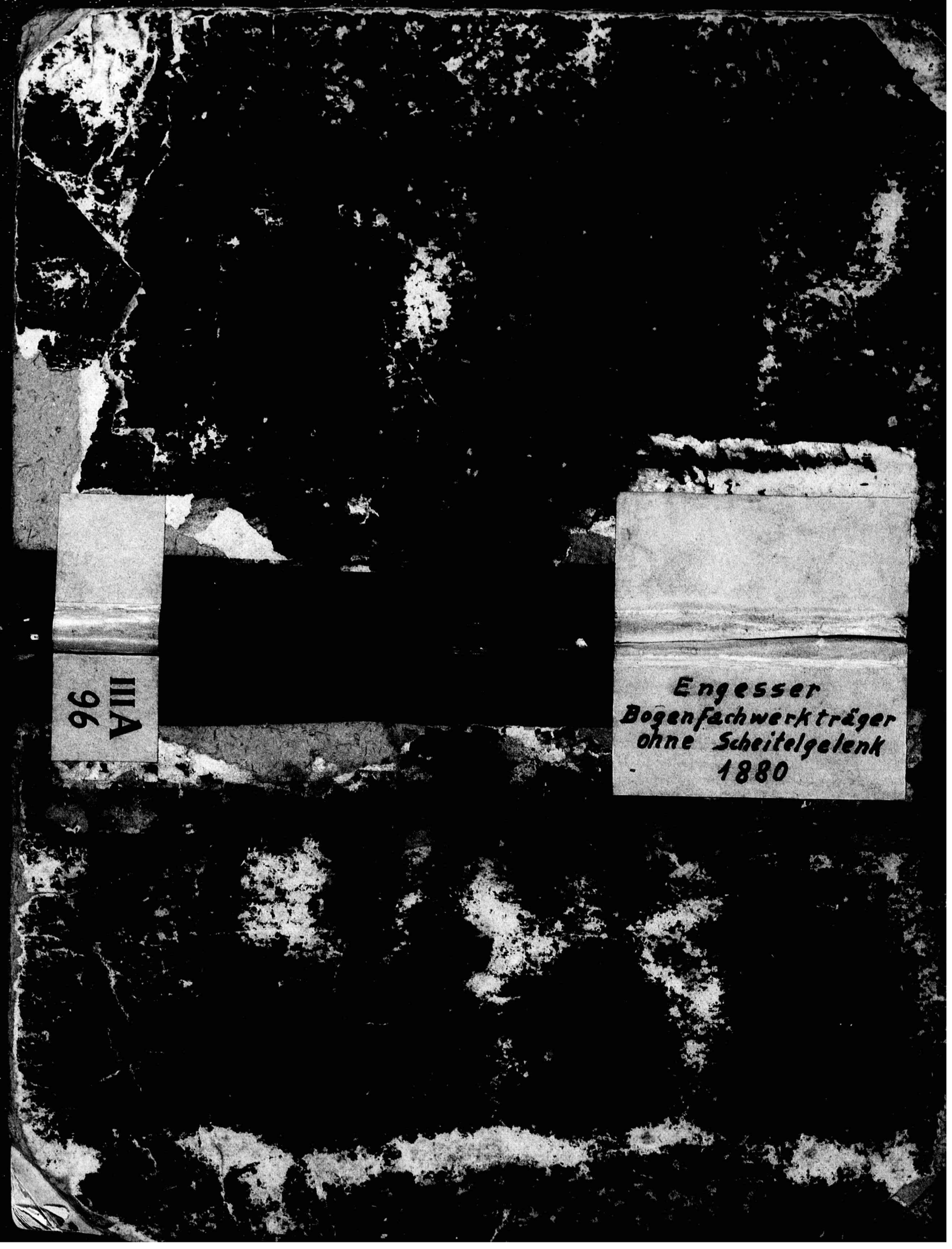
Universitätsbibliothek Karlsruhe

III A 96

Engesser, Friedrich

Theorie und Berechnung

Berlin
1880


IIIA
96
Engesser
Bogenfachwerkträger
ohne Scheitelgelenk
1880

III A 96

B 141

Theorie und Berechnung

der

Doppelfachwerkträger ohne Schnittpunkte

mit

verschiedenen der Praxis entnommenen Zahlenbeispielen.

POLYTECHNISCHE VEREINS BIBLIOTHEK

Von

Fr. Engesser.

Regierungsbaumeister.

Mit 7 lithographirten Tafeln.

Berlin.

Verlag von Ernst & Korn.

1880.

Verlagsbuchhandlung von Julius Springer in Berlin N., Monbijouplatz 3.

Physische und chemische Beschaffenheit
der
BAUMATERIALIEN.
Ein Handbuch
für den Unterricht und für das Selbststudium
bearbeitet von
Rudolf Gottgetreu,
Architekt und ordentlicher Professor an der technischen Hochschule zu München.
Dritte vermehrte und verbesserte Auflage.
In 2 Bänden.
Erster Band.
Mit 122 in den Text gedruckten Holzschnitten, 3 photolithogr. und 3 lithogr. Tafeln.
Preis 14 M.

Das Tunnellängsträger-System.
System Menne.
Nach Neubauakten der Rheinischen Eisenbahngesellschaft, nach Mittheilungen des Herrn Oberingenieur Baurath Menne, sowie nach eigenen Erfahrungen beim Bau des Ender Tunnels
bearbeitet von
Heinrich Birnbaum,
Geprüfter Civil-Ingenieur u. Premier-Lieutenant der Reserve des Eisenbahn-Regiments.
Mit 7 lithographirten Tafeln.
Preis 5 M.

Die Statik der Tunnelgewölbe.
Von
Wilhelm Ritter,
Professor der Ingenieur-Wissenschaften am Polytechnikum zu Riga.
Mit 17 in den Text gedruckten Holzschnitten und 2 lithogr. Tafeln.
Preis 3 Mark.

Demnächst erscheint:
Der Langschwellen-Oberbau
der Rheinischen Eisenbahn
und
die bekannten zweitheiligen Oberbau-Systeme der Neuzeit.
Im Auftrage des Oberingenieurs der Neubauverwaltung der Rheinischen Bahn Herrn Baurath Menne
bearbeitet von
Louis Hoffmann,
Ingenieur der Rheinischen Eisenbahn zu Cöln.
Mit 5 lithograph. Tafeln.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Verlagsbuchhandlung von Julius Springer in Berlin N, Monbijouplatz 3.

Die Dampfkessel

mit Rücksicht auf ihre industrielle Verwendung.

Von

J. Denfer,

Civilingenieur und Docent an der École centrale des arts et manufactures in Paris.

Beschreibung der wichtigsten Kesselsysteme, Angaben über Fabrikschornsteine und Beschreibung vorzüglicher Constructionen derselben. Untersuchungen und praktische Angaben über die Verbrennung im Allgemeinen, sowie über die Rauchverbrennung im Besonderen und über die Verdampfung, Erläuterung verschiedener Arten von Kesselfeuerungen und Notizen über Dampf- und Speiseleitungen.

Autorisirte Deutsche Ausgabe

von

Theodor d'Ester,

Ingenieur.

Mit 81 colorirten Tafeln mit Zeichnungen und eingeschriebenen Maßen.

Ein Band in gr. Folio. Fest gebunden. Preis 36 M.

Versuche

über

Leistung und Brennmaterialienverbrauch

von

Kleinmotoren

ausgeführt von

E. Brauer,
Docent für Messkunde an der k. Gewerbe-Akademie zu Berlin.

und

Dr. A. Slaby,
Docent für neuere Kraftmaschinen an der k. Gewerbe-Akademie zu Berlin.

Heft I. Mit 14 Tafeln.

Preis 2 M. 80 Pf.

Einige

wissenschaftlich-technische Fragen der Gegenwart.

Von

Dr. C. William Siemens.

Inhalt:

Ueber die Nutzbarkeit der Wärme und anderer Naturkräfte.
Ueber einige Methoden, den elektrischen Strom zu messen und zu reguliren.
Briefe an den Herausgeber der Times.
Ueber Uebertragung und Vertheilung von Energie, vermittelst deselektr. Stromes.
Ueber die Fabrication des Stahls und seine Verwendung für militärische Zwecke.

Mit 4 lithograph. Tafeln.

Preis 3 M.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Theorie und Berechnung

der

Bogenfachwerkträger ohne Scheitelgelenk.

Mit

verschiedenen der Praxis entnommenen Zahlenbeispielen.

Von

[Friedrich]
Fr. Engesser,
Ingenieur.

Mit 2 lithographirten Tafeln.

Berlin.
Verlag von Julius Springer.
1880.

POLYTECHNISCHER VEREIN CARLSRUHE

III A 96

Bibl. d. Techn. Hochschule Karlsruhe

Vorwort.

Nachstehende Theorie der Bogenfachwerkträger ohne Scheitelgelenk wurde durch die Forderung veranlasst, für die Berechnung einer Eisenbahnbrücke im Zuge der Badischen Neckarthalbahn (Itterbrücke bei Eberbach) einfache und bequeme Formeln aufzustellen und berücksichtigt daher in erster Linie die dort angewandte Konstruktionsart eines Bogenträgers mit versteiften Zwickeln. (Fig. 5)

Nach einer kurzen Discussion der allgemeinen Verhältnisse werden die besonderen, den genannten Specialfall betreffenden Formeln zur Ermittlung der äussern Kräfte abgeleitet und deren Anwendung an einem Zahlenbeispiel erläutert. Hieran schliessen sich kurz die entsprechenden Formeln für die übrigen in Praxi vorkommenden Konstruktionsarten von Bogenträgern. Ein weiterer Abschnitt behandelt die Bestimmung der in den einzelnen Fachwerkstäben wirkenden inneren Kräfte, die Ermittlung der ungünstigsten Belastungsfälle und die Bestimmung der Querschnittsgrössen mit Rücksicht auf die neueren Dimensionirungsmethoden.

Die Abhandlung soll hauptsächlich den Bedürfnissen des Praktikers entgegenkommen, und wurde deshalb ein grösserer Nachdruck auf detaillirte und eingehende Erörterung von Spezialfällen als auf eine systematische, vom Allgemeinen zum Besonderen fortschreitende Behandlungsweise gelegt. Aus demselben Grunde wurden auch die thatsächlichen Bedingungen

des Problems einer eingehenderen Prüfung unterzogen, als dies gewöhnlich in den rein wissenschaftlichen Abhandlungen der Fall ist.

Auf Grund dieser Erwägungen konnten bei den für den praktischen Gebrauch bestimmten Formeln erhebliche Vereinfachungen zugelassen werden, da man füglich von diesen Formeln keine grössere Genauigkeit beanspruchen darf, als die Natur der Aufgabe überhaupt gestattet. Ein Mehr in dieser Beziehung hat keinen praktischen Nutzen, richtet vielmehr in so fern leicht Schaden an, als es zu unliebsamen Täuschungen über den Grad der Zuverlässigkeit der Rechnungsresultate verleiten kann.

Indem ich vorliegendes Büchlein der wohlwollenden Beurtheilung der Fachgenossen übergebe, füge ich den Wunsch bei, dasselbe möge mit dazu beitragen, die häufigere Anwendung der Bogenkonstruktionen zu fördern, welche in ihrer äusseren Erscheinung mehr als alle anderen Eisenkonstruktionen den Forderungen der Aesthetik Genüge leisten.

Karlsruhe im November 1879.

Fr. Engesser.

Inhaltsverzeichniss.

I. Bestimmung der äusseren Kräfte.

A. Bogenfachwerkträger mit 2 Gelenken. Seite

1. Allgemeines 1
2. Der Bogenfachwerkträger mit versteiften Zwickeln 4
3. Fortsetzung: Formeln für den praktischen Gebrauch 8
4. „ Zahlenbeispiel 12
5. Bogenfachwerkträger von beliebiger Form 17
6. Bogenfachwerkträger von konstanter Bogenhöhe 19

B. Bogenfachwerkträger ohne Gelenk.

7. Allgemeines Verfahren; Träger von konstanter Bogenhöhe . . 23

II. Bestimmung der inneren Kräfte und der Dimensionen.

8. Bestimmung der inneren Kräfte 28
9. Fortsetzung: Zahlenbeispiel 31
10. „ Bestimmung der ungünstigsten Laststellung bei konzentrirten Lasten 35
11. Bestimmung der Querschnittsgrössen 39

III. Anhang.

12. Angaben über Brückenbelastungen 44
13. Durchbiegung von Bogenfachwerkträgern 46

POLYTECHNISCHER VEREIN CARLSRUHE.

I. Bestimmung der äusseren Kräfte.

A. Bogenfachwerkträger mit 2 Gelenken.

1. Allgemeines.

Während bei Bogenträgern mit 3 Gelenken die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der äusseren Kräfte ausreichen, bedarf es hiezu bei einer geringeren Anzahl von Gelenken einer Betrachtung der elastischen Deformationen des betreffenden Trägers.

Bei zwei Kämpfergelenken genügt die Aufstellung der einen Elasticitätsgleichung, welche ausdrückt, dass die durch die äusseren Kräfte hervorgebrachte Aenderung der Spannweite gleich einer bekannten Grösse (gewöhnlich gleich Null) sei.

Setzt man den gewöhnlichen Fall voraus, dass beide Kämpfergelenke in gleicher Höhe liegen, so lassen sich die vertikalen Auflagerdrücke direkt nach dem Hebelgesetze ermitteln. Zur Bestimmung des allein noch unbekannten Horizontalschubs Q ist die bekannte Spannweitenänderung dl als Funktion der Längenänderungen der einzelnen Fachwerkstäbe auszudrücken; diese Längenänderungen sind sodann durch ihre Werthe als Funktionen der bekannten Vertikalkräfte, Temperaturänderungen und des unbekannten Horizontalschubs Q zu ersetzen, wodurch man schliesslich eine leicht lösbare Gleichung für die einzige Unbekannte Q erhält. — Fig. 1 stelle einen beliebig gestalteten Bogenfachwerkträger einfachen Systems dar, wobei die einzelnen Fachwerkstäbe ein einfaches Dreiecksnetz bilden und an den Eckpunkten (Knotenpunkten) durch Drehbolzen mit einander verbunden sind.

Der Linienzug der unteren Gurtung ist bestimmt durch die Stablängen u und die Knotenpunktswinkel W. Verlängert sich ein Stab u um die Länge $u \,.\, v$, wo v gleich spezifischer Längenänderung (d. h. Verlängerung der Längeneinheit), und bleiben die Winkel W konstant, so vergrössert sich die Spannweite um

$$uv \,.\, \frac{z}{u} = z \,.\, v,$$

wenn mit z die horizontale Projektion des Stabes u bezeichnet wird. Vergrössert sich ein Winkel W um dW, so vergrössert sich die Spannweite um $-dW.y$, wo y die Ordinate des Punktes W bezeichnet. Aus Fig. 1 folgt nämlich

$$\triangle Aab \text{ ähnlich } \triangle AWC, \text{ somit } Aa = \frac{Ab \,.\, WC}{AW}.$$

Nun ist $Ab = AW.dW$, $WC = y$, somit Vergrösserung*) der Spannweite $= -Aa = -dW.y$.

Aendern sich die Stablängen u und Knotenpunktswinkel W gleichzeitig, so erhält man als totale Spannweitenvergrösserung

$$dl = \sum_{o}^{l} (zv - dWy). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

In dieser Gleichung ist nun vorerst dW als Funktion der spezifischen Verlängerungen der einzelnen Stäbe auszudrücken. dW setzt sich zusammen aus den Aenderungen der im Punkt W zusammenstossenden Dreieckswinkel; es ist daher die Aufgabe gelöst, sobald die Winkeländerungen eines Dreiecks durch die spezifischen Seitenverlängerungen ausgedrückt werden können.

In dem durch Fig. 2 dargestellten Dreiecke bezeichnen

A, B, C die Winkel,

a, b, c die Seiten,

α, β, γ die spezifischen Verlängerungen der Seiten,

dA, dB, dC die hiedurch erzeugten totalen Vergrösserungen der Winkel.

