diese Position kann es aber auch durch drei aufeinander folgende Drehungen um die Axen $O\,x$ $O\,y$ $O\,z$ gebracht werden. Dreht man nämlich zuerst das System um einen Winkel r um die Axe $O\,z$, so gelangt es in die Position $O\,x_2\,y_2\,z$. Dreht man es hierauf um einen Winkel q um die Axe $O\,y_2$, so gelangt es in die Position $O\,x_1\,y_2\,z_2$. Dreht man es endlich noch um einen Winkel p um die Axe $O\,x_1$, so kommt es in die Lage $O\,x_1\,y_1\,z_1$, und es ist klar, dass die drei Drehungswinkel $p\ q\ r$ so gewählt werden können, dass $O\,x_1\,y_1\,z_1$ gegen $O\,x\,y\,z$ jede beliebige Lage haben kann.

Die Beziehungen, welche zwischen den Grössen w p q r $\alpha\ \beta\ \gamma$ stattfinden, ergeben sich vermittelst der Figur auf folgende Weise:

Verbindet man die Punkte $x x_1$, $y y_1$, $z z_1$ und den Punkt A mit $x\ x_1$ $y y_1$ $z z_1$ durch grösste Kreise (die in der Zeichnung weggelassen wurden, um dieselbe nicht durch zu viele Linien zu überladen), so ergeben sich dann drei rechtwinkliche Dreiecke $z z_1 z_2$, $x x_2 x_1$, $y y_1 y_2$ und die gleichschenklichen Dreiecke $z A z_1$ $y A y_1$ $x A x_1$, in welch letzteren ist:

$$\widehat{A z} = \widehat{A z_1} = \gamma, \quad \widehat{z A z_1} = \omega$$
$$\widehat{A y} = \widehat{A y_1} = \beta, \quad \widehat{y A y_1} = \omega$$
$$\widehat{A x} = \widehat{A x_1} = \alpha, \quad \widehat{x A x_1} = \omega$$

Nimmt man nur unendlich kleine Drehungen p, q, r, ω vor, so darf man die Dreiecke $z z_1 z_2$, $x x_1 x_2$, $y y_1 y_2$ als geradlinige Dreiecke behandeln und dann findet man leicht

$$\left.\begin{array}{l} p^2 + q^2 = \omega^2 \sin.^2 \gamma \\ v^2 + p^2 = \omega^2 \sin.^2 \beta \\ v^2 + q^2 = \omega^2 \sin.^2 \alpha \end{array}\right\} \dots\dots\dots (1)$$

Durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich, wenn man berücksichtigt, dass

$\sin.^2\alpha + \sin.^2\beta + \sin.^2\gamma = 3 - (\cos.^2\alpha + \cos.^2\beta + \cos.^2\gamma) = 2$ ist.

$$p^2 + q^2 + v^2 = \omega^2 \dots\dots\dots (2)$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit (1) folgt aber;

$$\left.\begin{array}{l} p = \omega \cos.\ \alpha \\ q = \omega \cos.\ \beta \\ r = \omega \cos.\ \gamma \end{array}\right\} \dots\dots\dots (3)$$

Weil p q r unendlich klein angenommen wurden, so gelten diese Gleichungen auch dann, wenn man p q r ω die Winkelgeschwindigkeiten der Drehungen bedeuten lässt.

Diese Beziehungen, welche die Gleichungen (3) ausdrücken, können sehr leicht geometrisch construirt werden.

Schneidet man nämlich auf den Axen O x, O y, O z drei Linien ab, die sich zu einander verhalten wie die Winkelgeschwindigkeiten p q r, construirt hierauf ein Parallelepiped und zieht die Diagonale, so bestimmt dieselbe durch ihre Richtung und durch ihre Länge die Winkelgeschwindigkeit ω. Auf diese Weise wird also für die aufeinanderfolgenden Drehungen

um die drei Cordinatenaxen eine einzige äquivalente um eine mittlere Axe gefunden.

Umgekehrt kann man für jede Drehung um eine beliebige Axe O A drei äquivalente Drehungen p q r finden, wenn man die Winkelgeschwindigkeit ω als gerade Linie auf O A aufträgt, und sie dann auf die Axen O x O y O z projektirt.

Erfolgt die Drehung des Körpers um die Axe A O mit gleichförmiger Geschwindigkeit, so sind auch p q r unveränderliche Grössen. Dreht sich das Axensystem ganz beliebig um den Punkt O, so werden die Winkelgeschwindigkeiten p q r und die Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ wegen

$$\cos.\ \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$
$$\cos\ \beta = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$
$$\cos.\ \gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

in jedem Augenblick andere Werthe haben. Die Drehung um den Punkt O kann daher angesehen werden, wie wenn sich der Körper mit veränderlicher Geschwindigkeit um eine Axe dreht, die in jedem Augenblick ihre Lage gegen die Coordinatenaxe und folglich auch gegen den damit verbündenen Körper ändert.

14) ***Relative Bewegung.*** Wenn von der Bewegung eines Körpers die Rede ist, so denken wir uns zunächst immer eine wahre absolute Ortsveränderung, d. h. eine solche, die mit dem einfachsten Grundbegriff, den wir von Bewegung haben, vollkommen übereinstimmt. Wir denken also nur an Das, was sich bewegt, und wie es sich bewegt, und abstrahiren von allen Dingen, die im Raume das Bewegliche umgeben.

Oftmals werden wir aber veranlasst, nicht nur Das, was sich bewegt, sondern insbesondere auch die Umgebung des Bewegten ins Auge zu fassen, um zu erfahren, wie der Ort und die Lage desselben gegen die Umgebung sich ändert. Dabei abstrahiren wir also von dem, was mit dieser Umgebung an und für sich vorgeht, ob sich diese etwa bewegt, oder ob sie in Ruhe ist, und wir betrachten einzig und allein die Ortsveränderungen des Körpers gegen seine Umgebung, und dies nennt man die relative Bewegung des Körpers.

Wenn zwei Körper A und B ihre relative Lage gegen einander ändern, so kann man fragen: 1) wie ändert A seine Lage gegen B, und 2) wie ändert B seine Lage gegen A; oder mit andern Worten: welches ist die relative Bewegung von A gegen B, und welches ist die relative Beweguug von B gegen A.

Diese beiden relativen Bewegungen kann man bestimmen, wenn die absoluten Bewegungen der beiden Körper bekannt sind, wenn man berücksichtigt, dass diese relativen Bewegungen nicht verändert werden, wenn den beiden Körpern noch eine gemeinschaftliche Bewegung ertheilt wird, wodurch einer derselben in Ruhe kömmt. Es seien z. B. Fig. 2 Taf. II. a b und c d die Geschwindigkeiten der Körper **A** und **B** in irgend einem Zeitaugenblick. Ertheilt man nun den beiden Körpern eine gemeinschaftliche geradlinige Bewegung, deren Geschwindigkeit mit jener von B übereinstimmt, der Richtung nach aber gerade entgegengesetzt ist, so kommt **B** in Ruhe und **A** besitzt dann zwei Geschwindigkeiten **a b** und **a c = c d**, aus welchen nach der Lehre von der Zusammensetzung der Bewegung die resultirende Geschwindigkeit **a d** entspringt. Der Körper **A** bewegt sich also gegen **B** gerade so, wie wenn **B** ruhte, und A nach der Richtung **a d** mit der Geschwindigkeit **a d** sich bewegte, d. h. es ist **a d** der Richtung und Grösse nach die relative Bewegung von **A** gegen **B**.

Ertheilt man hingegen den beiden Körpern Fig. 3 Taf. II. eine gemeinschaftliche Bewegung, die der Richtung nach jener von **A** entgegengesetzt ist, deren Geschwindigkeit aber mit der von A übereinstimmt, so kommt **A** zur Ruhe, und **B** besitzt dann die zwei Geschwindigkeiten **c d** und $\overline{\mathbf{c\,f}} = \overline{\mathbf{a\,b}}$, woraus die zusammengesetzte Geschwindigkeit **c g** entspringt, welche gleich aber entgegengesetzt der Geschwindigkeit **a d** Fig. 2 ist. Die Linie $\overline{\mathbf{c\,g}}$ bestimmt also die Richtung und Geschwindigkeit der relativen Bewegung von B gegen **A**.

Auf ähnliche Weise erhält man auch die relativen Bewegungen, wenn sich die beiden Körper in einer und derselben geraden Linie, oder wenn sie sich um eine gemeinschaftliche Axe drehen. Bewegen sich z. B. Fig. 4 Taf. II. die Körper A und B nach einerlei Richtung und in derselben geraden Linie fort, und denkt man sich, dass beiden Körpern noch eine gemeinschaftliche Bewegung ertheilt werde, die jener von B gleich und entgegengesetzt ist, so kommt B in Ruhe und A entfernt sich dann mit einer Geschwindigkeit $\overline{\mathbf{c\,d}} - \overline{\mathbf{a\,b}}$ von B; es ist also $\overline{\mathbf{c\,d}} - \overline{\mathbf{a\,b}}$ die relative Geschwindigkeit von A gegen B.

Denkt man sich dagegen, dass die beiden Körper eine gemeinschaftliche Bewegung enthalten, die jener von A gleich und entgegengesetzt ist, so kommt A in Ruhe, und B entfernt sich dann von A nach links mit einer Geschwindigkeit **c d — a b**, es ist also dies der Richtung und Grösse nach die relative Bewegung von B gegen A, und sie ist, wie man sieht, der relativen Bewegung von A gegen B gleich und entgegengesetzt.

Wenn sich zwei Körper A und B (Fig. 5 Taf. II.) mit ungleicher Geschwindigkeit aber nach einerlei Richtung um eine Axe **x y** drehen,

und die Geschwindigkeit von A grösser als jene von B ist, so erfolgt die Bewegung von B gegen A gerade so, wie wenn A ruhte und B mit einer Geschwindigkeit B — A nach rechts sich drehte. Dagegen bewegt sich A gegen B so, wie wenn B ruhte und A mit einer Geschwindigkeit (B — A) nach links sich drehte.

Wären die Richtungen der absoluten Bewegung von A und B in den beiden letzten Fällen einander entgegen gesetzt, so wird die relative Bewegung der Körper gegeneinander mit der Summe der Geschwindigkeiten A + B erfolgen, und es stimmt dabei die Richtung der relativen Bewegung von B gegen A mit der von B, und die Richtung der relativen Bewegung von A gegen B. mit jener von A überein.

15) ***Die scheinbare Bewegung eines Körpers.*** Eine scheinbare Bewegung ist eine relative Bewegung, welche auf einen Beobachter den Eindruck einer absoluten Bewegung macht. In der That, alle Bewegungen die wir mit unseren Sinnen wahrnehmen, machen auf uns den Eindruck, als wären es wahre oder absolute Bewegungen, und doch wissen wir, dass es nicht so ist und dass Alles, was die Sinne erkennen nicht Wahrheit, sondern nur Schein ist. Wir befinden uns gar nicht in der Lage, irgend eine absolute Bewegung mit unseren Sinnen wahrnehmen zu können, denn wir begleiten ja die Erde, wir drehen uns mit ihr um die Axe, wir folgen ihr in ihrem Lauf um die Sonne, und werden wahrscheinlich noch von dieser um andere uns ganz unbekannte grosse Centralsonnen herumgeführt. Auf einem so beweglichen Observatorium wie die Erde ist, müssen uns nothwendig alle Bewegungen anders erscheinen, als sie wirklich sind, denn zur Wahrnehmung einer wahren Bewegung gehört vor allem Andern, dass sich der Beobachter in absoluter Ruhe befinde. Wenn Wasser schnell unter einer Brücke strömt, und wir sehen von derselben längere Zeit starr auf einen bestimmten Punkt der Wasserfläche herab, so ist der Eindruck zunächst der, dass die Brücke ruht und dass das Wasser schnell durchströmt. Nach einiger Zeit ändert sich dieser Eindruck, das Wasser scheint unbeweglich, und wir mit der Brücke scheinen stromaufwärts zu eilen, obgleich wir uns ganz klar bewusst sind, dass dies nur Täuschung ist. Aber auch dieser Eindruck bleibt nicht immer fortdauernd und gleich, es treten meistens wieder Zeitintervallen ein, wo die Brücke wieder zu ruhen und das Wasser beweglich erscheint. Diese Thatsachen zeigen dann offenbar, dass die scheinbaren Bewegungen relative Bewegungen sind, die den Eindruck von wahren Bewegungen machen. Die relative Bewegung ist eine Gedanken-Abstraktion, wir abstrahiren im Gedanken von der Bewegung desjenigen Körpers A, gegen welchen wir die Bewegung eines zweiten Körpers B betrachten wollen. Die scheinbare Bewegung setzt einen sinnlichen Beobachter voraus, der die relative Aenderung der Lage der Körper gegen einander oder gegen

ihn selbst mit seinen Sinnen beobachtet. Die scheinbare Bewegung kann aus der wahren Bewegung gerade so bestimmt werden, wie die relative Bewegung. Ist z. B. Fig. 7, Taf. II. A ein Beobachter, der sich wissentlich oder unbewusst nach der Richtung A b und mit der Geschwindigkeit a b bewegt, B ein Körper, der sich nach c d mit der Geschwindigkeit c d bewegt, so ist c f die scheinbare Bewegung des Körpers B gegen den Beobachter. Dagegen ist Fig. 8 Taf. II. a g die scheinbare Bewegung des Beobachters gegen den Körper B. Das will sagen, der Beobachter A wird manchmal glauben, er ruhe und der Körper B nähere sich ihm nach der Richtung c f und mit der Geschwindigkeit c f; dann aber wird es ihm scheinen, als wenn der Körper B ruhe und als bewege er sich nach der Richtung a g gegen B hin. Die Ursache, dass man bald die eine, bald die andere dieser relativen Bewegungen zu sehen meint, muss in physiologischen, nicht aber in mechanischen Principien gesucht werden.

16) *Gemeinschaftliche Bewegung.* Eine gemeinschaftliche Bewegung zweier oder mehrerer Körper ist eine solche Bewegung, bei der sie ihre relative Lage gegen einander nicht verändern. Wenn z. B. ein fester Körper von irgend einer Gestalt beliebig im Raum bewegt wird, so haben alle Theile des Körpers eine gemeinsame Bewegung. Getrennte Körper haben eine gemeinsame Bewegung, wenn sie sich so bewegen, wie wenn sie Theile eines einzigen festen Körpers wären. Ertheilt man einem in Bewegung befindlichen System von Körpern eine gemeinsame Bewegung, so wird dadurch die relative Bewegung der Körper im System nicht geändert. So z. B. ist die relative Bewegung der Planeten um die Sonne ganz unabhängig von der dem ganzen Planetensystem gemeinschaftlichen Fortbewegung im Raume. Eben so ist auch die Bewegung der Körper auf der Erde ganz unabhängig, sowohl von ihrer drehenden, als auch von ihrer fortschreitenden Bewegung.

Zweiter Abschnitt.

Die Dinamik oder die Lehre von der Bewegung der Massen.

Allgemeine Eigenschaften der Materie.

17) *Das Wesen der Materie.* Das Wesen der Materie ist uns nicht bekannt, wir wissen nicht, worin und wodurch sie besteht, ob sie zu irgend einer Zeit entstanden oder ob sie von jeher existirte. Wir wissen nur, dass sie ein im Raum existirendes auf unsere Sinne einzuwirken fähiges Reales ist, das sich in Ruhe oder in Bewegung befinden kann. Die Materie wird auch Stoff oder Substanz genannt, und eine bestimmte, räumlich begränzte Quantität derselben heisst ein physischer Körper.

Die Körper erscheinen uns entweder im Zustande des reinen Seins (wobei sie beharrlich in einem gewissen Zustand der Ruhe oder der Bewegung verbleiben) oder sie erscheinen uns in einem Zustand der Veränderung des Seins (wobei sie aus der Ruhe in Bewegung oder aus einer Bewegung in eine andere übergehen). Das erstere tritt immer ein, wenn die Körper ganz sich selbst überlassen sind; das letztere hingegen, wenn eine Wechselwirkung zweier Körper stattfindet.

Man kann also die Materie oder den Stoff gleichsam als ein Doppelwesen betrachten, das mit einem passiven und mit einem aktiven Prinzip begabt ist. Das passive Prinzip, das man das „Beharrungsvermögen", auch Trägheit genannt hat, besteht theils in der Fähigkeit der Materie, durch sich selbst und ohne alle äussere Einwirkung in einem Zustand des ruhigen oder des bewegten Seins verharren zu können, theils in der Unfähigkeit, durch sich selbst einen in ihr vorhandenen Zustand des ruhigen oder bewegten Seins zu verändern. Dies Beharrungsvermögen könnte man auch das Prinzip der Selbsterhaltung des ruhigen oder des bewegten Seins der Materie nennen. Das zweite, nämlich das aktive Prinzip, wird Kraft genannt. Es besteht in der Fähigkeit der Stoffe, auf einander wechselseitig einzuwirken, und dadurch die Zustände ihres Seins zu verändern. Dieses aktive Prinzip kann man auch das Prinzip der Wechselwirkungsfähigkeit der Stoffe nennen, wodurch das ruhige oder das bewegte Sein der Körper verändert wird.

Wenn die Stoffe nur allein mit dem ersteren dieser Prinzipe begabt wären, würde jeder Körper nur für sich selbst und in jeder Hinsicht unverändert fortbestehen. Körper, die einmal in Ruhe waren, würden ewig und unverändert an ihrem Platz verbleiben; die bewegten würden, unbekümmert um Alles, was neben ihnen besteht, zwecklos ihren Weg im Raum fortsetzen. Ganz anders gestalten sich die Erscheinungen, wenn wir uns die Stoffe auch mit dem Prinzip der Wechselwirkungsfähigkeit ausgerüstet denken. In diesem Falle besteht jeder Körper nicht nur für sich allein, sondern auch in Beziehung zu andern Körpern; sie nehmen von ihrer Existenz wechselseitig Notiz, leben so zu sagen in Gesellschaft, treten zu Gruppen zusammen, wodurch mannigfaltige Gebilde und Gestalten entstehen, die aber nicht unveränderlich sind, sondern durch später eintretende Wechselwirkungen wiederum aufgelöst werden. Kein Körper ist dann zu ewiger Ruhe oder zu unveränderlich einförmiger Bewegung verdammt, denn Alles wirkt wechselseitig auf einander ein, und so entsteht dann eine Welt des Zusammenseins, des Zusammenwirkens, des Gestaltens, der Ruhe und Bewegung, oder, mit einem Wort, eine wirkliche lebendige Welt. Man sieht hieraus, dass ohne das gleichzeitige Vorhandensein jener beiden Prinzipe weder die wirkliche, noch überhaupt eine Welt mit vernünftigen Zwecken denkbar ist.

Die Entdeckung dieser Grundeigenschaften der Materie ist ein Resultat der angestrengtesten Thätigkeit der tiefsten Denker, welche die Geschichte der Wissenschaft nennt. Keppler, nachdem er die bekannten Eigenschaften der Planetenbewegung aufgefunden hatte, wodurch diese Bewegung bestimmt, aber nicht erklärt wird, bemühte sich vergebens, die nähere Erklärung dieser Erscheinung ausfindig zu machen. Die Eigenschaft der Trägheit war zu seiner Zeit noch nicht entdeckt. Er glaubte, dass von der Sonne unsichtbare Arme ausgingen, welche die Planeten in ihrer Bahn erhalten, und sie in der Richtung ihrer Bahnen fortschieben, und meinte, dass die Planeten augenblicklich stille stehen würden, wenn diese Einwirkung der Sonne aufhörte. Erst Newton entdeckte das Gesetz der Trägheit, und erkannte dadurch, dass jeder Planet vermöge dieser Eigenschaft der Materie in jedem Augenblick nach der Richtung der Tangente seiner Bahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich fortbewegen will, und dass die in der Richtung des Radius Vektor und nicht in der Richtung der Tangente wirkende Sonnenkraft die Planeten stets von der geraden Bahn, welche sie vermöge der Trägheit beschreiten würden, ablenkt und gleichzeitig deren Geschwindigkeit verändert.

18) *Unmittelbare Aeusserung der Kräfte, Messung der Kräfte.* Das Wesen der Kräfte kann nicht erklärt werden. Die Existenz derselben erkennen wir an den mannigfaltigen Wirkungen, welche sie hervorbringen, und insbesondere durch das Gefühl und Bewusstsein unserer eigenen physischen Kraft. Dieses Gefühl haben wir durch einen besonderen Sinn, den man „Tastsinn“ nennt, den man aber besser Kraftsinn nennen könnte. Ohne diesen Sinn würden wir von der Existenz der Kräfte durchaus keine Ahnung haben, die Welt mit ihren Erscheinungen würde uns als eine Phantasmagorie erscheinen; die Ursachen dieser Erscheinungen aufzusuchen, würde uns wohl schwerlich in den Sinn kommen, und wenn es auch der Fall wäre, so könnten wir sie doch niemals auffinden. Durch diesen Sinn fühlen wir wenn unsere Kräfte thätig sind, oder wenn von Aussen auf unsern Körper eingewirkt wird. Wir empfinden die Existenz unserer eigenen Kraft, wenn wir einen Zug oder Druck ausüben; wir wissen aus der Erfahrung, dass durch anhaltende Thätigkeit eines solchen Zuges oder Druckes Bewegungen und Bewegungsveränderungen hervorgebracht werden können, und wir schliessen nun daraus, dass die unmittelbare Aeusserung einer jeden Kraft in einem Druck oder Zug bestehe, und dass jede Bewegung oder Bewegungsveränderung nur in Folge einer Zug- oder Druckäusserung irgend einer Kraft entstanden sein könne.

Gegen die Richtigkeit dieses Schlusses scheint nun allerdings die Thatsache zu sprechen, dass oftmals Körper, die nicht in Berührung stehen, auf einander bewegend einwirken. Ein Stein fällt zur Erde nieder, ein Stück Eisen bewegt sich gegen einen Magnet, zwei elektrisirte Körper nähern oder entfernen sich. Es ist also die Frage, ob auch in diesem Falle die unmittelbare Kraftäusserung ein Zug oder Druck genannt werden kann, und ob diese Art von Kraftäusserung mit einem Druck, den wir mit der Hand ausüben, zu vergleichen ist. Hierüber gibt uns der Tastsinn ganz unzweideutig Aufschluss. Wenn wir versuchen, mit unserer Hand das Fallen eines Steins, die Annäherung eines Eisenstücks an einen Magnet, oder die Annäherung oder Entfernung zweier elektrisirter Körper zu verhindern, so fühlen wir deutlich, dass wir einen Druck oder Zug ausüben müssen; wir dürfen es demnach wohl als eine ausgemachte Sache betrachten, dass die unmittelbare Aeusserung einer jeden Kraft in einem Zug oder Druck bestehe. Einen Zug, welcher auf eine Entfernung ausgeübt wird, nennt man auch Anziehung oder Attraktion, und einen auf Entfernung wirkenden Druck Abstossung oder Repulsion.

Wie es nun möglich ist, dass zwei von einander entfernte Körper anziehend und abstossend auf einander einwirken können, ist uns allerdings ein ganz unerklärbares Räthsel; allein es ist nun einmal unläugbare

Thatsache, dass solche Anziehungen und Abstossungen wirklich stattfinden; wir müssen sie demnach als Thatsachen gelten lassen, und es der Zeit überlassen, ob es je möglich werden wird, sie zu begreifen.

Diese unmittelbaren Kraftäusserungen können nach ihrer Intensität bestimmt werden, und dies nennt man das Messen der Kräfte. Als Einheit der Kräfte kann man irgend einen Zug oder Druck annehmen, z. B. jenen, den ein Körper, dessen Gewicht gleich 1 Kilogramm beträgt, auf eine Unterlage ausübt. Die Intensität einer Kraftäusserung ist dann gleich 2, 3, 4 zu setzen, wenn sie auf einen Körper von 2, 3, 4 Kilogrammes Gewicht nach vertikaler Richtung aufwärts wirkend im Stande ist das Fallen desselben zu verhindern.

Diese Messung der Kräfte nach ihren unmittelbaren Aeusserungen wird in der Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte allgemein befolgt. In der Bewegungslehre aber werden die Kräfte von vielen Autoren durch das Resultat der Bewegung gemessen, welches sie in den Körpern hervorbringen. Nach dieser Art zu messen, erklärt man als Einheit der Kräfte diejenige Kraft, welche in der Zeiteinheit auf eine Masseneinheit einwirkend eine Endgeschwindigkeit gleich der Längeneinheit hervorbringt.

$p = \frac{mc}{t}$

Man sagt ferner: wenn eine Masse in einer gewissen Zeit eine gewisse Geschwindigkeit erlangt, so ist die Kraft, welche dies bewirkt hat, der Masse und Geschwindigkeit direkt, der Dauer der Einwirkung aber verkehrt proportional zu nehmen. Dabei wird aber nun gar nicht gesagt, was man sich unter dem Wort „Kraft" vorzustellen habe, so dass man eigentlich gar nicht weiss, was man dann gemessen hat. Es wird aber in der That auf diese Weise der Druck bestimmt, welcher in einer Masse in einer gewissen Zeit eine gewisse Geschwindigkeit hervorbringt, und damit fällt nun zwar das Geheimnissvolle dieser Messungsart weg; aber zu empfehlen ist dieselbe doch nie, denn es ist doch viel klarer und einfacher, wenn wir die Kräfte unter allen Umständen direkt durch den Zug oder Druck messen, welchen sie hervorbringen, und sodann die Frage stellen, welche Geschwindigkeit eine Masse erlangt, wenn man auf dieselbe einen Druck von so und so viel Kilogrammes durch eine gewisse Zeit einwirken lässt? Wir werden diese Frage in der Folge beantworten.

19) ***Begriff von Masse, und Bestimmung ihrer Quantität.*** Es ist bereits gesagt worden, dass die Materie in sich selbst die Fähigkeit nicht besitzt, aus der Ruhe in Bewegung, oder aus einem vorhandenen Bewegungszustand in einen andern überzugehen, d. h. dass sie träge sei.

Die Masse eines Körpers ist die Menge des Trägen eines Körpers, d. h. die Menge dessen, was sich selbst nicht bewegen, sich selbst nicht treiben kann, was also bewegt oder getrieben werden muss, wenn ein

Körper aus dem Zustand der Ruhe in jenen der Bewegung, oder aus einem gewissen Bewegungszustand in einen andern übergehen soll.

Die Masse eines Körpers ist absolut unveränderlich; sie ist die unvergänglich unvernichtbare Menge des Trägen. Man kann einen Körper ausdehnen oder zusammendrücken, man kann seine Form auf mannigfaltige Art verändern, man kann ihn nach verschiedenen Orten auf der Erde bringen, wo er bald ein grösseres, bald ein kleineres Gewicht zeigen wird. Man kann einen Körper mechanisch oder chemisch zertheilen u. s. w.: — was man aber auch immer mit dem Körper vornehmen mag, seine Gesammtmasse, und für den Fall einer Theilung die Summe der Massen aller Theile bleibt unveränderlich.

Um die Masse eines Körpers zu bestimmen (zu messen), kommt es vor allem darauf an, ein Mittel zu besitzen, wodurch die Gleichheit zweier Massen erkannt werden kann. Ein solches Mittel bietet uns der Begriff dar, den wir von Masse aufgestellt haben. Nach diesem Begriff müssen wir zwei Massen als gleich gross erklären, wenn sie, von gleich intensiven Kräften und auf gleiche Weise getrieben, ganz identische Bewegungen zeigen. Werden 2, 3 oder mehrere Körper, von welchen man erkannt hat, dass sie gleiche Massen haben, vereinigt, so erhält man eine Gesammtmasse, die 2 bis 3 mal so gross ist, als die Masse jedes einzelnen der vereinigten Körper, und wenn die Masse eines derselben als Einheit angenommen wird, so ist jene des durch Vereinigung entstandenen Körpers gleich 2, 3 zu setzen.

Obgleich diese Methode der Massenbestimmung grundsätzlich vollkommen richtig ist, so ist sie doch nicht leicht praktisch ausführbar. Für den Augenblick genügt es uns aber, die Möglichkeit einer solchen Bestimmung einzusehen, und in der Folge werden wir durch das Gewicht der Körper in Verbindung mit dem freien Fall ein gleichfalls ganz richtiges, aber leicht ausführbares Verfahren zur Massenbestimmung kennen lernen.

Um den Begriff von Masse noch deutlicher zu machen, als es durch die bisherigen Erläuterungen geschehen ist, wird es gut sein, zwei sehr verbreitete, aber irrige Ansichten zu beseitigen.

Die Masse eines Körpers wird gewöhnlich als die Menge der Materie eines Körpers erklärt. Diese Definition ist nicht richtig, denn wenn von Masse die Rede ist, so handelt es sich um die Menge des Trägen und nicht um die Menge des Materiellen.

Zwei gleiche Quantitäten Materie müssen nicht nothwendig gleich grosse Massen haben; es ist ja denkbar, dass verschiedenartige Substanzen eine verschiedene spezifische Trägheit besitzen, und wenn dies der Fall wäre, so würde die Masse eines Körpers durch das Produkt aus der Menge seiner Materie in die spezifische Trägheit derselben auszudrücken sein. Gesetzt aber auch, dass alle Stoffe einen gleichen Grad von Trägheit besitzen, dass also die Masse eines Körpers durch die Menge seiner Materie gemessen werden dürfte, so müsste man doch zunächst ein Mittel haben, die Menge der Materie zu bestimmen, und dazu gibt es auch kein anderes, als dasjenige, welches wir zuerst zur Bestimmung der Menge des Trägen angegeben haben.

Ein anderer Irrthum besteht darin, dass oft Masse mit Gewicht verwechselt wird. Die Masse eines Körpers, d. h. die Menge des Trägen ist, wie schon gesagt wurde, etwas ganz Unveränderliches.

Das Gewicht eines Körpers dagegen, d. h. die Kraft, mit welcher die Erde einen Körper anzieht, ändert sich mit dem Ort, nach welchem ein Körper gebracht wird. Am Aequator ist das Gewicht eines Körpers grösser als am Pol, ausserhalb und innerhalb der Erde kleiner als an ihrer Oberfläche; im Mittelpunkt der Erde verschwindet das Gewicht gänzlich, und wenn wir uns denken wollen, dass ein Körper nach der Sonne gebracht würde, so wäre dort sein Gewicht gegen die Sonne Millionenmal grösser als auf der Erde gegen die Erde. Dies wird vorläufig genügen, um einzusehen, dass Masse und Gewicht zwei ganz verschiedene Dinge sind, und dass die erstere durch das letztere nicht wissenschaftlich richtig bestimmt werden kann.

20) *Hypothetische und chemische Atome.* Um irgend ein Ganzes zu begreifen, muss man wissen, aus welchen Theilen es besteht, und in welcher Beziehung diese Theile stehen, sowohl unter einander, als zum Ganzen.

Durch die Naturwissenschaften wollen wir das Sein und das Wirken der realen Welt als ein Ganzes begreifen lernen. In dieser Absicht suchen wir zunächst eine klare Uebersicht zu gewinnen über das, was ist. Wir betrachten desshalb die Körper nach ihren äusseren Merkmalen, vergleichen sie sodann unter einander, und ordnen sie zuletzt nach den Prinzipien der Aehnlichkeit und Gleichartigkeit. Das Resultat, das durch diese geistige Arbeit entsteht, ist die Naturgeschichte der drei Reiche.

Die Erkenntnisse, welche wir hierdurch erlangen, befriedigen uns aber noch nicht, weil wir durch dieselben über die innere Wesenheit der Stoffe keinen Aufschluss erhalten. Wir ahnen, dass wir mit unsern Sinnen und mit unserm Geiste in das Innere der Körper eindringen müssen, wenn wir die letzten Ursachen aller Erscheinungen, den Keim alles Seins und Wirkens entdecken wollen.

Zu dieser Reise in das Innere der uns unbekannten Stoffe versehen wir uns mit den mannigfaltigen Apparaten und Hilfsmitteln, welche die Physik und Chemie ausgedacht haben; wir zerlegen die Körper durch

mechanische Theilung, wir betrachten sie unter dem Mikroskop, zerlegen sie endlich in ihre chemischen Bestandtheile.

Die mechanische Theilung hat bis jetzt über das Wesen der Stoffe wenig Aufschluss gegeben; sie hat sich nur als nützlich gezeigt, um grössere ungleichartige Theile eines zusammengesetzten Körpers, und insbesondere um die Organe der Pflanzen und Thiere von einander zu trennen. Eine mechanische Theilung der homogenen Körper war stets ohne Erfolg, denn man erhielt dabei immer nur kleinere Quantitäten von dem Stoff, aus welchem das Ganze bestund.

Ergiebiger ist schon die Ausbeute, welche das Mikroskop geliefert hat. Insbesondere haben wir durch dasselbe sehr viel über die Art und Weise, wie die zusammengesetzten organischen Gebilde aus einfachen zellenförmigen Gebilden sich aufbauen, kennen gelernt. Allein über den Stoff selbst, aus welchem diese Zellen bestehen, so wie auch über das Innere der homogenen unorganischen Stoffe sind wir auch durch dieses Mittel nicht mehr belehrt worden, als durch die mechanische Zertheilung.

Ueberraschend sind dagegen die Thatsachen der Chemie. Sie vermag es, Stoffe, die unter den besten und stärkst vergrössernden Mikroskopen betrachtet, noch immer als vollkommen homogen erscheinen, also durchaus keine Verschiedenheit in den einzelnen Theilen zeigen, in zwei oder mehrere Stoffe zu zerlegen, die weder unter sich noch mit dem Ganzen irgend eine Aehnlichkeit zeigen. Sie zerlegt den Zinober in Quecksilber und Schwefel, das Wasser in zwei, Wasserstoff und Sauerstoff genannte Luftarten. Die Stoffe, welche durch solche Zerlegungen erhalten werden, lassen sich zuweilen wiederum in zwei oder mehrere Stoffe trennen, die weder unter sich, noch mit jenen, aus welchen sie entstanden sind, irgend eine Aehnlichkeit haben. Indem man nun die mannigfaltigen Stoffe, so weit als es nur immer gelingen wollte, zerlegte, fand man zuletzt eine ziemlich zahlreiche Reihe von Stoffen, deren weitere Zerlegung bis jetzt nicht mehr gelang, und diese nannte man chemisch einfache Stoffe, chemische Elemente, chemisch elementare Stoffe.

Schon die bedeutende Zahl dieser Elemente — sie beträgt 56 — noch mehr aber die Aehnlichkeit, welche manche derselben, und insbesondere die metallischen, unter einander zeigen, lässt es gar nicht bezweifeln, dass es in der Folge gelingen wird, manche derselben noch weiter zu zerlegen, wodurch die Zahl der einfachen Stoffe immer kleiner und kleiner werden wird, bis man zuletzt auf einige wenige kommen wird, die in ihrem Wesen so homogen sind, dass eine weitere Zerlegung derselben gar nicht mehr möglich ist, die also dann der wahre Urstoff oder Grundstoff genannt werden müssen, woraus alle Körper zusammengesetzt sind.

Denken wir uns, dass die Chemie bis zu diesem Punkt ihrer Entwicklung vorgedrungen sei, so wird dann unser Forschungstrieb doch noch nicht befriedigt sein, denn dann entsteht erst wiederum die Frage, was denn das Wesen dieser Grundstoffe sei? und diese Frage kann dann die Scheidekunst nicht mehr beantworten, denn aus den einfachen Grundstoffen kann Nichts ausgeschieden werden, sondern wir müssen dann abermals zur mechanischen Zertheilung oder zum Mikroskop unsere Zuflucht nehmen. Was wir dabei möglicher Weise finden können, hängt davon ab, ob diese Grundstoffe bis ins Unendliche theilbar sind, oder ob diese Theilbarkeit nur bis zu einer gewissen Gränze geht. Im ersteren Falle wird die mechanische Zertheilung zu gar keinem belehrenden Resultat führen können, im letztern hingegen ist es wenigstens denkbar, dass man ungemein kleine, absolut untheilbare Körperchen, d. h. wahre Atome entdecken wird.

Welche von diesen beiden logischen Möglichkeiten mit der Wirklichkeit übereinstimmt, kann thatsächlich durch wirkliche Stofftheilung nicht entschieden, sondern nur auf indirektem Wege dadurch wahrscheinlich gemacht werden, indem man die eine und die andere Möglichkeit als Hypothese annimmt und die daraus hervorgehenden Folgerungen mit der Gesammtheit der Thatsachen vergleicht.

Mit einem an Gewissheit gränzenden Grad von Wahrscheinlichkeit darf man jedoch annehmen, dass die chemisch einfachen Stoffe aus kleinen Theilchen bestehen, die bis jetzt nicht zertheilt werden konnten. So lang sie also in der That nicht zerlegt werden, verhalten sich dieselben in allen ihren Wirkungen wie untheilbare Einheiten, d. h. wie Atome, und wir werden bei wissenschaftlichen Betrachtungen und Untersuchungen zu ganz richtigen Resultaten gelangen, wenn wir diese Atome so behandeln, wie wenn sie in der That untheilbar wären. Wir wollen daher in der Folge unter dem Wort Atome ein kleines Stofftheilchen verstehen, welches sich in allen seinen Wirkungen wie eine untheilbare Einheit verhält.

Die Wechselwirkung zweier Atome dieser Art wird nicht nur von den Kräften, mit welchen sie begabt sind, und von ihrer Entfernung, sondern auch von der Gestalt derselben abhängen. Es ist jedoch leicht einzusehen, dass der Einfluss der Gestalt in dem Maasse kleiner sein wird, als die Entfernung der Atome im Vergleich zu den Abmessungen derselben grösser ist, und wenn diese Entfernung so gross ist, dass dagegen die Abmessungen verhältnissmässig unendlich klein ausfallen, so wird man sich erlauben dürfen, die Atome als physische Punkte zu behandeln, indem dann ihre Wirkung gerade so ist, wie wenn im Schwerpunkte der Atome ihre Masse und Kraft concentrirt wäre. Wir sehen hieraus, dass die Atome als physische Punkte betrachtet werden

dürfen, oder als kleine Körper von bestimmter Gestalt behandelt werden müssen, je nachdem die Entfernung der auf einander wirkenden Atome im Vergleich zu ihren Abmessungen ungemein gross (streng genommen unendlich gross) ist oder nicht.

21) *Allgemeine Eigenschaften der Atome.* Um vermittelst der Atome die mannigfaltigen Erscheinungen der Körperwelt zu erklären, müssen wir uns dieselben mit gewissen Eigenschaften und Fähigkeiten ausgerüstet denken. Die im wesentlichen im Folgenden bestehen.

Alle Atome stimmen darüber überein, dass sie aus träger Materie bestehen, zugleich aber auch mit Kräften begabt sind, durch welche sie zwar nicht auf sich selbst, wohl aber auf andere Atome einzuwirken vermögen. Es kann sich also kein Atom durch die ihm innwohnende Kraft in Bewegung bringen, oder aus einem Bewegungszustand in einen andern Bewegungszustand versetzen, sie besitzen jedoch die Fähigkeit, in einem Zustand des ruhigen oder bewegten Seins zu verharren. Die verschiedenen Atome müssen theils nach den Kräften, mit welchen sie begabt sind, theils nach ihrem Massengehalt in zwei Klassen getheilt werden. Die Atome der einen Klasse nennen wir Körper-, die Atome der andern Klasse Aether-Atome. Die ersteren sind die Träger des attraktiven die letztern die Träger des repulsiven Prinzips.

Wir denken uns nämlich, dass die Körperatome (deren es so viele Arten gibt, als die Zahl der chemischen einfachen Stoffe beträgt) gegen ihres Gleichen und auch gegen die Aetheratome nur anziehend, dass dagegen die Aetheratome (von denen es nur eine Art gibt) auf ihres Gleichen abstossend, auf die Körperatome hingegen anziehend einwirken. Sodann nehmen wir auch noch an, dass der Massengehalt und auch das Volumen der Aetheratome vielmals kleiner sei, als der der Körperatome, so dass sich letzterer zu ersterem ungefähr verhält, wie der Erdkörper zu einem einzelnen Lufttheilchen der sie umgebenden Atmosphäre.

Hinsichtlich der Art und Weise, wie die Kräfte der Atome ihre Wirkungsfähigkeit äussern, nehmen wir Folgendes an.

1) Das attraktive oder repulsive Prinzip, mit welchem ein Atom A begabt ist, kann nicht auf seine eigene Masse, sondern immer nur auf die Masse eines andern Atoms B bewegend einwirken.
2) Die Wirkung der Atome ist wechselseitig. Wirken zwei Atome A und B wechselseitig auf einander ein, so geschieht dies dadurch, dass die Kraft von A auf die Masse von B, und dass gleichzeitig die Kraft von B auf die Masse von A einwirkt.
3) Diese unmittelbare Kraftäusserung besteht entweder in einem Zug, wodurch die Theilchen ein Bestreben haben, sich einander zu

nähern, oder in einer Abstossung, in Folge deren sie sich von einander zu entfernen suchen.

4) Die Richtung der wechselseitigen Anziehung oder Abstossung erfolgt nach der geraden Verbindungslinie der beiden Atome.

5) Die Intensitäten der wechselseitigen Anziehungen oder Abstossungen sind gleich gross, richten sich nach der Entfernung der Atome und nach ihrer materiellen Beschaffenheit.

6) Die Intensität der Wechselwirkungen zweier Atome ist dem Produkt ihrer Massen proportional.

7) Die Intensitäten der Wechselwirkungen zweier Atome sind im bewegten Zustande eben so gross, wie im ruhigen Zustand.

22) *Die Kräfte der Atome.* Die mannigfaltigen Kräfte, deren Existenz die Physik und Chemie nachgewiesen haben, lassen sich, wenn man nur das Charakteristische ihrer Aeusserung ins Auge fasst, in folgende Klassen eintheilen.

1) Die allgemeine Schwere. Vermöge dieser Kraft ziehen sich die kleinsten Körpertheilchen wie auch die grössten planetarischen Massen mit einer Intensität an, die von der materiellen Beschaffenheit der Stoffe ganz unabhängig, dann aber dem Produkt der Massen der beiden sich anziehenden Körper direkt und dem Quadrat der Entfernung der Körper verkehrt proportional ist.

2) Die Cohäsion. Vermöge dieser Kraft ziehen sich homogene Körpertheilchen mit einer Intensität an, welche von der materiellen Beschaffenheit der Stoffe abhängt, die aber nur bei ganz unmerklich kleiner Entfernung der Theile eine wahrnehmbare Wirkung hervorbringt. Sie äussert sich vorzugsweise, wenn wir irgend einen Körper mechanisch zertheilen wollen. Die Cohäsionskraft in Verbindung mit dem repulsiven Prinzip, welches Wärme genannt wird, bringen die Aggregationsformen der Körper hervor.

3) Die chemische Anziehung, auch chemische Verwandtschaft genannt. Diese Kraft äussert sich zwischen heterogenen Substanzen, wenn sich ihre Theilchen in ganz unmerklich kleinen Entfernungen von einander befinden. Ihre Intensität hat unter übrigens gleichen Verhältnissen für je zwei Substanzen einen anderen Werth. Manche Substanzen üben gegen einander nur eine sehr schwache, andere dagegen eine sehr intensive Anziehung aus. Vielleicht gibt es auch solche Substanzen, die sich gar nicht anziehen.

4) Die allgemeine Repulsivkraft des Aethers. Mannigfaltige Erscheinungen, und insbesondere jene, welche die Wärme hervorbringt, indem sie die Körper ausdehnt und ihren Aggregationszustand verändert, weisen darauf hin, dass in der Natur wenigstens Eine Repulsivkraft vorhanden ist. Es wird gegenwärtig fast von allen Physikern angenommen, dass

dieselbe in einem materiellen Stoff, dem Aether, ihren Sitz habe, und dass sie gleichsam eine umgekehrte Schwere sei.

Nach diesen Thatsachen wird man es wohl nicht als eine willkürliche Erfindung der Phantasie erklären, wenn wir den Körper- und Aetheratomen die folgenden Kraftäusserungsfähigkeiten beilegen. Wir nehmen als wahrscheinlich an:

1) Identische Köperatome ziehen sich an, theils wegen der Schwere, theils wegen der Cohäsionskraft. Die erstere dieser Anziehungskraft ist von der materiellen Beschaffenheit der Atome ganz unabhängig, und ihre Intensität ist dem Produkt aus der Masse der Atome direkt und dem Quadrat ihrer Entfernung verkehrt proportional. Die letztere dagegen hat für jeden Stoff einen besonderen Werth, und ist für einen bestimmten Stoff dem Produkt aus den Massen der Atome und einer gewissen unbekannten Funktion der Entfernung proportional. Ueber diese Funktion weiss man nur so viel, dass sie für kleine Entfernungen einen sehr namhaften Werth hat, aber mit dem Wachsen der Entfernung so rapid abnimmt, dass sie bei Entfernungen, die das Auge zu erkennen vermag, verschieden klein ist.

So lange diese Funktion der Cohäsionskraft nicht bekannt ist, kann man für die Gesammtanziehung zweier identischen Atome einen mathematischen Ausdruck nicht aufstellen. Versuchsweise, und um zu zeigen, dass man Funktionen, wie die eben beschriebenen, analytisch ausdrücken kann, mögen folgende zwei Formeln dienen:

$$M\,M.\left\{\frac{\mathfrak{A}}{r^2} + \mathfrak{B}.\left(e^{k\,r^{-n}} - 1\right)\right\}$$

$$\mathfrak{A}\,M\,M_1 \cdot \frac{e^{k\,r^{-n}}}{r^2}$$

In derselben bedeutet:

$M\ M_1$ die Massen der beiden Atome, r ihre Entfernung. $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ k\ n$ constante Zahlen, und zwar $\mathfrak{A}$ und n absolute, $\mathfrak{B}$ und k hingegen von der Beschaffenheit des Stoffes abhängige constante.

Jede dieser beiden Formeln hat im Wesentlichen die Eigenschaften, welche man von der zwischen zwei identischen Körperatomen bestehenden Anziehungskraft angenommen hat. Wenn nämlich r gross und die Constante $n > 1$ genommen wird, wird $e^{k\,r^{-n}}$ sehr nahe $= 1$ und dann geben alle beiden Formelm, für die Gesammtanziehung annähernd:

$$\frac{\mathfrak{A} M M_1}{r^2}$$

was so viel sagen will, als dass bei grösseren Entfernungen die Wirkung der Cohäsionskraft fast verschwindet und nur jene der Schwerkraft noch bemerkbar bleibt. Ist dagegen r sehr klein, so wird in beiden Formeln der Einfluss von $e^{k r^{-n}}$ auf den Gesammtwerth sehr bedeutend.

Zur bequemen Vergleichung der Kräfte, mit welchen die Atome auf einander wechselseitig einwirken, wollen wir uns erlauben, die Anziehung zwischen identischen Atomen durch die Formel

$$\mathfrak{A} \frac{M M_1}{r^2} + M M_1 f(r)$$

auszudrücken, in welcher $f(r)$ die der Cohäsion entsprechende Funktion der Entfernung der Atome bezeichnet.

2) Heterogene Körperatome sind gegen einander schwer und können sich noch überdies chemisch anziehen, was bei gewissen Stoffen mit sehr grosser Energie geschieht. Den Gesammtbetrag dieser Anziehung kann man bildlich durch die Formel

$$\mathfrak{A} \frac{M M_1}{r^2} + M M_1 \; F(r)$$

ausdrücken, wobei F(r) die der chemischen Anziehung entsprechende unbekannte Funktion der Entfernung der Atome bedeutet. Der Werth dieser Funktion, vielleicht sogar die Form derselben ändert sich mit der materiellen Beschaffenheit der Atome. Für zwei bestimmte chemisch-verwandte Stoffe muss der Betrag von F(r) in Vergleich zu $\frac{\mathfrak{A}}{r^2}$ verschwindend klein oder beträchtlich gross sein, je nachdem r einen merklichen oder einen verschwindend kleinen Werth hat.

Die Natur dieser Funktionen $f(r)$ und F(r) kann man sich am besten versinnlichen, wenn man Kurven verzeichnet, indem man die Entfernungen zweier Atome als Abscissen und die denselben entsprechenden Anziehungskräfte als Ordinaten aufträgt. Es sei z. B. Fig (9) Taf. II. $O p = r$, $\overline{n p} = \frac{\mathfrak{A} M M_1}{r^2}$ $\overline{m n} = M M_1 \; F(r)$, so ist $\overline{m p} = \frac{\mathfrak{A} M M_1}{r^2} + \underline{M M_1} \; F(r)$, es repräsentirt mithin die Kurve A B die Anziehung

durch die Schwere, die Kurve $A_1 B_1$, die Totalanziehung und die Differenzen $\overline{m \; n}$ der Ordinaten beider entspricht der chemischen Anziehung. Da wir annehmen, dass die chemische Anziehung bei kleiner Entfernung äusserst intensiv, bei grosser Entfernung aber ganz verschwindend klein ist, so müssen die Kurven A B und $A_1 B_1$ in der Nähe von O weit auseinander laufen, in einiger Entfernung von O hingegen fast zusammentreffen. Bei einer gewissen Fntfernung $r = O \; p_1$ kann die Anziehung $n_1 \; p_1$ der Schwere gleich sein der chemischen Anziehung $m_1 \; n_1$, und dann wird für alle Entfernungen, die grösser als $O \; p_1$ sind, die Schwere, und für alle Entfernungen, die kleiner als $O \; p_1$ sind, die chemische Anziehung vorwalten, und zwar um so mehr, je weiter man sich diesseits oder jenseits von dem Punkt p_1 entfernt.

3) Die Körper- und die Aetheratome sind gegen einander nicht schwer, sondern sie ziehen sich nur allein mit einer Kraft an, die ein ähnliches Gesetz befolgt, wie die chemische Anziehung. Bezeichnet man durch G(r) eine mit F(r) ähnliche Funktion, und durch μ die Masse eines Aetheratoms, so kann die Anziehung, von der hier die Rede ist, durch $M \; \mu \; G(r)$ ausgedrückt werden.

4) Je zwei Aetheratome stossen sich ab mit einer Intensität, die von ihrer Entfernung auf eine ähnliche Weise abhängt, wie F(r) von r. Bezeichnet man durch $\mu \; \mu_1$ die Massen der beiden Aetheratome H(r) das Gesetz ihrer Abstossungskraft, so kann durch

$$\mu \; \mu_1 \; H(r)$$

die Intensität der Abstossung zweier Aetheratome ausgedrückt werden.

Es wird wohl nicht befremden, dass wir die Intensität jeder Wechselwirkung zweier Atome dem Produkt ihrer Massen proportional genommen haben, denn es ist gar nicht anders denkbar, als dass sich die anziehende oder abstossende Wechselwirkung zweier Stoffe von jedem Theilchen des einen gegen jedes Theilchen des andern Stoffes äussern muss. Die Gesammtanziehung muss demnach sowohl der Masse des einen als auch der Masse des andern und folglich dem Produkt der Massen proportional gesetzt werden.

Nach der Form der Funktion $\frac{1}{r^2}$ F(r) G(r) H(r) könnte man vielleicht meinen, dass sich zwei Atome, wenn sie sich berühren, unendlich stark anziehen oder abstossen müssten, denn für $r = o$ geben diese Funktionen alle unendliche Werthe. Allein man muss bedenken, dass im Falle einer Berührung die Entfernung doch nur zwischen unendlich kleinen Massen wirklich Null sein kann; man sieht daraus, dass die Gesammtwirkung zweier sich berührenden Atome einen endlichen Werth haben werde.

23) *Nachweisung, dass die angenommenen Atomkräfte nothwendig sind.* Es ist bereits in Nr. 21 behauptet worden, dass diese Atomkräfte keine willkürliche Erfindung der Phantasie sind, sondern dass die Thatsachen der Wirklichkeit zu ihrer Annahme mit grosser Wahrscheinlichkeit berechtigen.

Nun kann man aber fragen, ob denn die Natur in der That diesen complizirten Apparat von Kräften nothwendig hat, um ihre mannigfaltigen Wirkungen hervor zu bringen, und ob es denn nicht denkbar wäre, dass der Zweck auch durch einfachere Mittel erreicht werden könnte. In dieser Hinsicht ist es sehr belehrend, wenn man sich die etwas unbescheidene Frage vorlegt, wie wir es wohl anfangen müssten, wenn wir uns eine unseren vernünftigen Zwecken angemessene Welt selbst errichten wollten.

Da erscheint es zunächst nothwendig, dass wir sowohl attraktiv und repulsiv wirkende Kräfte haben müssten; denn wenn alle Kräfte attraktiv wirkten, müsste sich aller Stoff in einem oder in mehreren Punkten concentriren; wenn dagegen alle Kräfte repulsiv wirkten, müsste sich aller Stoff ins Unendliche verflüchtigen. Die Annahme von repulsiv und von attraktiv wirkenden Kräften erscheint demnach als eine Nothwendigkeit.

Nun entsteht weiter die Frage, wohin wir diese Kräfte verlegen sollen, ob wir sie in einem und demselben, oder ob wir jede derselben in einem besonderen Stoff beherbergen sollen? Wir entscheiden uns für das letztere, weil wir den Bau, den wir in Gedanken aufführen wollen, viel leichter zu Stande bringen mit zweierlei Baumaterial, mit einem attraktiven und einem repulsiven, als mit einem einzigen Stoff, der je nach Umständen attraktiv oder repulsiv zu wirken im Stande wäre.

Damit nun aus diesem gesammten Material durch die demselben inwohnenden Kräfte eine Welt im Grossen und im Kleinen sich gestalten könne, müssen die verschiedenen Kräfte gewissen Bedingungen entsprechen.

Für den grossen planetarischen Bau ist eine weitausgreifende, fernhin und nicht wählerisch wirkende attraktive Kraft nothwendig. Sie muss weitausgreifend, fernhinwirkend sein, um den im weiten Raum zerstreuten Stoff zusammen zu fassen; sie darf nicht wählerisch sein, damit nicht einerlei Stoff, sondern im Gegentheil sehr mannigfaltige Substanzen zu einem Planeten zusammen kommen. Ein Planet, der blos aus Sauerstoff oder blos aus Wasserstoff oder blos aus Eisen bestünde, könnte in der That eine vernünftige Welt nicht genannt werden.

Dieser Anforderung entspricht aber die allgemeine Schwerkraft

vollkommen. Sie wirkt auf alle Stoffe ohne Unterschied, reicht bis in unmessbare Fernen, und besitzt noch überdies die für die Dauer eines Planetensystems höchst wichtige Eigenschaft, dass durch sie die Planeten in geschlossenen Bahnen um grössere Centralkörper herumgeführt werden können. Es ist vielleicht keine Kraft denkbar, welche die Schwerkraft zu ersetzen im Stande wäre.

Zu dem Bau im Grossen ist aber auch nothwendig, dass zwischen den Planeten, wenn sie sich einmal gebildet haben, irgend eine Communikation, irgend eine Art Telegraphie hergestellt werde, damit die vernünftigen Bewohner der Planeten zur Kenntniss von der Existenz aller übrigen Planeten kommen können, um dadurch zu erfahren, dass sie einem unendlich grossen Ganzen angehören. Dies alles bewirkt aber der Aether, wenn er die Eigenschaften besitzt, die wir demselben zugeschrieben haben. Vermöge der nur auf unmerkbar kleine Entfernung energisch wirkenden Anziehungskraft zwischen den Körper- und Aetheratomen sammeln sich die letzteren um die ersteren, bilden um dieselben Atmosphären, und verhindern durch ihre Repulsivkraft, dass die Körperatome nicht bis zum Contakt zusammentreten können. Da wir ferner angenommen haben, dass der Aether von aller Schwerkraft befreit und mit Repulsivkraft gegen Atome seines Gleichen begabt ist, verbreitet sich derselbe fast gleichförmig in dem ganzen unendlichen Raum, und bringt durch die schwingenden Bewegungen, die er im Stande ist von einem Planeten bis zum andern mit grösster Schnelligkeit fortzupflanzen, eine Lichtkomunikation, eine Art Lichttelegraphie zwischen denselben hervor. Diese Rolle würde der Aether nicht spielen können, wenn er unter dem Einfluss der Schwerkraft stünde; denn wenn dies der Fall wäre, müsste er um jeden Planeten eine Atomsphäre bilden und die einzelnen Planeten wären dann durch absolut leere Räume von einander getrennt. Die Eigenschaften, mit welchen wir den Aether versehen haben, scheinen also durchaus nothwendig, aber auch für den Zweck genügend zu sein. Die Anziehungskraft zwischen den Aetheratomen und Körperatomen ist durchaus nothwendig, damit jedes Körperatom mit repulsivem Stoff umgeben wird. Mit Schwerkraft darf der Aether nicht begabt werden, denn für die Ansammlung um die Körperatome wäre dies unnöthig, und wegen der durchaus nothwendigen Verbreitung desselben durch den ganzen unendlichen Raum wäre sie zweckwidrig.

Nun müssen wir noch sehen, was für den Bau im Kleinen, für das Bilden und Gestalten im engsten Raum nothwendig ist. Dazu sind aber offenbar Kräfte nothwendig, die im engsten Raum mit so grosser Intensität wirken, dass sie alle äusseren Einflüsse ganz zu überwältigen im Stande sind, so zwar, dass das, was entsteht, einzig und allein nur das Werk ihrer Wirksamkeit ist. Es muss dieser Detailbau von allem geschützt werden, was von aussen und von fernher störend einwirken könnte, und diess kann nur durch Kräfte geschehen, die im engsten Raum mit einer alles beherrschenden Intensität auftreten. Daher haben wir angenommen, dass die Cohäsionskraft und die chemische Kraft in ganz unmerkbaren Entfernungen sehr intensiv, auf grosse Entfernungen aber gar nicht merklich zu wirken im Stande sein sollen.

Sodann sieht man aber auch leicht ein, dass für dieses Bilden und Gestalten im Kleinen auch der Aether unentbehrlich ist, denn ohne denselben würden ja die Körperatome zu ganz unveränderlichen untheilbaren Klümpchen zusammentreten, ein Wechsel der Formen und Gestalten wäre also dann gar nicht denkbar.

Durch diese Bemerkungen dürfte wohl die hypothetische Annahme von den Körper- und Aetheratomen, so wie auch von den Kräften, mit welchen wir sie uns begabt denken, gerechtfertigt erscheinen, und es wird sich in der Folge zeigen, dass diese atomistische Anschauungsweise für die mathematische Behandlung der Physik und der Chemie eben so geeignet ist, als sie die Phantasie zu befriedigen vermag.

24) ***Die Aetherhülle des Atoms.*** Vermöge seiner Repulsivkraft verbreitet sich der Aether in dem ganzen unendlichen Raum, vermöge der zwischen Körper und Aetheratomen herrschenden Anziehung sammeln sich die Aetheratome um die Körperatome und bilden um dieselben atmosphärenartige Umhüllungen. Jedes Körperatom ist demnach von einer Aethermasse atmosphärenartig umgeben. Die Aethermenge, welche sich um ein Körperatom ansammelt, richtet sich theils nach der Energie, mit welcher die Körperatome die Aetheratome anzuziehen vermögen, theils auch nach der Gesammtmasse des im Raum existirenden Aethers. Diese Quantität kann also von vornherein nicht bestimmt werden, sondern sie muss, wenn sie sich überhaupt bestimmen lässt, aus Thatsachen erschlossen werden. Denkbar ist es allerdings auch, dass jedes Körperatom nur von einem oder von einigen wenigen Aetheratomen begleitet wäre; allein es gibt Erscheinungen, welche zu Gunsten einer aus vielen Aetheratomen bestehenden Umhüllung sprechen.

Die Gestalt dieser Umhüllung wird sich nach der Gestalt des Körperatoms richten; wäre diese rund, so würde es ohne Zweifel auch die Umhüllung sein; wäre das Atom nach einem Axensystem gebildet, so würde dieses auch in der Form der Aetherhülle und in der Anordnung der Aetheratome zu erkennen sein.

Die Dichte des Aethers muss nothwendig von Innen nach Aussen abnehmen, weil die Anziehung zwischen Körper- und Aetheratomen mit der Entfernung derselben sehr rapid abnimmt. Alles, was so eben über die Aetherhülle gesagt wurde, lässt sich kurz und wissensshaftlich bestimmt so ausdrücken: Die Form der Aetherhülle und die Art der Neben-

einandergruppirung der Atome in derselben ist das Resultat eines Gleichgewichtszustandes zwischen den attraktiven und repulsiven Kräften der Atome.

25) ***Das Molekul.*** Das Molekul ist eine stabile Gleichgewichtsgruppe von zwei oder mehreren gleichartigen oder ungleichartigen Atomen. Um die Entstehung einer solchen Gruppe anschaulich zu machen, wollen wir uns klar zu machen suchen, was geschehen wird, wenn in einem engeren, aber doch bemerkbar grossen Raum zwei oder mehrere gleichartige oder ungleichartige mit Aetherhüllen umgebene Körperatome sich befinden.

Wenn wir erwägen, dass das Volumen eines Atomes und selbst das Volumen einer Aetherhülle so ausserordentlich klein ist, dass in einem dem bewaffneten Auge kaum bemerkbaren Raum unzählige Atome mit ihren Aetherhüllen enthalten sein können, ohne dass sich die letzten berühren; wenn wir ferner noch erwägen, dass die chemische Anziehung so wie auch die Repulsivkraft des Aethers erst dann von Bedeutung werden im Vergleich zur Anziehung durch die Schwere, wenn die Entfernung der Körperatome nicht gar vielmals grösser ist, als die grösste Dimension einer Aetherhülle, so müssen wir als höchst wahrscheinlich annehmen, dass die Atome, deren Schicksal wir in Gedanken verfolgen wollen, anfangs fast nur vermöge der Schwerkraft auf einander wechselseitig anziehend einwirken werden, indem ihre gegenseitigen Entfernungen noch viel zu gross sein werden, als dass die chemische Anziehung oder die Repulsivkraft des Aethers irgend eine bemerkbare Wirkung äussern könnten.

Beim Beginn der Bewegung wird sich daher die materielle Verschiedenheit der Atome auf keinerlei Weise bemerkbar machen, sondern nur allein die Massenverhältnisse werden durch die Geschwindigkeiten hervortreten, mit welcher die einzelnen Atome aus ihren ursprünglichen Positionen gegen den gemeinschaftlichen Mittelpunkt sämmtlicher Massen hinzueilen beginnen, und dabei werden sich die Geschwindigkeiten zweier Atome (ungefähr) umgekehrt verhalten, wie ihre Massen.

Anders werden sich die Erscheinungen gestalten, wenn einmal die Atome einander so nahe gekommen sind, dass die chemische Anziehung zwischen den Körperatomen und der Repulsivkraft der Aetheratome mit überwiegender Macht aufzutreten beginnen. Dann werden sich die Geschwindigkeiten und Bewegungsrichtungen der Atome theils nach den Massenverhältnissen, theils nach der Intensität der chemischen Anziehung und Repulsivkraft des Aethers richten. Jedes Atom wird dann nicht nur den gemeinsamen Mittelpunkt sämmtlicher Massen, sondern auch gleichzeitig diejenigen Atome zu erreichen suchen, von welchen aus es am intensivsten chemisch angezogen wird.

Dieses Streben nach wechselseitiger Vereinigung würde, wenn kein Aether vorhanden wäre, bis zum Zusammenstoss aller Atome fortdauern; weil aber die Atome mit Aether umgeben sind, so kann es nicht bis zum Zusammenstoss der Atome kommen, weil die Aetherhüllen, wenn sie einmal bis in eine gewisse Nähe gekommen sind, sich mit solcher Energie abstossen, dass dadurch den attraktiv wirkenden Kräften eine Grenze gesetzt wird.

Dieser Kampf der verschiedenen Kräfte wird zuletzt damit endigen müssen, dass alle Atome in einen gewissen gesetzmässigen Beharrungszustand der Bewegung gerathen müssen, in welchem die verschiedenen Körperatome im Wesentlichen eine gewisse Gegeneinandergruppirung beibehalten, aber gleichwohl innerhalb enger Grenzen periodisch wiederkehrende Schwingungen vollbringen. Und dies wird so lange fortdauern, bis sich eine Gelegenheit darbietet, dass die in sämmtlichen Massen enthaltene lebendige Kraft an der äussern Umgebung der Gruppe abgegeben werden kann. Ist dies geschehen, so wird allmählig ein ruhiger Zustand eintreten, und jedes Atom wird dann gegen alle übrigen so gruppirt sein, dass die auf dasselbe einwirkenden Kräfte vollkommen im Gleichgewicht sind, also den bekannten 6 Gleichungen genügen welche die Bedingung des Gleichgewichts eines festen Körpers ausdrücken. Das so gebildete Molekul ist demnach eine Gruppe von Atomen, in welcher die sämmtlichen Kräfte den Bedingungen eines stabilen Gleichgewichts entsprechen

26) *Isomere. Molekule.* Es ist wohl leicht einzusehen, dass es im Allgemeinen mehr als eine einzige Gegeneinanderlagerung der Atome geben kann, bei welcher die sämmtlichen Kräfte den Bedingungen eines stabilen Gleichgewichts entsprechen. Aus den gleichen Atomen können also mehrere Molekule entstehen, die sich aber nur durch die Art der Gegeneinanderlagerung der Atome von einander unterscheiden, und von solchen Molekulen sagen wir, dass sie isomere seien. Die Zahl der isomeren Molekule, welche aus den gleichen Atomen möglicher Weise entstehen können, ist gleich der Anzahl der möglichen stabilen Gleichgewichts-Gegeneinanderlagerungen der Atome. Die Lagerung eines Atoms wird aber durch zwei Elemente bestimmt, nämlich durch den Ort, welchen der Schwerpunkt des Atoms gegen den Schwerpunkt der übrigen Atome einnimmt, und durch Stellung des Atoms, welche durch die Richtung seiner Hauptabmessungen bestimmt wird. Die Verschiedenheit der Gegeneinanderlagerung der Atome zweier isomeren Molekule kann sich also auf den Ort beziehen, welchen die Schwerpunkte der Atome einnehmen, oder auf die Richtung der Hauptabmessungen der Atome oder endlich auf beides zu gleicher Zeit.

Die Anzahl der möglichen Gleichgewichtsgruppirungen richtet sich

theils nach der Grundgestalt der Atome, theils nach ihrer Anzahl. Einaxige Grundgestalten werden nicht so viel Gleichgewichtspositionen zulassen, als zwei- oder dreiaxige Grundgestalten. Bei einer kleinen Anzahl von Atomen werden nicht so viele Gleichgewichtspositionen möglich sein, als bei einer grössern Anzahl.

Die Grundform des Molekuls oder der Atomgruppe richtet sich theils nach der Anzahl der Atome, theils nach der gegenseitigen Lage der Schwerpunkte der Atome. Zwei Atome bilden ein stabförmiges Molekul, drei Atome bilden eine dreieckige Platte, vier Atome ein tedrardrisches Molekul. Wenn die Anzahl der Atome eines Molekuls sehr gross ist, so wird die Grundform des Molekuls eine abgerundete Form haben.

Die Stabilität des Gleichgewichtszustandes der Atome in einem Molekul richtet sich nach der Anzahl der Atome, nach der Grundgestalt derselben, nach der Intensität der chemischen Anziehung, nach der gegenseitigen Lage der Schwerpunkte der Atome, endlich nach der Stellung der Hauptabmessungen der Atome. Im Allgemeinen darf man wohl sagen, dass die Stabilität des Gleichgewichts bei einer kleinen Anzahl von Atomen, die sich sehr energisch anziehen, sehr gross, bei einer sehr grossen Anzahl von Atomen, die sich nur schwach anziehen, sehr klein sein wird.

27) *Die zusammengesetzten Molekule.* So wie einzelne Atome zu einer Gleichgewichtsgruppe zusammentreten können, so können auch zwei oder mehrere gleichartige oder ungleichartige Molekule abermals zu einer Gleichgewichtsgruppe sich vereinigen, und daraus entsteht nun ein zusammengesetztes Molekul (B.). Dieser Prozess kann sich aber neuerdings wiederholen, so dass aus Molekulen von der Art (B) wiederum Molekule (C) von noch zusammengesetzterer Art entstehen.

Um diese verschiedenen Arten von Molekulen nach dem höheren oder niedrigern Grad ihrer Zusammensetzung zu unterscheiden, wollen wir sie Molekule der ersten, zweiten, dritten Ordnung nennen. Das Molekul der ersten Ordnung besteht also aus einer einzigen Atomen-Gruppe, und alle höheren Molekule sind aus nächst niedrigeren Molekulen ebenso zusammengesetzt, wie das Molekul der ersten Ordnung aus den Atomen.

Alles, was früher über das Molekul der ersten Ordnung, hinsichtlich der Isomere, hinsichtlich der Gestalt und Stabilität gesagt wurde, findet auch auf die zusammengesezten Molekule Anwendung. Eine Gruppe aus 3 Molekulen wird eine dreieckige Gestalt haben, eine Gruppe aus 4 Molekulen eine tedrarderähnliche; eine sehr grosse Anzahl von Molekulen zu einer Gruppe vereinigt, wird eine abgerundete Form hervorbringen.

Die Stabilität dieser zusammengesetzten Molekule wird im Allgemeinen kleiner sein, als jene der einfachen Molekule, weil bei diesen nur wenig, bei jenen im Allgemeinen sehr viele Atome zu einem Ganzen vereinigt sind; sodann kann auch die Anziehung zwischen den Molekulen um so energischer sein, als die Anziehung zwischen den Atomen eines Molekuls der ersten Ordnung. Zusammengesetzte Molekule lassen sich also leichter auflösen (zersetzen), als einfache.

Hinsichtlich der Isomere der zusammengesetzten Molekule ist zu bemerken, dass diese ausserordentlich mannigfaltig sein können, denn die Zahl aller möglichen Gleichgewichtsgruppen, die aus einer so grossen Anzahl von mannigfaltigen Atomen, wie sie in einem Molekul höherer Ordnung vorkommen, entstehen können, ist fast grenzenlos.

28) *Atomistischer Begriff des chemisch einfachen und des chemisch zusammengesetzten Stoffes.* Ein chemisch einfacher Stoff besteht nach der atomistischen Ansicht aus Atomen von einerlei Art. Die chemische Natur eines einfachen Stoffes betrifft einzig und allein nur die Gesammtheit der Eigenschaften, welche dem einzelnen Atom zukommen; die Art und Weise des Nebeneinanderseins der Atome im Stoff, also insbesondere der Aggregationszustand, und wenn der Stoff nicht flüssig ist, die mehr oder weniger stabile Gruppirungsart der Atome wird gewöhnlich in das Gebiet der Physik verwiesen.