Für den ursprünglichen Zustand des Dreiecks gilt die Gleichung

$$\sin A \,.\, b = \sin B \,.\, a,$$

*) Die Begriffe „Vergrösserung“ und „Verlängerung“ sind im Folgenden stets im algebraischen Sinne verstanden.

für den deformirten Zustand

$$\sin (A + dA)(b + b\beta) = \sin (B + dB)(a + a\alpha),$$

woraus, da mit Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung

$$\sin (A + dA) = \sin A + \cos A \,.\, dA$$

gesetzt werden kann,

$$dA = \operatorname{tg} A (\alpha - \beta) + \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} dB.$$

Aehnlich erhält man:

$$dC = \operatorname{tg} C (\gamma - \beta) + \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B} dB.$$

Setzt man diese Werthe von dA und dC in die Gleichung $dA + dB + dC = o$, welche ausdrückt, dass die Winkelsumme eines Dreiecks konstant bleibt, so folgt

$$dB = \frac{-\alpha \operatorname{tg} A - \gamma \operatorname{tg} C + \beta (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C)}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} \operatorname{tg} B,$$

oder, da $B = 180 - (A + C)$, $\operatorname{tg} B = -\operatorname{tg} (A + C) = -\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C}{1 - \operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{tg} C}$,

$$dB = -\alpha \operatorname{ctg} C + \beta (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C) - \gamma \operatorname{ctg} A. \quad . \quad (2b)$$

Analog ergibt sich:

$$dA = \alpha (\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C) - \beta \operatorname{ctg} C - \gamma \operatorname{ctg} B. \quad . \quad . \quad (2a)$$

$$dC = -\alpha \operatorname{ctg} B - \beta \operatorname{ctg} A + \gamma (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B) \quad . \quad (2c)$$

Aendert sich nur ein Stab, z. B. Stab a, so wird $\beta = \gamma = o$ und

$$dA = \alpha (\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

$$dB = -\alpha \operatorname{ctg} C, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3b)$$

$$dC = -\alpha \operatorname{ctg} B. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3c)$$

Mit Hülfe der Gleichungen 2 und 3 kann nun für jeden beliebigen Fall die Winkeländerung dW und somit auch, nach Einsetzen in Gleichung 1, die Aenderung der Spannweite dl als Funktion der spezifischen Verlängerungen der einzelnen Stäbe ausgedrückt werden.*)

*) Die Gleichungen 2 und 3 sind ausser dem vorliegenden Falle auch zur Lösung aller jener Aufgaben geeignet, in welchen die Deformationen von aus Dreiecken zusammengesetzten Fachwerkträgern beliebiger Art bestimmt werden müssen. (Kontinuirliche Träger, Fachwerkträger doppelten symmetrischen Systems etc.) (Trigonometrische Methode.)

2. Der Bogenfachwerkträger mit versteiften Zwickeln.

Das vorgenannte Verfahren zur Bestimmung des Horizontalschubs soll nun vorerst auf den Bogenfachwerkträger mit versteiften Zwickeln angewendet werden.

Wir setzen hierbei die gewöhnliche Anordnung, horizontalen Obergurt, vertikale Ständer und nach der Mitte fallende Diagonalen, voraus. (Fig. 3.)

Es bezeichne:

s die Länge eines oberen Gurtstabes, σ dessen spezif. Verlängerung,
u - - - unteren - , v - - - - ,
h - - einer Vertikalen, φ deren - - ,
d - - - Diagonalen, δ - - - ,
b die Höhe des Obergurt über den Auflagerpunkten.

Verlängert sich nur ein oberer Gurtstab s, so folgt aus Gleichung 3a, wenn man darin σ statt α setzt:

$$dA = \sigma\,(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C) = \frac{\sigma \cdot s}{h},$$

da nach Fig. 3

$$\operatorname{ctg} B = \frac{s}{h},\ \operatorname{ctg} C = \operatorname{ctg} 90° = 0.$$

Nun ist $dW = dA$, da die beiden anderen bei W zusammenstossenden Winkel durch die Aenderung des Stabes s nicht alterirt werden, und somit Vergrösserung der Spannweite in Folge der Aenderung des Stabes s:

$$dl = -\,dW.y = -\,\frac{\sigma s y}{h}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Hierin ist y die Ordinate des dem oberen Gurtstabe s gegenüberliegenden Knotenpunktes, h die Länge der durch diesen Knotenpunkt gehenden Vertikalen.

Eine spezif. Verlängerung v des unteren Gurtstabes u hat eine Vergrösserung zweier Knotenpunktswinkel (W und W_1 in Fig. 4) zur Folge, und zwar ergibt sich mittelst der Gleichungen 3, wenn man v statt α setzt:

$$dW_1 = dB = -\,v \operatorname{ctg} C = -\,v\,\frac{y_1 - y}{s}$$

$$dW = dC = -\,v \operatorname{ctg} B = -\,v\,\frac{u_2}{r} = -\,v\,\frac{u - u_1}{r}.$$

Aus ähnlichen Dreiecken erhält man, da $y_1 - y = h - h_1$

$$u_1 = \frac{h\,(h - h_1)}{u},\ r = \frac{hs}{u}$$

und somit

$$dW = -\,v \cdot \frac{u^2 - h\,(h - h_1)}{hs}.$$

Setzt man diese Werthe von dW und dW_1 in Gleichung 1 ein, so ergibt sich, da hier $z = s$,

$$dl = sv + v \cdot \frac{u^2 - h\,(h - h_1)}{hs} \cdot y + v \cdot \frac{y_1 - y}{s} \cdot y_1;$$

Nach einigen Umformungen erhält man hieraus, da $y = b - h$, $y_1 = b - h_1$,

$$dl = \frac{v\,u^2\,b}{hs}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Hierin bezeichnet h die Länge derjenigen Vertikalen, welche durch den dem unteren Gurtstab gegenüberliegenden Knotenpunkt geht, s die Länge des im gleichen Fache liegenden oberen Gurtstabes (d. h. = Fachlänge).

In ähnlicher Weise erhält man für die spezif. Verlängerung δ einer Diagonalen d als entsprechende Vergrösserung der Spannweite

$$dl = \frac{\delta\,d^2\,(h - h_1)\,b}{h\,h_1\,s}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

wo h die grössere, h_1 die kleinere der beiden durch die Endpunkte der Diagonalen gehenden Vertikalen, s die Fachlänge bezeichnet.

Für die Verlängerung φ einer Vertikalen h ergiebt sich

$$dl = -\,\varphi\,\frac{b\,(h - h_1)}{s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

wo h_1 die Länge der benachbarten kleineren Vertikalen bezeichnet.

Für gleichzeitige Verlängerung sämmtlicher Stäbe erhält man die totale Vergrösserung der Spannweite durch Summation der Gleichungen 4, 5, 6, 7:

$$dl = \sum_{o}^{l} \left\{ -\,\frac{\sigma s y}{h} + v\,\frac{u^2\,b}{hs} + \delta\,\frac{d^2\,(h - h_1)}{h h_1\,s}\,b - \varphi\,\frac{b\,(h - h_1)}{s} \right\}. \quad (8)$$

Bezeichnet man denjenigen Theil der spezif. Verlängerungen eines Stabes, der von den Vertikalkräften (Lasten und vertikale Auf-

lagerreaktionen) herrührt, beziehentlich mit . . . . $\sigma_1\ v_1\ \delta_1\ \varphi_2$, den von der Temperatur herrührenden mit . . . . $\sigma_3\ v_3\ \delta_3\ \varphi_3$, den durch einen Horizontalschub*) von der Grösse 1 hervorgebrachten mit . . . . . $\sigma_2\ v_2\ \delta_2\ \varphi_2$, den unbekannten Horizontalschub*) mit ΣQ, so lässt sich Gleichung 8 auch schreiben:

$$dl = \sum_o^l \Big\{ -(\sigma_1+\sigma_3)\frac{sy}{h} + (v_1+v_3)\frac{u^2 b}{hs} + (\delta_1+\delta_3)\frac{d^2(h-h_1)b}{hh_1 s} - (\varphi_1+\varphi_3)\frac{b(h-h_1)}{s}\Big\}$$

$$+\sum Q \cdot \sum_o^l \Big\{ -\sigma_2\frac{sy}{h} + v_2\frac{u^2 b}{hs} + \delta_2\frac{d^2(h-h_1)b}{hh_1 s} - \varphi_2\frac{b(h-h_1)}{s}\Big\}$$

woraus schliesslich der Horizontalschub:

$$\sum Q = \frac{\sum_o^l \Big\{ -(\sigma_1+\sigma_3)\frac{sy}{h} + (v_1+v_3)\frac{u^2 b}{hs} + (\delta_1+\delta_3)\frac{d^2(h-h_1)b}{hh_1 s} - (\varphi_1+\varphi_3)\frac{b(h-h_1)}{s}\Big\} - dl}{\sum_o^l \Big\{ +\sigma_2\frac{sy}{h} - v_2\frac{u^2 b}{hs} - \delta_2\frac{d^2(h-h_1)b}{hh_1 s} + \varphi_2\frac{b(h-h_1)}{s}\Big\}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

dl ist für feste Widerlager gleich Null zu setzen, und soll diese Annahme für die weiteren Entwickelungen beibehalten werden.

Die spezif. Längenänderungen $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$ etc. können im speziellen Falle leicht berechnet werden. Bei symmetrischer Gestalt des Trägers und wenn die Belastung aus zwei Lasten, gleich der Einheit, besteht, welche an 2 symmetrisch gelegenen Knotenpunkten der oberen Gur-

*) Unter „Horizontalschub" ist in Folgendem stets die horizontale Reaktion der Widerlager gegen den Bogenträger verstanden.

tung in der Entfernung a von den Auflagern aufgehängt sind (Fig. 3), erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{x}{Ef_1 h} \text{ für } x \leqq a, \text{ d. h. für diejenigen Stäbe, welche zwischen dem Auflager und der Last sich befinden,} \\ &= -\frac{a}{Ef_1 h} \text{ für } x \geqq a \\ \sigma_2 &= \frac{y}{Ef_1 h}; \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{xu}{Ef_2 hs} \text{ für } x \leqq a \\ &= \frac{au}{Ef_2 hs} \quad x \geqq a \\ v_2 &= -\frac{bu}{Ef_2 hs} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{x\,d(h-h_1)}{Ef_3 hh_1 s} + \frac{d}{Ef_3 h_1} \quad x < a \\ &= \frac{a\,d(h-h_1)}{Ef_3 hh_1 s} \quad x \geqq a \\ \delta_2 &= -\frac{b\,d(h-h_1)}{Ef_3 hh_1 s} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{x(h-h_1)}{Ef_4 hs} - \frac{1}{Ef_4} \quad x \leqq a \\ &= -\frac{a(h-h_1)}{Ef_4 hs} \quad x > a \\ \varphi_2 &= \frac{b(h-h_1)}{Ef_4 hs} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Hierin bedeuten $f_1\ f_2\ f_3\ f_4$ die Querschnitte*) der oberen Gurtstäbe, der unteren Gurtstäbe, der Diagonalen und der Vertikalen, E den Elasticitätsmodul; die übrigen Grössen haben dieselbe Bedeutung wie in den Gleichungen 4, 5, 6 und 7. Die Abcissen x beziehen sich jeweils auf die gleichzeitig vorkommenden Vertikalen h.

Die spezif. Verlängerungen in Folge von Temperaturänderungen ergeben sich zu:

$$\sigma_3 = \alpha t,\ v_3 = \alpha t,\ \delta_3 = \alpha t,\ \varphi_3 = \alpha t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

wo α gleich dem Ausdehnungskoefficient für 1 Grad Temperaturzunahme, t die im Allgemeinen für jeden Stab verschiedene mittlere

*) Unter Querschnitt eines Stabes ist streng genommen der mittlere Querschnitt zu verstehen; für die Anwendung genügt es jedoch, den vollen Querschnitt ohne jeglichen Nietabzug einzuführen.

Temperaturerhöhung in Graden gegenüber der angenommenen Normaltemperatur.

Setzt man die soeben berechneten Werthe der spezif. Verlängerungen in Gleichung 9 ein, so erhält man, vorerst ohne Rücksicht auf Temperaturänderung, für den Horizontalschub Q, den eine, im Abstand a vom Auflager aufgehängte Last 1 erzeugt, wenn man berücksichtigt, dass $\Sigma Q = 2Q$, und dass wegen der symmetrischen Verhältnisse die Summationen nur auf die eine Bogenhälfte auszudehnen sind:

$$Q = \left\{ \sum_{o}^{a} \left\{ \frac{x\,y\,s}{E f_1 h^2} + \frac{x\,b\,u^3}{E f_2 h^2 s^2} + \frac{x(h-h_1)^2 b\,d^3}{E f_2 h^2 h_1^2 s^2} + \frac{(h-h_1) b d^3}{E f_3 h h_1^2 s} + \frac{x(h-h_1)^2 b}{E f_4 h s^2} + \frac{(h-h_1) b}{E f_4 s} \right\} \right.$$
$$\left. + a \sum_{a}^{\frac{1}{2}l} \left\{ \frac{y s}{E f_1 h^2} + \frac{b u^3}{E f_2 h^2 s^2} + \frac{(h-h_1)^2 b d^3}{E f_2 h^2 h_1^2 s^2} + \frac{(h-h_1)^2 b}{E f_4 h s^2} \right\} \right\}$$
$$: 2 \sum_{o}^{\frac{1}{2}l} \left\{ \frac{y^2 s}{E f_1 h^2} + \frac{b^2 u^3}{E f_2 h^2 s^2} + \frac{(h-h_1)^2 b^2 d^3}{E f_3 h^2 h_1^2 s^2} + \frac{(h-h_1)^2 b^2}{E f_4 h s^2} \right\} \quad (15)$$

Der durch Temperaturerhöhung allein hervorgerufene Horizontalschub ergibt sich zu:

$$Q_1 = \alpha \frac{\sum_{o}^{\frac{1}{2}l} \left\{ -\frac{y s}{h} t + \frac{b u^2}{h s} t + \frac{(h-h_1) b d^2}{h h_1 s} t - \frac{(h-h_1) b}{s} . t \right\}}{\sum_{o}^{\frac{1}{2}l} \left\{ \frac{y^2 s}{E f_1 h^2} + \frac{b^2 u^3}{E f_2 h^2 s^2} + \frac{(h-h_1)^2 b^2 d^3}{E f_3 h^2 h_1^2 s^2} + \frac{(h-h_1)^2 b^2}{E f_4 h s^2} \right\}} \quad (16)$$

Ist der Elasticitätsmodul E konstant für alle Stäbe, so fällt sein Werth aus Gleichung 15 heraus, und in Gleichung 16 kann derselbe vor das Summenzeichen gesetzt werden.

3. Fortsetzung: Formeln für den praktischen Gebrauch.

Die Gleichungen 15 und 16 liefern den mathematisch genauen Werth des Horizontalschubs, wenn die Dimensionen, der Elasticitätsmodul, die Temperaturerhöhungen der einzelnen Stäbe bekannt und die Widerlager absolut unbeweglich sind.

Diese Voraussetzungen der Theorie sind jedoch in Wirklichkeit nur zum geringsten Theile erfüllt. Einzig und allein im Voraus bekannt sind die Längendimensionen der Stäbe; die Querschnittsdimensionen sollen erst mit Hülfe der äusseren Kräfte bestimmt werden, und muss man daher für dieselben vorläufige Annahmen machen. Nur in dem Falle, wenn es sich um Bestimmung des Horizontalschubs einer gegebenen Brücke handelt, sind auch die Querschnittsdimensionen bekannt.

POLYTECHNISCHER VEREIN KARLSRUHE

Bezüglich des Elasticitätsmoduls, den man wohl kaum für jeden einzelnen Stab bestimmen kann, ist man auf mehr oder minder zutreffende Annahmen angewiesen. Gewöhnlich nimmt man an, derselbe sei für alle Stäbe konstant, gleich einem gewissen Mittelwerthe der verwendeten Eisensorten. Bei den Schwankungen, denen die Werthe des Elasticitätsmoduls, namentlich bei Eisen verschiedener Bezugsquellen, ausgesetzt sind, können die hiernach berechneten Werthe von Q nur näherungsweise Giltigkeit besitzen.