Ein chemisch zusammengesetzter Stoff besteht nach der atomistischen Ansicht aus Gruppen von Atomen, d. h. aus Molekulen. Sind alle Molekule des Stoffes in jeder Hinsicht identisch, kommen also in jedem Molekul des Stoffes die gleichen Arten von Atomen vor, und von jeder Art die gleiche Anzahl, und ist überdiess die Gruppirungsart der Atome in allen Molekulen die gleiche: so nennen wir einen solchen Stoff einen homogen zusammengesetzten Stoff. Wenn jedes Molekul nur aus einer einzigen Atomgruppe besteht, also jedes Molekul des Stoffes ein Molekul der ersten Ordnung ist, so nennen wir den Stoff eine chemische Verbindung der ersten Ordnung. Wenn hingegen jedes Molekul aus mehreren Atomgruppen besteht, also ein Molekul der zweiten oder einer höheren Ordnung ist, so nennen wir die Stoffe eine chemische Verbindung der zweiten, dritten oder überhaupt einer höheren Ordnung.

Der Chemismus im engeren Sinne des Wortes spricht sich in der Entstehung der Molekule aus. Das Molekul ist das wahre chemische Gebilde, denn die Eigenschaft, welche ein zusammengesetzter Stoff zeigt, ist von der Gesammtmenge des Stoffes, von der Aggregationsform und überhaupt von der Art des Nebeneinanderseins der Molekule im Stoff ganz unabhängig und richtet sich wesentlich nur nach dem Inhalt der Molekule und nach der Art der Gruppirung der Atome in den Molekulen. Die Chemie im engeren Sinn des Wortes betrachtet also nur die

Atome und die Atomgruppen, und überlässt es der Physik, die Gesetze des Molekularbaues der Körper zu entwickeln.

Eine scharfe wissenschaftliche Grenze zwischen Physik und Chemie gibt es nicht; es wäre denn, dass man sich dahin verständigte, alles, was das Gleichgewicht der Atome, Atomgruppen und Atomsysteme betrifft, in das Gebiet der Chemie, und alles, was die Bewegung betrifft, in das Gebiet der Physik zu rechnen. Unter diesen Voraussetzungen wäre die Chemie die Statik und die Physik die Dynamik der Atome und der in denselben thätigen Kräfte. Wenn wir uns aber an die Vorstellungen anschliessen wollen, welche gewöhnlich von Physik und Chemie üblich sind, so müssen wir in das Gebiet der Chemie vorzugsweise diejenigen Erscheinungen rechnen, welche durch die chemischen Kräfte, mit welchen die Atome begabt sind, hervorgebracht werden; in diesem engeren Sinn des Wortes gehören also vorzugsweise die Atome an und für sich, und die Atomgruppen oder Molekule in das Gebiet der Chemie.

Wir werden in der Folge die Wörter »Verbindung« und „verbinden« in dem Sinn gebrauchen, dass sie mit Atomgruppirung, Molekulargruppirung oder überhaupt mit statischer Gruppirung der Molekule und Atome gleichbedeutend sind, denn nach unserer atomistischen Ansicht ist verbinden und gruppiren, Verbindung und Gruppirung einerlei.

Eine weitere Verfolgung der atomistischen Anschauungsweise würde uns zu weit von dem Weg ablenken, welchen wir zu verfolgen haben, um das beabsichtigte Ziel zu erreichen. Ich würde auch das Wenige, was im Vorhergehenden über die Atome gesagt wurde, ganz weggelassen haben, wenn es möglich wäre, ohne die Begriffe und die Vorstellung von Atomen die Grundbegriffe von den Kräften und ihrer Wirkungsweise mit der einer exakten Wissenschaft entsprechenden Schärfe festzustellen. Wenn man von den Kräften etwas verstehen will, muss man vor allem Andern wissen, wo sie ihren Sitz haben, von wo aus und nach wohin sie wirken. Diese Fragen dürfen nun einmal nicht umgangen werden, und so wie man sich dieselben stellt, ist man genöthigt, von den Atomen zu sprechen.

Bewegung der Massen.

29) *Bewegung einer Masse, die durch eine constante Kraft getrieben wird.* Wir haben den Satz aufgestellt, dass die Materie in sich selbst die Fähigkeit nicht besitzt, sich aus dem Zustand der Ruhe in jenen der Bewegung zu versetzen, oder einen Zustand der Bewegung, in welchem sie sich bereits befindet, zu verändern, sondern, dass zu dem

Einen wie zu dem Andern die Einwirkung einer äussern treibenden Kraft nothwendig ist. Es ist nun die Frage zu beantworten, wie die Bewegung eines Körpers erfolgen wird, wenn auf denselben Kräfte irgend einer Art einwirken? Mann kann sich die Aufgabe stellen, diejenigen Bewegungsgesetze auszumitteln, welche von der speziellen Natur und Wirkungsart der Kräfte und von der materiellen Beschaffenheit der Substanzen, aus welchen die Körper bestehen, unabhängig sind. Die Ausmittlung dieser Gesetze ist das Geschäft der reinen Mechanik. Diese hat es also nur mit den allgemeinsten Beziehungen zu thun, welche zwischen dem aktiven Prinzip der Kräfte und dem passiven Prinzip der Materie stattfinden.

Es ist schon in früheren Nummern ausführlich erklärt worden, wie die Kräfte und die Massen gemessen werden können; wir können uns daher unmittelbar mit der Beantwortung der Frage beschäftigen, wie die Bewegung einer Masse erfolgen wird, wenn dieselbe durch gewisse Kräfte getrieben wird.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, wenn eine Masse durch eine der Richtung und Intensität nach unveränderlich wirkende Kraft getrieben wird, und wenn alle Punkte der Masse parallele und gerade Linien beschreiben, deren Richtung mit jener der Kraft übereinstimmt.

Unter dieser Voraussetzung ist es klar, dass die Bewegung jedes einzelnen Massenatoms des ganzen Körpers so erfolgen wird, wie wenn die ganze Masse des Körpers in einem einzigen Punkt concentrirt wäre.

Denken wir uns also einen materiellen Punkt, in welchem M Masseneinheiten concentrirt wären, dessen Masse also = M ist; denken wir uns ferner, dass auf diese Masse ohne Unterbrechung und mit unveränderlicher Intensität eine Kraft (ein Druck) K immer nach der gleichen Richtung einwirke, und fragen wir uns, wie die Bewegung erfolgen wird.

Die Kraft K mag noch so klein und die Masse mag noch so gross sein, so wird doch die Bewegung schon nach dem ersten Augenblick der Einwirkung der Kraft beginnen, d. h. es wird in der Masse M schon eine gewisse, aber allerdings nur sehr kleine Geschwindigkeit vorhanden sein, nachdem die Kraft während eines wenn auch noch so kleinen Zeittheilchens thätig war. Würde man nach diesem Zeittheilchen die Kraft ganz beseitigen, so müsste die Bewegung in dem Zustand, welcher am Ende dieses Zeittheilchens vorhanden wäre, fortdauern. Wenn aber die Kraft nicht beseitigt wird, sondern weiter fortwirkt, so muss sie fort und fort Geschwindigkeitsänderungen hervorbringen; es wird daher die Geschwindigkeit der Masse beständig wachsen. Die Geschwindigkeit, welche in irgend einem Zeitaugenblick vorhanden ist, kann durch den Raum gemessen werden, den die Masse

in der auf diesen Zeitaugenblick folgenden Sekunde zurücklegen würde, wenn man von jenem Zeitaugenblick an die Einwirkung der Kraft ganz beseitigte, denn in diesem Falle würde die Masse vermöge ihrer Trägheit (d. h. vermöge ihrer passiven Natur) in dem Zustande verbleiben, in welchem sie sich befand, als man die Kraft beseitigte; die Bewegung muss also mit unveränderlicher Geschwindigkeit erfolgen, und das richtige Maass dieses Bewegungszustandes ist eben der Weg, der in einer Sekunde zurückgelegt wird. Nennen wir nun v diese Geschwindigkeit, die vorhanden ist, nachdem die Kraft K während einer Zeit t thätig war.

Die Bestimmung dieser Geschwindigkeit v ist streng genommen auf dem Wege des reinen Denkens und ohne Berücksichtigung der Erfahrung nicht möglich; es bleibt also nichts anderes übrig, als über die Beziehung, in welcher die Grössen v, t, K, M zu einander stehen, eine möglichst naturgemässe Hypothese zu machen, und sodann nachzusehen, ob die daraus sich ergebenden Folgerungen der Wirklichkeit entsprechen.

Denken wir uns zunächst, dass ein Druck von einem Kilogramm auf eine Masseneinheit während einer Zeiteinheit, z. B. während einer Sekunde, einwirke, so wird nach der ersten Sekunde eine gewisse Geschwindigkeit f vorhanden sein. Nun ist es aber doch natürlich, wenn wir annehmen, dass diese Triebkraft von einem Kilogramm in der Masseneinheit auch in jeder einzelnen der darauf folgenden Sekunden eine ebenso grosse Geschwindigkeitsänderung hervorbringt, wie während der ersten Sekunde.

Diese naturgemäss scheinende Annahme würde zur Gewissheit werden, wenn man beweisen könnte, dass die Geschwindigkeitsänderung, welche eine Kraft hervorbringt, von der Grösse einer bereits vorhandenen Geschwindigkeit gar nicht abhinge. Dies lässt sich aber nicht beweisen, daher dürfen wir es vorläufig nur als eine Hypothese betrachten, wenn wir sagen: in jeder Sekunde nehme die Geschwindigkeit um gleich viel zu. Diess vorläufig als richtig angenommen, sind die Geschwindigkeiten jener Masseneinheit nach der 1., 2., 3. Sekunde

$$1 f,\ 2 f,\ 3 f\ \ldots\ldots\ t f$$

Stellen wir uns nun vor, dass man auf jene Masseneinheit während 1., 2., 3. . . . . t Sekunden eine Kraft von 1, 2, 3, 4 . . . . K Kilogrammen einwirken lasse, so scheint es wiederum naturgemäss zu sein, wenn wir annehmen, dass ein 2-, 3-, 4- . . . . K Mal grösserer Druck in jeder Sekunde eine 2-, 3-, 4 Mal grössere Geschwindigkeitsänderung hervorbringe, d. h. dass eine Kraft K während jeder Sekunde in einer Masseneinheit eine Geschwindigkeitsänderung K f erzeugt. Dann sind die Geschwindigkeiten nach der

1. 2. 3. . . . . . t Sekunde.

f K 2 K f 3 K f . . . . t K f

Nun ist noch der Einfluss der Grösse der zu bewegenden Masse zu ermitteln.

Wenn die Kraft K auf die Masseneinheit einwirkt, entsteht in jeder Sekunde eine Geschwindigkeitsänderung K f. Wenn die Kraft K auf eine Masse wirkt, die gleich 2 Masseneinheiten ist, so kann man sich für die Masse 2 zwei Masseneinheiten, 1 und 1, und für die Kraft K zwei Kräfte $\frac{K}{2}$ und $\frac{K}{2}$ denken, so dass also jede der beiden Masseneinheiten durch eine Kraft $\frac{K}{2}$ getrieben wird. Dann ist aber die Geschwindigkeitsänderung, die in jeder Zeitsekunde in jeder Masseneinheit, und mithin auch in der ganzen Masse 2 hervorgebracht wird, $\frac{1}{2}$ K f und nach Verlauf der Zeit t: $\frac{1}{2}$ K f t.

Wenn die Masse gleich 3 Masseneinheiten ist, kann man sich dieselbe in 3 Masseneinheiten 1, 1, 1 und die Kraft K in drei Kräfte $\frac{K}{3}, \frac{K}{3}, \frac{K}{3}$ getheilt denken; man kann sich also die Sache so vorstellen, wie wenn auf jede Masseneinheit eine Kraft $\frac{1}{3}$ K wirkte. Dann aber wird in jeder Sekunde in jeder Masseneinheit eine Geschwindigkeitsänderung $f \frac{1}{3}$ K, und während der Zeit t eine Geschwindigkeitsänderung $\frac{1}{3} f$ K t entstehen.

Allgemein kann man, wenn die Masse gleich M ist, diese sich in M Masseneinheiten aufgelöst und die Kraft K in M Kräfte, von denen jede gleich $\frac{K}{M}$ ist, zerlegt denken, und dann wird die in jeder Sekunde entstehende Geschwindigkeitsänderung $\frac{K f}{M}$ und die während t Sekunden hervorgebrachte Geschwindigkeitsänderung $= f \frac{K}{M}$ t sein.

Wir kommen also dahin, die Geschwindigkeit v, welche eine Masse M erlangt, welche durch eine constante Kraft K während t Sekunde getrieben wird, gleich $f \frac{K}{M}$ t zu setzen, und haben also:

$$v = f \frac{K}{M} t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Die constante f, d. h. die Geschwindigkeitsänderung, welche die Krafteinheit während einer Zeiteinheit auf eine Masseneinheit wirkend hervorbringt, kann als das Maass der spezifischen Trägheit der Materie angesehen werden. Von diesem spezifischen Maass der Trägheit hängt die Schnelligkeit ab, mit welcher alle Bewegungsprozesse vor sich gehen. Wenn die Kräfte und Massen bleiben, wie sie jetzt sind, und dagegen die Massen plötzlich beweglicher würden, so würden von diesem Augenblick an alle Bewegungen mit grösserer Geschwindigkeit erfolgen.

Wenn wir die Bedeutung der Gleichung (1) mit Worten ausdrücken wollen, so lauten diese dahin, dass eine constante Kraft eine gleichförmig beschleunigte Bewegung hervorbringe, und dass die Geschwindigkeit der Bewegung der Intensität der Kraft und der Dauer der Einwirkung direkt, dagegen der Grösse der Masse verkehrt proportional sei.

Aus der Gleichung (1) folgt:

$$K = \frac{M v}{f t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

d. h. die treibende Kraft, welche im Stande ist, in einer Masse M während einer Zeit t eine Geschwindigkeit v hervorzubringen, ist der Grösse der Masse und der zu erzeugenden Geschwindigkeit direkt, aber der Dauer der Einwirkung verkehrt proportional.

Die Gleichung (1) gilt ganz allgemein, welche Einheiten man auch zur Messung von M K v t zu Grunde legen mag. Welche Einheiten zweckmässig sind, richtet sich nach der Natur des Gegenstandes, der einer Betrachtung unterworfen werden soll. Man kann z. B. für Probleme, welche die Astronomie betreffen, als Masseneinheit die Masse der Sonne annehmen, als Krafteinheit die Kraft, mit welcher zwei Massen Punkte, wenn in jedem derselben eine Sonnenmasse concentrirt wäre, in einer Entfernung gleich einer Meile gestellt, vermöge der allgemeinen Gravitation sich anziehen würde; als Zeiteinheit die Dauer eines Jahres und als Längeneinheit die Länge einer Meile. Dann wäre f der Weg in Meilen ausgedrückt, den die Sonnenmasse in der Zeit eines Jahres zurücklegen würde, wenn sie durch eine Kraft getrieben würde, welche so gross wäre, als die Anziehung, welche zwei in Punkte concentrirte und in eine Entfernung gleich einer Meile gestellte Sonnenmassen auf einander ausüben würden.

Für die Betrachtung der Bewegungen der Körper auf der Erde wäre eine solche Wahl der Einheiten sehr unpassend; es ist für diesen Zweck viel angemessener, solche Einheiten zu wählen, die sich bestimmen lassen, und von denen man sich leicht klare Vorstellungen machen kann.

Wir wählen daher folgende Einheiten:

1) Als Zeiteinheit die Sekunde.
2) Als Längeneinheit den Meter.
3) Als Geschwindigkeitseinheit den Meter pr. 1 Sekunde.
4) Als Krafteinheit einen Druck gleich einem Kilogramm.

In Betreff der Masseneinheit und des Werthes von f wird uns die folgende Betrachtung zum Ziele führen.

Wenn wir den Körper, dessen Masse M ist, an irgend einem Ort der Erde abwägen, so erhalten wir sein Gewicht für diesen Ort, d. h. wir erhalten die Kraft, mit welchen der Körper an dem Ort, wo er gewogen würde, von der Erde angezogen wird. Es sei G dieses Gewicht. Wenn wir nun diesen Körper, da wo sein Gewicht G ist, frei fallen lassen, so muss diess mit gleichförmig beschleunigter Bewegung geschehen, wenn das Fallen innerhalb eines Raumes geschieht, innerhalb welchem das Gewicht als unveränderlich angesehen werden kann; denn wir haben gesehen, dass jede constante Kraft eine gleichförmig beschleunigte Bewegung hervorbringt. Es sei nun g die Geschwindigkeit, welche der Körper, da wo sein Gewicht G ist, bei freiem Fall nach der ersten Sekunde erlangt, oder die Geschwindigkeitsänderung während jeder Sekunde.

Weil nun die Fallbewegung eine gleichförmig beschleunigte ist, so darf auf dieselbe die Gleichung (1) angewendet werden, d. h. dieser Gleichung wird Genüge geleistet, wie man in dieselbe setzt:

$$t = 1, \ v = g, \ K = G$$

Dann findet man aber:

$$g = f\frac{G}{M} \text{ oder } \frac{M}{f} = \frac{G}{g} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Führt man diesen Werth in (1) ein, so ergibt sich:

$$v = g\frac{G}{K}t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Durch diese Gleichung können wir nun die Bewegung des Körpers bestimmen, ohne genöthigt zu sein, dessen Masse messen zu müssen, wenn wir nur das Gewicht G des Körpers und den correspondirenden Werth von g kennen. Es ist also nicht durchaus nothwendig, dass wir uns für eine bestimmte Masseneinheit erklären; indessen wollen wir es doch thun,

weil für manche Betrachtungen gerade die Vorstellung von einer gewissen Massengrösse sehr wichtig ist.

Aus obiger Gleichung (3) folgt:

$$M = f\frac{G}{g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und hieraus sieht man, dass man die Masse eines Körpers durch irgend ein beliebiges Vielfaches des Quotienten $\frac{G}{g}$ messen kann. Die Richtigkeit dieser Art, die Masse eines Körpers zu messen, ist sehr einleuchtend. Es ist zunächst klar, dass an einem bestimmten Ort der Erde die Gewichte der Körper sich wie ihre Massen verhalten, weil die Erde jede Masseneinheit an einem bestimmten Ort mit gleicher Kraft anzieht. Allein da die Masse eines Körpers etwas absolut Unveränderliches, das Gewicht des Körpers hingegen mit dem Ort, wo er sich befindet, etwas Veränderliches ist, so kann die Masse eines Körpers durch das Gewicht allein nicht richtig gemessen werden. Nun ist aber die Geschwindigkeitszunahme g, welche ein Körper in jeder Sekunde beim freien Fall erlangt, vollkommen genau seinem Gewichte proportional (indem bei jeder gleichförmig beschleunigten Bewegung vermöge Gleichung (1) für $t = 1$ der Werth von f mit K proportional wächst), daher hat der Quotient $\frac{G}{g}$ die Eigenschaft, für einen und denselben Ort proportional mit dem Gewicht zu wachsen, dagegen aber für ein und denselben Körper an verschiedenen Orten wo er hingebracht wird, den gleichen Werth zu haben; man sieht also, dass dieser Quotient $\frac{G}{g}$ zum Messen der Masse eines Körpers gebraucht werden kann. Allein nicht nur $\frac{G}{g}$, sondern auch jedes Vielfache von diesem Quotienten kann zu dem gleichen Zweck dienen, weil auch diesem die oben erwähnte Eigenschaft zukommt.

Gewöhnlich wird zum Messen der Masse der einfache Quotient $\frac{G}{g}$ genommen, wir hingegen wollen $f = \frac{1}{2}$ und

$$M = \frac{G}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

nehmen, weil dann das höchst wichtige Gesetz über die Wirkungen der Kräfte, wovon in der Folge die Rede sein wird, sich am einfachsten ausdrücken lässt. Dieser Werth von M wird gleich der Einheit wenn $G = 2$ g. Wenn also die Masse durch (6) gemessen wird, nimmt man als Einheit der Massen die Masse eines Körpers an, dessen Gewicht zwei-mal so gross ist, als die Geschwindigkeitszunahme in der Sekunde beim freien Fall. Für eine geographische Breite von 40 bis 50° ist g in Metern ausgedrückt 9.808, demnach $2\,g = 19.616$. Wir nehmen mithin als Masseneinheit einen Körper an, der an einem Ort, wo die Beschleunigung durch die Schwere 9.808^m beträgt 19.616 Kilogramme wiegt.

Aus der Gleichung (6) folgt $G = 2\,g\,M$, und wenn man diesen Werth in (4) einführt, so kann man auch schreiben:

$$v = \frac{1}{2}\frac{K}{M}\,t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Das Ergebniss der bisherigen Betrachtungen ist also folgendes:

1. wenn beliebige Einheiten gewählt werden, hat man allgemein

$$v = f\,\frac{K}{M}\,t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

wobei f die Beschleunigung ist, welche die Krafteinheit und Zeiteinheit in der Masseneinheit hervorbringt.

2) Wenn als Längeneinheit der Meter, als Zeiteinheit die Sekunde, als Krafteinheit ein Druck gleich 1 Kilogramm genommen wird, und wenn überdies die Massen des Körpers durch den Quotienten $\frac{G}{2\,g}$ gemessen wird.

$$M = \frac{G}{2\,g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

$$v = g\,\frac{K}{G}\,t, \text{ oder } v = \frac{1}{2}\frac{K}{M}\,t \quad . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Der Weg, welcher während der Zeit t zurückgelegt wird, gleich s genannt, so ist derselbe nach Nr. (6)

$$s = \frac{1}{2}\,v\,t = \frac{1}{2}\,g\,\frac{K}{g}\,t^2 = \frac{1}{4}\frac{K}{M}\,t^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Vermittelst dieser Gleichungen (9), (10), (11) kann man von den Grössen v, s, K, G, t, M, g je drei bestimmen, wenn die übrigen bekannt sind:

wenn gegeben ist: so findet man:

$$\left.\begin{array}{llll} g, K, G, t \;\ldots & M = \frac{G}{2\,g} & v = g\,\frac{K}{G}\,t, & s = \frac{1}{2}\,g\,\frac{K}{G}\,t^2 \\ g, K, G, v \;\ldots & M = \frac{G}{2\,g} & t = \frac{v\,G}{g\,K} & s = \frac{G}{2\,g}\,\frac{v^2}{K} \\ g, K, G, s \;\ldots & M = \frac{G}{2\,g}, & v = \sqrt{2\,g\,s\,\frac{K}{G}} & t = \sqrt{\frac{2\,s}{g}\,\frac{G}{K}} \end{array}\right\} (12)$$

Wenn der Körper in dem Augenblick, von welchem an man die Einwirkung der Kraft betrachtet, bereits eine gewisse Geschwindigkeit c besitzt, ist die Geschwindigkeit, nachdem die Einwirkung der Kraft durch t Sekunde gedauert hat:

$$v = c + g\,\frac{K}{G} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

und der Weg s welcher während dieser Zeit t zurückgelegt wird:

$$s = c\,t + \frac{1}{2}\,g\,\frac{K}{G}\,t^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Wenn endlich einem Körper, der eine Geschwindigkeit c besitzt, eine Kraft K seiner Bewegung entgegen wirkt, so ist die Geschwindigkeitsverminderung, welche sie in einer gewissen Zeit t hervorbringt, eben so gross, als die Geschwindigkeitsvermehrung, welche sie hervorbringen würde, wenn die Richtung der Kraft mit der Richtung der Bewegung übereinstimmte. Es ist daher in diesem Falle

1) die Geschwindigkeit, welche noch vorhanden ist, nachdem die Kraft K während t Sekunde der Bewegung entgegen gewirkt hat:

$$v = c - g\,\frac{K}{G}\,t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

2) der Weg, den der Körper während der Einwirkung der Kraft K zurücklegt:

$$s = c\,t - \frac{1}{2}\,g\,\frac{K}{G}\,t^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

30) *Geradlinige Bewegung einer Masse, welche durch eine veränderliche Kraft getrieben wird.* Wenn eine Kraft K mit veränderlicher Intensität auf eine Masse M einwirkt, und zwar nach der Richtung, nach welcher sie sich bewegt, so können die in gleichen Zeitintervallen entstehenden Geschwindigkeitsänderungen nicht gleich gross sein, und es kann daher in diesem Falle keine gleichförmig beschleunigte oder gleichförmig verzögerte Bewegung entstehen. Es sei nun K die Intensität der Kraft nach Verlauf einer etwas grösseren Zeit $t + \triangle t$, v die wahre Geschwindigkeit zur Zeit t und $v + \triangle v$ die wahre Geschwindigkeit zur Zeit $t + \triangle t$. Nun ist klar, dass die wirkliche Geschwindigkeitsveränderung $\triangle v$ grösser ist, als jene, welche eintreten würde, wenn die Kraft während $\triangle t$ an Intensität nicht zugenommen hätte; man hat daher, wenn G das Gewicht des Körpers bedeutet:

$$\triangle v > g\,\frac{K}{G}\,\triangle t$$

Sodann aber ist auch klar, dass die wirkliche Geschwindigkeitsänderung $\triangle v$ kleiner sein wird, als jene, welche eintreten müsste, wenn die Kraft während des ganzen Zeitintervalles $\triangle t$ unveränderlich mit der Intensität $K + \triangle K$, welche sie erst am Ende des Zeitintervalles $\triangle t$ erlangt, gewirkt hätte; man hat daher:

$$\triangle v < g \frac{K + \triangle K}{G} \triangle t$$

Diese Beziehungen gelten, wie klein man sich auch das Zeitintervall denken mag, wenn nur während desselben ein ununterbrochenes Zunehmen der Intensität der Kraft statt findet; sie gelten also auch noch dann, wenn das Zeitintervall verschwindend klein oder als ein Differenzial der Zeit gedacht wird. Innerhalb eines unendlich kleinen Zeitintervalles kann sich aber die Kraft, so wie auch die Geschwindigkeit nur unendlich wenig ändern, es ist demnach wenn $\triangle t$ unendlich klein gedacht wird, auch $\triangle K$ und $\triangle v$ unendlich klein. Es nähert sich demnach bei dem unendlichen Abnehmen von $\triangle t$ der Quotient $\frac{\triangle v}{\triangle t}$ ohne Ende dem Werth $g \frac{K}{G}$, d. h. man hat

$$\frac{dv}{dt} = g \frac{K}{G} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Nennt man s den Weg, welchen die Masse während der Zeit t zurückgelegt hat, und d s die Zunahme dieses Weges während des Zeitelements d t so ist:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

und wenn man ein- für allemal annimmt, dass bei allen Untersuchungen über die Bewegung der Körper die auf einander folgenden Zeitintervallen, innerhalb welcher man die Bewegungsänderungen betrachtet, gleich gross angenommen werden, so ist d t als konstant, mithin $d^2 t = o$ zu nehmen, und dann wird:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d_s^2}{dt^2}$$

Man hat daher auch

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d_s^2}{dt^2} = g \frac{K}{G} = \frac{1}{2} \frac{K}{M} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

wobei M die Masse des Körpers bedeutet, demnach

$$M = \frac{G}{2g}$$

ist.

Ist K als Funktion von s gegeben, so erhält man durch Integration der Gleichung

$$\frac{d_s^2}{dt^2} = g \frac{K}{G} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

den Weg s als Funktion von t, und wenn man nach geschehener Integration den Differenzial-Quotienten $\frac{ds}{dt}$ aufsucht, so hat man die Geschwindigkeit als Funktion von t.

Multiplizirt man die letzte Gleichung mit 2 d s und integrirt sie sodann, so findet man:

$$\int \frac{2\, ds\, d_s^2}{dt^2} = \frac{2g}{G} \int K\, ds$$

oder:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{G} \int K\, ds + \text{Constant}$$

oder auch:

$$\frac{G v^2}{2g} = \int K\, ds + \text{Constant} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Durch diese Gleichung wird demnach die Geschwindigkeit nach Verlauf der Zeit bestimmt.

Ist K nicht als Funktion von s, sondern als Funktion von v gegeben, so erhält man durch Integration der Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = g \frac{K}{G} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

$$t = \frac{G}{g} \int \frac{dv}{K} + \text{Constant}$$

t als Funktion von v, und wenn man daraus v aufsucht, so erhält man v als Funktion von t, und dann findet man s durch

$$s = \int v\, dt + \text{Constant} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Das Messen der Thätigkeiten oder der Wirkungen der Kräfte.

31) ***Thätigkeit der Kräfte im Allgemeinen.*** Es ist keine einzige Thatsache bekannt, welche uns zu dem Schlusse berechtigt, dass durch die Thätigkeit der Kräfte oder durch andere Ursachen Stoffe geschaffen oder vernichtet würden. Im Gegentheil weisen alle Erfahrungen darauf hin, dass zu dem bestehenden Stoff nicht ein neues Atom dazu kommt,

dass aber auch keines vergänglich ist. Alle Veränderungen, welche in der materiellen Natur vorkommen können daher nur auf Ortsveränderungen der kleinsten Theile der Körper beruhen. Hierdurch entstehen aber sehr mannigfaltige Erscheinungen und Wirkungen, von denen die folgenden die wichtigsten sind:

1) Fortbewegung eines Theilchens oder eines Körpers ohne Aenderung der Geschwindigkeit.

2) Uebergang aus dem Zustand der Ruhe in jenen der Bewegung, und umgekehrt.

3) Fortbewegung eines einzelnen Theilchens oder eines Körpers mit Aenderung der Geschwindigkeit.

4) Fortschaffung der Körper von einem Ort nach einem andern.

5) Volumsänderung der Körper durch Ausdehnung oder Zusammenziehung.

6) Formänderung der Körper, z. B. Biegung oder Windung eines Stabes.

7) Zertheilung der Körper.

8) Aenderung der Gegeneinander-Gruppirung der Atome.

Die Bewegung ohne Aenderung der Geschwindigkeit erfolgt, wenn sie einmal eingeleitet ist, durch das passive Verhalten der Materie, also ohne alle Mitwirkung einer inneren oder äusseren Kraft. Alle übrigen der genannten Veränderungen entspringen aber nur durch die Thätigkeit der Kräfte.

Eine Kraft ist unthätig, wenn sie keine Veränderung hervorbringt, sie ist thätig, wenn sie eine jener Veränderungen vollbringt. Hierzu ist aber nothwendig, dass der Zug oder der Druck, die Attraktion oder die Repulsion, mit welcher die Kraft auf einen Körper einwirkt, oder mit andern Worten, dass der Angriffspunkt der Kräfte in Bezug auf die Richtung derselben vorwärts oder rückwärts schreitet. Da nämlich keine Veränderung ohne Bewegung geschehen kann, und da auch keine der genannten Veränderungen durch die Materie als solcher hervorgebracht wird, so muss immer eine Kraft da sein, welche die Bewegung begleitet.

Je nachdem der Angriffspunkt einer Kraft in Bezug auf ihre Richtung vorwärts oder rückwärts schreitet, entwickelt sie eine Thätigkeit, welche im ersteren Falle die erfolgte Bewegung zu begünstigan im letzteren dagegen zu hindern sucht. Wir wollen desshalb eine Thätigkeit, bei welcher der Angriffspunkt einer Kraft vorwärts schreitet, eine Wirkung, und eine Thätigkeit, bei welcher der Angriffspunkt einer Kraft zurückschreitet, eine Gegenwirkung nennen.

Die Thätigkeiten der Naturkräfte sind entweder freie oder es sind gezwungene Thätigkeiten. Unter den ersteren wollen wir solche verstehen, die ohne eine menschliche Veranlassung oder Einwirkung durch

das freie Spiel der Naturkräfte entstehen, wenn eine Störung eines Gleichgewichts eintritt. Unter den letzteren dagegen solche, wobei eine Kraft durch geeignete Veranstaltungen genöthigt wird, mechanische Veränderungen hervorzubringen, die für unsere Zwecke in irgend einer Hinsicht von unmittelbarem Nutzen sind. Eine solche Thätigkeit wird auch Arbeit genannt, und von einer Kraft, durch welche sie vollbracht wird, sagt man, dass sie arbeite.

Die Grösse der Thätigkeit, welche eine Kraft entwickelt oder die Wirkung oder Gegenwirkung, welche sie hervorbringt, kann unter allen Umständen ganz genau gemessen werden, was in den folgenden Nummern gezeigt werden soll; vorläufig diene die allgemeine Bemerkung, dass die Wirkung, welche eine Kraft entwickelt, nicht nur nach der Intensität des Druckes, sondern auch nach der Länge des Weges, durch welchen sie thätig ist, beurtheilt werden muss, dass aber die Zeit, in welcher die Wirkung vollbracht wird, auf ihre Grösse gar keinen Einfluss hat. Wenn ein Körper auf eine gewisse Höhe gehoben werden soll, so ist dazu eine gewisse Thätigkeit oder Wirkung nothwendig, die von dem Gewicht und von der Hubhöhe abhängt; es mag nun die Erhebung in einer Sekunde, Minute oder Stunde erfolgen.

32) *Wirkung einer constanten Kraft, wenn der Angriffspunkt in Bezug auf die Richtung der Kraft vorwärts oder rückwärts schreitet.* Wirkt eine Kraft mit unveränderlicher Intensität und erfolgt die Bewegung ihres Angriffspunktes nach einer Richtung, die mit jener, nach welcher die Kraft wirkt, übereinstimmt, oder dieser gerade entgegengesetzt ist, so ist im ersteren Falle die Wirkung, im letzteren die Gegenwirkung nach dem Produkt aus der Intensität der Kraft in die Länge des wirklich zurückgelegten Weges zu beurtheilen. Nennt man K die Kraft, S den Weg, W die Wirkung, oder Gegenwirkung, so ist in diesem Fall

$$W = K\,S.$$

Zwei Kräfte, die hinsichtlich ihrer Intensität sehr verschieden sind, können also gleiche Wirkungen hervorbringen, wenn sich nur die Weglänge, durch welche sie thätig sind, verkehrt wie die Intensitäten verhalten. Wenn ein Druck von 100 Kilogramm durch einen Weg von 1 Metre wirkt, so wird eine eben so grosse Wirkung entwickelt, wie wenn ein Druck von 1 Kilogramm durch 100 Metre Weglänge thätig ist. Die Zeit, in der die Thätigkeit entwickelt wird, die Geschwindigkeit, mit welcher die Bewegung vor sich geht, und die Art, wie die Bewegung erfolgt, ob nämlich mit gleichförmiger oder mit veränderlicher Geschwindigkeit, endlich die besondere Natur der Kraft, — diese Verhältnisse alle kommen nicht in Betrachtung, wenn die Grösse der Thätigkeit einer Kraft gemessen werden soll; sondern einzig und allein nur die Intensität der Kraft und die Weglänge, durch welche sie thätig ist.

33) *Wirkungseinheit.* Es ist grundsätzlich ganz gleichgültig, welche Einheiten man zur Messung der Wirkungen zu Grunde legt. Für die mannigfaltigen Anwendungen des Begriffs von Wirkungsgrösse ist jedoch die Wahl dieser Einheit nicht gleichgiltig, sondern es ist zweckmässig, sie so zu wählen, dass man mit den Zahlen, welche die Wirkungen ausdrücken, eine anschauliche Vorstellung verbinden kann.