Bezüglich der Temperatur der einzelnen Stäbe befindet man sich in ähnlicher Unsicherheit. In der Regel nimmt man in Ermangelung von etwas Besserem an, die Temperaturerhöhung t sei konstant, wodurch Gleichung 16 folgende Form erhält:

$$Q_1 = \frac{E \alpha t l}{2 \sum_{o}^{\frac{1}{2}l} \left\{ \frac{y^2 s}{f_1 h^2} + \frac{b^2 u^3}{f_2 h^2 s^2} + \frac{(h-h_1)^2 b^2 d^3}{f_3 h^2 h_1^2 s^2} + \frac{(h-h_1)^2 b^2}{f_4 h s^2} \right\}};$$

Diese Annahme weicht jedoch in den meisten Fällen von der Wirklichkeit sehr bedeutend ab; gewöhnlich ist die untere Gurtung dem Einfluss der Sonnenstrahlen ausgesetzt, während die obere Gurtung durch das Gedeck geschützt wird. Durch diese ungleichmässige Erwärmung der beiden Gurtungen wird ein bedeutend grösserer Horizontalschub erzeugt, als bei gleichmässiger Maximaltemperatur beider Gurtungen entstanden wäre. Setzt man beispielsweise in dem weiter unten folgenden Beispiele für die obere Gurtung $t = 20^0$, für die Diagonalen und Vertikalen $t = 30^0$, für die untere Gurtung $t = 40^0$, so erhält man nach Gleichung 16 für Q_1 einen ca. doppelt so grossen Werth, als wenn man allgemein $t = 40^0$ gesetzt hätte.

Es ist aus diesem Beispiele ersichtlich, dass es zur Bestimmung des durch Temperaturänderungen hervorgebrachten Maximalhorizontalschubes nicht genügt, für sämmtliche Stäbe die Maximaltemperatur anzunehmen, sondern dass streng genommen die wirkliche Tempe-

Temperaturerhöhung in Graden gegenüber der angenommenen Normaltemperatur.

Setzt man die soeben berechneten Werthe der spezif. Verlängerungen in Gleichung 9 ein, so erhält man, vorerst ohne Rücksicht auf Temperaturänderung, für den Horizontalschub Q, den eine, im Abstand a vom Auflager aufgehängte Last 1 erzeugt, wenn man berücksichtigt, dass $\Sigma Q = 2Q$, und dass wegen der symmetrischen Verhältnisse die Summationen nur auf die eine Bogenhälfte auszudehnen sind:

$$Q = \left\{ \sum_{o}^{a} \left\{ \frac{x\,y\,s}{E f_1 h^2} + \frac{x\,b\,u^3}{E f_2 h^2 s^2} + \frac{x\,(h-h_1)^2 b\,d^3}{E f_3 h^2 h_1^2 s^2} + \frac{(h-h_1) b\,d^3}{E f_3 h h_1^2 s} + \frac{x\,(h-h_1)^2 b}{E f_4 h s^2} + \frac{(h-h_1) b}{E f_4 s} \right\} \right.$$
$$\left. + a \sum_{a}^{\frac{1}{2}l} \left\{ \frac{y s}{E f_1 h^2} + \frac{b\,u^3}{E f_2 h^2 s^2} + \frac{(h-h_1)^2 b\,d^3}{E f_3 h^2 h_1^2 s^2} + \frac{(h-h_1)^2 b}{E f_4 h s^2} \right\} \right\}$$
$$: 2 \sum_{o}^{\frac{1}{2}l} \left\{ \frac{y^2 s}{E f_1 h^2} + \frac{b^2 u^3}{E f_2 h^2 s^2} + \frac{(h-h_1)^2 b^2 d^3}{E f_3 h^2 h_1^2 s^2} + \frac{(h-h_1)^2 b^2}{E f_4 h s^2} \right\} \quad (15)$$

Der durch Temperaturerhöhung allein hervorgerufene Horizontalschub ergibt sich zu:

$$Q_1 = \frac{\alpha \sum_{o}^{\frac{1}{2}l} \left\{ -\frac{y s}{h} t + \frac{b u^2}{h s} t + \frac{(h-h_1) b d^2}{h h_1 s} t - \frac{(h-h_1) b}{s} . t \right\}}{\sum_{o}^{\frac{1}{2}l} \left\{ \frac{y^2 s}{E f_1 h^2} + \frac{b^2 u^3}{E f_2 h^2 s^2} + \frac{(h-h_1)^2 b^2 d^3}{E f_3 h^2 h_1^2 s^2} + \frac{(h-h_1)^2 b^2}{E f_4 h s^2} \right\}} \quad (16)$$

Ist der Elasticitätsmodul E konstant für alle Stäbe, so fällt sein Werth aus Gleichung 15 heraus, und in Gleichung 16 kann derselbe vor das Summenzeichen gesetzt werden.

3. Fortsetzung: Formeln für den praktischen Gebrauch.

Die Gleichungen 15 und 16 liefern den mathematisch genauen Werth des Horizontalschubs, wenn die Dimensionen, der Elasticitätsmodul, die Temperaturerhöhungen der einzelnen Stäbe bekannt und die Widerlager absolut unbeweglich sind.

Diese Voraussetzungen der Theorie sind jedoch in Wirklichkeit nur zum geringsten Theile erfüllt. Einzig und allein im Voraus bekannt sind die Längendimensionen der Stäbe; die Querschnittsdimensionen sollen erst mit Hülfe der äusseren Kräfte bestimmt werden, und muss man daher für dieselben vorläufige Annahmen machen. Nur in dem Falle, wenn es sich um Bestimmung des Horizontalschubs einer gegebenen Brücke handelt, sind auch die Querschnittsdimensionen bekannt.

POLYTECHNISCHER VEREIN KARLSRUHE

Bezüglich des Elasticitätsmoduls, den man wohl kaum für jeden einzelnen Stab bestimmen kann, ist man auf mehr oder minder zutreffende Annahmen angewiesen. Gewöhnlich nimmt man an, derselbe sei für alle Stäbe konstant, gleich einem gewissen Mittelwerthe der verwendeten Eisensorten. Bei den Schwankungen, denen die Werthe des Elasticitätsmoduls, namentlich bei Eisen verschiedener Bezugsquellen, ausgesetzt sind, können die hiernach berechneten Werthe von Q nur näherungsweise Giltigkeit besitzen.

Bezüglich der Temperatur der einzelnen Stäbe befindet man sich in ähnlicher Unsicherheit. In der Regel nimmt man in Ermangelung von etwas Besserem an, die Temperaturerhöhung t sei konstant, wodurch Gleichung 16 folgende Form erhält:

$$Q_1 = \frac{E \alpha t l}{2 \sum_{o}^{\frac{1}{2}l} \left\{ \frac{y^2 s}{f_1 h^2} + \frac{b^2 u^3}{f_2 h^2 s^2} + \frac{(h-h_1)^2 b^2 d^3}{f_3 h^2 h_1^2 s^2} + \frac{(h-h_1)^2 b^2}{f_4 h s^2} \right\}};$$

Diese Annahme weicht jedoch in den meisten Fällen von der Wirklichkeit sehr bedeutend ab; gewöhnlich ist die untere Gurtung dem Einfluss der Sonnenstrahlen ausgesetzt, während die obere Gurtung durch das Gedeck geschützt wird. Durch diese ungleichmässige Erwärmung der beiden Gurtungen wird ein bedeutend grösserer Horizontalschub erzeugt, als bei gleichmässiger Maximaltemperatur beider Gurtungen entstanden wäre. Setzt man beispielsweise in dem weiter unten folgenden Beispiele für die obere Gurtung $t = 20^0$, für die Diagonalen und Vertikalen $t = 30^0$, für die untere Gurtung $t = 40^0$, so erhält man nach Gleichung 16 für Q_1 einen ca. doppelt so grossen Werth, als wenn man allgemein $t = 40^0$ gesetzt hätte.

Es ist aus diesem Beispiele ersichtlich, dass es zur Bestimmung des durch Temperaturänderungen hervorgebrachten Maximalhorizontalschubes nicht genügt, für sämmtliche Stäbe die Maximaltemperatur anzunehmen, sondern dass streng genommen die wirkliche Tempe-

ratur jedes einzelnen Stabes bekannt sein müsste. Da eine derartige Forderung jedoch in Praxis unerfüllbar ist, so befindet man sich bezüglich der der Rechnung zu Grunde zu legenden Annahmen und somit auch bezüglich der Rechnungsresultate in beträchtlicher Unsicherheit.

Eine weitere Unzuverlässigkeit der Rechnungsresultate rührt von der oben gemachten Annahme absolut unbeweglicher Widerlager her. Beobachtungen an ausgeführten Brücken, namentlich solchen mit Zwischenpfeilern, haben gezeigt, dass unter dem Einflusse der Belastungen kleine Bewegungen eintreten, somit die Voraussetzung $dl = o$ keineswegs streng erfüllt ist.

Ferner ist auch die Bedingung, dass die Träger bei der Normaltemperatur genau zwischen die Widerlager passen, niemals vollständig realisirbar.

Schliesslich kommen noch bei der in Europa üblichen Konstruktionsmethode die bei Aufstellung der Formeln nicht in Rechnung gezogenen Einflüsse der starren Knotenpunktsverbindungen hinzu. Die Wirkung der hierbei auftretenden Verbiegungen der einzelnen Stäbe ist zweierlei Art. Einerseits wird durch die Biegung der Stäbe ein Theil der Belastung direkt übertragen, und fallen somit die reinen Zug- oder Druckspannungen der Stäbe (Systemspannungen), bezw. die spezif. Verlängerungen σ, v, δ, φ derselben, geringer aus, als die Formeln 10 bis 13 ergeben. Andrerseits sind auch die Gleichungen 2 und 3 nicht mehr genau richtig, weil die Dreiecksseiten verbogen werden. Der letztere Umstand kann indessen in Praxi vernachlässigt werden, weil die Deformationen der Träger stets so gering bleiben, dass Bogen und Sehne der verbogenen Stäbe ohne wesentlichen Fehler gleich lang gesetzt werden können. Wichtiger ist der erstgenannte Punkt, namentlich bezüglich der mittleren Trägerpartie, wo bei der geringen Konstruktionshöhe des Trägers ein wesentlicher Theil der Kräfte direkt durch Biegung übertragen wird.

Aus den eben angeführten Gründen ist ersichtlich, dass die Voraussetzungen der Gleichungen 15 und 16 theilweise auf ziemlich schwachen Grundlagen beruhen. Die theoretische Genauigkeit dieser Gleichungen hat somit nur geringen praktischen Werth, und erscheint es daher angemessen zur Erleichterung der Rechnung diejenigen Rechnungsglieder, deren Einfluss auf das Endresultat nachweisbar nur gering ist, zu vernachlässigen.

Hierunter sind hauptsächlich die Glieder, welche von den Deformationen der Diagonalen und Vertikalen herrühren, zu rechnen.

Vergleichungen bei der von Mohr berechneten Brücke (Zeitschrift des Hannövr. Ing. und Arch. Vereins 1874) sowie bei der weiter unten durchgerechneten Brücke haben gezeigt, dass die Abweichungen gegen die theoretisch richtigen Resultate höchsten 3—4% betrugen.

Ferner kann ohne merklichen Fehler für die untere sowie für die obere Gurtung ein konstanter Querschnitt eingeführt werden, da man in Wirklichkeit mit den Gurtquerschnitten wenig variirt, namentlich in den mittleren Partieen, welche bei der Berechnung hauptsächlich in's Gewicht fallen.

Die Gleichung 15 geht unter diesen Voraussetzungen in folgende einfache Formel über, wenn man $f_1 = f$, $f_2 = \beta f$ und den Elasticitätsmodul konstant setzt:

$$Q = \frac{\sum_{o}^{a} \frac{x\, b\, u^3}{h^3 s^2} + a \sum_{a}^{\frac{1}{2}l} \frac{b\, u^2}{h^2 s^2} + \beta \sum_{o}^{a} \frac{x\, y\, s}{h^2} + \beta . a \sum_{a}^{\frac{1}{2}l} \frac{y s}{h^2}}{2 \sum_{o}^{\frac{1}{2}l} \frac{b^2 u^3}{h^2 s^2} + 2\beta \sum_{o}^{\frac{1}{2}l} \frac{y^2 s}{h^2}} \quad . \quad (17)$$

oder abgekürzt:

$$Q = \tfrac{1}{2} \frac{Z_2 + \beta Z_1}{N_2 + \beta N_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

wo Z_1 und N_1 die von der oberen Gurtung, Z_2 und N_2 die von der unteren Gurtung herrührenden Summanden sind, und β das Maass angibt, um wieviel mal der Querschnitt der unteren Gurtung grösser ist als der der oberen Gurtung.

Zur Vereinfachung der Gleichung 16 nehmen wir die Temperaturerhöhung t konstant an, setzen jedoch, um ungleiche Erwärmung der Gurtungen, Ausweichen der Widerlager und sonstige unberechenbare Einflüsse zu berücksichtigen, statt des wirklichen Maximalwerths von ca. 35° Cels., den Werth von $t = \pm 60^0$ ein; ferner vernachlässigen wir im Nenner ebenfalls die von den Diagonalen und Vertikalen herrührenden Glieder, wodurch der Werth von Q nochmals um einige Prozente vergrössert wird.

Im Ganzen ergibt sich durch die gemachten Annahmen ein etwa doppelt so grosser Horizontalschub als man aus Formel 16 unter

Annahme einer gleichmässigen Maximaltemperatur sämmtlicher Stäbe erhalten hätte.

Es dürfte auf diese Weise gegenüber den wirklich vorkommenden, ungünstigsten Verhältnissen wohl genügende Sicherheit geboten sein.

Formel 16 wird hiernach:

$$Q_1 = \frac{E\,a\,t\,l\,f\,.\,\beta}{2\sum_{o}^{\frac{1}{2}l}\frac{b^2u^3}{h^2s^3} + 2\beta\sum_{o}^{\frac{1}{2}l}\frac{y^2s}{h^2}} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Für E = 2000000 pro cm, $t = \pm 60°$, $\sum_{o}^{\frac{1}{2}l}\frac{b^2u^3}{h^2s^2} = N_2$, $\sum_{o}^{\frac{1}{2}l}\frac{y^2s}{h^2} = N_1$,

$\alpha = \frac{1}{81200}$ folgt hieraus rund

$$Q_1 = \pm\frac{750\,f\,.\,l\,.\,\beta}{N_2 + \beta N_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

f bedeutet hierin den Querschnitt der oberen Gurtung, l die Spannweite.

4. Fortsetzung: Zahlenbeispiel.

Mit Hülfe der Formeln 17, 18, 19 und 20 soll nun für die in Fig. 5 dargestellte Brücke (Itterbrücke bei Eberbach, Badische Neckarthalbahn) der Horizontalschub für Lasten gleich der Einheit, welche an den Knotenpunkten der oberen Gurtung angebracht sind, bestimmt werden. Die Längen der einzelnen Stäbe in Centimetern sind soweit nöthig in folgender Tabelle enthalten.

$u_0 = 226$ $s_1 = 210$ $h_0 = 310$ $y_0 = 0$ $b = 310$
$u_1 = 220$ $s_2 = 210$ $h_1 = 227$ $y_1 = 83$ $l = 2310.$
$u_2 = 216$ $s_3 = 210$ $h_2 = 161$ $y_2 = 149$
$u_3 = 212$ $s_4 = 210$ $h_3 = 112$ $y_3 = 198$
$u_4 = 211$ $s_5 = 210$ $h_4 = 79$ $y_4 = 231$
$u_5 = 105$ $s_6 = 105$ $h_5 = 62$ $y_5 = 248$
$h_6 = 62$ $y_6 = 248$

Berechnung der Werthe von Z_2 und N_2.

Index	$\frac{u^3 b}{h^2 s^2}$	$\frac{u^3 b}{h^2 s^2}\,.\,b$	x	$\frac{u^3 b}{h^2 s^2}\,.\,x$	$\sum_{o}^{a}\frac{u^3 b\,x}{h^2 s^2} + a\sum_{a}^{\frac{l}{2}}\frac{u^3 b}{h^2 s^2} = Z_2$	a
0	$\frac{226^3\,.\,310}{310^3\,.\,210^2} = 0{,}8443$	261,7	0	0		
1	$\frac{220^3\,.\,310}{227^2\,.\,210^2} = 1{,}4526$	450,3	210	305,0	$0 + 210\,.\,28{,}5736 = 6000{,}5$	210
2	$\frac{216^3\,.\,310}{161^2\,.\,210^2} = 2{,}7329$	847,2	420	1147,9	$305{,}0 + 420\,.\,27{,}1210 = 11695{,}8$	420
3	$\frac{212^3\,.\,310}{112^2\,.\,210^2} = 5{,}3394$	1655,2	630	3363,8	$1452{,}9 + 630\,.\,24{,}3881 = 16817{,}4$	630
4	$\frac{211^3\,.\,310}{79^2\,.\,210^2} = 10{,}5810$	3280,0	840	8887,8	$4816{,}7 + 840\,.\,19{,}0487 = 20817{,}6$	840
5	$\frac{105^3\,.\,310}{62^2\,.\,105^2} = 8{,}4677$	2625,0	1050	8891,1	$13704{,}5 + 1050\,.\,8{,}4677 = 22595{,}6$	1050

$$\sum_{o}^{\frac{1}{2}l}\frac{u^3 b^2}{h^2 s^2} = 9119{,}4 = N_2$$

POLYTECHNISCHE VEREIN CARLSRUHE

Bei vorstehenden Summationen wurden in die Summe $\sum_{o}^{a}$ alle

Stäbe links vom belasteten Knotenpunkte und in die Summe $\sum_{\frac{1}{2}l}^{o}$ alle

Stäbe rechts vom belasteten Knotenpunkte bis zur Trägermitte ein-
gerechnet.

Die vorangesetzten Indices beziehen sich auf die in Figur 5 eingeschriebenen Stabnummern, welch' letztere so gewählt wurden, dass diejenigen Gurtstäbe und Vertikalen gleiche Nummern tragen, welche mit einander in den Formeln 17 und 19 einzuführen sind.

Die einzelnen Zahlenwerthe werden am raschsten logarithmisch berechnet, und wurde diese Methode auch bei vorstehenden Tabellen in Anwendung gebracht.

Für das Verhältniss des unteren Gurtquerschnittes zum oberen ($= \beta$) ist eine vorläufige Annahme zu machen, welche eventuell nach erfolgter Querschnittsbestimmung zu berichtigen ist.

Der Werth von β wird sich im Allgemeinen zwischen den Grenzen 1 und 3 bewegen; über die Schwankungen, welchen hierbei der Horizontalschub ausgesetzt ist, gibt folgende Tabelle Aufschluss, wobei gleichzeitig auch die theoretischen Grenzwerthe für $\beta = o$ und $\beta = \infty$ angegeben sind.

Die letzte Kolumne enthält zum Vergleiche die entsprechenden Werthe von Q für einen Träger der gleichen geometrischen Gestalt mit 3 Gelenken, bei welchem das Scheitelgelenk in der Mitte der unteren Gurtung, in einer Höhe von $g = 248$ cm. über den Kämpfern angebracht ist. Der Horizontalschub Q für eine im Abstand a vom Auflager aufgehängte Last 1 ergibt sich hiefür einfach zu:

$$Q = \frac{a}{2g} \text{ wo } g = \text{Pfeilhöhe} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Berechnung der Werthe von Z_1 und N_1.

Index	$\frac{sy}{h^2}$	$\frac{sy}{h^2} \cdot y$	x	$\frac{sy}{h^2} \cdot x$	$\sum_{o}^{a} \frac{s\,y\,x}{h^2} + a \sum_{a}^{\frac{l}{2}} \frac{h^2}{sy} = Z_1$	a
1	$\frac{210 \cdot 83}{227^2} = 0{,}3382$	28,1	210	71,0	$71{,}0 + 210 \cdot 32{,}6646 = 6930{,}6$	210
2	$\frac{210 \cdot 149}{161^2} = 1{,}2071$	179,9	420	507,0	$578{,}0 + 420 \cdot 31{,}4575 = 13790{,}1$	420
3	$\frac{210 \cdot 198}{112^2} = 3{,}3147$	656,3	630	2088,3	$2666{,}3 + 630 \cdot 28{,}1428 = 20396{,}3$	630
4	$\frac{210 \cdot 231}{79^2} = 7{,}7728$	1795,5	840	6529,1	$9195{,}4 + 840 \cdot 20{,}3700 = 26306{,}2$	840
5	$\frac{210 \cdot 248}{62^2} = 13{,}5800$	3360,0	1050	14225,8	$23421{,}2 + 1050 \cdot 6{,}7900 = 30550{,}7$	1050
6	$\frac{105 \cdot 248}{62^2} = 6{,}7900$	1680,0	1260	8555,4		

$$\sum_{o}^{\frac{1}{2}l} \frac{s\,y^2}{h^2} = 7699{,}8 = N_1$$

			Werthe von $Q=\frac{1}{2}\frac{Z_2+\beta Z_1}{N_2+\beta N_1}$ für:					$Q=\frac{a}{2g}=\frac{a}{496}$
a	Z_2	Z_1	$\beta=o$	1	2	3	∞	
210	6000,5	6930,6	0,329	0,384	0,405	0,416	0,450	0,423
420	11695,8	13790,1	0,641	0,757	0,800	0,823	0,896	0,847
630	16817,4	20396,3	0,922	1,106	1,174	1,210	1,324	1.270
840	20817,6	26306,2	1,141	1,400	1,496	1,547	1,708	1,694
1050	22595,6	30550,7	1,239	1,579	1,706	1,772	1,984	2,117
		Summa:	4,272	5,226	5,581	5,768	6,362	6,351.

Die berechneten Werthe von Q sind der besseren Uebersichtlichkeit wegen in Fig. 6 durch Kurven dargestellt, welche mit 0, 1, 2, 3, ∞, III bezeichnet sind. Es ist ersichtlich, dass die Werthe von Q mit wachsendem β, d. h. mit wachsendem Querschnitt der unteren Gurtung zunehmen und für den Grenzfall $\beta=\infty$, welcher einer absoluten Unpressbarkeit der unteren Gurtung entsprechen würde, sehr nahe mit den Werthen des Horizontalschubs bei 3 Gelenken übereinstimmen.

Die Werthe für die praktischen Grenzfälle $\beta=1$ und $\beta=3$ differiren im Mittel um ca. 10%, so dass je nach der ursprünglichen Annahme unter Umständen eine nachträgliche Revision des Horizontalschubs nach erfolgter Querschnittsbestimmung geboten erscheint. Da hiefür die Werthe von Z und N dieselben bleiben, und nur die Grösse von β sich ändert, so ist diese Revision sehr einfach durchzuführen.

Die Grösse des durch Temperatureinflüsse etc. hervorgerufenen Horizontalschubs ergibt sich nach Gleichung 20 zu:

$$Q_1=\pm\frac{750\,f\,2310\,\beta}{9119{,}4+\beta\,.\,7699{,}8};$$

Q_1 nimmt also bei gleichbleibendem Verhältnisse β direkt mit den Gurtquerschnitten zu.

Bei verschiedenen Werthen von β erhält man für:

$\beta=o$	1	2	3	∞
$Q_1=o$	$103\,f$	$142\,f$	$161\,f$	$225\,f$
$=0$	10300	14200	16100	22500 Klg. für $f=100\,\square$ cm.

Das Resultat, dass für $\beta=\infty$, d. h. für absolute Unpressbarkeit der unteren Gurtung, der Horizontalschub Q_1 eine endliche Grösse

behält, ist einigermaassen überraschend, findet aber seine Erklärung darin, dass die Unveränderlichkeit der Spannweite durch die Deformationen der oberen Gurtung allein bewirkt werden kann, zu welchem Zwecke ein Horizontalschub von endlicher Grösse ausreicht.

5. Bogenfachwerkträger von beliebiger Form.

Aus denselben Gründen wie bei dem in den vorigen Nummern behandelten Spezialfalle, können allgemein bei Bogenfachwerkträgern beliebiger Gestalt die Längenänderungen der Wandstäbe für die Bestimmung des Horizontalschubs vernachlässigt werden, und genügt es zu diesem Zweck, die Längenänderungen der Gurtstäbe allein in Rechnung zu ziehen.

Aus Gleichung 3a folgt für eine Verlängerung σ des oberen Gurtstabes s (siehe Figur 7)

$$dA=\sigma\,(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)=\frac{\sigma s}{r},$$

wenn r den senkrechten Abstand des Stabes s vom gegenüberliegenden Knotenpunkte W bezeichnet.

Die entsprechende Vergrösserung der Spannweite ergibt sich nach Gleichung 1 zu

$$dl=-dW.y=-dA\,.\,y=-\frac{\sigma s y}{r}.$$

Ebenso erhält man für eine Verlängerung v des unteren Gurtstabes u

$$dl=\frac{v u y}{r},$$

wo sich r und y auf den dem Stabe u gegenüberliegenden Knotenpunkt beziehen.

Die totale Spannweitenänderung ergibt sich durch Summation zu

$$dl=\sum_{o}^{l}\left\{-\frac{\sigma s y}{r}+\frac{v u y}{r}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(22)$$

Setzt man wie in No. 2

$$dl=o$$
$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2\,\Sigma Q+\sigma_3$$
$$v=v_1+v_2\,\Sigma Q+v_3$$

wo σ_1 und v_1 die durch die Vertikalkräfte,
σ_2 „ v_2 „ „ den Horizontalschub 1,
σ_3 „ v_3 „ „ die Temperaturänderungen erzeugten spezif. Verlängerungen bezeichnen, so erhält man schliesslich in ähnlicher Weise wie früher:

$$\text{Horizontalschub } \Sigma Q = \frac{\sum_0^l \left\{ -(\sigma_1+\sigma_3)\frac{s\,y}{r} + (v_1+v_3)\frac{u\,y}{r} \right\}}{\sum_0^l \left\{ +\sigma_3\frac{s\,y}{r} - v_2\frac{u\,y}{r} \right\}} \quad (23)$$

Für einen symmetrischen Träger, welcher durch 2 Lasten gleich der Einheit in Abständen a von den Auflagern symmetrisch belastet wird, ergibt sich: $\Sigma Q = 2Q$, wo Q den durch eine der beiden Lasten erzeugten Horizontalschub bezeichnet,

$\sigma_2 = \frac{y}{E f_1 r}$, $v_2 = -\frac{y}{E f_2 r}$
$\sigma_1 = \frac{-x}{E f_1 r}$, $v_1 = \frac{x}{E f_2 r}$ für $x < a$
$\sigma_1 = \frac{-a}{E f_1 r}$, $v_1 = \frac{a}{E f_2 r}$ für $x > a$

wenn mit E der Elasticitätsmodul, mit f_1 und f_2 die Querschnitte der oberen und unteren Gurtung bezeichnet werden.

Nach Einsetzen dieser Werthe in Gleichung 23 erhält man somit für eine im Abstand a vom Auflager aufgehängte Last 1 den Horizontalschub

$$Q = \frac{\sum_0^a \left\{ \frac{x\,y\,s}{E f_1 r^2} + \frac{x\,y\,u}{E f_2 r^2} \right\} + a \sum_a^{\frac{1}{2}l} \left\{ \frac{y\,s}{E f_1 r^2} + \frac{y\,u}{E f_2 r^2} \right\}}{2\sum_0^{\frac{1}{2}l} \left\{ \frac{y^2 s}{E f_1 r^2} + \frac{y^2 u}{E f_2 r^2} \right\}} \quad (24)$$

oder wenn man allgemein für die obere und untere Gurtung setzt: Querschnitt $= f$, Stablänge $= c$ und einen konstanten Elasticitätsmodul einführt,

$$Q = \frac{\sum_0^a \frac{x\,y\,c}{f r^2} + a \sum_a^{\frac{1}{2}l} \frac{y\,c}{f r^2}}{2\sum_0^{\frac{1}{2}l} \frac{y^2 c}{f r^2}} \quad (25)$$

x und y bedeuten hierin die Koordinaten des dem betreffenden Gurtstabe c gegenüberliegenden Knotenpunktes, r die Entfernung dieses Knotenpunktes vom Stabe c.

Für den durch eine Temperaturänderung von $t°$ erzeugten Horizontalschub erhält man ähnlich wie in No. 3

$$Q_1 = \frac{E\alpha t l}{2\sum_0^{\frac{1}{2}l} \frac{y^2 c}{f r^2}} \quad (26)$$

Zu bemerken ist, dass die früher entwickelten Spezialformeln für den Bogenträger mit versteiften Zwickeln auch direkt aus Gleichungen 25 und 26 erhalten werden können, wenn man r durch die entsprechenden Stablängen ausdrückt.

Mit Hülfe der Formeln 25 und 26 lässt sich nun für Bogenfachwerkträger von beliebiger Form der Horizontalschub in derselben einfachen Weise berechnen, wie dies in dem Beispiele von No. 4 für versteifte Zwickelkonstruktion durchgeführt wurde.

6. Bogenfachwerkträger von konstanter Bogenhöhe.

Sind die Gurtungen überall gleichweit von einander entfernt, also r konstant, und lässt sich auch der Querschnitt f konstant setzen, was im Allgemeinen immer zulässig ist, so vereinfacht sich Gleichung 25 zu:

$$Q = \frac{\sum_0^a x\,y\,c + a\sum_a^{\frac{1}{2}l} y\,c}{2\sum_0^{\frac{1}{2}l} y^2 c} \quad (27)$$

und Gleichung 26 zu:

$$Q_1 = \frac{E\,\alpha\,t\,l\,f\,r^2}{\frac{1}{2}\,l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

$$2\sum_{o} y^2\,c$$

$$= \frac{600\,l\,f\,r^2}{\frac{1}{2}\,l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

$$\sum_{o} y^2\,c$$

wenn man $E = 2000000$, $\alpha = \frac{1}{81200}$, $t = ca\ 49°$ einsetzt.

Der Werth von t wurde geringer als in No. 3 gewählt, weil hier die Temperaturen beider Gurtungen nicht beträchtlich von einander abweichen können.

Vorstehende Formeln gelten streng genommen nur für Träger einfachen Systems; sie können jedoch auch auf Träger mehrfachen Systems angewendet werden, wenn man nur unter x und y die Koordinaten desjenigen Punktes versteht, welcher der Mitte des betreffenden Gurtstabes in der anderen Gurtung gegenüberliegt.

(Siehe Stab c und Punkt S in Fig. 8 für doppeltes System.)

Geht man zu unendlichfachem Systeme über, bei welchem die einzelnen Gurtstablängen unendlich klein werden, so erhält man die für massive Bogenträger gültigen Formeln. Es bezeichne ds_1 ein oberes, ds_2 ein unteres Gurtelement; y_1 und y_2 die Ordinaten der oberen bezw. unteren Gurtung; die Gleichungen 27 und 29 gehen dann, wenn man bei der Integration die von der oberen und unteren Gurtung herrührenden Glieder trennt, über in:

$$Q = \frac{\int_o^a x\,y_2\,ds_1 + \int_o^a x y_1\,ds_2 + a\int_a^{\frac{l}{2}} y_1\,ds_1 + a\int_a^{\frac{l}{2}} y_1\,ds_2}{\int_o^{\frac{l}{2}} y_2^2\,ds_1 + 2\int_o^{\frac{l}{2}} y_1^2\,ds_2} \quad (30)$$

$$Q_1 = \frac{600\,l\,f\,r^2}{\int_o^{\frac{l}{2}} y_2^2\,ds_1 + \int_o^{\frac{l}{2}} y_1^2\,ds_2} \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

Mit einer geringen Vernachlässigung können in diesen beiden Gleichungen statt der Gurtelemente ds_1 und ds_2 nnd der Gurtordinaten y_1 und y_2 die Elemente ds und Ordinaten y der Bogenmittellinie eingeführt werden. Es entspricht dies der Vernachlässigung der „Tangentialkraft“ in der Theorie der massiven Bogenträger.