In der Regel werden wir in der Folge als Einheit der Kräfte einen Druck von einem Kilogramm und als Einheit der Längen einen Metre annehmen. Die Einheit der Wirkung ist dann diejenige, welche entwickelt wird, wenn z. B. ein Druck von einem Kilogramm durch einen Weg von 1 Metre thätig ist. Damit aber gar nie ein Zweifel entstehen kann, welche Einheiten der Messung zu Grunde gelegt wurden, pflegt man der Zahl, welche die Wirkung ausdrückt, noch ein aus der Gewichtseinheit und Längeneinheit zusammengesetztes Wort hinzu zu fügen. Man sagt z. B. wenn ein Druck von 65 Kilogramm durch einen Weg von 4 Metre gewirkt hat, es sei eine Wirkung gleich $65 \times 4 = 260$ Kilogramm-Metres entwickelt worden.

Zur Messung mächtigerer Wirkungen hat Coriolis vorgeschlagen, eine Wirkung von 100 oder von 1000 Kilogrammen Metre als Einheit zu nehmen; allein dieser Vorschlag ist nicht zweckmässig, denn für wissenschaftliche Zwecke genügt in der Regel die Messung nach Kilogramm-Metres und für technische Zwecke ist eine Einheit gleich 1000 Kilg. Metres nicht passend, weil man sich von der Grösse der Thätigkeit von 1000 Kilog. Metre nicht leicht eine anschauliche Vorstellung machen kann.

In Frankreich hat man das Produkt aus Kraft und Weg Arbeitsgrösse genannt. Diese Benennung ist allerdings sehr bezeichnend, wenn man diejenigen Thätigkeiten messen will, welche eine Kraft entwickelt, wenn sie eine für unsere Zwecke unmittelbar nützliche Veränderung hervorbringt, d. h. wenn sie eine mechanische Arbeit verrichtet. Allein jenes Produkt hat nicht nur für technische Zwecke eine wichtige Bedeutung, sondern es ist auch für das gesammte Gebiet der erklärenden Naturwissenschaften von höchster Wichtigkeit, indem dadurch die Thätigkeiten der Naturkräfte überhaupt gemessen werden können, sei es nun, dass sie eine für unsere Zwecke nützliche Arbeit verrichten, oder sei es, dass sie ohne alle menschliche Veranlassung und ohne irgend eine Beziehung zum Menschen Veränderungen in der Körperwelt hervorbringen. Es scheint daher passender zu sein, das Produkt durch ein Wort zu bezeichnen, welches in der gesammten Thätigkeit der Kräfte angewendet werden kann, und das ist der Grund, wesshalb wir in Folgendem das Wort „Wirkung“ und nicht das Wort »Arbeitsgrösse« gebrauchen wollen.

Die Benennung „Wirkung“ wurde zuerst von Arzberger gebraucht; sie stimmt im Wesentlichen überein mit Quantité d'action; eine Benennung, die Navier eingeführt hat.

34) *Der Effect einer constanten Kraft.* Wenn eine Kraft mit unveränderlicher Intensität und mit unveränderlicher Geschwindigkeit durch längere Zeit ununterbrochen thätig ist, bringt sie in allen gleichen Zeitintervallen, z. B. in jeder Sekunde, eine gleich grosse Wirkung hervor, und es genügt in diesem Falle, die Wirkung zu kennen, die in jeder Sekunde entwickelt wird, um auch die Wirkungen angeben zu können, welche unter diesen Umständen in irgend einer Zeit hervorgebracht werden. Diese Wirkung, welche eine Kraft in jeder Sekunde hervorbringt, wenn sie mit unveränderlicher Intensität und mit unveränderlicher Geschwindigkeit thätig ist, nennt man den mechanischen Effect der Kraft; und dieser wird gefunden, wenn man die Kraft K mit dem Weg, den ihr Angriffspunkt in jeder Sekunde zurücklegt, d. h. mit der Geschwindigkeit V multiplizirt. Nennt man E den Effect, so hat man also:

$$E = K\,V.$$

Wenn sehr mächtige Wirkungen, wie sie bei Maschinen vorkommen, zu messen sind, würden den Wirkungen, wenn man sie in Kilogramm-Metres ausdrückte, ungemein grosse Zahlen entsprechen, von deren Bedeutung man sich kaum eine anschauliche Vorstellung machen könnte. Es ist daher in solchen Fällen zweckmässiger, mit einer grösseren Wirkungseinheit zu messen, die noch überdies so gewählt werden kann, dass man sich dieselbe leicht vorstellen kann.

Für das Maschinenwesen ist man übereingekommen, zur Messung grösserer Wirkungen eine Wirkung gleich 75 Kilogrammen Metre als Einheit anzunehmen, und man nennt diese Einheit eine Pferdekraft, weil ein ziemlich starkes Pferd in jeder Sekunde eine Wirkung gleich 75 Kilogrammen Metre zu entwickeln, und dabei innerhalb 24 Stunden 8 bis 10 Stunden zu arbeiten vermag.

Nennt man E einen in Kilogramm-Metres ausgedrückten Effect, und N die Anzahl der Pferde, welche durch eine Sekunde thätig sein müssten, um den Effect E hervorzubringen, so hat man offenbar:

$$E = 75\,N \text{ und } N = \frac{E}{75}$$

Nennt man W irgend eine in Kilogramm-Metres ausgedrückte Wirkungsgrösse, t die Zahl der Sekunden während welcher N Pferde thätig sein müssten, um die Wirkung W hervorzubringen, so hat man:

$$W = 75\,N\,t$$

35) *Wirkung einer constanten Kraft, wenn die Richtung der Bewegung mit jener der Kraft einen Winkel bildet.* Wenn die

Richtung der Bewegung mit der Richtung der Kraft K einen Winkel φ bildet, kann man sich statt der Kraft K zwei Kräfte K Cos. φ und K sin. φ denken, von welcher der erstere nach der Linie wirkt, in der die Bewegung erfolgt, die letztere dagegen nach einer Richtung, die mit jener der Bewegung einen rechten Winkel bildet. Erfolgt die Bewegung in einer geraden Linie, und ändert die Kraft K, während sie der Bewegung folgt, ihre Richtung nicht, bleibt sie also stets zu sich selbst parallel, so ist klar, dass die Kraft K sin. φ keine Wirkung hervorbringen kann, indem sie nicht im Mindesten nach der Richtung treibt, nach der die Bewegung stattfindet. Die Wirkung, welche die Kraft K entwickelt, ist also genau so gross als die, welche durch K Cos. φ hervorgebracht wird. Diese letztere ist aber, wenn man den Weg, der vom Angriffspunkt wirklich zurückgelegt wird, mit S bezeichnet, K Cos. φ S. Nennt man also W die Wirkung der Kraft, so ist:

$$W = K \text{ Cos. } \varphi \, S$$

Es ist aber auch S Cos. φ die Projektion des Weges S auf die Richtung der Kraft K. Heisst man diese Projektion p, setzt man also: S Cos. $\varphi = p$, so hat man auch

$$W = K p$$

Die Wirkung oder Gegenwirkung einer Kraft wird demnach durch das Produkt aus der Intensität der Kraft in der Projektion des von ihrem Angriffspunkt beschriebenen Weges auf die Richtung der Kraft bestimmt.

Durch die Projektion p des wirklich zurückgelegten Weges S auf die Richtung der Kraft wird das Fortschreiten oder das Zurückschreiten des Angriffspunktes in Bezug auf die Richtung der Kraft gemessen. Man kann also auch sagen, dass die Wirkung, welche eine constante Kraft entwickelt, deren Richtung mit jener, nach der die Bewegung erfolgt, stets den gleichen Winkel bildet, gefunden wird, wenn man die Intensität der Kraft mit dem nach ihrer Richtung geschätzten Fortschreiten oder Zurückschreiten ihres Angriffspunktes multiplizirt.

36) *Wirkung einer veränderlichen Kraft.* Bisher haben wir vorausgesetzt, dass die Kraft mit unveränderlicher Intensität thätig sei. Es ist nun die Frage, wie die Wirkung einer veränderlichen Kraft gemessen werden kann? Nehmen wir an, der Angriffspunkt der Kraft schreite nach der Richtung der Kraft in gerader Linie vorwärts, und verzeichnen uns eine Linie, in welcher die Abscissen die Wege und die Ordinaten die Kräfte darstellen, so erhalten wir dadurch eine anschauliche Vorstellung von der Veränderung der Kraft und von der Art und Weise, wie sie in jedem Punkt des Weges thätig ist.

Es sei Fig. 10 Taf. II. $\mathfrak{A}$ der Punkt, von welchem aus die Bewegung

und die Wirkung betrachtet wird, $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1$ **der anfängliche Werth der Kraft**, $\mathfrak{E}\,\mathfrak{E}_1$ ihr Endwerth, nachdem der Weg $\mathfrak{A}\,\mathfrak{E}$ zurückgelegt wurde, $\overline{d\,d_1} = K$ die Intensität der Kraft, wenn der Angriffspunkt in d angekommen ist. Die Wirkung, welche entwickelt wird während der Angriffspunkt durch ein kleines Wegstückchen d e fortschreitet, wäre, wenn sich während dieser Bewegung die Kraft nicht änderte, gleich dem Produkt aus der Kraft in den Weg, also gleich $\overline{d\,d_1} \times \overline{d\,e}$, weil sich aber die Kraft von d bis e etwas ändert, so ist die Wirkung, welche in der That entwickelt wird, etwas grösser als $\overline{d\,d_1} \times \overline{d\,e}$, d. h. etwas grösser als der Flächeninhalt des Rechtecks d d_1 ε e, und man sieht wohl, dass der wahre Werth der Wirkung, die die Kraft entwickelt, während ihr Angriffspunkt von d bis e fortschreitet, durch den wahren Flächeninhalt des oben durch die krumme Linie begränzten Vierecks d d_1 e e_1 gemessen wird. Weil aber alles, was von dem Wegstückchen d e gesagt wurde, von jedem andern ebenfalls gilt, so sieht man, dass die totale Wirkung, welche die Kraft entwickelt, während sie von $\mathfrak{A}$ bis E thätig ist, durch den Flächeninhalt der oben von der krummen Linie $\mathfrak{A}_1$ d_1 E_1 begränzten Figur $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{E}_1$ gemessen wird. Verzeichnet man also diese Figur und berechnet sodann durch irgend eine Methode ihren Flächeninhalt, so drückt die Zahl, welche man so erhält, die zu berechnende Wirkung aus.

Wenn die Kraft stetig veränderlich ist, so kann man die Wirkung durch Integralrechnung finden, wenn das Gesetz der Veränderung der Kraft als Funktion des Weges gegeben ist:

Setzt man $\mathfrak{A}\,d = s$, $d\,e = ds$, $d\,d_1 = K$ $\mathfrak{A}\mathfrak{E} = l$, so ist, wenn die Wirkung mit W bezeichnet wird:

$$W = \int_{s=0}^{s=l} K\,ds$$

Ist die Kraft unregelmässig veränderlich, wie z. B. Fig. 11 Taf. II. zeigt, so kann das Integralverfahren nicht angewendet werden, sondern man muss den Flächeninhalt der Figur (11) $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1$ nach irgend einer Annäherungsmethode berechnen. Die Zahl, welche den Flächeninhalt angibt, ist aber dem wahren Werth der Wirkungsgrösse vollkommen gleich

37) ***Allgemeinster Fall der Wirkungsbestimmung einer Kraft.*** Wenn der Angriffspunkt der Kraft eine krumme Linie beschreibt, wenn ferner die Intensität stetig oder unregelmässig veränderlich ist, wenn endlich die Richtung der Kraft mit der Richtung der Bahn einen veränderlichen Winkel bildet, findet man die Wirkung der Kraft auf folgende Art:

Man verzeichne die Kurve a, b, c, d (Fig. 12 Taf. II.), welche den Angriffspunkt der Kraft beschreibt, bemerke die Punkte c, f wo sich die Kraft plötzlich ändert, theile die Intervalle a c, c f, . . . in sehr kleine Theile a b, b c, c d . . ., verzeichne in den Punkten a, b, c die Richtungen der Kraft, suche die Projektion der Wegstückchen a b b c . . . auf die Richtungen der Kraft, so ist dann die Wirkung, welche die Kraft entwickelt, wenn K_0 K_1 K_2 . . . die Intensitäten derselben in den Punkten a, b, c bezeichnen:

$$W = K_0\, \overline{a\alpha} + K_1\, \overline{b\beta} + K_2\, \overline{c\gamma} + \ldots$$

Die Richtigkeit dieses Verfahrens folgt daraus, dass vermöge der vorgenommenen Eintheilung der Bahn die Kraft innerhalb der Wegstückchen stetig veränderlich ist. Wenn also diese Wegstückchen ungemein klein sind, so kann man innerhalb derselben die Kraft und ihre Richtung als constant betrachten, und dann sind vermöge Nr. 35 $K_0 \times a\alpha$, $K_1 \times b\beta$, . . . die Wirkungen, welche die Kraft entwickelt, während sie durch die einzelnen Wegelemente thätig ist.

Will man diese Wirkung graphisch durch einen Flächeninhalt darstellen, so kann dies auf zweifache Art geschehen. Man kann 1) die Projektion $\overline{a\alpha}$ $\overline{b\beta}$ . . . als Abscissendifferenzen und die Kraft K_0 K_1 . . . als Ordinaten auftragen, oder man kann 2) die wirklich zurückgelegten Wegstückchen $\overline{ab}$ $\overline{bc}$ . . . als Abscissendifferenzen und die Kräfte K_0 Cos. φ_0, K_1 Cos φ_1 . . . als Ordinaten auftragen.

Sind die Gesetze bekannt, nach welchen sich die Intensität der Kraft und ihre Richtung gegen die Bahn verändert, so kann man die Wirkung durch Integralrechnung bestimmen, vorausgesetzt, dass jene Gesetze von stetiger Art sind.

Setzt man allgemein $\overset{\frown}{ad} = s$, $\overset{\frown}{de} = ds$ und bezeichnet durch K und φ die Intensität der Kraft und den Winkel, welcher dem Punkt d entspricht, endlich $\overset{\frown}{ah} = l$, so ist:

$$W = \int_{s=0}^{s=l} K \operatorname{Cos} \varphi \; ds$$

38) *Der Effect einer periodisch veränderlichen Kraft.* Eine Kraft ist periodisch veränderlich, wenn ihre Bestimmungselemente (Intensität und Richtung) nach einer gewissen Zeitintervalle immer wiederum den gleichen Werth haben. Dieses Zeitintervalle, nach welchem die gleichen Zustände wiederkehren, ist die Dauer der Periode.

Fig. 1 Taf. III. stellt eine periodisch veränderliche Kraft vor. Die Wirkung, welche eine solche Kraft entwickelt, ist für jede Periode gleich

gleich gross, von welchem Zeitmomente an diese auch gerechnet werden mag. Kennt man also die Wirkung, welche einer Periode entspricht, so kann man leicht die Wirkung für die Zeit berechnen, die ein Vielfaches ist von der Dauer einer Periode.

Unter dem Effekt, welchen eine periodisch veränderliche Kraft entwickelt, versteht man die wahre mittlere Wirkung, welche in jeder Sekunde entwickelt wird. Nennt man W die Wirkung, welche die Kraft in jeder Periode entwickelt, t die Dauer der Periode, E die wahre mittlere Wirkung pr. Sekunde oder den Effect der Kraft, so ist klar, dass man hat:

$$E = \frac{W}{t}$$

39) *Der mittlere Werth einer veränderlichen Kraft.* Der mittlere Werth einer veränderlichen Kraft ist diejenige constante Kraft, die, wenn sie durch einen eben so langen Weg wirkt, als die veränderliche Kraft, eine eben so grosse Wirkung hervorbringt, als diese letztere. Berechnet man demnach die Wirkung W, welche eine Kraft entwickelt, wenn sie durch einen Weg l thätig ist, so findet man den wahren mittleren Werth der Kraft K_m durch den Quotienten:

$$K_m = \frac{W}{l}$$

Graphisch dargestellt erscheint dieser mittlere Werth als die Höhe $\mathfrak{A}\alpha$ eines Rechtecks, Fig. 2 Taf. III. $\mathfrak{A}\alpha\,\mathfrak{C}\gamma$, das eben so lang ist und einen eben so grossen Flächeninhalt hat, als die Figur $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$, die der Wirkung der veränderlichen Kraft entspricht.

Diese Bestimmung des mittleren Werthes einer Kraft ist auch dann vollkommen richtig, wenn sich die Kraft sprungweise ändert. Ist die Kraft stetig veränderlich und kennt man das Gesetz, nach welchem diese Veränderung erfolgt, so kann man den mittleren Werth der Kraft durch Integralrechnung finden, denn man hat:

$$K_m = \frac{\int_{x=0}^{x=o} K \operatorname{Cos} \varphi \; ds}{l}$$

Wobei K, φ, d s die gleiche Bedeutung haben wie in Nr. 37.

Für eine periodisch veränderliche Kraft haben wir gefunden, dass der mittlere Effect ausgedrückt werden kann durch:

$$E = \frac{W}{t}$$

Nun ist aber die mittlere Kraft, welche einer Periode entspricht:

$$K_m = \frac{W}{l}$$

Aus diesen 2 Gleichungen folgt:

$$E = K_m \frac{l}{t}$$

Es ist aber l die Länge des Weges, welcher einer Periode entspricht, und t die Dauer einer Periode, mithin $\frac{l}{t}$ die mittlere Geschwindigkeit der Bewegung, bezeichnet man diese mit V_m, so findet man:

$$E = K_m \times V_m$$

d. h. man findet den Effect, den im Mittel eine periodisch veränderliche Kraft in jeder Sekunde entwickelt, durch das Produkt aus dem mittleren Werth der Kraft in dem mittleren Werth der Geschwindigkeit der Bewegung. Bei einer Expensions-Dampfmaschine z. B. findet man den Effect, wenn man den mittleren Druck, mit welchem der Kolben fortgeschoben wird, mit der mittleren Geschwindigkeit desselben multiplizirt.

Wenn die Kraft in der Art periodisch veränderlich wirkt, dass sie in der zweiten Hälfte der Periode eine Gegenwirkung hervorbringt, die eben so gross ist, als die Wirkung, welche in der ersten Hälfte entwickelt wird, so ist die Gesammtwirkung für eine ganze Periode gleich Null. Es ist aber auch in diesem Fall der mittlere Werth K_m des Druckes gleich Null. Die Fig. 3 Taf. III. zeigt eine in dieser Weise periodisch veränderliche Kraft.

Berechnung verschiedener Wirkungsgrössen.

40) *Erhebung eines Körpers.* Wenn ein Körper so gehoben wird, dass alle Punkte desselben gerade vertikale Linien von einerlei Länge beschreiben, so unterliegt es keinem Zweifel, dass die einer solchen Erhebung entsprechende Wirkungsgrösse W gleich zu setzen ist dem Gewicht G des Körpers, multiplizirt mit der Erhebungshöhe H. Man hat demnach in diesem Fall:

$$W = G\,H$$

Erfolgt die Erhebung eines Körpers in solcher Weise, dass alle seine Punkte parallele und congruente krumme Linien beschreiben, so muss man, um die Wirkung zu berechnen, welche der Erhebung des ganzen Körpers entspricht, zunächst jene berechnen, die einem einzelnen Ge-

wichtspunkte entspricht. Es sei Fig. 4 Taf. III. A Z die Bahn, welche ein einzelner Punkt, in welchem ein Gewicht g concentrirt ist, während der Erhebung beschreibt. Theilt man A Z in unendlich viele, unendlich kleine Bögen, zieht durch die Theilungspunkte Vertikallinien, und projektirt auf dieselben die wirklich beschriebenen Wegstückchen, so ist die ganze Wirkung, welche der Erhebung des Punktes von A bis Z entspricht:

$$g\,\overline{A\alpha} + g\,\overline{a\beta} + g\,\overline{b\gamma} \ldots = g\,(\overline{A\alpha} + \overline{a\beta} + \overline{b\gamma} \ldots)$$

Die in der Klammer enthaltene Summe ist aber gleich dem Vertikalabstand des Punktes Z über A' oder gleich der Erhebungshöhe H. Es ist demnach die Wirkung, welche der Erhebung eines einzelnen Gewichtspunktes auf eine Höhe H entspricht, gleich dem Produkte g H, wie auch die Bahn, welche während der Erhebung beschrieben wurde, gestaltet sein mag. Theilt man nun den ganzen Körper in kleine Theilchen, deren Gewichte $g\,g_1\,g_2$ sind, so ist, wenn die Bahnen, welche die Punkte während der Erhebung beschreiben, congruent sind, die Erhebungshöhe für jeden Punkt gleich gross; es ist demnach die Wirkung, welche der Erhebung des ganzen Körpers entspricht,

$$W = g\,H + g_1\,H + g_2\,H \ldots = H\,(g + g_1 + g_2 +)$$

oder:

$$W = G\,H$$

wenn durch G das ganze Gewicht des Körpers bezeichnet wird.

Wenn die Punkte eines Körpers während seiner Erhebung verschiedene von einander abweichende Kurven beschreiben, wird bei der Erhebung des ganzen Körpers nicht jeder Punkt um gleich viel gehoben. Bezeichnen wir die Lage der einzelnen Punkte des Körpers am Anfang und am Ende der Erhebung gegen eine unveränderliche horizontale Ebene. Es seien die Höhen der einzelnen Punkte des Körpers über diese Ebene bei Beginn der Erhebung $z_1\,z_2\,z_3$ . . , am Ende der Erhebung Z, Z_1, Z_2 $g_1\,g_2\,g_2$ . . . die Gewichte der einzelnen Punkte, so sind: $g_1\,(Z_1-z_1)$, $g_2\,(Z_2-z_2)$, $g_3\,(Z_3-z_3)$ . . . die Wirkungen, welche den Erhebungen der einzelnen Punkte entsprechen, demnach ist die Wirkung W für die Erhebung des ganzen Körpers

$$W = g_1\,(Z_1-z_1) + g_2\,(Z_2-z_2) + g_3\,(Z_3-z_3) \ldots$$

oder:

$$W = (gZ_1 + g_2\,Z_2 + g_3\,Z_3) - (g_1\,z_1 + g_2\,z_2 + \ldots)$$

Nennt man G das Gewicht des ganzen Körpers H_1 und h_1 die Höhen des Schwerpunktes des Körpers über die Ebene am Ende und am Anfang der Erhebung, so ist bekanntlich:

$$G H_1 = g_1 Z_1 + g_2 Z_2 + g_3 Z_3$$
$$G h_1 = g_1 z_1 + g_2 z_2 + g_3 z_4$$

demnach findet man:

$$W = G (H_1 - h_1)$$

oder wenn man die Erhebung $H_1 - h_1$ des Schwerpunktes, oder den Vertikalabstand des Schwerpunktes nach der Erhebung über den Schwerpunkt am Anfang der Erhebung mit H bezeichnet, so findet man

$$W = G H.$$

Es ist also ganz allgemein die Erhebungswirkung für einen schweren Körper gleich dem Produkt aus dem Gewicht des Körpers und der Erhebungshöhe seines Schwerpunktes, und diese Regel ist richtig, wie auch das Erheben erfolgen mag, und welche Veränderungen mit dem Körper während der Erhebung vor sich gehen mögen. Der Körper kann z. B. während der Erhebung ausgedehnt oder zusammengedrückt werden, oder die Theile der Körper können ihre Lage gegen einander verändern, und man wird dessen ungeachtet die wahre Wirkung finden, wenn man nur für H die wahren Vertikalabstände der Schwerpunktspositionen am Ende und am Anfang der Erhebung in Rechnung bringt. Auch ist klar, dass diese Regel nicht nur für die Erhebung eines einzelnen Körpers, sondern auch für ein System von Körpern gilt, die während der Erhebung ihr Volumen, ihre Eorm und ihre relative Lage gegen einander ändern. Das Produkt G H drückt jedoch immer nur diejenige Wirkung aus, welche der Erhebung des Gewichts entspricht, und die Wirkungen, welche einer Volumsänderung oder Formänderung der Körper entsprechen, sind nicht mit inbegriffen.

41) ***Horizontal-Transport von Lasten auf Schleifen und Wagen.*** Wenn eine Schleife oder ein Schlitten, auf welchen eine Last gelegt ist, auf einer horizontalen Bahn fortgezogen werden soll, äussert sich ein Widerstand, welcher von der Reibung der Schleife auf der Bahn herrührt, und dieser Widerstand richtet sich theils nach der Beschaffenheit der Bahn, theils nach der Kraft, mit welcher die Bahn durch den belasteten Schlitten gedrückt wird. Für eine Bahn von bsetimmter Beschaffenheit ist jener Widerstand dem Druck gegen die Bahn proportional, ist also um so grösser, je grösser der Druck ist. Nennt man nun S das Gewicht des Schlittens, L das Gewicht der darauf gelegten Last und f den Widerstand, welcher durch die Einheit des Druckes verursacht wird, so ist $f (L + S)$ der Widerstand, den der belastete Schlitten hervorbringt. Um nun den Schlitten durch eine Wegstrecke s fortzuziehen, ist eine Wirkungsgrösse W erforderlich und man hat

$$W = f (L + S). s.$$

Die Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um eine Last L vermittelst eines Wagens auf einer horizontalen Bahn fortzuschaffen, kann auf ähnliche Weise berechnet werden. Auch bei einem Wagen ist der gesammte Widerstand wenigstens nahe dem Druck gegen die Bahn proportional, nur sind die Ursachen dieses Widerstandes von anderer Art, als bei dem Schlitten. Bei der Fortbewegung eines Wagens ist nämlich der sogenannte Wälzungswiderstand und die Reibung an den Axen der Räder zu überwältigen. Der erstere dieser Widerstände entsteht durch das Einsinken der Räder in die Bahn, was zur Folge hat, dass das Material der Bahn durch die Räder niedergedrückt werden muss. Wenn nun die Bahn nicht elastisch ist, so erhebt sie sich nicht wiederum, wenn sie einmal niedergedrückt worden ist, und dadurch entsteht ein Widerstand, der für eine Bahn von bestimmter Beschaffenheit und für einen Wagen von bestimmter Bauart dem Druck der Räder gegen die Bahn proportional ist. Heisst man nun f_1 den Widerstand, der durch die Einheit des Druckes verursacht wird, W das Gewicht des Wagens, L das Gewicht der darauf gelegten Last, so ist der Wälzungswiderstand:

$$f_1 (L + W)$$

Der Reibungswiderstand an den Axen der Räder richtet sich nach dem Gewicht, das auf die Axen drückt. Nennt man R das Gewicht der Räder, so ist für einen gewöhnlichen Wagen, bei welchem sich die Räder auf den Axen drehen, $W - R + L$ das Gewicht, das auf die Axen drückt. Nennt man f_2 die Zugkraft, welche am Wagen ziehen muss, um die Reibung zu überwinden, welche durch die Einheit des Druckes gegen die Axen verursacht wird, so muss man, um die ganze Axenreibung zu überwinden, mit einer Kraft $f_2 (W - R + L)$ an dem Wagen anziehen. Der Totalwiderstand, welcher der Fortbewegung des Wagens entgegenwirkt, ist nun:

$$f_2 (L + W) + f_2 (W - R + L)$$

und wenn die Bewegung durch eine Wegstrecke von der Länge s erfolgen soll, so ist hierzu eine Wirkung W nothwendig, die durch folgenden Ausdruck bestimmt wird:

$$W = s \{ f_1 (L + W) + f_2 (W - R + L) \}$$

Die Gewichte als solche erfordern zu ihrer Fortbewegung keine Wirkung, weil bei der Bewegung auf einer horizontalen Bahn die Richtung der Bewegung jedes Punktes horizontal, demnach senkrecht ist auf die vertikale Richtung der Gewichte.

42) ***Verdichtung eines Gases ohne Aenderung der Temperatur.*** Wenn ein Gas langsam und nicht zu stark verdichtet wird, reagirt es während dieses Vorganges mit einer Kraft, die durch das bekannte

Mariott'sche Gesetz wenigstens sehr annähernd bestimmt werden kann. Es sei ABCC Fig. (5) Tafel (III.) ein cylindrisches Gefäss, in welchem sich irgend eine Gasart befindet, und das mit einem genau passenden Kolben K versehen ist.

Nennt man l die anfängliche Entfernung des Kolbens vom Boden des Gefässes, Ω dessen Querschnitt, $\mathfrak{A}$ den äusseren Druck der Atmosphäre auf die Flächeneinheit und auch den anfänglichen Druck des Gases auf die Flächeneinheit, y den Druck des Gases auf die Flächeneinheit, nachdem der Kolben um x gegen den Boden des Gefässes hin bewegt worden ist, so hat man, da nach dem Mariott'schen Gesetze die inneren Pressungen $\mathfrak{A}$ und y sich verhalten wie die Dichten

$$\mathfrak{A} : y = \Omega\,(l - x) : \Omega\, l = l - x : l$$

demnach:

$$y = \mathfrak{A}\,\frac{l}{l - x}$$

Der Druck des Gases auf die Kolbenfläche ist demnach:

$$\Omega\, y = \Omega\, \mathfrak{A}\,\frac{l}{l - x}$$

Da nun der äussere atmosphärische Druck auf den Kolben bereits einen Druck $\mathfrak{A}\,\Omega$ ausübt, so ist, um dem inneren Drucke y das Gleichgewicht zu halten, nur noch eine auf den Kolben wirkende Kraft $\Omega\, y - \Omega\, \mathfrak{A} = \Omega\,(y - \mathfrak{A}) = \Omega\left(\mathfrak{A}\,\frac{l}{l-x} - \mathfrak{A}\right) = \Omega\,\mathfrak{A}\left(\frac{l}{l-x} - 1\right)$ nothwendig. Dies ist also der Druck, der, während die Zusammenpressung erfolgt, auf den Kolben wirken muss, wenn derselbe einen Weg x zurückgelegt hat. Da dieser Druck veränderlich ist, so muss man, um die Wirkung zu berechnen, welche der Zusammenpressung entspricht, eine der Methoden anwenden, die in Nr. (36) angegeben wurden. Wir wollen zunächst die am schnellsten zum Ziele führende Methode der Integralrechnung anwenden. Wenn der Kolben, nachdem er bereits einen Weg x zurückgelegt hat, noch um $d\,x$ fortschreitet, entwickelt der auf den Kolben wirkende Druck $\Omega\,\mathfrak{A}\left(\frac{l}{l-x} - 1\right)$ eine Wirkung gleich $\Omega\,\mathfrak{A}\left(\frac{l}{l-x} - 1\right) d\,x$; die ganze Wirkung W, welche erforderlich ist, um das Gas so stark zusammen zu pressen, dass zuletzt der Kolben nunmehr noch um $l - l_1$ vom Boden des Gefässes entfernt ist, ist demnach

$$W = \int_{x=0}^{x=l-l_1} \Omega\,\mathfrak{A}\left(\frac{l}{l-x} - 1\right) d\,x \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

und hieraus findet man

$$W = \Omega\,\mathfrak{A}\, l \left\{ \text{lognat.}\,\frac{l}{l_1} - 1 + \frac{l_1}{l} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Es ist aber $\Omega\, l$ das ursprüngliche Volumen des Gases. Bezeichnet man dasselbe mit V, setzt also

$$V = \Omega\, l$$

so wird:

$$W = \mathfrak{A}\, V \left\{ \text{lognat.}\,\frac{l}{l_1} - 1 + \frac{l_1}{l} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Die Wirkung, welche die Verdichtung eines Gases erfordert, ist demnach dem ursprünglichen Volumen des Gases proportional, und richtet sich natürlich noch nach dem Grad $\frac{l}{l_1}$ der Verdichtung.

Wäre hinter dem Kolben ein leerer Raum, so müsste die den Kolben treibende Kraft gleich $\Omega\, y$ sein, nachdem dieselbe den Weg x zurückgelegt hat, und man findet dann für die Wirkung folgenden Werth:

$$W = \mathfrak{A}\; V \;\text{lognat.}\,\frac{l}{l_1} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Wenn die anfängliche Pressung des Gases dem atmosphärischen Drucke nicht gleich ist, sondern einen andern Werth, z. B. $\mathfrak{B}$ hat, findet man:

a) wenn hinter dem Kolben der atmosphärische Druck wirkt

$$W = V \left\{ \mathfrak{B}\;\text{lognat.}\,\frac{l}{l_1} - \left(1 - \frac{l_1}{l}\right)\mathfrak{A} \right\} \quad \ldots \quad (5)$$

b) wenn hinter dem Kolben ein leerer Raum ist:

$$W = \mathfrak{B}\; V \;\text{lognat.}\,\frac{l}{l_1} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Dehnt sich das Gas, nachdem es comprimirt wurde, wiederum aus, bis es in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehrt, so entwickelt es dabei eine Wirkungsgrösse, welche genau so gross ist, als die, welche zum Zusammenpressen verwendet wurde. Wenn daher eine in einem Gefäss eingeschlossene Gasmenge einer periodisch wiederkehrenden Verdichtung und Verdünnung unterworfen ist, so wird dabei im Ganzen genommen keine Wirkung erschöpft, weil während der Ausdehnung wieder gerade so viel an Wirkung gewonnen wird, als während der Zusammenpressung aufgewendet werden musste.

Wenn es irgend ein Zweck verlangt, dass in jeder Sekunde ein gewisses Gasvolumen V comprimirt werde, so wäre hierzu in jeder Sekunde ein Effekt E erforderlich, gleich dem oben gefundenen Werthe von W.

43) *Ausdehnung eines stabförmigen Körpers.* Die Kraft, welche an einem Stab ziehen muss, um denselben mehr und mehr auszudehnen, ist, der Erfahrung gemäss, dem Querschnitt des Stabes und der Längenänderung direkt und der ursprünglichen Länge des Stabes verkehrt proportional; sodann aber richtet sich diese Kraft auch nach der Natur des Materials. Dieses Erfahrungsresultat ist jedoch nicht als ein allgemein giltiges Gesetz zu betrachten, denn es stimmt mit den Thatsachen nur bei schwachen Ausdehnungen überein. Vorläufig wollen wir es aber gelten lassen und unter dieser Voraussetzung die Wirkung berechnen, welche erforderlich ist, um einen Stab bis zu einem gewissen Grad auszudehnen.

Es sei Fig. 6 Tafel III.

l die ursprüngliche Länge des Stabes,

a der Querschnitt desselben,

$\varkappa$ die Aenderung, welche in seiner Länge eintritt, wenn an demselben ein Zug P ausgeübt wird,

ε ein von der Natur des Materials abhängiger Coefficient.

Dies vorausgesetzt, hat man nach der oben angeführten Erfahrung

$$P = \varepsilon \frac{a \varkappa}{l} \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

Aus diesem Ausdruck ersieht man, dass ε die Kraft ist, welche an einem Stab, dessen Querschnitt $a = 1$ ist, ziehen müsste, um ihn um so viel auszudehnen, als seine ursprüngliche Länge beträgt, vorausgesetzt, dass dieses Ausdehnungsgesetz auf so starke Ausdehnungen anwendbar wäre. Es ist nämlich für $a = 1$, $\varkappa = l$, $P = \varepsilon$.