Man erhält hierdurch:

$$Q = \frac{\int_o^a x\,y\,ds + a\int_a^{\frac{l}{2}} y\,ds}{2\int_o^{\frac{l}{2}} y^2\,ds} \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

$$Q_1 = \frac{300\,l\,f\,r^2}{\int_o^{\frac{l}{2}} y^2\,ds} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Beispielsweise ergibt sich hieraus bei kreisförmiger Mittellinie, deren Radius $= R$ und deren Gleichung

$$y = -g + \sqrt{l\,x - x^2 + g^2},$$

$$Q = \frac{a\,R\,(l-a) - 2\,g\,(s - s_a)\,.\,a - g\,.\,l\,.\,s_a + 2\,R\,g\,y_a}{2\,R^2\,s + 4\,g^2\,s - 3\,g\,R\,l} \quad (34)$$

wo s = halbe Bogenlänge, s_a = Bogenlänge von o bis Abscisse a, y_a = Ordinate für Abscisse a, g = Radius weniger Pfeilhöhe.

Für den durch Temperatureinflüsse etc. erzeugten Horizontalschub erhält man:

$$Q_1 = \frac{600\,l\,f\,r^2}{R^2\,s + 2\,g^2\,s - 1{,}5\,g\,R\,l} \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

Für den Halbkreis wird $g = o$, wodurch sich vorstehende Formeln wesentlich vereinfachen:

$$Q = \frac{4\,a\,(l-a)}{\pi\,l^2} = \frac{1{,}280\,a\,(l-a)}{l^2} \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

und

$$Q_1 = \frac{9600\,f\,r^2}{\pi\,l^2} = \frac{3060\,f\,r^2}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Für flache Bogenträger kann in den Formeln 32 und 33 ohne grossen Fehler dx statt ds gesetzt werden; beispielsweise erhält man hieraus für einen flachen Parabelbogen von der Pfeilhöhe b, dessen Gleichung $y = \frac{4\,b}{l^2}\,(l\,x - x^2)$

$$Q = \frac{5}{8\,bl^2}\,(a^4 - 2\,l\,a^3 + l^3\,a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

und

$$Q_1 = 1125\,f\,\frac{r^2}{b^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Anmerkung. In der angenäherten, für flache Bögen gültigen Formel

$$Q = \frac{\int_0^a x\,y\,dx + a\int_a^{\frac{l}{2}} y\,dx}{2\int_0^{\frac{l}{2}} y^2\,d\,x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

bedeutet $\int_0^a x\,y\,dx$ das statische Moment der Fläche I (Fig. 9) bezüglich der Y Achse, $\int_a^{\frac{l}{2}} y\,dx$ den Inhalt der Fläche II. Denkt man sich die Fläche II um die Richtungslinie der Last P senkrecht aufgebogen, so stellt $a \cdot \int_a^{\frac{l}{2}} y\,dx$ das statische Moment der aufgebogenen Fläche II bezüglich der Y Achse dar, somit $\int_0^a x\,y\,dx + a\int_a^{\frac{l}{2}} y\,dx$ das statische Moment der geknickten totalen Fläche bezüglich der Y Achse.

$\int_0^{\frac{l}{2}} y^2\,dx$ ist gleich dem doppelten statischen Momente der totalen, ungeknickten Fläche I + II bezüglich der X Achse. Diese einfachen Beziehungen gestatten, die Gleichung 40 ohne jede analytische Rechnung durch einfaches Abwägen ausgeschnittener Flächenstücke aufzulösen, worauf jedoch nicht weiter eingegangen werden soll, da der Rechnungsweg immerhin rascher zum Ziele führt.

B. Bogenfachwerkträger ohne Gelenk.

(Eingespannte Träger.)

7. Allgemeines Verfahren; Träger von konstanter Bogenhöhe.

Unter die eingespannten Bogenträger sind nur diejenigen Bogenträger zu rechnen, welche vermöge ihrer Auflagerung keine Drehbewegungen an den Widerlagern ausführen können, also in erster Linie die sogenannten steifen Bogenträger, deren Gurten am Auflager nicht zusammengeführt sind (Fig. 10). Bogenträger mit versteiften Zwickeln sind, wenn man von dem ungewöhnlichen Falle einer Verankerung der oberen Gurtung absieht, nicht hieher zu rechnen, da dieselben, auch wenn thatsächlich keine Gelenke an den Widerlagern ausgeführt sind, dennoch kleine Drehbewegungen daselbst ausführen können und somit unter Abtheilung A fallen. —

Zur Bestimmung der ursprünglichen 6 Unbekannten (für jedes Widerlager jeweils der vertikale Auflagerdruck, der Horizontalschub und das Einspannungsmoment) dienen in erster Linie die 3 allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, durch welche die Zahl der Unbekannten auf 3 reduzirt wird. Um letztere 3 Unbekannte (als welche A, Q und M des linkseitigen Widerlagers gewählt werden mögen) zu ermitteln, sind folgende 3 Elasticitätsgleichungen aufzustellen:

1. Aenderung der Spannweite in Folge der äusseren Einflüsse gleich Null,
2. Aenderung der gegenseitigen Höhenlage der Auflager gleich Null,

3. Aenderung des Winkels Φ, den die Widerlagsflächen mit einander einschliessen, gleich Null.

Die erste Bedingung gibt die in No. 5 aufgestelle Gleichung 22,

$$dl = o = \sum_{o}^{l} \left\{ -\frac{\sigma s y}{r} + \frac{v u y}{r} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

wenn man wie dort den Einfluss der Wandglieder vernachlässigt.

Die Senkung des rechtseitigen Widerlagers gegen das linkseitige erhält man ähnlich wie Gleichung 1 zu:

$$dh = -\sum_{o}^{l} \left\{ v\,(y_1 - y_0) + dW \,.\, x \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

wo v die spezifische Verlängerung eines unteren Gurtstabes, y_1 und y_0 die Ordinaten von dessen rechtseitigem, bezw. linkseitigem Endpunkte, dW die Vergrösserung eines unteren Knotenpunktswinkels, x die horizontale Entfernung des betreff. Knotenpunktes vom linkseitigen Auflager der unteren Gurtung.

Berücksichtigt man nur die Aenderungen der Gurtstäbe, so erhält man aus Gleichung 41, ähnlich wie früher, als zweite Elasticitätsgleichung:

$$dh = o = \sum_{o}^{l} \left\{ -\frac{\sigma s x}{r} + \frac{v u x}{r} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

In gleicher Weise ergibt sich die dritte Elasticitätsgleichung zu:

$$d\Phi = o = \sum_{o}^{l} \left\{ -\frac{\sigma s}{r} + \frac{v u}{r} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Sieht man vorerst von den Temperatureinflüssen ab und bezeichnet mit: σ_1 v_1 die durch eine im Abstand a vom linken Auflager aufgehängte Last 1 erzeugten spezifischen Verlängerungen, σ_2 v_2 die durch eine vertikale Auflagerreaktion 1 erzeugten spezifischen Verlängerungen, σ_3 v_3 die durch einen Horizontalschub 1 erzeugten spezifischen Verlängerungen, σ_4 v_4 die durch ein Einspannungsmoment*) 1 erzeugten

*) Positiv, wenn in der Richtung des Uhrzeigers drehend (s. Fig. 10).

spezifischen Verlängerungen, so gehen die Bestimmunsgleichungen 22, 42, 43 über in:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{o}^{l} \left\{ (v_1 + A v_2 + Q v_3 + M v_4) \frac{u y}{r} - (\sigma_1 + A \sigma_2 + Q \sigma_3 + M \sigma_4) \frac{s y}{r} \right\} \\
&\sum_{o}^{l} \left\{ (v_1 + A v_2 + Q v_3 + M v_4) \frac{u x}{r} - (\sigma_1 + A \sigma_2 + Q \sigma_3 + M \sigma_4) \frac{s x}{r} \right\} \\
&\sum_{o}^{l} \left\{ (v_1 + A v_2 + Q v_3 + M v_4) \frac{u}{r} - (\sigma_1 + A \sigma_2 + Q \sigma_3 + M \sigma_4) \frac{s}{r} \right\}
\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Die Werthe von v_1 v_2 etc. sind im gegebenen Falle leicht zu ermitteln. Für den speziellen Fall, dass r konstant (Träger von konstanter Bogenhöhe), Gurtquerschnitt und Elasticitätsmodul ebenfalls konstant, erhält man nach Einsetzen der betreff. Werthe von v_1 v_2 etc.

$$\left.\begin{aligned}
&-\sum_{a}^{l} (x-a)\, y\, c + A \sum_{o}^{l} x y c - Q \sum_{o}^{l} y^2 c + M \sum_{o}^{l} y c = o \\
&-\sum_{a}^{l} (x-a)\, x\, c + A \sum_{o}^{l} x^2 c - Q \sum_{o}^{l} x y c + M \sum_{o}^{l} x c = o \\
&-\sum_{a}^{l} (x-a)\, c + A \sum_{o}^{l} x\, c - Q \sum_{o}^{l} y\, c + M \sum_{o}^{l} c = o
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (45)$$

wenn man wie in No. 5 die Länge eines Gurtstabes $= c$ und die Koordinaten des gegenüberliegenden Knotenpunktes $= x$ und y (auf das linkseitige Auflager der unteren Gurtung bezogen) setzt.

Für unendlich kleine Gurtstablängen (massiver Träger), und wenn man näherungsweise statt der Gurtelemente und Gurtkoordinaten die Differentiale und die Koordinaten der Bogenmittellinie einführt, gehen die Gleichungen 45 über in:

POLYTECHNISCHER VEREIN CARLSRUHE

$$\left.\begin{aligned}
-\int_a^l (x-a)\,y\,ds + A\int_o^l x\,y\,ds - Q\int_o^l y^2\,ds + M\int_o^l y\,ds = o\\
-\int_a^l (x-a)\,x\,ds + A\int_o^l x^2\,ds - Q\int_o^l x\,y\,ds + M\int_o^l x\,ds = o\\
-\int_a^l (x-a)\,ds + A\int_o^l x\,ds - Q\int_o^l y\,ds + M\int_o^l ds = o
\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Selbstverständlich ist jetzt der Koordinatenursprung in den Auflagerpunkt der Bogenmittellinie zu verlegen, und sind auch die Auflagerreaktionen A und Q an diesem Punkte wirksam zu denken.

Bei flachen Bögen kann eventuell zur Erleichterung der Rechnung für die Integration dx statt ds gesetzt werden.

Um die durch Temperaturänderungen erzeugten äusseren Kräfte A_1 Q_1 M_1 zu bestimmen, denken wir uns den ganzen Träger gleichmässig um t Grad erwärmt. Die spezifische Verlängerung ist sodann für alle Stäbe konstant gleich αt, die Vergrösserung der Spannweite gleich $\alpha t l$, die Aenderung der gegenseitigen Höhenlage und des Winkels der beiden Widerlager gleich Null.

Die Bestimmungsgleichungen 22, 42, 43 erhalten hierdurch folgende Form:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_o^l \left\{\alpha t l + (A_1 v_2 + Q_1 v_3 + M_1 v_4)\frac{u\,y}{r} - (A_1 \sigma_2 + Q_1 \sigma_3 + M_1 s_4)\frac{s\,y}{r}\right\} = o\\
\sum_o^l \left\{o + (A_1 v_2 + Q_1 v_3 + M_1 v_4)\frac{u\,x}{r} - (A_1 \sigma_2 + Q_1 \sigma_3 + M_1 s_4)\frac{s\,x}{r}\right\} = o\\
\sum_o^l \left\{o + (A_1 v_2 + Q_1 v_3 + M_1 v_4)\frac{u}{r} - (A_1 \sigma_2 + Q_1 \sigma_3 + M_1 \sigma_4)\frac{s}{r}\right\} = o
\end{aligned}\right\} \quad (44a)$$

Vorstehende Gleichungen sind zwar theoretisch nicht ganz genau richtig, in so fern bezüglich der Temperatur die Verlängerungen sämmtlicher Stäbe, bezüglich der äusseren Kräfte A_1 Q_1 M_1 aber nur diejenigen der Gurtstäbe berücksichtigt wurden. Für die Zwecke der Praxis kommt jedoch diese Ungenauigkeit wegen ihrer Geringfügigkeit nicht weiter in Betracht.

Sind r und der Gurtquerschnitt f konstant, so gehen die Gleichungen 44a über in:

$$\left.\begin{aligned}
E\alpha t l f r^2 + A_1 \sum_o^l x\,y\,c - Q_1 \sum_o^l y^2 c + M_1 \sum_o^l y\,c = o\\
A_1 \sum_o^l x^2\,c - Q_1 \sum_o^l x y c + M_1 \sum_o^l x\,c = o\\
A_1 \sum_o^l x\,c - Q_1 \sum_o^l y\,c + M_1 \sum_o^l c = o
\end{aligned}\right\} \quad (45a)$$

Für unendlich kleine Gurtstablängen ($c = ds$) folgt hieraus:

$$\left.\begin{aligned}
E\alpha t l f r^2 + A_1 \int_o^l x\,y\,ds - Q_1 \int_o^l y^2\,ds + M_1 \int_o^l y\,ds = o\\
A_1 \int_o^l x^2\,ds - Q' \int_o^l x y\,ds + M_1 \int_o^l x\,ds = o\\
A_1 \int_o^l x\,ds - Q_1 \int_o^l y\,ds + M_1 \int_o^l ds = o
\end{aligned}\right\} \quad (46a)$$

wo bei flachen Bögen ebenfalls dx statt ds gesetzt werden kann.

Die Gleichungen 45 und 45a, bezw. 46 und 46a lösen nun die Aufgabe vollständig, für eine im Abstand a vom Auflager aufgehängte Last 1 und eine Temperaturänderung von t Grad die Werthe der hierdurch hervorgerufenen Auflagerreaktionen und des Einspannungsmomentes zu bestimmen.

Die weitere Ausrechnung ist im speziellen Falle leicht durchführbar, und soll desshalb bei der geringeren praktischen Wichtigkeit der eingespannten Bogenträger der Gegenstand hier nicht weiter verfolgt werden.

II. Bestimmung der inneren Kräfte und der Dimensionen.

8. Bestimmung der inneren Kräfte (Stabkräfte).

Sind nach den vorigen Nummern die äusseren Kräfte ermittelt, so kann zur Bestimmung der in den einzelnen Stäben wirkenden inneren Kräfte geschritten werden. Das einzuhaltende Verfahren ist kurz folgendes:

Zur Ermittlung der in dem beliebigen Stabe d (Fig. 11) herrschenden inneren Kraft p denken wir uns den Träger durch einen Schnitt, welcher ausser dem betrachteten Stabe d noch zwei andere Stäbe s und u trifft, auseinandergeschnitten und bringen an den Schnittstellen der Stäbe die auf den einen (beispielsweise den linkseitigen) Trägertheil wirkenden Stabkräfte an. Dieselben stehen mit den an demselben Trägertheil wirkenden äusseren Kräften im Gleichgewicht und muss daher das statische Moment sämmtlicher Kräfte um einen beliebigen Punkt der Bildfläche gleich Null sein. Als Drehpunkt wählen wir den Schnittpunkt der beiden Stabrichtungen s und u (Punkt K der Figur 11), für welchen die statischen Momente der Stabkräfte von s und u gleich Null sind. Die Belastung des Trägers bestehe aus einer einzigen Last $P = 1$, welche an einem Knotenpunkt in der Entfernung a vom linkseitigen Widerlager aufgehängt sei. Die Koordinaten des Schnittpunktes K in Bezug auf das linkseitige Auflager der unteren Gurtung seien mit ξ und η, die senkrechte Entfernung des Punktes K von der Stabrichtung d mit ζ bezeichnet.

Auf den linkseitigen Trägertheil wirken nun im Allgemeinen von äusseren Kräften: die vertikale Auflagerreaktion A, der Horizontalschub Q, das Einspannungsmoment M (dasselbe ist bei Kämpfergelenken gleich Null), und eventuell die Last 1, je nach dem Aufhängungsorte derselben.

Die Bestimmungsgleichung für die Stabkraft p (positiv für Zug, negativ für Druck) ist daher:

$$A\xi - Q\eta + M - p\zeta = o,$$

wenn die Last rechts von der Schnittstelle hängt.

Hieraus ergibt sich

$$p = \frac{A\xi - Q\eta + M}{\zeta} \quad \ldots\ldots \quad (47a)$$

Hängt die Last links von der Schnittstelle, so erhält man in derselbe Weise

$$p = \frac{A\xi - 1(\xi - a) - Q\eta + M}{\zeta} \quad \ldots\ldots \quad (47b)$$

Hierzu ist noch zu bemerken, dass den Formeln 47 der in Fig. 11 dargestellte spezielle Fall zu Grunde liegt, dass die positive Richtung der Kraft p im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers um den Punkt K dreht. Für eine andere Disposition, bei welcher die positive Kraft p im Sinne des Uhrzeigers um den Schnittpunkt K dreht, würden sämmtliche Glieder auf der rechten Seite der Gleichungen 47 entgegengesetztes Vorzeichen erhalten.

Die Gleichungen 47 sollen nun für den Spezialfall eines Bogenträgers mit versteifter Zwickelkonstruktion und zwei Kämpfergelenken weiter entwickelt und auf ein Zahlenbeispiel angewendet werden.

Wir setzen wie in No. 2 einen symmetrischen Träger mit gleichbreiten Feldern, horizontaler Obergurt, vertikalen Ständern und nach der Mitte fallenden Diagonalen voraus (Fig. 12); die Lasten wirken in den Knotenpunkten der oberen Gurtung.

Für einen Stab s der oberen Gurtung gehen dann die Gleichungen 47 über in:

$$p = \frac{Q\,y}{h} - \frac{(l-a)\,x}{l\,h},$$

wenn die Last rechts von der Schnittstelle hängt, d. h. für $x \leqq a$ und

$$p = \frac{Q\,y}{h} - \frac{(l-x)\,a}{l\,h},$$

wenn die Last links von der Schnittstelle hängt, d. h. für $x \geqq a$, wobei sich h, x und y wie früher auf den dem Gurtstab s gegenüber liegenden Knotenpunkt der unteren Gurtung beziehen.

Bezeichnet man mit z die Felderzahl, m die Ordnungszahl des belasteten Knotenpunkts vom linkseitigen Auflager her gerechnet (in Fig. 12 gleich 8), n die Ordnungszahl des betr. Knotenpunkts vom

rechten Auflager her gerechnet (in Fig. 12 gleich 4), so kann man, da die Felderbreite konstant angenommen ist, setzen:

$$\frac{a}{l}=\frac{m}{z},\quad \frac{l-a}{l}=\frac{n}{z},$$

wodurch obige Gleichungen folgende Form annehmen:

$$p=\frac{Q\,y}{h}-\frac{n}{z}\,\frac{x}{h}\text{ für }x\leqq a\quad\ldots\ldots\quad(48a)$$

$$p=\frac{Q\,y}{h}-\frac{m}{z}\,\frac{(l-x)}{h}\text{ für }x\geqq a.\quad\ldots\quad(48b)$$

Aehnlich erhält man für die untere Gurtung:

$$p=-\frac{Q\,b\,u}{h\,s}+\frac{(l-a)\,x\,u}{l\,h\,s}=-\frac{Q\,b\,u}{h\,s}+\frac{n\,x\,u}{z\,h\,s},\ x\leqq a\quad.\quad(49a)$$

$$p=-\frac{Q\,b\,u}{h\,s}+\frac{(l-x)\,a\,u}{l\,h\,s}=-\frac{Q\,b\,u}{h\,s}+\frac{m\,(l-x)\,u}{z\,h\,s},\ x\geqq a,\quad(49b)$$

für die Diagonalen:

$$p=-\frac{Q\,b\,(h-h_1)\,d}{h\,h_1\,s}+\frac{l-a}{l}\left(\frac{x\,(h-h_1)\,d}{h\,h_1\,s}+\frac{d}{h_1}\right)=-\frac{Q\,b\,(h-h_1)\,d}{h\,h_1\,s}$$
$$+\frac{n}{z}\left(\frac{x\,(h-h_1)\,d}{h\,h_1\,s}+\frac{d}{h_1}\right)\text{ für }x\lessdot a\quad\ldots\quad(50a)$$

$$p=-\frac{Q\,b\,(h-h_1)\,d}{h\,h_1\,s}+\frac{a}{l}\left(\frac{(l-x)\,(h-h_1)\,d}{h\,h_1\,s}-\frac{d}{h_1}\right)=-\frac{Q\,b\,(h-h_1)\,d}{h\,h_1\,s}$$
$$+\frac{m}{z}\left(\frac{(l-x)\,(h-h_1)\,d}{h\,h_1\,s}-\frac{d}{h_1}\right)\text{ für }x\geqq a,\quad.\quad(50b)$$

für die Vertikalen:

$$p=\frac{Q\,b\,(h-h_1)}{h\,s}-\frac{l-a}{l}\left(\frac{x\,(h-h_1)}{h\,s}+1\right)=\frac{Q\,b\,(h-h_1)}{h\,s}$$
$$-\frac{n}{z}\left(\frac{x\,(h-h_1)}{h\,s}+1\right)\text{ für }x\leqq a\quad\ldots\quad(51a)$$

$$p=\frac{Q\,b\,(h-h_1)}{h\,s}-\frac{a}{l}\left(\frac{(l-x)\,(h-h_1)}{h\,s}-1\right)=\frac{Q\,b\,(h-h_1)}{h\,s}$$
$$-\frac{m}{z}\left(\frac{(l-x)\,(h-h_1)}{h\,s}-1\right)\text{ für }x\gtrdot a.\quad..\quad(51b)$$

Die einzelnen Buchstabengrössen haben in diesen Gleichungen die in No. 2 angegebene Bedeutung.

Mit Hülfe der Werthe von p können nun leicht die durch beliebige ruhende oder bewegliche Lasten hervorgerufenen Stabkräfte bestimmt werden:

Zuerst sind für den betrachteten Stab (beispielsweise der oberen Gurtung) sämmtliche Kräfte p zu berechnen, indem man successive die Last 1 an sämmtlichen Knotenpunkten wirksam denkt.

Die durch ruhende Last erzeugten Stabkräfte erhält man dann, wenn man sämmtliche Grössen p, nach vorheriger Multiplikation mit den in den betreffenden Knotenpunkten konzentrirten Lasten P, zu einander addirt:

$$S_1=\Sigma(p\,.\,P);$$

Für die durch die bewegliche Belastung erzeugten Maxima und Minima der Stabkräfte sind das eine Mal nur die positiven p, das andere Mal nur die negativen p, nach vorheriger Multiplikation mit den Knotenpunktbelastungen Π, zu addiren:

$$\text{max. } S_2=\Sigma(+p\,\Pi)$$
$$\text{min. } S_1=\Sigma(-p\,\Pi).$$

Die durch die Temperaturänderungen etc. erzeugten Stabkräfte sind:

$$\left.\begin{array}{lll}\text{für die oberen Gurtungsstäbe} & O_3=\dfrac{Q_1\,y}{h} & \\ \text{„ „ unteren „ „} & U_3=-\dfrac{Q_1\,b\,u}{h\,s} & \\ \text{„ „ Diagonalen} & D_3=-\dfrac{Q_1\,b\,(h-h_1)\,d}{h\,h_1\,s} & \\ \text{„ „ Vertikalen} & H_3=\dfrac{Q_1\,b\,(h-h_1)}{h\,s} & \end{array}\right\}\quad(52)$$

9. Fortsetzung: Zahlenbeispiel.

Für den in No. 4 betrachteten Träger (Fig. 5) sollen nun für je einen Stab der oberen Gurtung, unteren Gurtung, der Diagonalen und Vertikalen die inneren Kräfte ermittelt werden. Es wird hierbei für die ruhende Last (Eigengewicht) eine konstante Knotenpunktsbelastung von 1600 Klg., für die bewegte eine solche von 6200 Klg. in Rechnung gestellt.

Obere Gurtung, Stab s_3.

Die in die Gleichungen 48 einzuführenden Zahlenwerthe sind nach No. 4

$y = 248$, $h = 62$, z (Federzahl) $= 11$, $x = 5 \cdot 210 = 1050$,

$l - x = 6 \cdot 210 = 1260$.

Die Gleichungen 48 gehen hierdurch über in:

$$p = Q \cdot \frac{248}{62} - n \cdot \frac{1050}{11 \cdot 62} = 4\,Q - 1{,}54\,n \text{ für } x \leqq a \quad . \quad (48a)$$

$$p = Q \cdot \frac{248}{62} - \frac{m \cdot 1260}{11 \cdot 62} = 4\,Q - 1{,}847\,m \text{ für } x \geqq a \quad . \quad (48b)$$

Bezeichnet man die Kraft p, welche von einer Knotenpunktsbelastung $= 1$ herrührt, je nach dem Knotenpunkt, an welchem die Last hängt, successive mit p_1 p_2 p_3 etc. und wählt dann die Werthe von Q nach der Tabelle in No. 4 für $\beta = 2$, so erhält man:

Nach Formel 48a Formel 48b

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} p_1 = 4 \cdot 0{,}405 - 1{,}847 \cdot 1 = -0{,}227 \\ p_2 = 4 \cdot 0{,}8 \quad - 1{,}847 \cdot 2 = -0{,}494 \\ p_3 = 4 \cdot 1{,}174 - 1{,}847 \cdot 3 = -0{,}845 \\ p_4 = 4 \cdot 1{,}496 - 1{,}847 \cdot 4 = -1{,}404 \\ p_5 = 4 \cdot 1{,}706 - 1{,}847 \cdot 5 = -2{,}411 \end{array}\right\} \Sigma(-p) = -6{,}433 \\ \left.\begin{array}{l} p_6 = 4 \cdot 1{,}706 - 1{,}54 \ \ \cdot 5 = -0{,}876 \\ p_7 = 4 \cdot 1{,}496 - 1{,}54 \ \ \cdot 4 = -0{,}176 \\ p_8 = 4 \cdot 1{,}174 - 1{,}54 \ \ \cdot 3 = +0{,}076 \\ p_9 = 4 \cdot 0{,}8 \quad - 1{,}54 \ \ \cdot 2 = +0{,}120 \\ p_{10} = 4 \cdot 0{,}405 - 1{,}54 \ \ \cdot 1 = +0{,}080 \end{array}\right\} \Sigma(+p) = +0{,}276 \end{array}\right\} \Sigma p = -6{,}157.$$

Zu bemerken ist, dass p_5 auch nach Formel 48a hätte berechnet werden können.

Die durch das Eigengewicht erzeugte innere Kraft ist nun

$$S_1 = \Sigma(p\,P) = -6{,}157 \cdot 1600 = -9851 \text{ Klg},$$

das Maximum der durch die bewegte Last erzeugten Kraft

$$\max. S_2 = \Sigma(+p\,II) = +0{,}276 \cdot 6200 = +1711 \text{ Klg},$$

das Minimum $S_3 = \Sigma(-p\,II) = -6{,}433 \cdot 6200 = -39885$ Klg.

Durch die Temperaturänderungen wird nach No. 4 für $\beta = 2$ und $f = 100$ ein Horizontalschub von $\pm$ 14200 Klg. erzeugt. Derselbe bewirkt nach Gleichung 52 eine Stabspannung

$$S_3 = \pm \frac{14200 \cdot 248}{62} = \pm 56800 \text{ Klg}.$$

Fasst man die gefundenen Resultate zusammen, so schwanken bei höchster Temperatur die Stabkräfte zwischen

$$-9851 + 1711 + 56800 = +48660 \text{ Klg}.$$
$$\text{und } -9851 - 39885 + 56800 = +7064 \ ,,$$

bei niedrigster Temperatur zwischen

$$-9851 + 1711 - 56800 = -64940 \text{ Klg}.$$
$$\text{und } -9851 - 39885 - 56800 = -106536 \ ,,$$

Untere Gurtung; Stab u_2

$b = 310$, $u = 216$, $s = 210$, $h = 161$, $x = 2 \cdot 210 = 420$, $l - x = 9 \cdot 210 = 1890$, $z = 11$.

$$p = -\frac{Q\,310 \cdot 216}{161 \cdot 210} + \frac{n \cdot 420 \cdot 216}{11 \cdot 161 \cdot 210} = -1{,}98\,Q + 0{,}244\,n;\ x \leqq a \quad (49a)$$

$$p = -1{,}98\,Q + \frac{m \cdot 9 \cdot 210 \cdot 216}{11 \cdot 161 \cdot 210} = -1{,}98\,Q + 1{,}1\,m;\ x \geqq a \ . \quad (49b)$$

Formel 49a 49b

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} p_1 = -1{,}98 \cdot 0{,}405 + 1{,}1 \ \ \cdot 1 = +0{,}298 \\ p_2 = -1{,}98 \cdot 0{,}8 \quad + 1{,}1 \ \ \cdot 2 = +0{,}616 \end{array}\right\} \Sigma(+p) = 0{,}914 \\ \left.\begin{array}{l} p_3 = -1{,}98 \cdot 1{,}174 + 0{,}244 \cdot 8 = -0{,}372 \\ p_4 = -1{,}98 \cdot 1{,}496 + 0{,}244 \cdot 7 = -1{,}254 \\ p_5 = -1{,}98 \cdot 1{,}706 + 0{,}244 \cdot 6 = -1{,}915 \\ p_6 = -1{,}98 \cdot 1{,}706 + 0{,}244 \cdot 5 = -2{,}159 \\ p_7 = -1{,}98 \cdot 1{,}496 + 0{,}244 \cdot 4 = -1{,}986 \\ p_8 = -1{,}98 \cdot 1{,}174 + 0{,}244 \cdot 3 = -1{,}592 \\ p_9 = -1{,}98 \cdot 0{,}8 \quad + 0{,}244 \cdot 2 = -1{,}096 \\ p_{10} = -1{,}98 \cdot 0{,}405 + 0{,}244 \cdot 1 = -0{,}558 \end{array}\right\} \Sigma(-p) = -10{,}932 \end{array}\right\} \Sigma p = -10{,}018$$

$$U_1 = -10{,}018 \cdot 1600 = -16029 \text{ Klg}.$$
$$\max. U_2 = +0{,}914 \cdot 6200 = +5667 \ ,,$$
$$\min. U_2 = -10{,}932 \cdot 6200 = -67778 \ ,,$$

$$U_3 = \mp \frac{14200 \cdot 310 \cdot 216}{161 \cdot 210} = \mp 28116 \text{ Klg}. \quad . \quad . \quad (52)$$

Bei höchster Temperatur schwanken die Stabkräfte zwischen

$$-16029 + 5667 - 28116 = -38478 \text{ Klg}.$$
$$\text{und } -16029 - 67778 - 28116 = -111923 \ ,,$$

bei niedrigster Temperatur zwischen

$$-16029 + 5667 + 28116 = +17754 \text{ Klg}.$$
$$\text{und } -16029 - 67778 + 28116 = -55691 \ ,,$$

Diagonale d_2

$b = 310$, $h = 161$, $h_1 = 112$, $d = 238$, $s = 210$, $z = 11$, $l - x = 9 \cdot 210 = 1890$, $x = 2 \cdot 210 = 420$.