Ist AB Fig. (6) die ursprüngliche Länge des Stabs und wird derselbe von B bis C ausgedehnt, so wächst dabei die ausdehnende Kraft proportional mit der Ausdehnung. Trägt man die jeder Ausdehnung entsprechende Kraft als Ordinate auf, macht also für $BD = \varkappa$, $ED = P = \frac{a \varkappa}{l}$, so bilden die Endpunkte sämmtlicher Ordinaten eine gerade Linie BEF und der Flächeninhalt des Dreiecks BFC bestimmt die Wirkungsgrösse, welche einer Ausdehnung $=$ BC entspricht. Setzt man nun die ganze Ausdehnung $BC = \lambda$ und die entsprechende Kraft $FC = K$, so ist die Wirkung $W = \frac{1}{2} \lambda K$, es ist aber $K = \varepsilon \frac{a \lambda}{l}$ demnach findet man

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{a \lambda^2}{l} \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

oder auch, wenn man λ statt K eliminirt:

$$W = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{K}{a}\right)^2}{\varepsilon} l a.$$

Es ist aber la das ursprüngliche Volumen des Stabes, setzt man dieses $= V$, so hat man auch:

$$W = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{K}{a}\right)^2}{\varepsilon} V. \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

Der Quotient $\left(\frac{K}{a}\right)$ ist die Kraft, mit welcher jede Quadrateinheit des Querschnitts gespannt wird; heisst man diese p so ist auch

$$W = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\varepsilon} V. \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

Es ist demnach die Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um einen Stab so weit auszudehnen, bis die Spannung in der Flächeneinheit des Querschnitts $= p$ wird, dem Quadrat dieser Spannung und dem ursprünglichen Volumen des Stabes direkt, dagegen dem Modulus der Elastizität des Materials verkehrt proportional.

Wird ein Stab so stark ausgedehnt, bis er abreisst, so ist p für den Augenblick des Abreissens gleich der absoluten Festigkeit des Materials, und wenn man sich erlaubt, das durch die Gleichung (1) ausgesprochene Ausdehnungsgesetz bis zu dem Moment des Reissens gelten zu lassen, so gibt die Gleichung (4), wenn man in dieselbe für p die absolute Festigkeit des Materials substituirt, die Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um einen Stab so weit auszudehnen, bis er abreisst. Diese Wirkung ist nun dem Quadrat der absoluten Festigkeit und dem Volumen des Stabes direkt aber dem Modulus der Elastizität des Materials verkehrt proportional.

Zwei aus dem gleichen Material bestehende Stäbe erfordern demnach zum Abreissen einerlei Wirkung, wenn ihr Volumen gleich gross sind.

Der Quotient $\frac{p^2}{\varepsilon}$ ist für solche Stoffe am grössten, welche eine grosse Festigkeit besitzen und gleichzeitig sehr dehnbar sind. Dieser Quotient ist, wenn man alle Dimensionen in Centimetern und die Kraft in Kilogrammen, mithin die Wirkung in Kilogramm-Centimetern ausdrückt, für

Holz (Eichen)	4·3
Gusseisen	1·7
Schmiedeisen	7·2
bester Stahl	40
Kanonen-Metall	10
Leder	100.

Hieraus sieht man, dass sich die Stoffe hinsichtlich der Wirkungen die erforderlich sind, um sie bis zum Abreissen auszudehnen, ganz anders verhalten, als wenn man sie nach ihrer absoluten Festigkeit beurtheilt. Von den hier angeführten Stoffen leistet Gusseisen am wenigsten, Kanonenmetall mehr als Schmiedeisen, am meisten aber leistet das Leder, nämlich $2\frac{1}{2}$ Mal so viel als Stahl. Das Sprichwort „eine gute Haut" ist mithin gerettet.

44) ***Biegung eines Stabes.*** Das eine Ende eines Stabes sei befestigt, auf das andere Ende wirke ein Druck und bringe eine Biegung hervor.

Es sei Fig. 7 Tafel III. $x = CB$ die Senkung, welche am freien Ende des Stabes eintritt, wenn daselbst ein Druck K ausgeübt wird, der mit den inneren Spannungen und Pressungen ins Gleichgewicht tritt, $l = AB$ die ursprüngliche Länge des Stabes, ε der Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht, $\mathfrak{B}\,E$ die Summe der statischen Momente aller Spannungen und Pressungen, welche in dem Querschnitt bei A vorkommen, bezogen auf den Schwerpunkt dieses Querschnittes. Dabei bedeutet $\mathfrak{B}$ die auf die Einheit des Querschnittes bezogene Spannung, welche in dem Punkte a stattfindet, und E eine gewisse Funktion von den Querschnittsabmessungen des Stabes. Die Werthe von E für die verschiedenen Querschnittsformen findet man auf Tafel V. in meinen Resultaten zusammen gestellt. Endlich sei $z = Aa$ die Tiefe des Schwerpunktes A, des Querschnittes ab, unten der Punkt a.

Dies vorausgesetzt findet man nach bekannten statischen Gesetzen, wenn man auch hier das in vorhergehender Nummer ausgesprochene empirische Ausdehnungsgesetz gelten lässt:

$$K\,l = \mathfrak{B}\,E \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$x = \frac{1}{3}\,\frac{K\,l^3}{\varepsilon\,E\,z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Da hier wiederum x proportional mit K wächst, so findet man die Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um den Stab so stark zu biegen, bis sich das freie Ende um x gesenkt hat, durch:

$$W = \frac{1}{2}\,x\,K$$

vorausgesetzt, dass die Biegung so langsam vor sich geht, dass in jedem Augenblick die biegende Kraft mit den inneren Spannungen und Pressungen ins Gleichgewicht treten kann. Eliminirt man x, so findet man

$$W = \frac{1}{6}\,\frac{K^2}{\varepsilon}\,\frac{l^3}{E\,z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

und wenn man auch noch K eliminirt:

$$W = \frac{1}{6}\,\frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon}\,\frac{E\,l}{z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Ganz den gleichen Ausdruck findet man auch in dem Fall, wenn der Stab mit den Enden auf Unterstützungen liegt, und wenn die biegende Kraft in irgend einem Punkt zwischen den Unterstützungen wirkt.

Für einen parallelepipedischen Stab, dessen Höhe h und Breite b ist, findet man: $E = \frac{1}{6}\,l\,h^2$ und $z = \frac{1}{2}\,h$ und dann wird:

$$W = \frac{1}{18}\,\frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon}\,V \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

wobei V das Volumen des Stabes bezeichnet.

Für einen runden oder einen elyptischen Stab ist $E = \frac{\pi}{32}\,b\,h^2$, $z = \frac{1}{2}\,h$, wenn h die Höhe und b die Breite der Elypse bedeutet, und dann findet man:

$$W = \frac{1}{24}\,\frac{\mathfrak{B}^2}{E}\,V \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Für einen Stab, dessen Querschnitt ein Dreieck ist, findet man:

$$W = \frac{1}{12}\,\frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon}\,V \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Hieraus sieht man also, dass die Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um einen Stab, dessen Querschnitt ein Rechteck, eine Elypse oder ein Dreieck ist, so stark zu biegen, bis die auf ein Quadratmeter bezogene stärkste Spannung der Fasern gleich $\mathfrak{B}$ wird, dem Quadrat dieser Spannung und dem Volumen des Stabs direkt und dem Modulus der Elastizität des Materials verkehrt proportional ist. Also auch hier, wie bei der Ausdehnung eines Stabes richtet sich die Wirkungsgrösse nicht nach einzelnen Dimensionen des Stabes, sondern nur nach dem Volumen desselben und ferner noch nach dem Quotienten $\frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon}$.

Wird ein Stab so stark gebogen, bis er bricht, und nimmt man an, dass das früher aufgefundene Biegungsgesetz bis zum Augenblick des Bruches angewendet werden kann, so gebe der Ausdruck für W, wenn man in denselben für $\mathfrak{B}$ den Brechungscoeffizienten setzt, die Wirkungsgrössen, welche dem Abbrechen eines Stabes entsprechen.

Drückt man alle Dimensionen in Centimetern, die Kräfte in Kilogrammen, die Wirkungsgrösse in Kilogramm-Centimetern aus, so sind die Werthe von $\frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon}$

für Eichenholz	4
„ Gusseisen	9
„ Schmiedeisen (bestes)	20
„ Messing	8

Aehnliche Resultate findet man auch für das Verwinden von cylindrischen oder quadratischen Stäben. (Resultate für den Maschinenbau, Seite 32 bis 35.)

45) *Wirkung zweier Atome bei Aenderung ihrer Entfernung.* Wenn durch was immer für Ursachen die relative Lage und Entfernung der Atome geändert wird, entwickeln die Attraktiv- und Repulsivkräfte, mit welchen die Atome begabt sind, gewisse Wirkungen und Gegenwirkungen, deren Kenntniss sowohl für rein wissenschaftliche, als auch für praktische Zwecke von bedeutender Wichtigkeit ist.

Wir wollen nun die Wirkung, die entwickelt wird, wenn die Entfernung zweier mit Repulsivkraft begabter Atome wächst, in folgenden drei Fällen berechnen:

a) Wenn eines der beiden Atome seinen Ort nicht ändert, das andere dagegen in der geraden Verbindungslinie ihrer ursprünglichen Position fortschreitet.

b) Wenn sich beide Atome in der geraden Linie ihrer anfänglichen Positionen bewegen.

c) Wenn die beiden Atome ihre Orte wie immer ändern.

Es seien für alle drei dieser Fälle r_0, r, r_1 die Entfernungen der Atome am Anfange in irgend einem Augenblick während der Bewegung und am Ende der Einwirkung, R die Intensität der Repulsivkraft, wenn die Entfernung gleich r ist.

Für den Fall (a) sei Fig. 8 Taf. III. A das unbewegliche Atom, B die Anfangs- und B_1 die Endposition des beweglichen Atoms, also $B\,B_1$ der Weg, durch welchen die Repulsivkraft mit veränderlicher Intensität thätig ist, b und b_1 die Positionen des beweglichen Atoms nach Verlauf der Zeiten t und t + dt. $\overline{AB} = r_0$, $A\,b = r$, $\overline{b\,b_1} = dr$, $A\,B_1 = r_1$. Während die Bewegung durch den unendlich kleinen Weg $b\,b_1 = dr$ stattfindet, darf man die Intensität R der Repulsivkraft als constant betrachten; dann aber ist die Wirkung, welche während dieses Wegelements entwickelt wird: R dr und folglich ist die totale Wirkung W, die der Bewegung von B bis B_1 entspricht:

$$W = \int_{r=r_0}^{r=r_1} R\,dr$$

In dem zweiten der genannten Fälle, wenn nämlich beide Atome nach gerader Linie fortschreiten, seien Fig. 9 Taf. III. die Positionen der beiden Atome: am Anfang der Bewegung A und B, am Ende der Einwirkung A_1 und B_1, nach Verlauf einer Zeit a und b, endlich nach Verlauf einer Zeit t + dt, a_1 und b_1. Hier ist $\overline{A\,B} = r_0$ $\overline{A_1\,B_1} = r_1$, $\overline{a\,b} = r$ $\overline{a\,a_1} + \overline{b\,b_1} = dr$.

Während des unendlich kleinen Zeitelements dt darf man die Intensität R der Repulsivkraft als constant annehmen, dann sind offenbar $R\,\overline{a\,a_1}$ und $R\,\overline{b\,b_1}$ die Wirkungen, welche entwickelt werden, während die Atome im Zeitelement dt durch $\overline{a\,a_1}$ und $\overline{b\,b_1}$ getrieben werden. Die Summe dieser beiden Wirkungen ist demnach $R\,\overline{a\,a_1} + R\,\overline{b\,b_1} = R\,(\overline{a\,a_1} + \overline{b\,b_1}) = R\,dr$ und die totale Wirkung, welche entwickelt wird, während die Atome aus der Position A und B in die Position $A_1\,B_1$ getrieben werden, ist demnach:

$$W = \int_{r=r_0}^{r=r_1} R\,dr$$

Betrachten wir endlich den dritten Fall, wenn die Atome, während sie sich entfernen, beliebige Wege verfolgen. Fig. (10) Tafel III.

Es seien wiederum die Positionen der Atome: am Anfang die Einwirkung A und B; am Ende die Einwirkung A_1, B_1; nach Verlauf einer Zeit t, a und b; nach Verlauf einer Zeit t + dt, a_1 und b_1. $A\,B = r_0$ $A_1\,B_1 = r_1$, $a\,b = r$, $\overline{a_1\,b_1} - \overline{a\,b} = dr$.

Fällt man von a_1 und b_1 die Perpentikel $a_1\,\alpha$ und $b_1\,\beta$ auf die Richtung der Kraft R, so sind $a\,\alpha$ und $b\,\beta$ die Projektionen der von dem Atom im Zeitelement dt wirklich beschriebenen Wege auf der Richtung der Kraft R. Die Repulsivkraft R, mit welcher b auf a einwirkt, schreitet demnach im Zeitelement dt um $\overline{a\,\alpha}$, und die Repulsivkraft, mit welcher a auf b einwirkt, schreitet in dem gleichen Zeitelement um $\overline{b\,\beta}$ vorwärts. Die Wirkungsgrössen, welche dabei entwickelt werden, sind demnach $R\,\overline{a\,\alpha}$ und $R\,\overline{b\,\beta}$ und die Summe beider wird: $R\,\overline{a\,\alpha} + R\,\overline{b\,\beta} = R\,(\overline{a\,\alpha} + \overline{b\,\beta})$. Nun ist aber $\overline{a\,\alpha} + \overline{b\,\beta} = a_1\,b_1 - a\,b = dr$. Die totale Wirkung, welche im Zeitelement dt entwickelt wird, ist demnach R dr und die totale Wirkung, welche der Positionsänderung aus A B in $A_1\,B_1$ entspricht

$$W = \int_{r=r_0}^{r=r_1} R\,dr$$

Wir wollen nun den allgemeinen Fall betrachten, wenn R innerhalb der Bewegungsgrenzen fortwährend anziehend oder fortwährend abstossend oder endlich abwechselnd anziehend und abstossend wirkt, und wenn ferner die Entfernung der Atome während der Bewegung immer fort wächst oder immer fort abnimmt oder endlich abwechselnd zu- und abnimmt.

Nimmt man R positiv, wenn die Atome sich abstossen, und negativ, wenn sie sich anziehen; nimmt man ferner dr positiv, wenn in irgend einem Zeitaugenblick eine Zunahme, dagegen negativ, wenn eine Abnahme der Entfernung der Atome eintritt: so ist R d r positiv, wenn die relative Bewegung der Atome nach der Richtung der Kraft R statt findet, dagegen negativ, wenn die relative Bewegung nach einer Richtung erfolgt, welche jener von R entgegengesetzt ist. Im erstern Fall (wenn R d r positiv ausfällt) entsteht aber eine Wirkung und im zweiten Fall, wenn R d r negativ ausfällt, eine Gegenwirkung. Die Zeichen stimmen daher mit der Natur der Sache überein Um nun die wahre Wirkung, welche durch die Thätigkeit der Kräfte entsteht, mit welcher die Atome auf einander wirken, unter allen Umständen richtig zu berechnen, muss man zunäcst das Integral

$$\int R\, d\, r$$

berechnen, und dann kommt es nur darauf an, dass es in den richtigen Grenzen genommen wird. Nennt man r_1 die grössere, r_0 die kleinere der beiden Entfernungen, in welchen sich die Atome am Anfang und am Ende der Einwirkung befinden, so dass also $r_1 - r_0$ den numerischen Werth der Länge angibt, um welche sich die Atome genähert oder entfernt haben, so ist r_1 die obere und r_0 die untere Gränze des Integrals, und man hat unter diesen Voraussetzungen ganz allgemein

$$W = \int_{r_0}^{r_1} R\, d\, r$$

Wir können nun über die Wirkungen zweier Atome, wenn sie ihre Entfernung ändern, die folgenden, sehr wichtigen Sätze aussprechen:

1) Diese Wirkung ist gänzlich unabhängig von der Länge der Wege, welche die Atome zurücklegen, und von den Gestalten der Bahnen, welche sie beschreiben, und richtet sich nur allein nach der Intensität ihrer Anziehung oder Abstossung, und nach der Aenderung $r_1 - r_0$ ihrer Entfernung, die während der Einwirkung der Kraft eingetreten ist.

2) Die Wirkung, welche einer beliebigen Ortsveränderung zweier Atome entspricht, ist eben so gross, wie in dem Fall, wenn das eine der beiden Atome seinen Ort nicht ändert, und das andere Atom dagegen seine Entfernung von dem erstern um so viel ändert, wie in dem Fall einer wirklichen Ortsveränderung beider Atome.

3) Die Wirkung, welche bei einer beliebigen Ortsveränderung zweier Atome entsteht, ist ferner eben so gross, als in dem Fall, wenn die beiden Atome in der geraden Linie, welche ihre ursprünglichen Orte verbindet, sich um so viel genähert oder entfernt hätten, als bei der beliebigen Ortsveränderung beider Atome geschehen ist.

4) Die Wirkung, welche einer Ortsveränderung zweier Atome entspricht, ist gleich Null: a) wenn die Atome, während sie sich wie immer bewegen, ihre Entfernung in keinem Augenblick verändern: b) wenn die Entfernung der Atome am Ende der Wirkung eben so gross ist, als am Anfang derselben; c) wenn jedes der beiden Atome am Ende der Wirkung wiederum an den Ort zurückkehrt, an welchem es sich am Anfang der Einwirkung befand.

5) Wenn also ein aus Atomen bestehender Körper in Bewegung ist, und wenn dabei die Atome ihre relative Lage gegeneinander gar nicht ändern, so ist die Gesammtwirkung, welche dabei die Attraktiv- und Repulsivkräfte entwickeln, absolut gleich Null.

6) Wird ein Körper verdichtet, und erfolgt hierauf wiederum eine Ausdehnung, durch welche alle Atome wiederum in die Lage zurückkehren, in welcher sie sich am Anfang der Verdichtung befanden, so ist die totale Wirkung, welche diesem ganzen Prozess entspricht, gleich Null.

7) Wenn die Atome eines Körpers ihre relative Lage gegen einander wie immer verändern, sodann aber wiederum in ihre ursprünglich relative Lage zurückkehren, so ist die totale Wirkung, welche diesem Prozess entsprisht, gleich Null.

Die Wahrheit dieser Sätze ist leicht zu begreifen, wenn man bedenkt, dass nur allein bei Entfernungsänderungen Wirkungen oder Gegenwirkungen entwickelt werden, und dass, wenn zwei Atome ihre Entfernungen ändern, dann aber wiederum in ihre ursprüngliche Entfernungen zurückkehren, Wirkungen und Gegenwirkungen von gleicher Grösse entwickelt werden. Entfernt sich z. B. das Atom und wird dabei eine Wirkung entwickelt, so ensteht während des Zurückkehrens eine eben so grosse Gegenwirkung.

Von den lebendigen Kräften.

46) *Wirkungsgrösse zur Erzeugung einer Geschwindigkeit in einer Masse.* Wenn eine Masse aus dem ruhenden Zustande in einen bewegten Zustand versetzt werden soll, muss auf dieselbe eine Kraft durch längere Zeit, und mithin auch durch einen gewissen Weg treibend einwirken; es ist demnach zur Hervorbringung einer gewissen Geschwindigkeit in einer Masse eine gewisse Wirkungsgrösse nothwendig, welche wir nun bestimmen wollen.

Betrachten wir zunächst den Fall, wenn eine Kraft mit unveränderlicher Intensität und stets nach der Richtung wirkt, in der die Bewegung erfolgt. Nennt man K die Kraft, M die Masse des Körpers, G das Gewicht desselben an einem Orte, für welchen die Geschwindigkeitsänderung in jeder Sekunde beim freien Fall g beträgt, V die Geschwindigkeit, welche nach Verlauf einer Zeit T eintritt, endlich S den Weg, der während der Zeit T zurückgelegt wird, so bestehen zwischen diesen Grössen die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} V = g\,\frac{K}{G}\,T \\ S = \frac{1}{2}\,V\,T, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ (1)$$

aus welchen durch Elimination von T

$$K\,S = \frac{G}{2g} V^2$$

folgt. Es ist aber $\frac{G}{2g} = M$, und folglich hat man

$$K\,S = M\,V^2$$

Nun ist aber offenbar K S (das Produkt aus dem constanten Druck in den Weg, durch welchen derselbe thätig war) die Wirkungsgrösse, welche die Kraft entwickelte, bis die Geschwindigkeit V eintrat. Diese Wirkungsgrösse ist demnach für eine constante Kraft gleich dem Produkt aus der Masse des Körpers in das Quadrat der Geschwindigkeit, die am Ende der Einwirkung der Kraft vorhanden ist. Dieses Produkt nennt man aus einem Grunde, der später erklärt werden soll, die lebendige Kraft. Wenn wir diese Benennung beibehalten, so können wir sagen, dass die Wirkungsgrösse, welche eine constante Kraft entwickeln muss, um in einer Masse M eine gewisse Geschwindigkeit hervorzubringen, durch die lebendige Kraft M V^2 gemessen werden kann.

Zu diesem Resultat kommt man auch durch folgende Schlüsse. Es ist klar, dass die Wirkungsgrösse, welche eine constante Kraft entwickeln muss, um in einer Masse M eine Geschwindigkeit V hervorzubringen, eben so gross ist, als die Wirkungsgrösse, welche die Schwere entwickelt, wenn eine Masse M frei herabfällt, bis sie eine Geschwindigkeit V erlangt. Nun ist aber das Gewicht eines Körpers, dessen Masse M gleich 2g M und die Höhe, durch welche ein Körper fallen muss, um eine Geschwindigkeit V zu erlangen, gleich $\frac{V^2}{2g}$, folglich muss die Kraft 2g M, mit welcher die Erde den Körper anzieht, durch einen Weg $\frac{V^2}{2g}$ wirken, um in demselben die Geschwindigkeit V hervorzubringen. Die Wirkungsgrösse, welche dieser Thätigkeit entspricht, ist demnach:

$$2g\,M \times \frac{V^2}{2g} = M\,V^2$$

was zu beweisen wäre.

Betrachten wir nun ferner den Fall, wenn die Kraft K veränderlich ist; dann haben wir statt der Gleichungen (1) die Beziehungen:

$$d\,V = g\,\frac{K}{G}\,dt$$

$$d\,S = V\,dt$$

und wenn man aus denselben d t eliminirt:

$$K\,d\,S = \frac{G}{g}\,V\,d\,V$$

Durch Integration dieser Gleichung folgt:

$$\int K\,d\,S = \frac{G}{g}\,V^2.$$

oder weil $\frac{G}{2g} = M$ ist:

$$\int K\,d\,S = M\,V^2$$

Nun ist aber $\int K\,d\,S$ die Wirkungsgrösse, welche der Thätigkeit der veränderlichen Kraft entspricht; es wird demnach auch die Wirkungsgrösse, welche eine veränderliche Kraft entwickeln muss, um einer Masse M eine gewisse Geschwindigkeit V zu ertheilen, durch die lebendige Kraft M V^2 gemessen, welche der Geschwindigkeit entspricht.

47) *Wirkungsfähigkeit einer in Bewegung befindlichen Masse.* Wenn auf eine Masse, die eine gewisse Geschwindigkeit besitzt, von einem gewissen Zeitaugenblick an ein Widerstand oder eine constante Kraft ihrer Bewegung entgegen wirkt, so entsteht eine gleichförmig verzögerte Bewegung, die so lange fortdauert, bis die Geschwindigkeit der Masse ganz erschöpft ist. Dabei wird eine gewisse Wirkung entwickelt, indem die Gegenkraft oder der Widerstand durch einen gewissen Weg überwältigt wird, und diese Wirkungsgrösse wollen wir nun berechnen. Nennt man M die Masse und G das Gewicht des Körpers, V die Geschwindigkeit, welche am Anfange der Einwirkung der Kraft vorhanden war, S den Weg, durch welchen der Widerstand K überwunden wird, bis die Geschwindigkeit V erschöpft ist, endlich T die Zeit, binnen welcher dies geschieht. Da in jeder Sekunde eine Geschwindigkeitsabnahme gleich g $\frac{K}{G}$ eintritt, so ist die Geschwindigkeit nach Verlauf der Zeit T nur noch $V - g\,\frac{K}{G}\,T$. Da aber nach Verlauf der Zeit T die Geschwindigkeit ganz aufhört, so hat man:

$$o = V - g\,\frac{K}{G}\,T$$

Nun ist aber noch: $S = \frac{1}{2} V T$; eliminirt man T, so findet man:

$$K S = \frac{G}{2g} V^2 = M V^2$$

d. h. die Wirkungsgrösse, welche eine Masse M entwickelt, wenn sie auf einen Widerstand so lange einwirkt, bis ihre Geschwindigkeit erschöpft ist, wird durch die lebendige Kraft $M V^2$ gemessen, welche am Anfang in ihr enthalten war. Es ist demnach die lebendige Kraft, welche eine Masse besitzt, das Maass der Wirkungsfähigkeit, welche sie zu entwickeln vermag, wenn sie auf einen Widerstand so lange einwirkt, bis ihre Geschwindigkeit aufhört. Zu dem gleichen Resultat kommt man auch, wenn der Widerstand oder die Gegenkraft mit veränderlicher Intensität wirkt.

48) *Wirkungsgrössen für Geschwindigkeitsänderungen.* Die Wirkungsgrösse, welche eine Kraft entwickeln muss, um einer Masse M eine Geschwindigkeit v zu ertheilen, ist $M v^2$; jene, welche erforderlich ist, um eine Geschwindigkeit V hervorzubringen, ist $M V^2$. Die Wirkungsgrösse, welche eine Kraft entwickeln muss, um in einer Masse M eine Geschwindigkeitsänderung $V - v$ hervorzubringen, ist demnach offenbar:

$$M V^2 - M v^2$$

Dies gilt sowohl für eine Zunahme, als auch für eine Abnahme der Geschwindigkeit, jedoch mit dem Unterschied, dass die Masse im erstern Falle eine Wirkungsgrösse $M V^2 - M v^2$ empfängt, im letztern Falle aber abgibt.

Der Aenderung einer Geschwindigkeit entspricht also unter allen Umständen eine Wirkungsgrösse, welche gleich ist dem Unterschiede zwischen der lebendigen Kraft, welche der grössern und der lebendigen Kraft, welche der kleinern von den beiden Geschwindigkeiten zukommt.

48) *Wichtigkeit des Begriffes von lebendiger Kraft.* Wenn eine Kraft auf eine Masse vorwärts treibend oder zurück drängend einwirkt, so ist der äussere Erfolg im erstern Falle eine Geschwindigkeitszunahme, im letztern Fall eine Geschwindigkeitsabnahme der Masse; der innere Erfolg besteht aber darin, dass die Masse Wirkungen im erstern Falle aufnimmt, im letztern Falle abgibt. Die Masse verhält sich also zu den Kräften gleichsam wie ein Gefäss zu einer Flüssigkeit. So wie das Gefäss Flüssigkeiten in sich aufnimmt und demselben dann seine eigene Form mittheilt, eben so nimmt eine Masse Wirkungen in sich auf und sie erscheinen dann in der Form von lebendiger Kraft; und gleich wie ein Gefäss nicht mehr Flüssigkeit abgeben kann, als es empfangen hat, eben so kann auch eine Masse keine grössere Wirkung abgeben, als sie in sich aufgenommen hat. Hierdurch spricht sich die reine passive Natur

der Masse ganz deutlich aus, indem sie aus sich selbst keine Thätigkeit zu erzeugen, dagegen aber Thätigkeiten, welche Kräfte entwickeln, in sich aufzunehmen und auch wiederum abzugeben vermag. Wird eine Masse durch eine Kraft getrieben, so nimmt sie die Wirkungen, welche dieselbe entwickelt, in sich auf; wird sodann die Kraft beseitigt und die Masse sich selbst, d. h. ihrer eigenen passiven Natur überlassen, so bewegt sie sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort, conservirt oder erhält also in sich die empfangene Wirkung so lange, bis sie ihr durch irgend eine Gegenkraft entzogen wird, wodurch sie dann in den ruhigen Zustand zurückkehrt. Wenn man sich erlaubt, die Worte lebendig und todt in der weiteren Bedeutung zu gebrauchen, dass man Alles, was die Fähigkeit zu wirken, d. h. was eine Wirkungsfähigkeit in sich besitzt, lebendig und Alles, was eine solche Fähigkeit nicht besitzt, todt nennen darf, so kann man einen ruhenden Körper einen todten, einen in Bewegung befindlichen Körper einen lebendigen Körper nennen. Und da die Lebenskraft oder die lebendige Kraft eines belebten Körpers nach der Thätigkeit zu beurtheilen ist, die derselbe zu entwickeln vermag, so erscheint es sehr bezeichnend, dass man das Produkt aus einer Masse in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit, wodurch, wie wir gesehen haben, die in der Masse enthaltene Wirkungsfähigkeit gemessen wird, lebendige Kraft genannt hat.

Abgesehen von allen bildlichen Vorstellungen bedeutet die lebendige Kraft einer Masse einerseits die Wirkungsgrösse, welche erforderlich war, um sie in einen gewissen Bewegungszustand zu versetzen oder die Wirkungsgrösse, welche die Masse in sich aufgesammelt hat, während sie aus dem Zustand der Ruhe in jenen der Bewegung versetzt wurde; andererseits wird durch die lebendige Kraft die Wirkungsfähigkeit ausgedrückt, welche eine Masse in sich besitzt, wenn sie sich in einem gewissen Bewegungszustand befindet.

Die Begriffe von lebendiger Kraft und von Wirkung einer Kraft sind nicht nur für die technische Mechanik von bedeutender Wichtigkeit, sondern sie sind es auch für das ganze Gebiet der erklärenden Naturwissenschaften. Einzig und allein durch diese Begriffe sind wahre, das innere Wesen der Erscheinungen berührende Erklärungen der Thatsachen möglich, indem alle Erscheinungen auf Wechselthätigkeiten der Körper und ihrer Theile beruhen, deren Grösse nur allein vermittelst der Begriffe von Wirkung und von lebendiger Kraft verstanden werden kann. Es scheint sogar, dass durch diese Begriffe die Mechanik mit der Physiologie in einen engeren Zusammenhang gebracht werden kann, denn es ist Thatsache, dass alle Einwirkungen auf unser Nervensystem nach lebendigen Kräften zu beurtheilen sind.

Die Intensität aller Empfindungen richtet sich theils nach der spezifischen »Reizbarkeit« des Nervensystems eines Individuums, theils nach der lebendigen Kraft, mit welcher auf die Nervensubstanz eingewirkt wird. Für ein bestimmtes Individuum ist die Intensität der Empfindung des Schalles der lebendigen Kraft des schwingenden Lufttheilchens, die Intensität der Wärme und Lichtempfindung der lebendigen Kraft des schwingenden Aetheratoms proportional, und diese Thatsachen scheinen sich auch sehr natürlich zu erklären, weil diese lebendigen Kräfte die Wirkungen ausdrücken, durch welche die Nervensubstanz „gereizt« wird.

Vorläufig mögen diese Bemerkungen über die Bedeutung der lebendigen Kraft und über die Wichtigkeit dieses Begriffs genügen; in der Folge, wenn von dem allgemeinen Prinzip der Thätigkeit der Kräfte die Rede sein wird, wird der ganze innere Prozess, auf welchem die Erscheinungen in der materiellen Natur beruhen, noch deutlicher hervortreten.

Die folgenden Beispiele über die Berechnung der lebendigen Kräfte der Massen werden geeignet sein, um sich mit der Bedeutung und mit dem Begriff vertraut zu machen.

Uebungen in der Anwendung der Begriffe: Wirkung und lebendige Kraft.

50) *Körpererhebung mit Geschwindigkeit.* Wenn ein Körper mit unendlich kleiner Geschwindigkelt oder in der Weise erhoben wird, dass er zwar während der Erhebung beliebige Geschwindigkeitszustände durchläuft, jedoch am Ende der Erhebung ohne Geschwindigkeit ankommt, so entspricht diesen Ortsveränderungen eine Wirkungsgrösse, welche durch das Produkt aus dem Gewicht des Körpers in die Erhebungshöhe zu messen ist. Anders verhält es sich, wenn ein Körper in dem Moment, in welchem er durch Erhebung eine gewisse Höhe erreicht hat, eine gewisse Geschwindigkeit besitzt. In diesem Fall ist die ganze Wirkung, welche die erhebende Kraft entwickelt, gleich dem Produkt aus dem Gewicht des Körpers in die Erhebungshöhe, mehr der Wirkungsgrösse, welche erforderlich war, um der Masse des Körpers die Geschwindigkeit zu ertheilen, welche sie besitzt.

Nennt man G das Gewicht des Körpers, H die Höhe, bis zu welcher die Kraft auf den Körper gewirkt hat, V die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper in der Höhe H ankommt, so ist die Wirkung W, um deren Bestimmung es sich handelt:

$$W = G\,H + \frac{G}{2\,g} V^2$$

Setzt man $\frac{V^2}{2\,g} = H_1$, so bedeutet H_1 die Höhe, welche der Geschwindigkeit V entspricht, und dann wird:

$$W = G\,(H + H_1)$$

Diese Wirkung ist also eben so gross, wie wenn die Kraft den Körper auf die Höhe $H + H_1$ gehoben hätte, ohne demselben Geschwindigkeit zu ertheilen.

Bei manchen Erhebungen ist H_1 sehr klein gegen H, so dass man dann annähernd $W = G\,H$ setzen darf. Dies ist z. B der Fall, wenn Baumaterialien vermittelst einer Winde auf ein hohes Baugerüst gehoben werden. Die Höhe des Gerüstes beträgt z. B. 20 Meter; die Geschwindigkeit der Erhebung ist dabei ungefähr 1 Meter daher $H_1 = \frac{1^2}{2 \times 9{\cdot}81} = 0{\cdot}05$ Meter oder ungefähr 5 Centimeter, was gegen 20 Meter sehr klein ist.

In anderen Fällen dagegen ist H sehr klein gegen H_1, so dass man annähernd nehmen darf $W = G\,H_1$. Bei dem Austreiben des Wassers aus einer Feuerlöschspritze ist H_1 die Höhe der Mündung des Gussrohrs über dem Spiegel des Wassers im Spritzenkasten ungefähr gleich 1 Meter, hingegen V 24 bis 30 Meter; demnach $H_1 = \frac{V^2}{2\,g}$ 30 bis 45 Meter beträgt.

Der mittlere Druck, welcher gegen den Körper, wenn er in vertikaler Richtung gehoben würde, ausgeübt werden müsste, um auf der Höhe H mit einer Geschwindigkeit V anzukommen, ist: gleich $\frac{W}{H}$, d. h. gleich $G\,\frac{H + H_1}{H} = G\left(1 + \frac{H_1}{H}\right)$ und so gross ist auch der constante Druck, mit welchem man durch die vertikale Höhe H auf den Körper aufwärts drücken müsste, wenn derselbe die Höhe H mit einer Geschwindigkeit V erreichen soll. Dieser mittlere oder constante Druck ist also um $G\frac{H_1}{H}$ grösser, als das Gewicht des Körpers.

51) *Bewegungen auf Eisenbahnen.* Die Kraft, mit welcher man auf einer gerade fortlaufenden und horizontal liegenden Eisenbahn an dem vordersten Wagen einer Reihe aneinanderhängender Wagen anziehen müsste, um die verschiedenen Widerstände zu überwinden, welche durch mannigfaltige Ursachen, und insbesondere durch den Wälzungswiderstand und durch die Axenreibung entstehen, ist annähernd dem totalen Gewicht des ganzen Trains mit Einschluss der auf den Wägen befindlichen Lasten proportional, und beträgt gewöhnlich $\frac{1}{200}$ von die-

sem totalen Gewicht. Wenn man es mit G bezeichnet, so kann man also die zur Ueberwindung aller Widerstände erforderliche Zugkraft durch $\frac{G}{m}$ ausdrücken, wobei m als eine constante Zahl zu betrachten ist, deren Werth für die Mehrzahl der Eisenbahnen gleich 200 gesetzt werden kann.

Ohne die Einrichtung der Lokomotive genauer zu kennen, wird man wohl leicht einsehen, dass der Dampf gegen die Kolben mit einer gewissen Kraft pressen muss, wenn der Widerstand $\frac{G}{m}$ überwunden werden soll. Diesen Druck des Dampfes gegen die Kolben wollen wir P nennen.

Nun ist klar, dass eine Bewegung des Wagenzugs nicht beginnen kann, so lange der Druck des Dampfes gegen die Kolben kleiner oder höchstens gleich, sondern erst dann, wenn dieser Druck grösser als P und z. B. $P + p$ geworden ist; denn wenn die Bewegung beginnen soll, so muss nicht nur den Widerständen das Gleichgewicht gehalten werden, sondern es muss auch zum Antreiben der Massen Kraft vorhanden sein. Nehmen wir nun an, dass durch allmählige Ansammlung von Dampf ein Ueberfluss p von Kraft eintrete, und durch längere Zeit vorhanden bleibe, so werden die Massen des Wagenzuges aus dem Zustande der Ruhe in einen Zustand der Bewegung mit wachsender Geschwindigkeit übergehen, und die Geschwindigkeit wird so lange fort und fort zunehmen müssen, als eine freie Kraft p vorhanden ist, die keinen Widerstand zu überwinden hat, denn die Bewegung muss dann offenbar so erfolgen, wie wenn weder die Kraft P, noch der Widerstand $\frac{G}{m}$, sondern einzig und allein nur eine träge Masse $\frac{G}{2g}$ und eine Kraft p vorhanden wäre.

Wenn ein Ueberschuss p an Kraft durch längere Zeit, die wir mit t bezeeichnen wollen, gewirkt hat, wird die ganze Masse $\frac{G}{2g}$ des Wagenzuges eine gewisse Geschwindigkeit V, mithin auch eine gewisse lebendige Kraft $\frac{G}{2g} V^2$ besitzen, die so gross ist, als die Wirkungsgrösse, die die Kraft p in der Zeit t entwickelt hat. Während der Zeit t wird ein gewisser Weg S zurückgelegt; es ist also der Widerstand $\frac{G}{m}$ während der Zeit t durch diesen Weg S überwunden worden, und dazu ist eine Wirkungsgrösse $\frac{G}{m} S$ erforderlich, die durch den Druck P des Dampfes gegen den Kolben produzirt werden muss.

Die totale Wirkung des Dampfes während der Zeit t ist demnach gleich der Wirkung, welche der Ueberwindung des Widerstandes $\frac{G}{m}$ durch den Weg S entspricht, + der Wirkung, die erforderlich ist, um der Masse $\frac{G}{2g}$ des Wagenzuges die Geschwindigkeit V zu ertheilen. Diese totale Wirkung ist demnach:

$$\frac{G}{m} S + \frac{G}{2g} V^2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Nehmen wir nun ferner an, dass am Ende der Zeit t, aus was immer für einem Grunde, der Ueberschuss p des Druckes ganz aufhört, dass also der Dampfdruck mit dem Widerstand in's Gleichgewicht tritt, so ist weiter kein Grund zu einer Geschwindigkeitsänderung vorhanden; der Wagenzug wird daher mit der Geschwindigkeit V, die am Ende der Zeit t eintrat, fortlaufen, während gleichzeitig der Widerstand $\frac{G}{m}$ durch den Dampfdruck überwältigt wird. Dauert dieser Zustand während einer gewissen Zeit t_1 fort, und legt dabei der Wagenzug einen Weg S_1 zurück, so entwickelt der Dampf eine Wirkungsgrösse, die der Ueberwindung des Widerstandes $\frac{G}{m}$ durch den Weg S_1 entspricht, die demnach gleich $\frac{G}{m} S_1$ ist.

Nehmen wir nun endlich an, dass nach Verlauf der Zeit t_1 die Kommunikation zwischen dem Kessel und den Dampfcylindern ganz aufgehoben werde. Von diesem Augenblick an werden die Massen durch keine Kraft vorwärts getrieben, dagegen aber wirkt der Widerstand $\frac{G}{m}$ so lange der Bewegung entgegen, bis allmählig die Geschwindigkeit und die lebendige Kraft verschwindet; dies wird nach Verlauf einer gewissen Zeit t_2 geschehen, während welcher der Wagenzug einen Weg S_2 zurücklegt, und es ist offenbar die Wirkungsgrösse $\frac{G}{m} S_2$, welche der Ueberwindung des Widerstandes $\frac{G}{m}$ durch den Weg S_2 entspricht, gleich der lebendigen Kraft $\frac{G}{2g} V^2$, welche am Anfang der Zeit t_2 in den Massen enthalten war; man hat demnach:

$$\frac{G}{m} S_2 = \frac{G}{2g} V^2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Hieraus ergibt sich zunächst der Weg S_2, den der Wagenzug noch zurücklegt, wenn einmal die Maschinen ausser Thätigkeit gesetzt worden sind. Dieser Weg ist

$$S_2 = m\frac{V^2}{2g}$$

also m Mal so gross, als die Geschwindigkeitshöhe, welche der Geschwindigkeit V entspricht, die im Moment der Abstellung der Maschine vorhanden war. Ist z. B. $V = 10^m$ und $m = 200$, so wird $S_2 = 200 \frac{\overline{10}^2}{2 \times 9{\cdot}81}$ oder auch gleich 1000 Meter.

Die Summe der Wirkungen, welche der Dampf während der ganzen Fahrt, also während der Zeit $t + t_1 + t_2$ entwickelt hat, ist:

$$\frac{G}{m}S + \frac{G}{2g}V^2 + \frac{G}{m}S_1 + 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$$

Die Summe der Wirkungen, welche während der gleichen Zeit die Ueberwältigung des Widerstandes $\frac{G}{m}$ erfordert, ist:

$$\frac{G}{m}S + \frac{G}{m}S_1 + \frac{G}{m}S_2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (4)$$

Berücksichtigt man die Gleichung (2) so sieht man, dass diese Summen (3) und (4) gleiche Werthe haben. Es ist also die Wirkung des Dampfes während der ganzen Fahrt genau so gross, als die Gegenwirkung des Widerstandes, d. h. es wird durch die Massen eine Wirkung weder produzirt noch consumirt.

Der mittlere Werth der Kraft, mit welcher der Wagenzug während der Zeit t getrieben wurde, ist:

$$\frac{\frac{G}{m}S + \frac{G}{2g}V^2}{S} = \frac{G}{m} + G\frac{\frac{V^2}{2g}}{S}$$

und die Zeit T, durch welche diese mittlere Kraft wirken müsste, bis die Geschwindigkeit V eintritt, ist

$$T = \frac{2S}{V}.$$

52) ***Wirkung des Pulvergases auf die Kugel und auf das Geschütz.*** Wenn man die Bewegung einer Kugel, welche durch entzündetes Pulver aus einem Kanonenrohr getrieben wird, und die gleichzeitig stattfindende Rückbewegung des Geschützes, mit Berücksichtigung aller Umstände, die dabei Einfluss haben, bestimmen will, so hat man es mit einer sehr schwierigen Aufgabe zu thun. Erlaubt man sich aber, einige Nebenumstände zu vernachlässigen, und dann noch mehrere allerdings nur annähernd richtige Annahmen zu machen, so kann man mit Hilfe der

allgemeinen Prinzipien der Mechanik ohne Schwierigkeitt mehrere Resultate finden, die über die Wirkung des Pulvers auf die Kugel und auf das Geschütz Aufschluss geben. Vernachlässigt man nämlich 1) den Luftwiderstand, 2) die Reibung der Kugel an der inneren Fläche des Rohres, 3) die Trägheit der Pulvermasse, 4) die Vibrationen, welche in der Kugel und im Geschütz entstehen, und nimmt man an, 1) dass die Pressung im Innern des Rohres in jedem einzelnen Augenblick nach allen Richtungen einerlei Intensität habe, 2) dass der Rückbewegung des Geschützes kein Hinderniss entgegen wirke, so ist man zu folgender Schlussweise berechtiget.

Wie auch das Gesetz beschaffen sein mag, nach welchem sich die Pressung im Innern des Rohres mit der Zeit ändert, so ist sie doch, der Voraussetzung gemäss, in einem bestimmten Zeitmoment nach allen Richtungen gleich gross, es werden demnach in jedem einzelnen Zeitmoment gegen die Kugel nach vorwärts und gegen das Geschütz nach rückwärts gleich grosse Pressungen ausgeübt. Nennt man nun M die Masse der Kugel, M_1 die Masse des Geschützes (Rohr sammt Gestelle), K die unbekannte Kraft, mit welcher in irgend einem Zeitmoment die Kugel nach vorwärts und das Geschütz zurückgedrückt wird, v v_1 die Geschwindigkeitsänderungen, welche die Kraft K in den Massen M und M_1 in einem sehr kleinen oder wenn man will unendlich kleinen Zeittheilchen t hervorbringt, so hat man nach dem Fundamentalgesetz der beschleunigten Bewegung

$$v = \frac{K}{2M}t$$

$$v_1 = \frac{K}{2M_1}t.$$

Hieraus folgt, wenn man K t eliminirt:

$$Mv = M_1 v_1$$

oder

$$V : v_1 = M_1 : M$$

das heisst die Geschwindigkeitsänderungen, welche in irgend einem unendlich kleinen Zeittheilchen eintreten, sind den Massen verkehrt proportional. Weil aber dieses Verhältniss für jedes Zeittheilchen gilt, so folgt daraus, dass sich auch die Geschwindigkeiten V und V_1, welche die Kugel und das Geschütz in dem Moment besitzen, wenn die Kugel das Rohr verlässt, verkehrt verhalten müssen, wie die Massen; man hat demnach auch

$$MV = M_1 V_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

Es ist demnach die Geschwindigkeit, mit der das Geschütz zurückspringt, in dem Maase kleiner als die Geschwindigkeit der Kugel, als die Masse des Geschützes grösser ist, als jene der Kugel. Diese Massen verhalten sich in der Regel wie 1 : 300 und dann erhält die Kugel eine 300 Mal grössere Geschwindigkeit als das Geschütz.

Die Wirkung, welche die Kugel empfängt, ist $M V^2$, jene welche dem Geschütz mitgetheilt wird $M_1 V_1^2$; diese Wirkungen verhalten sich demnach wie $\frac{M V^2}{M_1 V_1^2}$ oder wenn man für V_1 aus (1) seinen Werth setzt, wie:

$$\frac{M V^2}{M_1 V_1^2} = \frac{M V^2}{M_1 V^2 \frac{M^2}{M_1^2}} = \frac{M_1}{M_1}$$

Die Wirkung, welche der Kugel mitgetheilt wird, ist demnach um so viel Mal grösser, als jene, welche das Geschütz empfängt, als die Masse des letzteren grösser ist als jene der Kugel.

Die Totalwirkung W, welche den beiden Massen M und M_1 mitgetheilt wird, ist:

$$W = M V^2 + M_1 V_1^2$$

oder auch wegen $V_1 = V \frac{M}{M_1}$

$$W = M V^2 \left(1 + \frac{M}{M_1}\right)$$

Für einen Vierundzwanzigpfünder ist das Gewicht der Kugel 12 Kilogramm, das Gewicht des Geschützes (Rohr sammt Gestelle) $12 \times 300 =$ 3600 Kilogramm, die normale Pulverladung 4 Kilogramm, und die Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel das Rohr verlässt, 500 Meter. Es ist demnach:

$$M = \frac{12}{2 \times 9{\cdot}81},\ V = 500,\ M_1 = \frac{12 \times 300}{2 \times 9{\cdot}81}$$

und es folgt nun:

1) die Wirkungsgrösse, welche der Kugel mitgetheilt wird oder die lebendige Kraft der Kugel $= \frac{12}{2 \times 9{\cdot}81}\ \overline{500}^2 = 152905$ Kilogramm-Meter;

2) die Geschwindigkeit, mit welcher das Geschütz zurück springt, $V_1 = V \frac{M}{M_1} = \frac{500}{300} = 1{\cdot}66$ Meter;

3) die lebendige Kraft, welche der Geschützmasse mitgetheilt wird: $M V^2 \frac{M}{M_1} = \frac{152905}{300} = 510$ Kilogramm-Meter;

4) die Totalwirkung, mit welcher das Pulver auf die Masse der Kugel und des Geschützes wirkt $152905 + 510 = 153415$ Kilogramm-Meter.

Die Kugel befindet sich bei einer Vierundzwanzigpfünder-Kanone ungefähr 2·75 Meter tief im Rohr, so lang ist also auch ungefähr der Weg, durch welchen das Pulvergas auf die Masse der Kugel einwirkt, bis dieselbe eine Geschwindigkeit $V = 500$ Meter erlangt; der mittlere Werth des Druckes, den das Pulvergas gegen die Kugel ausübt, ist demnach: $\frac{152905}{2{\cdot}75} = 55787$ Kilogramm, und da der Querschnitt des Rohres 176 Quadrat-Centimeter beträgt, ferner der Druck einer Atmosphäre auf 1 Quadrat-Centimeter 1·033 Kilogramm ist, so folgt daraus, dass die mittlere Spannkraft des Pulvergases $\frac{55787}{176 \times 1{\cdot}033} = 307$ Atmosphären geschätzt werden kann.

Die Zeit, welche die Kugel brauchte, um den Weg von 2·75 Meter zurückzulegen, wenn stets der mittlere Druck wirkte, folgt aus der Gleichung

$$V = g \frac{K}{G} t$$

wenn man in dieselbe setzt: $V = 500$, $g = 9{\cdot}81$ $G = 12$. $K = 55787$ Man findet

$$t = \frac{V G}{g K} = \frac{500 \times 12}{9{\cdot}81 \times 55787} = \frac{1}{91}''$$

Die zerstörende Wirkung, welche man mit einem Vierundzwanzigpfünder-Geschütz hervorbringen könnte, wenn die Schüsse schnell auf einander folgten, würde ausserordentlich gross sein. Allein der Erfahrung zufolge erfordert die Reinigung, Ladung und Stellung des Geschützes bei gewandter Behandlung desselben für jeden Schuss einen Zeitaufwand von 5 Minuten oder von 300 Sekunden. Der mittlere Effekt oder die Wirkung, welche in jeder Sekunde hervorgebracht wird, ist demnach in Pferdekräften ausgedrückt nur $\frac{152905}{300 \times 75} = 6{\cdot}8$ Pferdekraft, also keineswegs so gross, als man für den ersten Augenblick glauben möchte.

(53) *Die Wasserkräfte.* Bekanntlich werden zum Betriebe der Maschinen sehr häufig die Wasserkräfte benützt, welche die Bäche und Flüsse in ihrem natürlichen Laufe darbieten.

Denkt man sich an einer bestimmten Stelle eines Baches oder Flusses einen Querschnitt senkrecht auf die Bewegungsrichtung des Wassers geführt, so wird durch denselben in jeder Sekunde eine gewisse Wassermenge mit einer gewissen Geschwindigkeit durchfliessen, und die in derselben enthaltene Wirkungsfähigkeit wird durch geeignete Einrichtungen zum Betrieb einer Maschine gebraucht werden können. Nennt man Q die Wassermenge, welche p 1'' durch jenen Querschnitt fliesst, V die

Geschwindigkeit des Wassers, so ist $\frac{1000\,Q}{2\,g}$ die Masse und $\frac{1000\,Q}{2\,g}\,V^2$ die lebendige Kraft oder die Wirkungsfähigkeit dieser Wassermasse. Ist z. B. $Q = 2{\cdot}5$ Kubikmeter und $V = 3$ Meter, so beträgt dieselbe $\frac{1000 \times 2{\cdot}5}{2 \times 9{\cdot}81}\, 3^2 = 1147$ Kilogramm-Meter oder $\frac{1147}{75} = 15{\cdot}3$ Pferdekraft. Gelingt es also auf irgend eine Weise, dem Wasser seine lebendige Kraft vollständig zu entziehen, so gewinnt man dadurch eine Thätigkeit, die jener von 15 Pferden ungefähr gleich kommt.

Wenn an einem Orte ein natürlicher Wasserfall von einer Höhe H vorhanden ist, so kann daselbst die Erde auf jedes Wassertheilchen durch die Höhe H anziehend wirken, d. h. die Anziehung der Erde kann an diesem Ort auf jedes Wassertheilchen eine Wirkung ausüben, die durch das Produkt aus dem Gewicht des Theilchens in der Sturzhöhe H zu messen ist. Wenn also in jeder Sekunde eine Wassermenge von Q Kubik-Metern niederstürzt, so wirkt in jeder Sekunde eine Kraft 1000 Q Kilogramm durch einen Weg H. Die Wirkung des Wassersturzes per 1″ oder der Effekt dieser Wasserkraft ist demnach 1000 Q H Kilogramm-Meter. Ist z. B. $H = 4$, $Q = 3{\cdot}4$ Kubik-Meter, so wird $1000\,Q\,H = 13600$ Kilogramm-Meter oder $\frac{13600}{75} = 181{\cdot}3$ Pferdekräfte.

54) ***Bewegung zweier Massen durch wechselseitige Abstossung.*** Werden zwei Körper, die sich mit einer Kraft abstossen, welche dem Produkt ihrer Massen und einer Funktion ihrer Entfernung proportional ist, in eine gewisse Entfernung von einander gestellt und dann sich selbst überlassen, so entfernen sie sich immer mehr und mehr von einander und die Bewegungen erfolgen in den Verlängerungen der geraden Linie, welche ihre anfänglichen Positionen verbindet.

Es seien M und M_1 die Massen der beiden Körper, r_0 ihre anfängliche und r ihre Entfernung, nachdem die Bewegung eine Zeit t gedauert hat, $M\,M_1\,f(r)$ die Repulsivkraft, mit welcher sich die Massen abstossen, wenn ihre Entfernung gleich r ist, $V\;V_1$ die absoluten Geschwindigkeiten der Massen und u ihre relative Geschwindigkeit zur Zeit t. Da die Kräfte, welche in einem bestimmten Zeitmoment auf beide Massen einwirken, gleich gross, nämlich gleich $M\,M_1\,f(r)$ sind, so müssen sich die Geschwindigkeitsänderungen, welche in einem bestimmten Zeitelement in den beiden Massen eintreten, umgekehrt wie die Massen verhalten, und da dies von jedem Zeitelement der Bewegung giltig ist, so müssen nothwendig auch die endlichen Geschwindigkeitsänderungen V und V_1, das heisst die Summe der sämmtlichen Geschwindigkeitsänderungen, die in der Zeit t vorkommen, den Massen verkehrt proportional sein; man hat daher

$$V : V_1 = M_1 : M$$

oder

$$M\,V = M_1\,V_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Während der Zeit t entwickelt die Repulsivkraft $M\,M_1\,f(r)$ eine Gesammtwirkung, die nach Nr. (36) durch $\int M\,M_1\,f(r)\,dr = M\,M_1 \int f(r)\,dr$ ausgedrückt wird, und diese Wirkung wird während der Zeit t durch beide Massen aufgesammelt, indem dieselben die lebendigen Kräfte $M\,V^2$ und $M_1\,V_1{}^2$ erlangen; man hat daher

$$M\,M_1 \int f(r)\,dr = M\,V^2 + M_1\,V_1{}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Aus diesen beiden Gleichungen (1) und (2) findet man leicht, wenn man dieselben in Bezug auf V und V_1 auflöst, folgende Ausdrucke:

$$\left.\begin{aligned} V^2 &= \frac{M_1{}^2}{M+M_1}\int f(r)\,dr \\ V_1{}^2 &= \frac{M^2}{M+M_1}\int f(r)\,dr \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und hiermit sind also die absoluten Geschwindigkeiten der beiden Massen nach Verlauf der Zeit t bestimmt. Zur Bestimmung der relativen Geschwindigkeit, mit welcher sie sich zur Zeit t von einander entfernen, hat man:

$$u = V + V_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

oder weil wegen (1) $\quad V_1 = V\,\frac{M}{M_1}$ ist.

$$u = V\left(1 + \frac{M}{M_1}\right) = V\,\frac{M + M_1}{M_1}$$

demnach

$$u^2 = V^2\left(\frac{M + M_1}{M_1}\right)^2$$

oder endlich, wenn man für V^2 den Werth einführt, welchen die erste der Gleichungen (3) darbietet,

$$u^2 = \Big(M + M_1\Big)\int f(r)\,dr \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Wechselwirkung der Körper durch Stoss.

55) *Allgemeine Bemerkungen.* Begegnen sich zwei Körper und stimmen die Geschwindigkeiten und Richtungen ihrer Bewegungen nicht überein, so entsteht dadurch eine Erscheinung, welche man Stoss zu nennen pflegt und die im Wesentlichen darin besteht, dass die Bewegungszustände der Körper in einer oder in jeder Hinsicht fast plötzlich verändert werden.

Durch den Stoss zweier Körper kann bewirkt werden: 1) Geschwindigkeitsänderung der Massen; 2) Richtungsänderung ihrer Bewegung, 3) Vibration der Körpertheile gegen einander; 4) Ueberwindung ausserordentlich grosser Widerstände; 5) bleibende oder vergängliche Formänderungen der Körper; 6) Zerstörung eines Zusammenhanges von Körpern; 7) Zertheilung der Körper. In den meisten Fällen treten zwei oder mehrere dieser Wirkungen gleichzeitig auf.

Der Erfolg des Stosses zweier Körper hängt ab 1) von den Massen der Körper; 2) von der relativen Geschwindigkeit, mit welcher sie zusammentreffen, und überhaupt von den gesammten Bewegungszuständen, in welchen sich die beiden Körper im Moment des Zusammentreffens befinden; 3) von der Form der Körper; 4) von ihrer relativen Lage gegen einander im Moment des Zusammentreffens; 5) von dem inneren Molekularbau der Körper, und insbesondere von der Elastizitätsbeschaffenheit der Körper.

Das Problem des Stosses genau und allgemein gefasst, so besteht es darin, für irgend einen beliebigen Zeitmoment nach erfolgtem Zusammentreffen der Körper den Ort und die Geschwindigheit eines jeden Atoms der Körper zu bestimmen, vorausgesetzt, dass diese beiden Elemente für jedes Atom vor dem Stoss bekannt sind. In dieser Allgemeinheit ist aber die Lösung dieses Problems mit Schwierigkeiten verbunden, die selbst mit den raffinirtesten Mitteln der Analysis nicht bewältigt werden können. Da es sich hier nur darum handelt, die wesentlichsten Grundlehren der Dynamik durch geeignete Anwendungen zur Anschauung zu bringen, so ist zu diesem Behufe die folgende, allerdings nur sehr rohe Behandlung des Stosses zweier Körper viel geeigneter, als eine genaue, bei welcher auf die Vibrationen, die durch den Stoss entstehen, Rücksicht genommen werden müsste.

56) *Gerader Stoss zweier Cylinder. Geschwindigkeiten nach dem Stosse.* Wir betrachten zwei cylindrische Körper, die sich in gerader Linie nach der Richtung ihrer Axen bewegen. Um uns die Sache zu erleichtern, wollen wir statt der wirklichen Körper, die so zu sagen aus einem innigen Gemenge von trägen und gleichzeitig elastischen Theilchen

bestehen, zwei ideale Körper denken, bei welchen die Trägheit von der Elastizität gesondert ist.

Es seien (Fig. 11 Taf. III.) A und B zwei träge cylindrische und unzusammendrückbare Massen, a b zwei massenlose elastische, also zusammendrückbare Federn, von denen die erstere mit dem stossenden Ende des Körpers A und die andere mit dem gestossenen Ende des Körpers B verbunden ist. Diese Federn, nehmen wir ferner an, sollen einer Zusammendrückung oder Ausdehnung genau so stark widerstehen, wie die wirklichen Körper, für welche wir diese idealen Körper substituiren.

Es ist wohl leicht einzusehen, dass der Stoss bei diesen idealen Körpern ungefähr auf die gleiche Weise geschehen wird, wie bei den wirklichen Körpern, dass also die Resultate, welche sich aus der Behandlung des Stosses der ersteren ergeben werden, wenigstens annähernd auch für die letztern gelten werden. Der Unterschied zwischen dem Stoss der wahren und dem Stoss der idealen Körper besteht jedoch darin, dass bei jenen Vibrationen eintreten, bei diesen aber nicht.

Die Aufeinanderwirkung der Körper beginnt, so wie die Federn zusammentreffen. Von diesem Augenblick an werden sie comprimirt, indem der vorauseilende Körper B nicht so schnell ausweicht, als der andere A nachdringt. Der Elastizitätsgrad der Federn mag nun wie immer beschaffen sein, so wird die in irgend einem Augenblick zwischen denselben bestehende wechselseitige Pressung eben so stark vorwärts als zurückwirken, die beiden Massen A und B werden daher in jedem einzelnen Augenblick mit gleicher Kraft getrieben; es müssen demnach die Geschwindigkeitsänderungen, welche in irgend einem kleinen Zeittheilchen in den beiden Massen eintreten, den Massen verkehrt proportional sein, und folglich müssen sich auch die Geschwindigkeitsänderungen, welche während einer bestimmten endlichen Zeit in den Körpern hervorgebracht werden, verkehrt wie ihre Massen verhalten. Nennt man also v und v_1 die endlichen Geschwindigkeitsänderungen, welche während einer endlichen Zeit t in den Massen hervorgebracht werden, so muss sein:

$$v : v_1 = M_1 : M \quad \text{oder}$$
$$v M = v_1 M_1$$

Da die Geschwindigkeit von B stets zu- und jene von A stets abnimmt und anfänglich $V > V_1$ war, so muss nothwendig ein Moment eintreten, in welchem die Geschwindigkeit beider Massen gleich gross und z. B. C wird. Bis zu diesem Augenblick hin hat aber die Geschwindigkeit von B um $C - V_1$ zu- und die Geschwindigkeit von A um $V - C$ abgenommen, und weil auch auf diese Geschwindigkeitsänderungen das obige Gesetz (1) angewendet werden darf, so hat man:

$$M(V-C) = M_1 (C-V_1)$$

und daraus folgt:

$$C = \frac{M V + M_1 V_1}{M + M_1}$$

In dem Augenblick, da die Geschwindigkeit der Körper gleich gross geworden ist, haben sie nur eine gemeinsame, aber keine relative Geschwindigkeit gegen einander. Die Massen können daher in diesem Augenblick kein Bestreben äussern, die Federn zu comprimiren, was also nun weiter geschehen wird, hängt von der Beschaffenheit der Federn ab, und in dieser Beziehung wollen wir zwei Fälle betrachten. Wir nehmen nämlich zuerst an, dass auch die Federn von dem Augenblick an, wo die Geschwindigkeit der Körper gleich gross geworden ist, gar kein Bestreben mehr äussern, in ihren ursprünglichen Zustand zurück zu kehren; sodann betrachten wir den Fall, wenn die Federn, nachdem die Geschwindigkeit der Körper gleich gross geworden ist, mit ungeschwächter Kraft in ihren ursprünglichen Zustand zurück zu kehren streben.

Im ersteren Fall, welcher annähernd dem Stoss unelastischer Körper entspricht, ist gar kein Grund zu einer weiteren Geschwindigkeitsänderung der Körper vorhanden, wenn einmal die Geschwindigkeit eines jeden derselben gleich C geworden ist. Der Stoss dauert demnach bei unelastischen Körpern so lange fort, bis sie beide eine gemeinsame Geschwindigkeit

$$C = \frac{M V + M_1 V_1}{M + M_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

erlangen, und mit dieser Geschwindigkeit bewegen sie sich dann nach dem Stosse gemeinschaftlich fort.

Wenn dagegen die Federn mit ungeschwächter Kraft in ihren ursprünglichen Zustand zurück zu kehren streben, wie es ungefähr bei vollkommen elastischen Körpern der Fall ist, so werden dieselben während der Wiederherstellung ihrer Formen neuerdings und mit den gleichen Intensitäten gegen die Massen drücken, wie während der Periode, in der sie zusammengedrückt wurden; es müssen demnach während der zweiten Periode eben so grosse Geschwindigkeitsänderungen eintreten, wie während der ersten.

Die Geschwindigkeit des Körpers B muss daher neuerdings um $C-V_1$ zu- und die des Körpers A um $V-C$ abnehmen. Ist aber dies geschehen, sind also die Federn wiederum in ihren ursprünglichen Zustand zurückgekehrt, so ist der ganze Prozess der Aufeinanderwirkung der Körper geschlossen; denn die Federn wirken nicht mehr, weil sie sich in ihrem natürlichen Zustande befinden, und die Massen können nun

nicht mehr auf die Federn wirken, weil die Geschwindigkeit des voraus befindlichen Körpers B grösser ist, als jene des nachfolgenden; es muss demnach eine Trennung der Körper eintreten. Nennen wir nun W und W_1 die Geschwindigkeiten, welche die Körper nach erfolgtem Stoss besitzen, so ist offenbar:

$$W = V - 2\,(V-C)$$
$$W_1 = V_1 + 2\,(C-V_1)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} W &= 2\,C - V \\ W_1 &= 2\,C - V_1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

oder wenn man den Werth von C aus (1) einführt und die geeigneten Reduktionen vornimmt:

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{M V + M_1 (2 V_1 - V)}{M + M_1} \\ W_1 &= \frac{M_1 V_1 + M (2 V - V_1)}{M + M_1} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Wir erlauben uns nun, die Gleichung (1) für unelastische und die Gleichungen (2) für elastische Körper gelten zu lassen, und wollen zunächst einige spezielle Fälle betrachten.

1) Ist die Masse M_1 des gestossenen Körpers ungemein, oder wenn man will, unendlich gross, so ist in der Gleichung (1) und (2) $M_1 = \infty$ zu setzen, und dann findet man:

a) für unelastische Körper $C = V_1$

b) für elastische Körper $\left\{\begin{aligned} W &= 2\,V_1 - V \\ W_1 &= V_1 \end{aligned}\right.$

Wenn die grosse Masse M_1 vor dem Stoss in Ruhe war, so ist:

c) für unelastische Körper $C = o$

d) für elastische Körper $\left\{\begin{aligned} W &= -V \\ W_1 &= o \end{aligned}\right.$

Die Geschwindigkeit der grössern Masse M_1 ändert sich demnach in allen vier Fällen gar nicht. Die Geschwindigkeit der stossenden Masse wird im Falle (b) : gleich o wenn $2\,V_1 = V$ und negativ, wenn $V > 2\,V_1$. Im Falle (d) wird diese Geschwindigkeit ebenfalls negativ.

2) Wenn die Massen M und M_1 gleich gross sind, findet man:

e) für unelastische Körper $C = \dfrac{V + V_1}{2}$

f) für elastische Körper $\left\{\begin{aligned} W &= V_1 \\ W_1 &= V \end{aligned}\right.$

Sind also die Massen gleich gross, so ist die Geschwindigkeit nach dem Stoss (e), wenn die Körper unelastisch sind, gleich dem arithmetischen Mittel aus den Geschwindigkeiten vor dem Stoss, und wenn (f) die Körper elastisch sind, so tauschen sie die Geschwindigkeit, die sie vor dem Stosse hatten, während des Stosses aus, so dass jeder die Geschwindigkeit des andern annimmt.

3) Wenn der gestossene Körper vor dem Stoss in Ruhe war, ist zu setzen: $V_1 = 0$ und dann wird:

g) für unelastische Körper $C = \frac{M}{M + M_1} V$

h) für elastische Körper $\left\{\begin{array}{l} W = V \frac{M - M_1}{M + M_1} \\ W_1 = V \frac{2\,M}{M + M_1} \end{array}\right.$

4) Wenn die Bewegungsrichtungen der Körper vor dem Stoss einander entgegengesetzt sind, hat man in den Formeln eine oder die andere der Geschwindigkeiten V und V_1 negativ zu setzen. Nehmen wir die Richtung, nach der sich A bewegt, für die positive, so ist V_1 negativ zu setzen, und dann wird:

h) für unelastische Körper $C = \frac{M V - M_1 V_1}{M + M_1}$

i) für elastische Körper $\left\{\begin{array}{l} W = \frac{M V - M_1 (2 V_1 + V)}{M + M_1} \\ W_1 = \frac{M_1 V_1 + M (2 V + V_1)}{M + M_1} \end{array}\right.$

Vergleichen wir nun die lebendigen Kräfte, welche vor und nach dem Stosse in den Massen vorhanden sind. Es ist klar, dass die Summe der lebendigen Kräfte, die man nach dem Stosse in den lebendigen Massen antreffen wird, kleiner oder gleich jener sein wird, die vor dem Stosse vorhanden war; kleiner, wenn die Körper unelastisch, gleich, wenn sie elastisch sind. Denn die Federn, welche in beiden Fällen comprimirt werden, verbleiben im erstern Falle in diesem comprimirten Zustand, dehnen sich dagegen im letztern Falle wiederum aus. Die Wirkung, welche die Comprimirung der Federn erfordert, geht also verloren, wenn die Körper unelastisch sind, wird aber wiederum ersetzt, wenn jeder derselben elastisch ist. Das folgt auch aus den Gleichungen (1) und (2). Nennt man nämlich $\mathfrak{B}$ die Differenz zwischen der Summe der lebendigen Kräfte vor und nach dem Stoss, so hat man:

a) Wenn die Körper unelastisch sind:

$$\mathfrak{B} = M V^2 + M_1 V_1^2 - \{ M C^2 + M_1 C^2 \}$$

und wenn man für C seinen Werth aus (1) substituirt, und dann die geeigneten Reduktionen vornimmt:

$$\mathfrak{B} = \frac{M M_1}{M + M} (V_1 - V)^2$$

Dagegen findet man:

b) Wenn die Körper elastisch sind:

$$\mathfrak{B} = M V^2 + M_1 V_1^2 - M W^2 - M_1 W_1^2$$

Setzt man für W und W_1 die Werthe, welche die Gleichungen (2) darbieten, und reduzirt sodann in ganz gewöhnlicher Weise, so heben sich die einzelnen Glieder wechselseitig, und man findet in der That:

$$\mathfrak{B} = 0$$

Es ist aber klar, dass bei einem wirklichen Körper, wenn auch das Material, aus dem er besteht, noch so vollkommen elastisch ist, $\mathfrak{B}$ nicht gleich Null werden kann; denn während die Körper auf einander wirken, werden alle Atome erschüttert, es entstehen dadurch Vibrationen, und die Wirkungsgrösse, durch welche sie hervorgebracht werden, bleibt in den Körpern zurück, ist daher für die fortschreitende Bewegung der Masse verloren.

Ist die Masse M_1 des gestossenen Körpers sehr gross, und sind die Körper unelastisch, so ist der Verlust an lebendiger Kraft, der durch den Stoss entsteht:

$$\mathfrak{B} = M (V_1 - V)^2$$

d. h. es geht dann diejenige lebendige Kraft verloren, welche der Masse des stossenden Körpers und seiner relativen Geschwindigkeit gegen den stossenden Körper entspricht.

57) *Dauer des Stosses.* Alle Resultate, welche wir in Betreff des Stosses unelastischer und elastischer Körper gefunden haben, sind vom Elastizitätsmodulus der Federn, durch welche ihre Zusammendrückbarkeit gemessen wird, ganz unabhängig. Diese Resultate betreffen jedoch nur die Geschwindigkeiten und die lebendige Kraft nach dem Stosse, aber nicht die Dauer des Stosses und die Intensität der Pressung, welche während des Stosses zwischen den Körpern statt finden. Diese beiden Elemente hängen allerdings von dem Modulus der Elastizität ab. Sind die Federn sehr leicht zusammendrückbar, so verlängert dies die Dauer des Stosses, und verändert die mittlere Intensität der Pressung während des Stosses.