$$p = -\frac{Q\,310 \cdot (161 - 112) \cdot 238}{161 \cdot 112 \cdot 210} + \frac{n}{11}\left(\frac{2 \cdot 210\,(161 - 112)\,238}{161 \cdot 112 \cdot 210} + \frac{238}{112}\right)$$
$$= -0{,}954\,Q + 0{,}31\,n;\ x \angle a \ . \ . \ . \ . \ . \quad (50a)$$

$$p = -0{,}954\,Q + \frac{m}{11}\left(\frac{9\,.\,210\,(161-112)\,238}{161\,.\,112\,.\,210} - \frac{238}{112}\right) = -0{,}954\,Q + 0{,}337\,m;$$

$$x \geqq a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50\,b)$$

50b:
$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -0{,}954\,.\,0{,}405 + 0{,}337\,.\,1 = -0{,}049 \\ p_2 &= -0{,}954\,.\,0{,}8 \quad + 0{,}337\,.\,2 = -0{,}089 \end{aligned}\right\} \Sigma = -0{,}138$$

Formel 50a:
$$\left.\begin{aligned} p_3 &= -0{,}954\,.\,1{,}174 + 0{,}31\ .8 = +1{,}360 \\ p_4 &= -0{,}954\,.\,1{,}496 + 0{,}31\ .7 = +0{,}743 \\ p_5 &= -0{,}954\,.\,1{,}706 + 0{,}31\ .6 = +0{,}233 \end{aligned}\right\} \Sigma = +2{,}336$$

$$\left.\begin{aligned} p_6 &= -0{,}954\,.\,1{,}706 + 0{,}31\ .5 = -0{,}077 \\ p_7 &= -0{,}954\,.\,1{,}496 + 0{,}31\ .4 = -0{,}187 \\ p_8 &= -0{,}954\,.\,1{,}174 + 0{,}31\ .3 = -0{,}190 \\ p_9 &= -0{,}954\,.\,0{,}8 \quad + 0{,}31\ .2 = -0{,}143 \\ p_{10} &= -0{,}954\,.\,0{,}405 + 0{,}31\ .1 = -0{,}076 \end{aligned}\right\} \Sigma = -0{,}673$$

$$\Sigma p = +1{,}525$$

$$D_1 = +1{,}525\,.\,1600 = \ 2440 \text{ Klg.}$$
$$\text{max. } D_2 = +2{,}336\,.\,6200 = 14483 \ \text{„}$$
$$\text{min. } D_2 = -(0{,}138 + 0{,}673)\,6200 = -5028 \text{ Klg.}$$
$$D_3 = \mp 0{,}954\,.\,14200 = \mp 13547 \text{ Klg.}$$

Die Stabkräfte schwanken bei höchster Temperatur zwischen

$$+2440 + 14483 - 13547 = +\ 3376 \text{ Klg.}$$
$$\text{und } +2440 - \ 5028 - 13547 = -16135 \ \text{„}$$

bei niedrigster Temperatur zwischen

$$+2440 + 14483 + 13547 = +30470 \text{ Klg.}$$
$$\text{und } +2440 - \ 5028 + 13547 = +10959 \ \text{„}$$

Es möge darauf hingewiesen werden, dass bei gleichmässiger, totaler Belastung (Eigengewicht) die Diagonalen keineswegs spannungslos sind, wie vielfach angenommen wird, sondern, wie in vorstehendem Zahlenbeispiele, bei totaler Belastung nahezu ihre Maximalspannung erleiden können.

Vertikale h_2

$$b = 310,\ h = 161,\ h_1 = 112,\ s = 210,\ z = 11,\ l - x = 9\,.\,210 = 1890,$$
$$x = 2\,.\,210 = 420$$

$$p = \frac{Q\,.\,310\,.\,(161-112)}{161\,.\,210} - \frac{n}{11}\left(\frac{2\,.\,210\,(161-112)}{161\,.\,210} + 1\right)$$
$$= 0{,}45\,Q - 0{,}146\,n;\ x \leqq a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51\,a)$$

$$p = 0{,}45\,Q - \frac{m}{11}\left(\frac{9\,.\,210\,(161-112)}{161\,.\,210} - 1\right) = 0{,}45\,Q - 0{,}158\,m;\ x > a \quad (51\,b)$$

51b:
$$\left.\begin{aligned} p_1 &= 0{,}45\,.\,0{,}405 - 0{,}158\,.\,1 = +0{,}024 \end{aligned}\right\} +0{,}024$$

Formel 51a:
$$\left.\begin{aligned} p_2 &= 0{,}45\,.\,0{,}8 \quad - 0{,}146\,.\,9 = -0{,}954 \\ p_3 &= 0{,}45\,.\,1{,}174 - 0{,}146\,.\,8 = -0{,}640 \\ p_4 &= 0{,}45\,.\,1{,}496 - 0{,}146\,.\,7 = -0{,}349 \\ p_5 &= 0{,}45\,.\,1{,}706 - 0{,}146\,.\,6 = -0{,}108 \end{aligned}\right\} -2{,}051$$

$$\left.\begin{aligned} p_6 &= 0{,}45\,.\,1{,}706 - 0{,}146\,.\,5 = +0{,}038 \\ p_7 &= 0{,}45\,.\,1{,}496 - 0{,}146\,.\,4 = +0{,}089 \\ p_8 &= 0{,}45\,.\,1{,}174 - 0{,}146\,.\,3 = +0{,}090 \\ p_9 &= 0{,}45\,.\,0{,}8 \quad - 0{,}146\,.\,2 = +0{,}068 \\ p_{10} &= 0{,}45\,.\,0{,}405 - 0{,}146\,.\,1 = +0{,}036 \end{aligned}\right\} +0{,}321$$

$$\Sigma p = -1{,}706.$$

$$H_1 = -1{,}706\,.\,1600 = -2730 \text{ Klg.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Dieser Werth von H_1 bedarf in so fern noch einer Korrektur, als das Eigengewicht nicht nur in den Knotenpunkten der oberen Gurtung, wie bei Aufstellung der Formeln 51 angenommen worden, sondern auch theilweise in denen der unteren Gurtung wirksam zu denken ist. Beträgt dieser Theil 600 Klg., so ist dem oben berechneten Werthe von H_1 noch eine Zugkraft, zur Uebertragung dieser 600 Klg. von dem unteren Knotenpunkt auf den oberen, zuzufügen. Somit

$$H_1 = -2730 + 600 = -2130 \text{ Klg.}$$

Die übrigen Kräfte erhält man wie früher:

$$\text{max. } H_2 = +(0{,}024 + 0{,}321)\,6200 = +2139 \text{ Klg.}$$
$$\text{min. } H_2 = -2{,}051\,.\,6200 = -12716 \text{ Klg.}$$
$$H_3 = \pm 0{,}45\,.\,14200 = \pm 6390 \text{ Klg.}$$

Die Stabkräfte schwanken bei höchster Temperatur zwischen:

$$-2130 + 2139 \ + 6390 = +6399 \text{ Klg.}$$
$$\text{und } -2130 - 12716 + 6390 = -8456 \ \text{„}$$

bei niedrigster Temperatur zwischen:

$$-2130 + \ 2139 - 6390 = -\ 6381 \text{ Klg.}$$
$$\text{und } -2130 - 12716 - 6390 = -21236 \ \text{„}$$

10. Fortsetzung: Bestimmung der ungünstigsten Laststellung bei konzentrirten Lasten (Eisenbahnzüge).

Besteht die mobile Belastung aus einzelnen konzentrirten Lasten, so sind die einzelnen Knotenpunktsbelastungen verschieden gross und

ändern je nach der Laststellung ihre Werthe; es ist daher vor Allem die ungünstigste Laststellung zu ermitteln.

Das anzuwendende Verfahren wird am besten an einem Beispiele deutlich. Es sei für den unteren Gurtstab u_2 die ungünstigste Laststellung des in Fig. 13 dargestellten Eisenbahnzugs zur Erzeugung der Minimalstabkraft (grösste Druckkraft) zu bestimmen.

Aus den in der vorigen Nummer ausgerechneten Werthen p geht zunächst hervor, dass der Zug so aufzustellen ist, dass die schwersten Lasten in die Nähe des Knotenpunkts 6 zu stehen kommen, da p_6 ein Maximalwerth. Bei einiger Uebung lässt sich diese ungünstigste Laststellung genau genug schätzungsweise annehmen, da geringe Abweichungen von der theoretisch ungünstigsten Stellung keinen nennenswerthen Einfluss auf die Stabkräfte ausüben. Ferner ist auch mit Rücksicht darauf, dass jedenfalls noch andere Züge, als der der Rechnung zu Grunde gelegte, die Brücke befahren werden, eine absolut genaue Bestimmung der ungünstigsten Laststellnng von keinem grossen praktischen Werthe.

Des theoretischen Interesses wegen möge jedoch in Nachstehendem das genaue Verfahren angegeben werden.

Befindet sich eine Last P zwischen dem m^{ten} u. $m+1^{\text{ten}}$ Knotenpunkte, in der Entfernung x von letzterem, so ist die von demselben im betrachteten Stabe erzeugte Kraft

$$U = \left(p_m \frac{x}{s} + p_{m+1} \left(1 - \frac{x}{s}\right)\right) P,$$

wenn mit s die konstante Felderbreite bezeichnet wird.

Bewegt sich P um dx nach links, so ändert sich U um

$$dU = (+ p_m - p_{m+1}) \frac{P}{s} dx.$$

Für einen ganzen Lastzug ist die Aenderung von U bei einer kleinen Bewegung dx nach links:

$$dU = \frac{dx}{s} \Sigma (p_m - p_{m+1}) P. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Je nachdem nun der Summenausdruck von gleichem Zeichen mit U ist oder nicht, wird die Stabkraft U durch eine Bewegung nach links vergrössert oder verkleinert.

Man nehme nun eine passend scheinende Stellung des Lastzugs an und berechne den Summenausdruck $\Sigma (p_m - p_{m+1}) P$. Ist derselbe von gleichem Zeichen mit U, so ist der Zug weiter nach links, im entgegengesetzten Falle weiter nach rechts zu verschieben. Nehmen wir den ersteren Fall an, so muss die Verschiebung nach links soweit fortgesetzt werden bis ein Rad in ein benachbartes Feld oder ein neues Rad auf den Träger tritt. Für diese neue Stellung ist der Summenausdruck von Neuem aufzustellen. Ist derselbe wieder von gleichem Zeichen mit U, so ist der Lastzug noch weiter nach links zu verschieben, im entgegengesetzten Falle ist die ungünstigste Laststellung erreicht. Für dieselbe muss somit stets ein Rad über einem Knotenpunkt stehen.

Um zu erfahren, welches Rad beim Verschieben des Lastzugs zunächst in ein anderes Feld übertritt, bedient man sich am besten zweier Papierstreifen, deren einer die Feldeintheilung, deren anderer die Radstände aufgezeichnet trägt, und welche man an einander hinschiebt.

Um wieder auf das gewählte Beispiel zurückzukommen, so sei in Fig. 14 die vorläufig angenommene Laststellung aufgezeichnet, bei welcher Rad III auf Knotenpunkt 6 steht.

Für eine Verschiebung nach links, wobei Rad III nach Feld 5—6 zu rechnen ist, erhält man:

$$\begin{aligned}\Sigma(p_m - p_{m+1}) P = 6200 &(-1{,}254 + 1{,}915 - 2 \,.\, 2{,}915 + 2 \,.\, 2{,}159 - 2{,}159 + 1{,}986) \\ &+ 4000 \,(-1{,}592 + 1{,}096 - 1{,}096 + 0{,}558 - 0{,}558 - 0) \\ &= -316{,}8, \text{ somit negativ.}\end{aligned}$$

Da nun die Minimalstabkraft U (grösste Druckkraft) ebenfalls negatives Vorzeichen hat, so ist hiernach der Lastzug weiter nach links zu verschieben. Hierbei tritt zuerst Rad VII aus Feld 10—11 über Knotenpunkt 10 in Feld 9—10. Bei dieser neuen Stellung (Fig. 15) ist für Bewegung nach links:

$$\begin{aligned}\Sigma(p_m - p_{m+1}) P = 6200 &(-1{,}254 + 1{,}915 - 2.1{,}915 + 2.2{,}159 - 2{,}159 + 1{,}986) \\ &+ 4000 \,(-1{,}592 + 1{,}096 - 2 \,.\, 1{,}096 + 2 \,.\, 0{,}558) \\ &= -236{,}8.\end{aligned}$$

Da dieser Werth immer noch negativ ist, muss der Lastzug noch weiter links verschoben werden bis Rad II auf Knotenpunkt 5 tritt (Fig. 16). Hierfür ist:

$$\Sigma(p_m - p_{m+1})\,P = 6200\,(-2.1{,}254 + 2.1{,}915 - 1{,}915 + 2{,}159 - 2{,}159 + 1{,}986)$$
$$+ 4000\,(-1{,}592 + 1{,}096 - 2\,.\,1{,}096 + 2\,.\,0{,}558)$$
$$= + 2348{,}6.$$

Dieser Werth ist positiv, also von entgegengesetztem Vorzeichen wie die grösste Druckkraft U; der Lastzug darf nicht mehr weiter nach links geschoben werden und hat sonach mit Rad II auf Knotenpunkt 5 seine ungünstigste Stellung erreicht. Die entsprechende grösste Druckkraft ist hiefür:

$$U = 6200\left(\frac{130}{210}p_4 + \left(\frac{80}{210} + 1 + \frac{80}{210}\right)p_5 + \frac{130+160}{210}p_6 + \frac{50}{210}p_7\right)$$
$$+ 4000\left(\frac{110}{210}p_8 + \frac{100+185+50}{210}p_9 + \frac{25+160}{210}p_{10}\right).$$

Setzt man für die verschiedenen p ihre Zahlenwerthe ein, welche sämmtlich negatives Vorzeichen besitzen, so erhält man schliesslich:

$$U = -59444 \text{ Klg.}$$

Für die ursprünglich gewählte Laststellung mit Rad III auf Knotenpunkt 6 hätte man erhalten:

$$U = -58555 \text{ Klg.},$$

somit einen nur ca. 1,5 % kleineren Werth als bei der ungünstigsten Laststellung.

Handelt es sich um die Bestimmung der Maximalstabkraft im Stab u_2 (grösste Zugspannung), so sei der Lastzug vorläufig so aufgestellt, dass Rad I über dem Knotenpunkt 2 steht (Fig. 17).

Für die Verschiebung nach links, wobei Rad I nach Feld 1—2 zu rechnen ist, erhält man:

$$\Sigma(p_m - p_{m+1})\,P = 6200\,(2.0 - 2.0{,}298 + 2.0{,}298 - 2.0{,}616) = -7638.$$

Da die Maximalkraft U positiv, der vorstehende Summenausdruck aber negativ, so darf zur Erzielung der ungünstigsten Laststellung der Zug nicht nach links verschoben werden.

Für eine Verschiebung nach rechts, wobei Rad I nach Feld 2—3 zu rechnen ist, ergibt sich:

$$\Sigma(p_{m+1} - v_m)\,P = 6200\,(-0{,}372 - 0{,}616 + 0{,}616 - 0{,}298 + 2.0{,}298 - 2.0)$$
$$= -459.$$

Da dieser Ausdruck ebenfalls negativ ist, so darf der Zug auch nicht nach rechts verschoben werden, und ist somit die Stellung mit Rad I auf Knotenpunkt 2 die ungünstigste Laststellung. Die Stabkraft ist hiefür:

$$U = 6200\left(\left(1 + \frac{80}{210}\right)0{,}616 + \frac{130+160+30}{210}\,.\,0{,}298\right) = +8089 \text{ Klg.}$$

Während man bei gewöhnlichen Balkenträgern die Bestimmung der Stabspannungen statt mit konzentrirten Lasten auch mit gleichförmig vertheilten Belastungsäquivalenten durchführen kann, wenn man nur der bekannten Variation der letzteren entsprechend Rechnung trägt, ist ein ähnliches Verfahren in vorliegendem Falle unstatthaft, da hier die Belastungsäquivalente nicht nur von den Abscissen der einzelnen Stäbe sondern überhaupt von der ganzen geometrischen Gestalt des Trägers abhängen. Dieselben sind daher in jedem einzelnen Falle verschieden gross, und ist die Aufstellung einer allgemein gültigen Tabelle, wie bei gewöhnlichen Fachwerkträgern, unmöglich. Eine Berechnung der Belastungsäquivalente wäre überhaupt erst nachträglich, nach erfolgter Bestimmung der Stabkräfte, ausführbar.