Um dies in einem Beispiel nachzuweisen, wollen wir annehmen, dass die Federn nach demselben Gesetz zusammendrückbar seien, welches wir in Nr. (43) für Stäbe aufgestellt haben.

Nach Verlauf der Zeit t, die vom Augenblick des Zusammentreffens an gerechnet wird, seien x und x_1 die Zusammenpressungen der Federn a und b, K die zwischen den Federn herrschende Pressung, so dürfen wir, dem Erfahrungssatz zufolge, dass die zusammenpressende Kraft der Zusammenpressung proportional ist, setzen:

$$K = \lambda x = \lambda_1 x_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wobei λ und λ_1 die Kräfte bezeichnen, welche erforderlich sind, um die Federn um eine Längeneinheit zusammen zu pressen. Da wir annehmen, dass die Federn massenlos sind, so sind die Differenzialgleichungen der Bewegung der Massen A und B

$$\frac{d u}{d t} = -2 \frac{K}{M}, \quad \frac{d u_1}{d t} = +2 \frac{K}{M_1} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

wobei $d u$ und $d u_1$ die Geschwindigkeitsänderungen bezeichnen, welche in dem auf t folgenden Zeitelement $d t$ in den beiden Massen eintreten.

Die Bedingung, dass sich die Federn während des Stosses mit ihren Enden stets berühren, ist, wie man sich leicht überzeugt

$$u_1 = u - \frac{d x}{d t} - \frac{d x_1}{d t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt nun die Lösung der Aufgabe. Setzt man in (2) für K seinen Werth λx und nimmt sodann die Differenz, so findet man:

$$\frac{d u_1}{d t} - \frac{d u}{d t} = 2 \lambda x \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M_1}\right) \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Aus (1) folgt $\lambda \frac{d x}{d t} = \lambda_1 \frac{d x_1}{d t}$ und wenn man den hieraus folgenden Werth von $\frac{d x_1}{d t} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{d x}{d t}$ in (3) einführt:

$$u_1 - u = -\frac{d x}{d t}\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)$$

Differenzirt man diese Gleichungen nach t, so wird

$$\frac{d u_1}{d t} - \frac{d u}{d t} = -\frac{d x^2}{d t^2}\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

und nun folgt aus 1 und 5

$$\frac{d^2 x}{d t^2}\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) + 2 \lambda \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M_1}\right) x = o.$$

Setzt man der Körper wegen

$$\frac{2 \lambda \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M_1}\right)}{1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}} = 2 \frac{\lambda \lambda_1}{M M_1} \frac{M + M_1}{\lambda + \lambda_1} = m^2 \quad \ldots \quad (6)$$

so wird diese Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + m^2 x = o.$$

Das Integral derselben ist:

$$x = \mathfrak{A} \sin. m t + \mathfrak{B} \cos. m t$$

wobei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die beiden Constanten der Integration bezeichnen, die nun auf folgende Art bestimmt werden. Für $t = o$ ist $x = o$, demnach $\mathfrak{B} = o$, also:

$$x = \mathfrak{A} \sin. m t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

und weil wegen (1) $x_1 = \frac{\lambda}{\lambda_1} x$ ist:

$$x_1 = \mathfrak{A} \frac{\lambda}{\lambda_1} \sin. m t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Differenziation nach t und nachherige Addition:

$$\frac{d x}{d t} + \frac{d x_1}{d t} = \mathfrak{A} m \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \mathrm{Cos.}\, m t$$

und wenn man diese Summe in (3) einführt, erhält man:

$$u_1 - u = -\mathfrak{A} m \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \mathrm{Cos.}\, m t.$$

Nun ist aber für $t = o$, $u = V$, $u_1 = V_1$, demnach

$$V_1 - V = -\mathfrak{A} m \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)$$

folglich ergibt sich für die Constante $\mathfrak{A}$ der Werth:

$$\mathfrak{A} = \frac{V - V_1}{m\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)}$$

Die Werthe von x und x_1 werden nun:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{V - V_1}{m\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)} \sin. m t \\ x_1 &= \frac{\frac{\lambda}{\lambda_1}\left(V - V_1\right)}{m\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)} \sin. m t \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Führt man diesen Werth in die Gleichungen

$$\frac{d u}{d t} = -2 \frac{\lambda}{M} x, \quad \frac{d u_1}{d t} = +\frac{2 \lambda}{M_1} x$$

ein, so findet man:

$$\frac{du}{dt} = -2\frac{\lambda}{M}\frac{V - V_1}{m\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)}\sin.\, m t$$

$$\frac{du_1}{dt} = +2\frac{\lambda}{M_1}\frac{V - V_1}{m\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)}\sin.\, m t$$

und hieraus folgt durch Integration

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{2\lambda}{M}\frac{V - V_1}{m^2\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)}\cos.\, m t + \text{Constant} \\ u_1 &= -\frac{2\lambda}{M_1}\frac{V - V_1}{m^2\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)}\cos.\, m t + \text{Const.} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (10)$$

Es ist aber für $t = o$, $u = V$, $u_1 = V_1$ demnach:

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{2\lambda}{M}\frac{V - V_1}{m^2\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)} + \text{Const.} \\ V_1 &= -\frac{2\lambda}{M_1}\frac{V - V_1}{m^2\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)} + \text{Const.} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (11)$$

aus 10 und 11 folgt durch Subtraktion:

$$V - u = \frac{2\lambda}{M}\frac{V - V_1}{m^2\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)}(1 - \cos.\, m t).$$

$$u_1 - V_1 = \frac{2\lambda}{M_1}\frac{V - V_1}{m^2\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)}(1 - \cos.\, m t).$$

Nun ist aber wegen (6) $m^2\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_1}\right) = 2\lambda\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M_1}\right)$ und somit findet man endlich:

$$\left.\begin{aligned} V - u &= \frac{M_1}{M + M_1}(V - V_1)\left\{1 - \cos.\, m t\right\} \\ u_1 - V_1 &= \frac{M}{M + M_1}(V - V_1)\left\{1 - \cos.\, m t\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \; (12)$$

Die Compressionen x und x_1 der Federn erreichen ein Maximum, wenn zuerst sin. $m t$ seinen grössten Werth erhält. Nennt man die Zeit, nach welcher dies eintritt $\triangle$, so muss sein: $m \triangle = \frac{\pi}{2}$ man hat demnach:

$$\triangle = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\frac{M M_1}{M + M_1}\frac{\lambda+\lambda_1}{\lambda\lambda_1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

für $t = \triangle = \frac{\pi}{2}\frac{1}{m}$ wird aber cos. $m t = o$. Setzt man in (12) cos. $m t = o$, so findet man für u und u_1 gleiche Werthe, nämlich den Werth von C, den wir früher gefunden haben.

$$u = u_1 = C = \frac{M V + M V_1}{M + M_1} \quad . \; . \; . \; . \; (14)$$

Diese grössten Zusammenpressungen sind, vermöge (9):

$$\left.\begin{aligned} &\text{für den Körper A) } \xi = \frac{V - V_1}{m\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)} \\ &\text{für den Körper B) } \xi_1 = \frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{V - V_1}{m\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (15)$$

Wenn sich die Federn wiederum ausdehnen können, so verschwinden die Zusammenpressungen, wenn sin. $m t = o$, d. h. wenn $m t = \pi$ oder $t = \frac{\pi}{m} = 2\triangle$ wird, und dann ist der Stoss zu Ende, weil wir annehmen, dass die Federenden nicht verbunden sind. Wir erhalten demnach für die Dauer des Stosses den Werth

$$\pi\sqrt{\frac{1}{2}\frac{M M_1}{M + M_1}\frac{\lambda+\lambda_1}{\lambda\lambda_1}} \quad . \; . \; . \; . \; (16)$$

und wenn wir wiederum, wie es früher geschehen ist, durch W und W_1 die Geschwindigkeiten der Massen M und M_1 nach dem Stoss bezeichnen, so folgen diese Werthe von W und W_1, wenn in den Gleichungen (12) $m t = \pi$, mithin cos. $m t = -1$ gesetzt wird. Man findet:

$$\left.\begin{aligned} W &= V - \frac{M_1}{M + M_1}(V - V_1) \\ W_1 &= V_1 + \frac{M}{M + M_1}(V - V_1) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (17)$$

und diese Werthe stimmen vollkommen mit den früher gefundenen überein.

Der mittlere Werth des Druckes zwischen den Federn während des Stosses ist:

$$\frac{\int_0^{\xi} K\, d\, x}{\xi} = \frac{\int_0^{\xi} \lambda\, x\, d\, x}{\xi} = \frac{1}{2}\lambda\,\xi$$

oder wenn man für ξ aus (15) seinen Werth setzt:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda (V - V_1)}{m\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)}$$

und wenn man auch für m seinen Werth aus (5_1) substituirt:

$$\frac{(V - V_1)}{2\sqrt{2\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_1}\right)\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M_1}\right)}} \quad . \quad . \quad (18)$$

Aus (16) ersieht man, dass die Dauer des Stosses dann klein ist, wenn die Massen klein und die Federn schwer zusammendrückbar sind. Aus (18) folgt, dass die mittlere Pressung zwischen den Federn klein ausfällt, wenn die Massen klein und wenn die Federn leicht zusammendrückbar sind. Die Dauer des Stosses ist ferner unabhängig von der initialen Geschwindigkeit, wo hingegen die mittlere Pressung der Differenz der initialen Geschwindigkeit, oder allgemein ausgedrückt, der relativen Geschwindigkeit der Massen vor dem Stoss proportional ist.

58) *Nützliche und schädliche Wirkungen des Stosses.* Nützlich und schädlich bezieht sich auf Zwecke, die wir zu erzielen beabsichtigen. Eine Sache ist nützlich oder schädlich, je nachdem sie die Erreichung eines Zweckes befördert oder der Erreichung eines Zweckes hinderlich ist. Der Stoss ist in vielen Fällen sehr nützlich, in andern schädlich. Er ist nützlich, wenn es sich darum handelt, einen sehr bedeutenden Widerstand durch einen sehr kleinen Weg zu überwinden, oder wenn eine Körpertheilung hervorgebracht werden soll; der Stoss ist dagegen schädlich, wenn eine Wirkungsgrösse von einem Ort nach einem andern durch eine Körpergliederung übertragen werden soll, und zwar ohne merkliche Schwächung des ursprünglichen Werthes.

Wenn ein eiserner Nagel in ein Brett, oder wenn ein hölzerner Pfahl in die Erde eingetrieben werden soll, bedient man sich bekanntlich immer des Stosses. Wollte man einen Nagel in ein Brett hineindrücken, so wären hierzu nicht unbedeutende Vorkehrungen nothwendig, denn der Widerstand, welcher dabei überwunden werden muss, ist, bei einem etwas starken Nagel, schon so gross, dass ihn die unbewaffnete Hand nicht überwältigen kann. Einige mit der Hand geführte Hammerschläge führen dagegen ganz leicht zum Ziele, weil der Druck, welcher mit einem solchen Hammerschlag, wenn auch nur durch einen geringen Weg, hervorgebracht werden kann, sehr bedeutend ist. Das Eintreiben eines Pfahles in die Erde ohne Anwendung von Schlägen ist so zu sagen eine praktische Unmöglichkeit, denn der Widerstand, welcher dabei über-

wunden werden muss, ist ganz ausserordentlich gross. Wollte man einen Pfahl auf irgend eine Weise in die Erde hineindrücken, so würden dazu ganz riesenmässige Vorkehrungen und Veranstaltungen nothwendig werden; man müsste entweder auf den Pfahl eine Last legen, die ungefähr dem Gewicht eines Hausbaues gleich käme, oder man müsste, wenn man das Eintreiben vermittelst einer Presse bewerkstelligen wollte, diese Presse mit dem Erdboden zuerst so stark befestigen, wie es der Pfahl ist, wenn er einmal in der Erde steckt, dabei setzt man also voraus, dass das, was erst entstehen soll, bereits vorhanden sei. Die Wirkung aller Angriffswaffen, des Degens, des Säbels, der Gewehre und der grossen Geschütze beruhen sämmtlich auf dem Stoss. Der Stoss einer mit 500 Meter Geschwindigkeit einschlagenden Vierundzwanzigpfünder-Kanonenkugel hat eine ausserordentlich mächtige Wirkung.

Beispiele mannigfaltiger Art von der Nützlichkeit des Stosses finden sich bei der Bearbeitung starrer und fester Materialien, und insbesondere bei der Bearbeitung des Eisens; das Schmieden, Meisseln, Feilen etc. geschieht durch wiederholte Stösse, die gegen das Metall geführt werden. Das Billardspiel beruht ganz auf den Wirkungen des Stosses elastischer Körper. Die Ballbewegungen, welche ein gewandter Spieler auf einem genauen Billard hervorzubringen weiss, sind äusserst mannigfaltig und oft überraschend, insbesondere durch die Reinheit und Zierlichkeit, mit welcher sie erfolgen. Die Gesetze des Stosses elastischer Körper treten dabei mit einer Genauigkeit und Bestimmtheit hervor, dass dieses Spiel in der That für das richtige Verständniss der mannigfaltigen Massenwirkungen sehr belehrend ist.

Vortreffliche Dienste leistet der Stoss, wenn ein starrer Körper getheilt werden soll. Das Zersprengen eines Steinblockes vermittelst mehrerer Eisenkeile, die in eine in den Stein gemeisselte, geradlinige Furche gesetzt, und dann mit mässig starken Schlägen angetrieben werden, erfordert eine ungemein kleine Wirkungsgrösse, wenn man sie mit jener vergleicht, die erforderlich wäre, um den Stein durch eine nur durch Druck wirkende Belastung zu zerbrechen. Dies erklärt sich dadurch, dass beim Zersprengen mit Keilen nur allein die Körpertheilchen, welche in der Sprungfläche liegen, erschüttert zu werden brauchen, um eine Trennung derselben zu bewirken, während die ganze übrige Masse des Steinblocks unverändert bleiben kann, wo hingegen, wenn ein Zerbrechen durch Belastung hervorgebracht werden soll, in allen Theilen der Steinmasse Ausdehnungen oder Zusammenpressungen hervorgebracht werden müssen, von denen nur diejenigen, welche in der Nähe der Brechungsebene stattfinden, zweckdienlich sind. Der Vortheil des Zersprengens beruht also darauf, dass eine gewisse lebendige Kraft gerade nur auf diejenigen Körpertheile wirksam gemacht wird, die von einander getrennt werden sollen, wo hingegen beim Zerbrechen durch Druck der ganze Körper unnöthiger Weise deformirt wird.

Um eine Trennung der Körpertheile durch Stoss zu bewirken, kommt es nicht allein auf die Grösse der lebendigen Kraft an, die in dem stossenden Körper im Moment des Stosses enthalten ist, sondern auch auf seine Geschwindigkeit. Es kommt nämlich Alles darauf an, dass eine gewisse lebendige Kraft mit solcher Schnelligkeit nach der Ebene, in der der Bruch erfolgen soll, durch den Körper gejagt werde, dass daselbst schon eine Trennung der Theile bewirkt wird, bevor in den übrigen Theilen des Körpers eine Veränderung eintreten kann, und dies kann nur durch einen Schnellschlag bewirkt werden, denn bei einem langsamen Massenschlag entsteht immer nur eine allgemeine Erschütterung in allen Theilen des Körpers, ohne irgend wo eine Heftigkeit zu erreichen, wie es die Trennung der Körpertheilchen erfordert. Wenn also die lebendigen Kräfte zweier Massen gleich gross sind, so folgt daraus noch nicht, dass sie unter allen Umständen gleich vortheilhafte Wirkungen hervorbringen werden, weil der Erfolg nicht blos von der Grösse der Wirkungen, sondern auch davon abhängt, dass sie an dem Ort thätig sei, wo es dem Zwecke entspricht. Zwei gleich schwere und gleich schnelle Kanonenkugeln vermögen wohl gleich viel zu leisten; wenn aber die eine derselben ihr Ziel trifft, die andere dagegen ihr Ziel verfehlt, so besteht in dem Erfolg ein wesentlicher Unterschied.

So wie der Stoss überall nützlich ist, wo es sich um Formänderungen oder Zertheilung und Zerstörung handelt, so ist derselbe im Gegentheil immer schädlich, wenn etwas erhalten werden soll. Der Stoss wirkt jederzeit zerstörend, nie erhaltend. Wir haben gesehen, dass bei dem Stosse der elastischen Körper die Summe der lebendigen Kräfte nach dem Stosse kleiner ist, als vor dem Stosse, wenn also eine aus unelastischen oder aus unvollkommen elastischen Körpern zusammengesetzte Masse eine Wirkung stossweise fortpflanzt, so geht immer ein Theil dieser Wirkung für die Fortbewegung der Masse verloren, und dadurch entsteht in zweifacher Hinsicht ein Verlust, indem die verlorne Wirkung ausserdem, dass sie für den Zweck nicht thätig sein kann, noch überdies auf Abnutzung und Zerstörung der Massen hinwirkt.

Wenn eine Maschine ohne Stoss thätig ist, erhält sich in derselben die lebendige Kraft der Masse, und es ist zu ihrem Fortgange nur diejenige Wirkung aufzuwenden, welche der Ueberwindung der Widerstände entspricht. Wirkt dagegen eine Maschine mit Stoss, so wird dadurch die lebendige Kraft der Massen fortwährend geschwächt, und die Massen müssen dann fort und fort angetrieben werden, wenn die Thätigkeit der Maschine gleichmässig fortdauern soll. Hieraus sieht man, wie wichtig es für die Verwendung der Betriebskräfte und auch

für die Dauerhaftigkeit einer Maschine ist, dass ihre Bewegungen sanft und weich und ohne Stoss vor sich gehen.

59) *Schutzmittel gegen die Wirkungen des Stosses.* Es gibt im Allgemeinen zwei Mittel, durch welche man sich gegen die schädlichen Wirkungen des Stosses schützen kann, nämlich Massen und Elastizität. Versieht man einen Körper A, der mit andern Körpern B, C, D . . . zusammenhängt, mit einer grossen Masse M, so schützt diese den Körper B, C, D . . . gegen die Wirkungen der Stösse, welche auf den Körper A ausgeübt werden, denn die Masse M fängt dann so zu sagen die Wirkung des Stosses auf, und theilt die empfangene Wirkung nur mit geringer Geschwindigkeit den Körpern B, C, D . . . mit. Dieses Mittels bedienen sich unter andern die Schuhmacher, wenn sie während der Arbeit das Leder dicht klopfen wollen; sie legen einen schweren Stein auf das Knie und das Leder darauf. Sehr wichtig ist aber dieses Mittel für die Erhaltung der Maschinen, die durch Stoss wirken müssen, und man hat da in der Regel gerade den Theil, gegen welchen der Stoss erfolgt, massenhaft zu machen, um so andere Bestandtheile zu schützen. Das zweite, sehr wirksame Mittel, um sich gegen die schädlichen Wirkungen des Stosses zu schützen, besteht in der Anwendung von elastischen Körpern; denn wir haben gesehen, dass bei dem Stosse von elastischen Körpern keine lebendige Kraft verloren geht, und dass die während des Stosses zwischen den Körpern eintretende Pressung (Gleichung 18) verändert wird, wenn einer oder der andere oder wenn beide Körper nachgiebig elastisch sind. Dieses Mittel wird vorzugsweise mit Vortheil bei der Aufstellung und Fundamentirung der zur Bearbeitung des Eisens dienenden massenhaften Maschinen, und namentlich bei grossen Hammer- und Walzwerken angewendet. Bei den schweren Dampfhämmern, welche gegenwärtig in den grossen Eisenschmieden und Maschinenwerkstätten angewendet werden, wird ein Ambos, der ungefähr so schwer ist, als der Schlagblock, mit einem Grundwerk verbunden, das aus 5 bis 6 Schichten von übereinander gelegten starken eichenen Balken besteht, und das auf Quaderblöcken aufgeschichtet wird, die in den Fundamentgrund gelegt werden. Die Masse des Ambosblockes einerseits und die Elastizität dieser Holzmasse andererseits, verleihen dieser Aufstellung eine Solidität und Sicherheit, welche durch andere Mittel wohl nicht zu erreichen wäre.

Eine andere Anwendung der Elastizität als Schutzmittel gegen die Wirkungen der Stösse findet sich bei den Strassen- und Eisenbahnwägen. Der grösste Theil der Last eines Wagens, mit Einschluss der Nutzlast, um deren Fortschaffung es sich handelt, liegt bekanntlich auf Stahlfedern, und dadurch werden die Erschütterungen, die sonst eintreten müssten, bedeutend gemildert, und grösstentheils in Oscillationen umgewandelt. Die Vortheile, welche hier die Federn gewähren, sind von mannigfaltiger Art. 1) Zunächst wird der fortzuschaffende Gegenstand gegen Erschütterungen geschützt, die für Personen ganz unausstehlich wären, wenn sie nicht durch Federn so sehr gemildert würden. 2) Sodann können alle Theile der Wagen, und insbesondere die Räder und ihre Axen leicht gebaut werden. 3) Der Bau der Wagen und jener der Bahn wird dadurch bedeutend geschont. 4) Es wird dadurch auch die Zugkraft vermindert, weil sich vermittelst der Federn die lebendige Kraft der ganz enormen Masse eines Wagenzuges ziemlich gut erhält, so dass also, wenn einmal die Bewegung eingeleitet ist, während der Fahrt grösstentheils nur noch die Reibungswiderstände zu überwinden sind, wo hingegen, wenn keine Federn vorhanden wären, ein fortwährender Nachtrieb nothwendig wäre, um die lebendigen Kräfte, die in jedem Augenblick geschwächt würden, wiederum zu restauriren.

60) *Das Einrammen der Pfähle.* Das Einrammen der Pfähle geschieht bekanntlich durch schwere Blöcke von Eisen, die man von einer gewissen Höhe auf die Pfahlköpfe herabfallen lässt. Betrachtet man den Pfahl als einen unelastischen, aber zusammendrückbaren Körper, und vernachlässigt die Vibrationen, welche durch den Schlag sowohl im Block, als im Pfahl entstehen, so kann man die Wirkungen eines einzelnen Schlages auf folgende Weise berechnen.

Der Block besitzt in dem Moment, wenn er den Pfahl erreicht, eine gewisse lebendige Kraft, diese wird aber zunächst durch den Stoss geschwächt. Mit der noch übrig bleibenden lebendigen Kraft wirkt nun der Block auf den Pfahl, und comprimirt denselben so lange, bis die Pressung zwischen Pfahl und Block so gross geworden ist, als der Widerstand, den das Erdreich dem Eindringen des Pfahls entgegensetzt. Ist dieser Moment eingetreten, so sinkt der Pfahl sammt dem Block in die Erde so lange ein, bis alle lebendige Kraft erschöpft ist, und während dies geschieht, findet weder eine Ausdehnung, noch eine Zusammenpressung des Pfahls statt. Während der Pfahl zusammengedrückt wird, so wie auch während er in die Erde einsinkt, entwickelt das Gewicht des Blockes eine gewisse Wirkung, welche in Verbindung mit der lebendigen Kraft, die nach dem Aufschlagen des Blockes noch vorhanden ist, theils das Comprimiren, theils das Eindringen des Pfahls in die Erde hervorbringt.

Nennt man

Q das Gewicht des Rammblockes,
q das Gewicht des Pfahles,
h die Fallhöhe des Blockes,
a den Querschnitt des Pfahles,

ε den Modulus der Elastizität des Holzes, aus welchem der Pfahl besteht,
l die Länge des Pfahls,
s das Eindringen des Pfahls in die Erde durch den Schlag,
$a R$ den Widerstand, den das Erdreich dem Eindringen des Pfahls entgegen setzt,

so lassen sich die verschiedenen Wirkungen, welche bei einem Schlag vorkommen, auf folgende Weise berechnen:

Die Geschwindigkeit, mit welcher der Block den Pfahl erreicht, ist $\sqrt{2gh}$, und dessen lebendige Kraft $\frac{Q}{2g}(\sqrt{2gh})^2 = Qh$. Durch den Schlag geht eine lebendige Kraft verloren, welche nach Nr. 56 gleich $\frac{1}{2g}\;\frac{Qq}{Q+q}\;(\sqrt{2gh})^2 = Qh\;\frac{q}{Q+q}$ ist. Nach dem Schlag ist also nur noch eine lebendige Kraft $Qh - Qh\frac{q}{Q+q} = Qh\;\frac{Q}{Q+g}$ vorhanden. Die Zusammendrückung, welche der Pfahl erleidet, ist nach dem Gesetz für die Zusammendrückung von Stäben $\frac{lR}{\varepsilon}$ und die Wirkungsgrösse, welche diesem Vorgang entspricht, $\frac{1}{2}\frac{lR}{\varepsilon}$ $aR = \frac{1}{2}\;\frac{alR^2}{\varepsilon}$. Man hat also nun:

1) Lebendige Kraft, welche in der Masse nach dem Schlag noch vorhanden ist . . . . $Qh\frac{Q}{Q+q}$

2) Wirkung, welche das Gewicht des Blockes entwickelt, während derselbe durch $\frac{lR}{\varepsilon} + s$ niedersinkt . . . . $Q\left(\frac{lR}{\varepsilon} + s\right)$

3) Wirkung, welche durch die Senkung des Schwerpunktes des Pfahles entsteht . . . $\frac{1}{2}\frac{lR}{\varepsilon}q + sq$

4) Wirkung, welche durch die Zusammendrückung des Pfahles erschöpft wird . . . . $\frac{1}{2}\frac{alR^2}{\varepsilon}$

5) Wirkung, welche durch das Eindringen des Pfahles in das Erdreich erschöpft wird . . . . . . aRs

Da nun die drei ersten Wirkungen den zwei letzten gleich sein müssen, so hat man:

$$Q\,h\,\frac{Q}{Q+q}+Q\left(\frac{l\,R}{\varepsilon}+s\right)+\frac{1}{2}\,\frac{l\,R}{\varepsilon}\,q+s\,q=$$
$$\frac{1}{2}\,\frac{a\,l\,R^2}{\varepsilon}+a\,R\,s$$

und daraus folgt:

$$a\,R=a\left\{-\frac{s\,\varepsilon}{l}+\left(Q+\frac{1}{2}\,q\right)\frac{1}{a}+\sqrt{\frac{2\,\varepsilon}{a\,l}\left[\frac{Q^2}{Q+q}h+(Q+q)\,s\right]+\left[\frac{s\,\varepsilon}{l}-\left(Q+\frac{1}{2}\,q\right)\frac{1}{a}\right]^2}\right\} \quad (1)$$

oder auch:

$$s=\frac{Q\,h\frac{Q}{Q+q}+Q\frac{l\,R}{\varepsilon}+q\frac{1}{2}\,\frac{l\,R}{\varepsilon}-\frac{1}{2}\,\frac{a\,l}{\varepsilon}\,R^2}{a\,R-Q-q}$$

oder

$$s=\frac{Q\,h\frac{Q}{Q+q}+\frac{l\,R}{\varepsilon}\left(Q+\frac{1}{2}\,q-\frac{1}{2}\,a\,R\right)}{a\,R-Q-q} \quad (2)$$

Hat man beobachtet, um wie viel ein Pfahl durch einen Schlag in die Erde eindringt, so kann man vermittelst des Ausdruckes (1) den gesammten Widerstand berechnen, mit welchem das Erdreich dem Eindringen des Pfahles entgegen wirkt, und dieser Werth von $a\,R$ ist zugleich auch das Tragungsvermögen des Pfahles, d. h. es ist die grösste Last, welche der Pfahl, ohne in die Erde einzusinken, tragen kann.

Diese Gleichungen (1) und (2) haben jedoch nur dann Giltigkeit, wenn der Pfahl in der That eindringt, so wie auch noch in dem Falle, wenn zwar ein Eindringen nicht erfolgt, wenn jedoch der Pfahl so stark zusammengepresst wird, dass gerade in dem Moment, wenn die lebendige Kraft des Blockes erschöpft ist, die Zusammendrückung $\frac{l\,R}{\varepsilon}$ beträgt. Wenn dagegen die lebendige Kraft des Blockes bereits erschöpft wird, nachdem die Zusammendrückung um eine Länge x, die kleiner als $\frac{l\,R}{\varepsilon}$ ist, stattgefunden hat, so hat man für die Wirkungsgrösse, welche dieser Zusammendrückung entspricht: $\frac{1}{2}\,\frac{a\,\varepsilon}{l}\,x^2$, und dann ist zu setzen:

$$Q\,h\,\frac{Q}{Q+q}+Q\,(x+s)+q\left(\frac{1}{2}\,x+s\right)=\frac{1}{2}\,\frac{a\,\varepsilon}{l}\,x^2$$

woraus folgt:

$$x=+\frac{1}{a\,\varepsilon}\left(Q+\frac{1}{2}\,q\right)+\sqrt{Q\,h\frac{Q}{Q+g}+s\,(Q+q)+\left[\frac{1}{a\,\varepsilon}(Q+\frac{1}{2}\,q)\right]^2} \quad . (3)$$

Damit der Pfahl wirklich eindringt, muss die Gleichung (2) für s einen positiven Werth geben; es ist also die Bedingung, dass in der That ein Eindringen des Pfahls statt findet:

$$Q\,h\,.\,\frac{Q}{Q+q}+\frac{l\,R}{\varepsilon}\left(Q+\frac{1}{2}\,q\right)>\frac{1}{2}\,\frac{a\,l\,R^2}{\varepsilon}$$

oder:

$$Q^2\left\{h+\frac{l\,R}{\varepsilon}\right\}-Q\left\{a\,R-3\,q\right\}\frac{1}{2}\,\frac{l\,R}{\varepsilon}>\frac{1}{2}\,\frac{l\,R}{\varepsilon}\,p\,[a\,R-q]$$

Wir werden keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir in diesem Ausdruck $\frac{l\,R}{\varepsilon}$ gegen h, und q so wie $3\,q$ gegen $a\,R$ vernachlässigen, denn $\frac{l\,R}{\varepsilon}$ ist die Zusammendrückung des Pfahls, die wenigstens in allen praktischen Fälllen gegen die Fallhöhe sehr klein sein wird, und das Gewicht q des Pfahles, ja selbst das dreifache Gewicht desselben, ist auch sehr klein gegen den Widerstand $a\,R$, den das Erdreich dem Eindringen des Pfahls entgegegensetzt. Unter dieser Voraussetzung folgt aber aus dem letzten Ausdruck:

$$h\,Q>\frac{1}{4}\,\frac{a\,l\,R^2}{\varepsilon}\left\{1+\sqrt{1+\frac{8\,\varepsilon\,h\,q}{a\,l\,R^2}}\right\}$$

Nennt man γ das Gewicht der Kubikeinheit des Pfahlholzes, so ist $q=a\,l\,\gamma$, und dann wird:

$$h\,Q>\frac{R^2}{4\,\varepsilon\,\gamma}\left\{1+\sqrt{1+\frac{8\,\varepsilon\,h\,\gamma}{R^2}}\right\}q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Wenn also ein Eindringen des Pfahles stattfinden soll, so muss die lebendige Kraft $Q\,h$ des Blockes im Moment, wenn er auf den Pfahl schlägt, grösser sein, als der Werth, welchen der Ausdruck rechter Hand des Zeichens $>$ gibt.

Nach dem Schlag dehnt sich der Pfahl wiederum aus und wirft den Block zurück. Dies geschieht durch diejenige Wirkungsgrösse, welche auf die Compression des Pfahles verwendet wurde. Es erfolgt nun noch eine Reihe von Schlägen, die aber immer schwächer und schwächer, und zuletzt ganz verschwindend klein werden müssen, indem bei jedem einzelnen dieser Schläge etwas an lebendiger Kraft verloren geht.

Ist z. B. W die Wirkungsgrösse, welche beim ersten Hauptschlag auf Compression des Pfahles verwendet wurde, so wird der Block nach dem ersten Schlag auf eine Höhe $\frac{W}{Q}$ emporgeworfen, fällt dann wiederum nieder, und verliert bei dem zweiten Schlag eine lebendige Kraft $\frac{1}{2\,g}\,\frac{Q\,q}{Q+q}\left(\sqrt{2\,g\,\frac{W}{Q}}\right)^2 = \cdot\, W\,\frac{q}{Q+q}$, besitzt also nach dem Schlag nur noch eine lebendige Kraft: $W - W\frac{q}{Q+q} = W\cdot\frac{Q}{Q+q}$

so dass also allgemein die lebendige Kraft, welche in dem Block nach dem n^{ten} Schlag noch vorhanden ist, durch

$$W\cdot\left(\frac{Q}{Q+q}\right)^{n-1} \;\ldots\ldots\ldots\quad (5)$$

ausgedrückt werden kann. Es ist klar, dass bei keinem dieser auf den Hauptschlag folgenden schwächeren Schläge ein Eindringen des Pfahles in die Erde statt finden kann. Wenn der Pfahl auch beim ersten Hauptschlag nicht eindrang, ist $W = Q\,h\,\frac{Q}{Q+q}$ zu setzen, und dann ist die Wirkung, welche in dem Block nach dem n^{ten} Schlag (den Hauptschlag als den ersten gerechnet) noch enthalten ist:

$$Q\,h\left(\frac{Q}{q+Q}\right)^{n} \;\ldots\ldots\ldots\quad (6)$$

Aus (4) ersieht man, dass die Intensität Q h des Schlages, welche erforderlich ist, damit ein Pfahl in die Erde eindringt, dem Gewicht desselben proportional ist, und überdies noch von dem Widerstand R des Erdreiches und von der Elastizitätsbeschaffenheit des Pfahlmaterials abhängt. Um also grosse schwere Pfähle in sehr festen dichten Boden einzutreiben, muss man mächtige Schläge anwenden; dagegen können kleine Pfähle in nachgiebigem Boden mit leichten Schlägen eingetrieben werden.

Rotirende Bewegung eines starren Körpers.

61) *Lebendige Kraft eines rotirenden Körpers.* Die lebendige Kraft eines in Bewegung befindlichen Körpers ist unter allen Umständen gleich der Summe der lebendigen Kraft aller Theile, aus welchen der Körper besteht. Haben alle Theile eines Körpers gleiche Geschwindigkeiten, wie dies bei einer fortschreitenden Bewegung der Fall ist, so

findet man die lebendige Kraft des ganzen Körpers, d. h. die Summe der lebendigen Kräfte aller Theile, einfach durch das Produkt aus der Masse in das Quadrat der allen Punkten gemeinschaftlichen Geschwindigkeit. Dreht sich dagegen ein Körper um eine Axe, so haben die in verschiedenen Entfernungen von der Axe befindlichen Atome verschiedene Geschwindigkeiten; die Berechnung der totalen lebendigen Kraft eines solchen Körpers kann daher nicht nach der Regel geschehen, die für einen fortschreitenden Körper gilt, sondern muss durch ein besonderes Verfahren bewerkstelligt werden, mit dessen Herleitung wir uns nun beschäftigen wollen.

Es seien $m_1\ m_2\ m_3\ \ldots$ die Massen der Atome des Körpers, $r_1\ r_2\ r_3\ \ldots$ ihre Entfernungen von der Drehungsaxe, ω die Winkelgeschwindigkeit, mit der die Drehung des Körpers in einem gewissen Zeitaugenblick der Bewegung vor sich geht. Dies vorausgesetzt, so sind $r_1\,\omega$, $r_1\,\omega$, $r_2\,\omega$, $r_3\,\omega\ \ldots$ die absoluten Geschwindigkeiten und $m_1\,r_1^2\,\omega^2$, $m_2\,r_2^2\,\omega^2$, $m_2\,r_2^2\,\omega^2$, $m_3\,r_3^2\,\omega^2\ \ldots$ die lebendigen Kräfte der Atome. Die lebendige Kraft L des ganzen Körpers ist demnach:

$$L = m_1\,r_1^2\,\omega^2 + m_2\,r_2^2\,\omega^2 + m_3\,r_3^2\,\omega^2 +$$

oder

$$L = \omega^2\,(m_1\,r_1^2 + m_2\,r_2^2 + m_3\,r_4^2 + \ldots)$$

oder endlich $$L = \omega^2\,\Sigma\,m\,r^2,$$

wobei Σ das übliche Summenzeichen bedeutet.

Die lebendige Kraft eines rotirenden Körpers wird also gefunden, wenn man das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit mit der Summe der Produkte aller Atommassen in die Quadrate ihrer Entfernung von der Drehungsaxe multiplizirt. Diese Produktensumme nennt man das Trägheitsmoment des Körpers.

Mit Beibehaltung dieser Benennung können wir den Satz aussprechen, dass die lebendige Kraft eines rotirenden Körpers durch das Produkt aus dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit in das Trägheitsmoment des Körpers gefunden wird.

Die Bedeutung dieses Momentes ergibt sich aus Folgendem:

Denkt man sich, dass in einem Raumpunkt, der von der Drehungsaxe um die Längeneinheit entfernt ist, oder dass in einem Kreis, dessen Mittelpunkt mit einem Punkt der Drehungsaxe zusammenfällt, dessen Ebene auf der Axe senkrecht steht, und dessen Halbmesser gleich der Längeneinheit ist; oder endlich, dass in der Oberfläche eines Kreiscylinders, dessen geometrische Axe mit der Drehungsaxe zusammenfällt, und dessen Halbmesser gleich der Längeneinheit ist, eine Masse μ von der Grösse $\Sigma\,m\,r^2$ concentrirt werden könnte, so hätten alle Punkte dieser

Masse eine Geschwindigkeit ω, die lebendige Kraft dieser Masse μ wäre demnach $\mu\ \omega^2$, oder (weil der Voraussetzung gemäss $\mu = \Sigma\, m r^2$ sein soll) $\omega^2\ \Sigma\, m r^2$. Das Trägheitsmoment eines Körpers kann also als eine ideale Masse angesehen werden, die, wenn sie statt der wirklichen Masse des rotirenden Körpers in eine Entfernung gleich der Längeneinheit von der Axe concentrirt würde, bei gleicher Winkelgeschwindigkeit eine eben so grosse lebendige Kraft in sich enthielte, wie der wirkliche Körper.

Man kann sich noch die Frage stellen, wie gross eine Masse M sein müsste, damit sie in einer Entfernung R von der Drehungsaxe in einem Punkt, in einem Kreis oder in einer Cylinderfläche concentrirt, bei gleicher Winkelgeschwindigkeit eine eben so grosse lebendige Kraft in sich enthielte, wie der wirkliche Körper? Dies wird offenbar der Fall sein, wenn das Trägheitsmoment $M R^2$ der idealen Masse so gross ist, als das Trägheitsmoment $\Sigma\, m r^2$ der realen Masse, d. h. wenn ist:

$$M R^2 = \Sigma\, m r^2$$

oder:

$$M = \frac{\Sigma\, m^2 r^2}{R^2}$$

Dieses Verfahren der Auffindung von idealen Massen, welche in gewissen Entfernungen von der Axe angebracht werden müssten, um die wirklichen Massen bei drehenden Bewegungen ersetzen zu können, nennt man die Reduktion der Massen, und diese Masse M nennt man diesem gemäss die auf die Entfernung R reduzirte Masse des wirklichen Körpers.

Es ist klar, dass der Einfluss, den das Beharrungsvermögen einer rotirenden Masse auf die Bewegung ausübt, nicht nach der Grösse der Massen, sondern nach ihrem Trägheitsmoment beurtheilt werden muss. Zwei Massen von sehr verschiedener Grösse werden, wenn denselben gleich grossen Trägheitsmomente entsprechen, ganz identische Wirkungen hervorzubringen im Stande sein. Es werden z. B. zwei Schwungräder, denen gleich grosse Trägheitsmomente entsprechen, vollkommen gleiche Dienste leisten. Es werden gleich grosse Wirkungsgrössen nothwendig sein, um diesen Schwungrädern gleiche Winkelgeschwindigkeiten mitzutheilen, und sie werden auch, wenn ihnen die gleichen Geschwindigkeiten durch Einwirkung von Gegenkräften oder von Widerständen entzogen werden, gleich grosse Wirkungsgrössen entwickeln.

Die wirkliche Berechnung der Trägheitsmomente verschiedener Körperformen ist in vielen wissenschaftlichen und praktischen Fragen sehr nützlich; wir werden uns daher auch in den folgenden Nummern mit derlei Berechnungen beschäftigen; für rein praktische Zwecke ist es aber

insbesondere sehr wichtig, dass man, ohne weitläufige Rechnungen, unmittelbar aus der Natur der Sache zu beurtheilen im Stande sei, ob und unter welchen Umständen das Trägheitsmoment eines Körpers gross oder klein ausfällt, und hierzu werden die nachstehenden Bemerkungen dienen können.

Das Trägheitsmoment eines Körpers ist eine Grösse, die von den Kräften und von dem Bewegungszustand nicht abhängt. Es richtet sich dagegen 1) nach der Grösse der Masse, 2) nach der Form der Körper, 3) nach der Entfernung seines Schwerpunkts von der Drehungsaxe, 4) nach der Lage des Körpers gegen die Drehungsaxe.

Nicht alle Theile des Körpers haben einen gleich grossen Einfluss auf den Werth des Trägheitsmoments, sondern der Einfluss eines Theilchens auf das Trägheitsmoment wächst im quadratischen Verhältniss seiner Entfernung von der Drehungsaxe. Einer schweren eisernen Welle wird daher ein kleines, einem mit leichten aber langen Armen versehenen Schwungrad wird dagegen ein grosses Trägheitsmoment entsprechen. Bei einem solchen Rade reduzirt sich das ganze Trägheitsmoment fast ganz auf jenes des Schwungringes, und da die Entfernungen aller Punkte eines solchen Schwungringes von der Axe beinahe gleich gross sind, so wird man, wenigstens annähernd, das Trägheitsmoment eines solchen Schwungrades finden, wenn man das Gewicht des Schwungringes mit dem Quadrat seines äussern Halbmessers multiplizirt Ein leichtes, aber grosses Schwungrad von 1000 Kilogrammen Gewicht und 2 Meter Halbmesser wird daher ein kleines, aber schweres von 4000 Kilogrammen Gewicht und 1 Meter Halbmesser vollkommen zu ersetzen im Stande sein.

Berechnung der Trägheitsmomente verschiedener Körperformen.

62) ***Trägheitsmoment eines Parallelepipedes*** in Bezug auf eine Drehungsaxe, die durch den Schwerpunkt geht, und mit einer seiner Seitenkanten parallel ist. Es sei (Fig. 12 Taf. III.) O der Mittelpunkt des Körpers, $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$ die durch O gehende mit der Kante h parallele Axe, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment berechnet werden soll, b h l die drei Dimensionen des Parallelepipedes, γ das Gewicht der Kubikeinheit des Materials, aus welchem der Körper besteht, $g = 9{\cdot}808$ die Beschleunigung durch die Schwere beim freien Fall der Körper, so ist zunächst, wenn der Körper homogen ist, $\frac{\gamma}{2\,g}$ die in der Kubikeinheit enthaltene Masse.

Beziehen wir die Lage der Punkte gegen O auf ein Coordinatensystem, das in O seinen Ursprung hat, und dessen Axen O x, O y, O z mit l, b, h parallel sind, so ist $\frac{\gamma}{2g}$ d x d y d z die Masse eines Körpertheilchens, dessen Entfernung von der Drehungsaxe 𝔄 𝔅 gleich $\sqrt{x^2 + y^2}$ ist. Das Trägheitsmoment dieses Theilchens ist demnach:

$$\frac{\gamma}{2g} \, dx \, dy \, dz \, (x^2 + y^2)$$

Das Trägheitsmoment des ganzen Körpers findet man nun durch Integration dieses Ausdruckes, und dabei sind die Grenzen

$$\text{für } x, -\frac{1}{2} l \text{ bis} + \frac{1}{2} l$$

$$\text{„ } y, -\frac{1}{2} b \text{ „ } + \frac{1}{2} b$$

$$\text{„ } z, -\frac{1}{2} h \text{ „ } + \frac{1}{2} h$$

Das Resultat dieser Integration ist:

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{\gamma}{2g} \, b, h, l \, . \, . \, (b^2 + l^2)$$

oder wenn man die Masse des Körpers bezeichnet:

$$\frac{1}{12} M (b^2 + l^2)$$

63) ***Trägheitsmoment eines massiven Cylinders*** in Bezug auf eine Axe, die mit seiner geometrischen Axe zusammenfällt.

Es sei Fig. 13 Taf. III. l die Länge, r der Halbmesser des Cylinders. Legt man durch die Axe zwei Ebenen, die einen Winkel dφ einschliessen, und schneidet ferner den Körper durch zwei concentrische Cylinder, deren Halbmesser gleich x und x + d x sind, so durchschneiden sich jene Ebenen und diese Cylinderflächen in Form eines unendlich dünnen Stabes, dessen Querschnitt x dφ d x, dessen dessen Länge = l, und dessen Entfernung von der Drehungsaxe x ist. Das Trägheitsmoment dieses Stabes ist demnach:

$$\frac{\gamma}{2g} \, x \, d\varphi \, dx \cdot x^2 = \frac{\gamma}{2g} x^3 \, d\varphi \cdot dx$$

Durch Integration dieses Ausdruckes innerhalb der Grenzen $\varphi = o$ bis $\varphi = 2\pi$ und $x = o$ bis $x = r$ findet man für das Trägheitsmoment des ganzen Cylinders den Ausdruck:

$$\frac{1}{2} M r^2$$

64) ***Trägheitsmoment eines hohlen Cylinders*** in Bezug auf dessen geometrische Axe.

Nennt man l die Länge, r_0 und r_1 den innern und den äussern Halbmesser des Cylinders, M dessen Masse, so ist hier wiederum wie im vorhergehenden Fall das Trägheitsmoment eines stabförmigen Elementes $\frac{\gamma}{2g} x^3 \, d x \, d\varphi$. Das Trägheitsmoment des ganzen Körpers ergibt sich durch Integration dieses Ausdruckes innerhalb der Grenzen $\varphi = o$ bis $\varphi = 2\pi$ und $x = r_0$ bis r_1. Berücksichtiget man, dass $\frac{\gamma}{2g} (r_1^2 - r_0^2)$ die Massen des Stabes bestimmt, so findet man für das zu suchende Moment folgenden Ausdruck:

$$\frac{1}{2} M (r_1^2 + r_0^2)$$

65) ***Das Trägheitsmoment eines hohlen oder massiven Cylinders*** in Bezug auf eine Axe, die durch den Schwerpunkt des Cylinders geht, aber auf der geometrischen Axe des Körpers senkrecht steht (Fig. 14, Fig. 15 Taf. III.).

Man scheide den Körper durch folgende Flächen: 1) durch zwei Ebenen, die auf der geometrischen Axe des Körpers senkrecht stehen, und von der Axe A Z um x und x + d x entfernt sind; 2) durch zwei concentrische Cylinder, deren Halbmesser y und y + d y sind, wobei $r_0 < y < r_1$; 3) durch zwei Ebenen, die durch die geometrische Axe des Körpers gelegt und gegen einander um einen Winkel dφ geneigt sind. Diese 6 Flächen bestimmen ein Körpervolumen von der Grösse

$$dx \, dy \, y \, d\varphi$$

dessen Abstand von der Axe A Z gleich

$$\sqrt{x^2 + y^2 \cos.^2 \varphi}$$

Das Trägheitsmoment der in diesem Körpervolumen enthaltenen Masse ist demnach:

$$\frac{\gamma}{2g} \, dx, \, dy, \, y \, d\varphi \; \{ x^2 + y^2 \cos.^2 \varphi \}$$

Durch Integration dieses Ausdruckes findet man das Trägheitsmoment des ganzen Körpers. Dabei sind die Integrationsgrenzen in Bezug auf x für den massiven, wie für den hohlen Körper $x = -\frac{1}{2} l$ bis $x = +\frac{1}{2} l$ in Bezug auf φ für beide Körger $\varphi = o$ bis $\varphi = 2\pi$ in Bezug auf y aber für die massiven Körper $y = o$ bis $y = r$, dagegen für die hohlen $y = r_0$ bis $y = r_1$. Man findet für das Trägheitsmoment des massiven Cylinders:

$$\frac{M}{12}\{l^2 + 3\,r^2\}$$

und für das Trägheitsmoment des hohlen Cylinders:

$$\frac{M}{12}\{l^2 + 3\,(r_1{}^2 + r_0{}^2)\}$$

wobei M die Masse des Körpers bezeichnet.

66) ***Beziehung zwischen den Trägheitsmomenten*** in Bezug auf zwei zu einander parallelen Axen.

Es sei Fig. 16 Taf. III. O der Schwerpunkt eines Körpers, a z eine durch denselben gehende Axe, A Z eine andere zu a z parallele Axe, μ und M die Trägheitsmomente des Körpers in Bezug auf die Axen a z und A Z, $OP = e$ die Distanz der Axen. Bezieht man die Lage eines Punktes m auf ein durch O als Anfangspunkt gewähltes rechtwinkliges Coordinatensystem, indem man die Verlängerung von O P als Axe der x, O z als Axe die z und eine darauf senkrecht stehende Linie O y als Axe der y nimmt, so sind die Entfernungen des Theilchens m von den Axen a z und A Z. $\sqrt{x^2 + y^2}$ und $\sqrt{(e + x)^2 + y^2}$, es ist demnach:

$$\mu = \Sigma\, m\,(x^2 + y^2)$$
$$M = \Sigma\, m\,([e + x]^2 + y^2)$$

Dieser letztere Ausdruck wird durch Entwicklung

$$M = e^2\,\Sigma\, m + \Sigma\, m\,(x^2 + y^2) + 2\,e\,\Sigma\, m\,x$$

Allein da der Annahme gemäss O der Schwerpunkt des Körpers ist, so hat man $\Sigma\, m\,x = o$ und dann wird, weil $\Sigma\, m = M$ gleich der Masse des Körpers und $\Sigma\, m\,(x^2 + y^2) = \mu$ ist:

$$M = \mu + M\,e^2$$

d. h. man findet das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Axe A Z, die zu einer durch den Schwerpunkt gehenden Axe a x parallel ist, wenn man zum Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Axe das Produkt aus der Masse des Körpers in das Quadrat der Distanz der Axen addirt.

Vermittelst dieser Regel kann man leicht die Trägheitsmomente der Körper in Bezug auf beliebige Axen berechnen, wenn jene in Bezug auf parallele durch den Schwerpunkt gehende Axen bekannt sind.

Wenn man in den Formeln für die Trägheitsmomente statt der Massen die Gewichte oder die Volumen substituirt, so erhält man die Trägheitsmomente durch Gewicht oder Volumen ausgedrückt.

Das als Gewicht oder als Volumen ausgedrückte Trägheitsmoment bestimmt das Gewicht oder das Volumen einer Masse, die in einer Entfernung gleich der Längeneinheit von der Axe angebracht, der wirklichen Masse äquivalent ist.

67) ***Wirkung einer Kraft, die einen Körper um eine Axe dreht.*** Nehmen wir an, ein Körper werde um eine Axe gedreht durch eine Kraft, deren Intensität unveränderlich ist und deren Richtung auf der Drehungsaxe des Körpers senkrecht steht, dieselbe aber nicht durchschneidet; auch soll die Kraft ihren Angriffspunkt und ihre Richtung gegen den Körper, während die Bewegung erfolgt, nicht ändern. Es sei Fig. 17, Taf. III., C die Drehungsaxe, A der Angriffspunkt der Kraft K. Erfolgt die Drehung um einen unendlich kleinen Winkel $A\,C\,A_1 = d\varphi$, so beschreibt der Angriffspunkt A den Bogen $\widehat{A\,A_1} = C\,A\,d\varphi$ und die Projection dieses Weges auf die Richtung der Kraft ist $\overline{Aa} = \overline{A\,A_1}$ cos. $\alpha = \overline{CA}$ cos $\alpha\, d\varphi$ Fällt man von C aus auf die Richtung der Kraft den Perpendikel $\overline{C\,B} = p$, so ist $\angle\ BCA = \alpha$ und $\overline{CB} = p = \overline{CA}$ cos. α Man hat demnach

$$\overline{Aa} = .\,p\,d\varphi.$$

Die Wirkungsgrösse, welche K entwickelt, während sie den Körper um den Winkel $d\varphi$ dreht, ist demnach:

$$K\,\overline{Aa} = K\,p\,d\varphi.$$

Nennt man $d\varphi_1,\ d\varphi_2,\ d\varphi_3 \ldots\ldots$ die unendlich kleinen Winkel, um welchen der Körper in den aufeinanderfolgenden Zeitelementen gedreht wird, so sind, weil der Voraussetzung gemäss K und p unveränderliche Werthe haben:

$$K p d\varphi_1 \quad K p d\varphi_1 \quad K p d\varphi_3 \ldots\ldots$$

die dabei durch die Kräfte entwickelten Wirkungsgrössen. Die totale Wirkungsgrösse ist demnach:

$$K p d\varphi_1 + K p d\varphi_2 + K p d\varphi_3 + \ldots =$$
$$K p\,(d\varphi_1 + d\varphi_2 + d\varphi_3 \ldots\ldots)$$

oder wenn man den ganzen Winkel, um welchen sich der Körper gedreht hat, mit φ bezeichnet, also

$$d\varphi_1 + d\varphi_2 + \ldots\ldots = \varphi$$

setzt, so erhält man für die zu berechnende Wirkungsgrösse den Werth

$$K\,p\,.\,\varphi.$$

Man nennt das Produkt K p einer auf Drehung wirkenden Kraft K in den Perpendikel $B\,C = p$, welcher vom Drehungspunkt auf der Richtung der Kraft gefällt werden kann: das statische Moment der Kraft. Wenn wir diese Benennung beibehalten, so können wir nach obigem Resultat sagen, dass die Wirkung, welche eine Kraft entwickelt, wenn sie einen Körper um einen gewissen Winkel um seine Axe dreht, durch das Produkt aus dem statischen Moment K p in den Drehungswinkel φ bestimmt wird.

Wird ein Körper nicht durch eine Kraft, sondern durch mehrere

Kräfte K_1 K_2 K_3 . . . . um einen Winkel φ um eine Axe gedreht, so sind die Wirkungsgrössen, welche dabei die Kräfte entwickeln: $K_1 p_1 \varphi$, $K_2 p_2 \varphi$, $K_3 p_3 \varphi$ . . . . und ist die Summe der Wirkungsgrösse sämmtlicher Kräfte:

$$K_1 p_1 \varphi + K_2 p_2 \varphi + K_3 p_3 \varphi \ldots . = \varphi (K_1 p_1 + K_2 p_2 + K_3 p_3 \ldots .) = \varphi \Sigma K p$$

d. h. es ist diese totale Wirkung gleich dem Produkt aus dem Drehungswinkel in der Summe der statischen Momente aller Kräfte.

68) ***Beschleunigte rotirende Bewegung eines starren Körpers um eine Axe.*** Nachdem wir nun die lebendige Kraft eines rotirenden Körpers, so wie auch die Wirkungsgrösse bestimmt haben, welche ein auf Drehung wirkendes System von Kräften entwickelt, unterliegt es nunmehr keiner weiteren Schwierigkeit, die Bewegung zu bestimmen, welche in einem um eine Axe drehbaren Körper eintreten wird, wenn derselbe von verschiedenen Kräften getrieben wird.

Nennen wir:

$\Sigma k p$ die Summe der statischen Momente aller Kräfte, welche die Drehung des Körpers bewirken, $\Sigma m r^2$ das Trägheitsmoment der Masse des Körpers in Beziehung auf die Axe, um welche die Drehung erfolgt, ω die Winkelgeschwindigkeit, welche in der Masse eintritt, nachdem die Drehung durch einen Winkel φ erfolgt ist. Dies vorausgesetzt ist $\varphi \Sigma K p$ die Wirkungsgrösse, welche die Kräfte während der Drehung durch den Winkel φ entwickeln und $\omega^2 \Sigma m r^2$ die lebendige Kraft oder die Wirkungsgrösse, welche in der Masse enthalten ist, nachdem der Körper um den Winkel φ gedreht worden ist, und est ist klar, dass diese beiden Wirkungen gleich gross sind.

Man hat daher

$$\varphi \Sigma K p = \omega^2 \Sigma m r^2 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

und daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \omega^2 \frac{\Sigma m r^2}{\Sigma K p} \\ \text{und} \quad \omega^2 &= \varphi \frac{\Sigma K p}{\Sigma m r^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Der erstere dieser Ausdrücke bestimmt den Winkel, durch welchen die Kräfte drehend wirken müssen, damit eine Winkelgeschwindigkeit ω eintritt, der letztere dagegen gibt die Winkelgeschwindigkeit, welche in der Masse eintreten wird, nachdem die Kräfte durch einen Winkel φ gewirkt haben. Jeder dieser Ausdrücke bestimmt also die Bewegung.

Allein es ist klar, dass obige Gleichungen nur dann richtig sind, wenn die Summe der statischen Momente der Kräfte während der Drehung einen unveränderlichen Werth hat.

Für den Fall, dass die Kräfte veränderlich wären, hätten wir statt der Gleichung (1) die Beziehung:

$$\omega^2 \Sigma m r^2 = \Sigma \int_{\varphi = 0}^{\varphi = \varphi} K p \, d \varphi.$$

69) ***Freie Bewegung eines Atoms in einem Kreise.*** Wenn ein frei bewegliches Atom mit Geschwindigkeitsänderung eine kreisförmige Bahn durchlaufen soll, müssen auf dasselbe zwei Kräfte einwirken, nämlich eine Tangential-Kraft, welche die Geschwindigkeitsänderung des Atoms bewirkt, und eine radial einwärts wirkende Kraft, welche das Theilchen in jedem Augenblick von der geraden tangentialen Richtung, die es vermöge seines Beharrungsvermögens verfolgen will, nach dem Kreis herein ablenkt. Wir wollen die erstere, nach tangentialer Richtung wirkende Kraft, die Beschleunigungskraft, und die letztere, nach radialer Richtung wirkende Kraft, die Ablenkungskraft nennen. Diese beiden Kräfte können auf folgende Weise bestimmt werden.

Es sei, Fig. 18. Taf. III., V die Geschwindigkeit des Atoms im Punkt A der Bahn. G das Gewicht des Atoms an einem Ort, wo die Beschleunigung durch den freien Fall g beträgt. T die Beschleunigungskraft, N die Ablenkungskraft. In einem unendlich kleinen Zeittheilchen t würde das Atom vermöge seines Beharrungsvermögens nach tangentialer Richtung einen Weg $A B = V t$ und vermöge der Beschleunigungskraft T einen Weg $B C = \frac{1}{2} g \frac{T}{G} t^2$ zurücklegen. Durch die vereinte Wirkung beider Ursachen würde es also einen Weg $\overline{AC} = V t + \frac{1}{2} g \frac{T}{G} t^2$ beschreiben. Allein die Ablenkungskraft N bewirkt, dass das Atom nicht nach C, sondern dass es nach einem Punkte D kommt, für welchen $\overset{\frown}{AD} = \overline{AC}$, und offenbar ist $\overline{CD}$ so lang als der Weg, durch welchen das Atom durch die Kraft N im Zeittheilchen getrieben wird. Man hat daher $\overline{CD} = \frac{1}{2} g \frac{N}{G} t^2$. Fällt man den Perpendikel $\overline{DE}$, so ist, weil t unendlich klein angenommen wurde, $\overline{AE}$ gleich $\overline{DE}$ und $\overline{DE} = \overset{\frown}{AD} = \overline{AC}$. Man darf daher auch schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \overline{AE} &= \frac{1}{2} g \frac{N}{G} t^2 \\ \overline{DE} &= V t + \frac{1}{2} g \frac{T}{G} t^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Nennt man r den Halbmesser des Kreises, so ist bekanntlich:

$$\overline{DE}^2 = \overline{AE}\,(2r - \overline{AE})$$

oder weil $\overline{AE}$ gegen 2r vernachlässigt werden darf:

$$\overline{DE}^2 = 2r\,\overline{AE}.$$

Führt man in diese Gleichung den obigen Werth (1) ein, so ergibt sich:

$$\left\{Vt + \frac{1}{2}\,g\,\frac{T}{G}\,t^2\right\}^2 = 2r\,\frac{1}{2}\,g\,\frac{N}{G}\,t^2.$$

Allein wenn t unendlich klein ist, darf man $\frac{1}{2}\,g\,\frac{T}{G}\,t^2$ gegen V t vernachlässigen, und dann folgt aus dieser letzten Gleichung:

$$V^2 = r\,g\,\frac{N}{G}$$

oder

$$N = \frac{G}{g}\,\frac{V^2}{r}$$

wodurch die Ablenkungskraft bestimmt ist

Diese ist also dem Gewicht des Atoms und dem Quadrat seiner Geschwindigkeit direkt, aber dem Halbmesser der Bahn verkehrt proportional, jedoch von der Beschleunigungskraft ganz unabhängig.

Nennt man v die Geschwindigkeitszunahme des Atoms in seiner Bahn im Zeitelement t, so ist:

$$v = g\,.\,\frac{T}{G}\,t.$$

oder

$$T = \frac{G}{g}\,\frac{v}{t}.$$

Erfolgt die Bewegung eines Atoms nicht in einem Kreise, sondern in irgend einer krummen Linie, so gelten auch für diese Bewegung die für N und T aufgefundenen Werthe, wenn man statt des Halbmessers r den Krümmungshalbmesser des Kurvenstückchens substituirt, welches das Atom im Zeitelemente t zurücklegt, für welches die Werthe von N und T zu bestimmen sind. Da bei einer krummen Linie der Krümmungshalbmesser veränderlich ist, so ist bei derselben die Ablenkungskraft nicht constant, sondern ändert sich von einem Punkte der krummen Linie zum andern.

70) *Gezwungene Bewegung eines Atoms.* Ein Atom kann auf mannigfaltige Weise gezwungen werden, eine vorgeschriebene Bahn zu durchlaufen. So ist z. B. jedes Atom, welches dem beweglichen Bestandtheile einer Maschine angehört, gezwungen, eine Bahn zu beschreiben, deren Form von der Art der Verbindung der Theile unter einander abhängt. Dreht sich ein Körper um eine Axe, so ist jedes Atom desselben gezwungen, die Axe zu umkreisen. Aber auch ein einzelnes iso-

lirtes Atom kann durch Fäden, krummlinige glatte Röhren etc. gezwungen werden, eine vorgeschriebene Bahn zu durchlaufen. Die zwingenden Ursachen mögen wie immer beschaffen sein, so kann ihre Einwirkung auf ein Atom nur darin bestehen, dass es durch dieselbe mit einer Beschleunigungs- und mit einer Ablenkungskraft getrieben wird, die genau so gross sind, als diejenige Beschleunigungs- und Ablenkungskraft, welche das Atom, wenn es frei bewegbar wäre, die Bahn beschreiben machen würde, welche es in seiner gezwungenen Bewegung durchläuft. Diese Kräfte sind daher, wie die in vorhergehender Nr. 69 aufgefundenen, nämlich:

$$T = \frac{G}{g}\,\frac{v}{t}$$

$$N = \frac{G}{g}\,\frac{V^2}{r}$$

Bewegt sich das Atom, ohne von einer äussern Kraft getrieben zu sein, in einem glatten Kanal, so ist N der Druck, mit welchem die Wände des Kanals auf das Atom nach normaler Richtung einwärts pressen, und eben so gross ist auch der Druck, mit welchem die Wände durch das Atom nach auswärts gepresst werden. Gehört das Atom zu einem um eine Axe rotirenden Körper, so ist N die Gesammtanziehung, mit welcher das Atom von allen übrigen Atomen des Körpers nach radialer Richtung einwärts gezogen wird, und eben so gross ist auch die Kraft, mit welcher das Atom selbst alle übrigen Atome des Körpers nach radialer Richtung auswärts zieht.

71) *Druck auf die Axe eines rotirenden Körpers.* Befindet sich ein Körper, auf welchen keine äusseren Kräfte einwirken, in Ruhe, so müssen die Molekularkräfte, durch welche jedes Atom von allen übrigen Atomen des Körpers affizirt wird, im Gleichgewicht sein Befindet sich ein Körper in einer rotirenden Bewegung, so muss jedes Atom des Körpers durch alle übrigen Atome desselben mit einer radial einwärts gerichteten Kraft gezogen werden, die gleich ist der Ablenkungskraft $\frac{G}{g}\,\frac{V^2}{r}$, welche der Bewegung eines Atoms im Kreise entspricht. Wird also ein Körper aus dem Zustand der Ruhe in eine rotirende Bewegung um eine Axe versetzt, so muss zunächst im ganzen Körper eine Aenderung in der Gruppirung der Atome eintreten, die so lange fortdauert, bis eine Gruppirungsweise entsteht, bei welcher jedes Atom durch alle übrigen Atome mit einer Kraft $\frac{G}{g}\,\frac{V^2}{r}$ einwärts gezogen wird. In diesem Zustand ist die Totalität, d. h. die Resultirende der Wechselwirkungen je zweier Atome des Körpers äquivalent der Gesammtheit aller nach der Axe hin ziehenden Ablenkungskräfte, d. h. gleich dem Resultirenden aus allen Ablenkungskräften.

Ist dieses Resultirende gleich Null, das will sagen: heben sich die Ablenkungskräfte wechselseitig auf, so dreht sich der Körper um seine Axe, ohne dass dieselbe durch eine Kraft gehalten werden muss. Hat aber jene Resultirende einen Werth, so muss die Axe, wenn dieselbe ihre Lage nicht verändern und die Drehung um dieselbe erfolgen soll, durch eine Kraft, die sowohl hinsichtlich ihrer Richtung, als auch hinsichtlich ihrer Intensität mit jenem Resultirenden übereinstimmt, gehalten werden.

Eine Axe, die nicht gehalten werden muss, damit sich ein Körper um dieselbe drehen kann, d. h. eine Axe, in Beziehung auf welche sich sämmtliche Ablenkungskräfte das Gleichgewicht halten, nennt man eine freie Axe der Drehung. Eine freie Axe ist z. B. die geometrische Axe eines Rotationskörpers. Durch analytische Mittel kann man beweisen, dass es für jeden Körper von beliebiger Form wenigstens drei freie Axen gibt. Dieselben gehen durch den Schwerpunkt des Körpers und stehen auf einander senkrecht. Dreht sich ein Körper um eine unfreie Axe, so findet man die Kräfte, die dieselbe halten müssen, damit sie nicht verrückt wird, auf folgende Weise:

Es seien U und O die Punkte, an welchen die Axe gehalten wird, x, y, z die Coordinaten eines Atoms des Körpers in Beziehung auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem, das in U seinen Ursprung hat, und dessen Axe der z mit der Drehungsaxe zusammenfällt, m die Masse, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Abstand des Atoms von der Axe, ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, so ist: $2\,m\,\omega^2 . r$ die Ablenkungskraft des Atoms. Zerlegt man diese Kraft nach x und y so ist erstere $2\,m\,\omega^2 . r . \frac{x}{y} = 2\,m\,\omega^2\,x$ und letztere $2\,m\,\omega^2 . r . \frac{x}{y} = 2\,m\,\omega^2\,y$. Nennt man U_x, U_y, O_x, O_y die Kräfte, welche nach den Richtungen der x und y die Punkte U und O der Axe halten müssen, l die Distanz der Punkte U und O, so ist:

$$U_x\,l. = \omega^2\,S.z.2\,m\,x = \omega^2\,2\,S\,m\,x\,z.$$

$$U_y\,l = \omega^2\,S.z\,2\,m\,y = 2\,\omega^2\,S\,m\,y\,z$$

$$O_x\,l - . = \omega^2\,S\,(l-z)\,2\,m\,x = 2\,l\,\omega^2\,S\,m\,x - 2\,\omega^2\,S\,m\,x\,z.$$

$$O_y\,l = \omega^2\,S\,(l-z)\,2\,m\,y = 2\,\omega^2\,l\,S\,m\,y - 2\,\omega\,S\,m\,y\,z.$$

Ferner ist noch die Summe der Pressung auf U und O nach der Richtung von x und y:

$$U_x + O_x = 2\,\omega^2\,S\,m\,x.$$

$$U_y + O_y = 2\,\omega^2\,S\,m\,y.$$

Nennt man ξ und v die Coordinaten des Schwerpunkts, M die Masse des Körpers, so ist bekanntlich:

$$S\,m\,x = M\,\xi$$
$$S\,m\,y = M\,v$$

demnach auch

$$U_x + O_x = 2\,\omega^2\,M\,\xi.$$

$$U_y + O_y = 2\,\omega^2\,M\,v$$

Für eine freie Axe müssten die Kräfte O_x, O_y, U_x, U_y verschwinden, was nur dann möglich ist, wenn:

$$S\,m\,x = o \qquad \Sigma\,m\,y = o$$
$$S\,m\,x\,z = o \qquad \Sigma\,m\,y\,z = o.$$

72) *Centripetal- und Centrifugal-Kraft.* Mit diesen beiden Worten werden in allen Werken der Physik und Mechanik zwei Kräfte benannt, welche bei rotirenden Bewegungen die Atome affiziren. Die Centripetalkraft ist gleichbedeutend mit derjenigen Kraft, welche wir Ablenkungskraft genannt haben, d. h. es ist die Kraft, welche auf ein Theilchen nach normaler Richtung einwärts wirken muss, damit es nicht nach tangentialer Richtung fortgeht. Die Centrifugalkraft, sagt man, sei eine der Centripetalkraft gleiche, aber radial auswärts wirkende Kraft, mit welcher sich das Atom von der Drehungsaxe zu entfernen strebt. Dies ist aber ganz irrig, denn eine solche Kraft gibt es gar nicht. Ein um eine Axe rotirendes Atom hat vermöge seines Beharrungsvermögens nur ein Bestreben, nach tangentialer Richtung fortzugehen, nicht aber ein Bestreben, sich von der Axe zu entfernen. Wenn diese angebliche Centrifugalkraft wirklich existirte, so würde sie gerade von der Centripetalkraft aufgehoben, und der Erfolg bestünde darin, dass das Atom vermöge des Beharrungsvermögens nach tangentialer Richtung fortgehen würde, was aber nicht geschieht. Die Benennung Centrifugalkraft sollte man daher gänzlich verbannen, will man sie aber dennoch beibehalten, so muss man darunter das Resultirende derjenigen Kräfte verstehen, mit welcher ein Atom auf alle andern Atome, welche die Centripetal- oder Ablenkungskraft hervorbringen, zurückwirkt. Diese Resultirende ist aber gleich der Kraft, mit welcher das in der Axe befindliche Atom nach der Richtung der Ablenkungskraft gehalten werden muss, wenn es seinen Ort nicht verändern soll, während das andere Atom die Axe umkreist.