Man ist somit bei Eisenbahnbogenbrücken mit versteiften Zwickeln gezwungen, die Stabkräfte für konzentrirte Lasten in der oben dargelegten Weise zu bestimmen. Für Strassenbrücken dagegen genügt im Allgemeinen das einfachere Verfahren von No. 9.

Es möge hier noch darauf hingewiesen werden, dass die Ermittlung der „Belastungsscheiden“ mit Hülfe der „Kämpferdrucklinie“ für die Rechnung mit konzentrirten Lasten wenig praktischen Werth hat, da man hierdurch nur diejenigen Punkte kennen lernt, in welchen die Lasten keinen Einfluss auf den betrachteten Stab ausüben, über diejenigen Laststellungen dagegen, welche Maximalspannungen erzeugen, nicht den geringsten Aufschluss erhält.

11. Bestimmung der Querschnittsgrössen.

Die Bestimmung der Querschnittsgrössen hat nicht nur mit Rücksicht auf die grössten Werthe der Stabkräfte sondern auch auf

die bei variabler Beanspruchung auftretenden Spannungsdifferenzen zu erfolgen.

Bezüglich der Art und Weise, wie letztere zu berücksigtigen sind, existiren zahlreiche Methoden, von denen jedoch zur Zeit keine einen thatsächlichen Vorzug vor den übrigen beanspruchen kann, da die wenigen zu Grunde liegenden Versuchsresultate unter Verhältnissen angestellt wurden, welche nur geringe Aehnlichkeit mit den bei eisernen Brücken stattfindenden besitzen.

Von den bestehenden Methoden gibt der Verfasser der von Lippold im „Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens 1879“ veröffentlichten den Vorzug, da dieselbe für den praktischen Gebrauch bequem ist und angemessene Resultate liefert.

Lippold legt den Hauptnachdruck auf das plötzliche Eintreten der Spannungswechsel; bezeichnet man mit A das Minimum, mit B das Maximum der Stabkraft, wo A und B vorerst gleichen Sinn besitzen mögen, so steigt bei plötzlichem Uebergang von A nach B die Stabkraft momentan auf $2\,B - A$ und oscillirt dann um die Gleichgewichtslage, für welche ihr Werth B beträgt. Der erforderliche Querschnitt f ist mit Rücksicht auf diese grösste Momentankraft zu bestimmen und wird erhalten, indem man die Momentankraft $2\,B - A$ durch den zulässigen Spannungscoefficienten für ruhende Belastung (nachstehend in der Regel für Zug und Druck zu K = 1200 Klg. pro □cm. angenommen) dividirt:

$$f = \frac{2\,B - A}{K}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

Besitzen A und B ungleichen Sinn (z. B. A Druck, B Zug), so sind die einem plötzlichen Spannungswechsel entsprechenden grössten Momentankräfte in derselben Weise

$$2\,B - A \text{ für Zug}, \quad 2\,A - B \text{ für Druck},$$

und die erforderlichen Querschnitte

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{2\,B - A}{K} \text{ für Zug} \\ f &= \frac{B - 2\,A}{K} \text{ für Druck} \end{aligned}\right\}. \quad \ldots\ldots \quad (55)$$

Die oftmalige Wiederholung der Spannungswechsel, auf welche die meisten anderen Autoren nach Wöhler's Vorgang das Hauptgewicht legen, ist nach Lippold nur von untergeordneter Bedeutung; doch muss immerhin eine bestimmte Anzahl von Spannungswechseln vor sich gehen, ehe die Momentankräfte ihre obigen Maximalwerthe erreichen können.

Die Spannungswechsel in Folge von Temperaturänderungen treten verhältnissmässig langsam ein und können daher keine gesteigerten Momentankräfte hervorrufen. Es ist somit zur Berechnung der Querschnitte nicht erforderlich, die absoluten Maxima und Minima der Stabkräfte einzuführen, welche in getrennten Zeitmomenten (Sommer und Winter) eintreten, sondern nur diejenigen, welche in unmittelbar aufeinanderfolgenden Zeitmomenten stattfinden können. Es genügt zu diesem Zwecke, die Momentankräfte bei grösster Wärme und grösster Kälte zu ermitteln und aus dem grösseren dieser beiden Werthe den Querschnitt zu bestimmen.

Zur Erläuterung des Verfahrens sollen für die in No. 9 berechneten Stabkräfte die erforderlichen Querschnitte ermittelt werden.

Obere Gurtung; Stab s_5.

Bei höchster Temperatur schwanken die Stabkräfte zwischen:

$$+ 7064 \text{ und } + 48660 \text{ Klg.}$$

Der erforderliche Querschnitt ist somit nach Gleichung 54:

$$f = \frac{2 \,.\, 48660 - 7064}{1200} = 75{,}2 \text{ □cm. (für Zug)},$$

bei niedrigster Temperatur sind die Grenzen:

$$- 106536 \text{ und } - 64940 \text{ Klg.}$$

$$\text{somit } f = \frac{2 \,.\, 106536 - 64940}{1200} = 123{,}4 \text{ □cm. (für Druck)}.$$

Hiernach ist der Querschnitt gleich 123,4 zu wählen; eine weitere Verstärkung desselben wegen Knicken erscheint bei den gebräuchlichen Gurtformen nicht erforderlich.

Untere Gurtung; Stab u_2.

Grenzen der Kräfte bei höchster Temperatur:

$$- 38478 \text{ und } - 111923 \text{ Klg.}$$

$$f = \frac{2 \,.\, 111923 - 38478}{1200} = 154{,}5 \text{ □cm. (für Druck)}$$

POLYTECHNISCHER VEREIN CARLSRUHE.

Grenzen bei niedrigster Temperatur:

$$+ 17754 \text{ und } - 55691 \text{ Klg.}$$

Die Gleichungen 55 liefern nun:

$$f = \frac{2 \,.\, 17754 + 55691}{1200} = 76{,}0 \text{ □cm. (für Zug)}$$

$$f = \frac{17754 + 2 \,.\, 55691}{1200} = 107{,}6 \text{ □cm. (für Druck).}$$

Die Querschnittsgrösse muss somit 154,5 □cm. betragen, da man auch hier von einer besonderen Verstärkung gegen Knicken absehen kann.

Diagonale d_2.

Grenzen der Kräfte bei höchster Temperatur:

$$+ 3376 \text{ und } - 16135 \text{ Klg.,}$$

nach Gleichung 55:

$$f = \frac{2 \,.\, 3376 + 16135}{1200} = 19{,}1 \text{ □cm. (für Zug)}$$

$$f = \frac{3376 + 2 \,.\, 16135}{1200} = 29{,}7 \text{ □cm. (für Druck).}$$

Grenzen bei niedrigster Temperatur:

$$+ 30470 \text{ und } + 10959 \text{ Klg.}$$

nach Gleichung 54:

$$f = \frac{2 \,.\, 30470 - 10959}{1200} = 41{,}6 \text{ □cm. (für Zug).}$$

Es ist hiernach der Querschnitt 41,6 □cm. gross zu wählen; da der Druckquerschnitt nur 29,7 □cm. betragen muss, so dürfte der gewählte Querschnitt auch gegen Knicken die erforderliche Sicherheit gewähren.

Vertikale h_2.

Grenzen der Kräfte bei höchster Temperatur:

$$+ 6399 \text{ und } - 8456 \text{ Klg.}$$

$$f = \frac{2 \,.\, 6399 + 8456}{1200} = 17{,}7 \text{ □cm. (für Zug)}$$

$$f = \frac{6399 + 2 \,.\, 8456}{1200} = 19{,}4 \text{ (für Druck).}$$

Grenzen bei niedrigster Temperatur

$$- 6381 \text{ und } - 21236 \text{ Klg.}$$

$$f = \frac{2 \,.\, 21236 - 6381}{1200} = 30{,}1 \text{ □cm. (für Druck).}$$

Hiernach sind erforderlich 30,1 □cm. Querschnitt für reinen Druck; mit Rücksicht auf Knicken ist dieser Querschnitt entsprechend zu vergrössern.

Wir bedienen uns hierzu der bekannten Formel

$$F = f\left(1 + 0{,}0001 \frac{F h^2}{J}\right) \quad \ldots \ldots \quad (56)$$

wo F = gesuchter Querschnitt,
J = dessen Trägheitsmoment bezüglich der Knickungsachse,
f = reiner Druckquerschnitt (hier = 30,1 □cm.),
h = Stablänge (hier = 161 cm.).

Aus dieser Formel ist nun F durch Probiren zu bestimmen.

Wählt man 4 kreuzförmig angeordnete Winkel von 6,0 cm. Schenkellänge und 1 cm. Schenkeldicke, welche um 1,5 cm. von einander abstehen, so erhält man nach Abzug von vier, 1,8 cm. breiten Nietlöchern in den der Knickungsaxe parallelen Schenkeln:

$F = 36{,}8$ □cm., $J = 476$ in cm., somit

$$f\left(1 + 0{,}0001 \frac{F h^2}{J}\right) = 30{,}1\left(1 + 0{,}0001 \,.\, \frac{36{,}8 \,.\, 161^2}{476}\right) = 36{,}1,$$

welche Zahl genau genug mit der vorläufig angenommenen $F = 36{,}8$ übereinstimmt.

Für die Ausführung wird man eventuell wegen der Nietanschlüsse ein etwas grösseres Profil wählen müssen.

III. Anhang.

12. Angaben über Brückenbelastungen.

a) Ruhende Belastung.

Die ruhende Belastung der Hauptträger setzt sich zusammen aus dem Gewichte

1. der Fahrbahn (Schwellen, Schienen, Gedeck; Schotter, Belageisen etc.),
2. der Fahrbahnträger (Quer- und Längsträger),
3. der Hauptträger (incl. Windkreuze, Querkreuze etc.).

Die Gewichte sub 1 und 2 können, ehe zur statischen Berechnung der Hauptträger geschritten wird, vollständig genau ermittelt werden, und erscheint es überflüssig, hier näher darauf einzugehen.

Bezüglich des Gewichtes der Hauptträger ist eine vorläufige Annahme zu machen, welche nach erfolgter Gewichtsberechnung eventuell zu berichtigen ist. Falls keine anderen Daten zu Gebote stehen, können für die Gewichte von Bogenträgern mit 2 Gelenken (incl. Wind- und Querkreuze) bei verschiedenen Spannweiten l folgende Werthe angenommen werden:

Eisenbahnbrücken.

$l =$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100 m.
$g =$	450	750	1050	1350	1650	1950	2250	2560	2890	3280 Klg. pr. m. Gleis.

Von $l = 10$ m. bis $l = 70$ m. schliessen sich diese Werthe der Formel

$$g = 150 + 30\,l$$

an, wo l in Meter auszudrücken ist.

Strassenbrücken.

Das Gewicht der Hauptträger pro lfd. meter Brücke lässt sich setzen:

$$g = \gamma\, b + 35\, z \text{ Klg.},$$

wo b = Brückenbreite in meter, z = Zahl der Hauptträger.

Ueber die Werthe des Coefficienten γ bei verschiedenen Fahrbahn konstruktionen und Spannweiten gibt folgende Tabelle Aufschluss:

$l =$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100 m.
Fahrbahn mit Beschotterung.										
$\gamma =$	32	62	94	129	168	209	255	300	350	410
Fahrbahn mit doppeltem Bohlenbelag.										
$\gamma =$	28	53	80	110	144	180	220	260	305	355.

Die vorstehenden Zahlenwerthe wurden nach den, vom Verfasser in der „Zeitschrift für Bauwesen 1877 und 1878“ entwickelten Methoden bestimmt, unter Voraussetzung eines variablen, von

$$m = \frac{1}{7} \text{ (für } l = 10 \text{ m.) bis } m = \frac{1}{11} \text{ für } l = 100 \text{ m.)}$$

abnehmenden Pfeilverhältnisses.

Beispielsweise ergibt sich für eine beschotterte Strassenbrücke von 40 m. Spannweite, 8 m. Breite und bei 4 Hauptträgern, das Gewicht der Hauptträger zu

$$g = 129 \,.\, 8 + 35 \,.\, 4 = 1172 \text{ Klg. pro lfd. met. Brücke.}$$

Für Bogenträger mit 3 Gelenken genügt es, obige Zahlenwerthe um 15 % zu verringern.

b) Bewegliche Belastung.

Nach den Ausführungen in No. 10 müssen bei Eisenbahnbrücken die konzentrirten Radbelastungen eines Eisenbahnzuges der Rechnung zu Grunde gelegt werden. Es erscheint jedoch unnöthig, sich ängstlich an die wirklichen Radbelastungen und Radstände der zur Zeit auf der betreffenden Bahnstrecke kursirenden, schwersten Fahrzeuge zu halten, da diese Verhältnisse einem stetigen Wechsel unterworfen sind, und die darauf basirten Resultate in wenig Jahren doch nur noch näherungsweise Gültigkeit besitzen. Man darf daher, um die Rechnung zu vereinfachen, „ideale“ Fahrzeuge voraussetzen, deren Verhältnisse sich zwar denen der vorhandenen Fahrzeuge möglichst anschliessen, deren Achsbelastungen jedoch für ein und dasselbe Fahrzeug gleiche Grösse besitzen und deren Radstände und Radbelastungen möglichst abgerundete Zahlenwerthe aufweisen.

TECHNISCHE VERLAGS CARLSRUHE

III. Anhang.

12. Angaben über Brückenbelastungen.

a) Ruhende Belastung.

Die ruhende Belastung der Hauptträger setzt sich zusammen aus dem Gewichte

1. der Fahrbahn (Schwellen, Schienen, Gedeck; Schotter, Belageisen etc.),
2. der Fahrbahnträger (Quer- und Längsträger),
3. der Hauptträger (incl. Windkreuze, Querkreuze etc.).

Die Gewichte sub 1 und 2 können, ehe zur statischen Berechnung der Hauptträger geschritten wird, vollständig genau ermittelt werden, und erscheint es überflüssig, hier näher darauf einzugehen.

Bezüglich des Gewichtes der Hauptträger ist eine vorläufige Annahme zu machen, welche nach erfolgter Gewichtsberechnung eventuell zu berichtigen ist. Falls keine anderen Daten zu Gebote stehen, können für die Gewichte von Bogenträgern mit 2 Gelenken (incl. Wind- und Querkreuze) bei verschiedenen Spannweiten l folgende Werthe angenommen werden:

Eisenbahnbrücken.

$l =$ 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 m.
$g =$ 450 750 1050 1350 1650 1950 2250 2560 2890 3280 Klg. pr. m. Gleis.

Von $l = 10$ m. bis $l = 70$ m. schliessen sich diese Werthe der Formel

$$g = 150 + 30\,l$$

an, wo l in Meter auszudrücken ist.

Strassenbrücken.

Das Gewicht der Hauptträger pro lfd. meter Brücke lässt sich setzen:

$$g = \gamma\, b + 35\, z \text{ Klg.},$$

wo $b =$ Brückenbreite in meter, $z =$ Zahl der Hauptträger.

Ueber die Werthe des Coefficienten γ bei verschiedenen Fahrbahnkonstruktionen und Spannweiten gibt folgende Tabelle Aufschluss:

$l =$ 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 m.

Fahrbahn mit Beschotterung.

$\gamma =$ 32 62 94 129 168 209 255 300 350 410

Fahrbahn mit doppeltem Bohlenbelag.

$\gamma =$ 28 53 80 110 144 180 220 260 305 355.

Die vorstehenden Zahlenwerthe wurden nach den, vom Verfasser in der „Zeitschrift für Bauwesen 1877 und 1878“ entwickelten Methoden bestimmt, unter Voraussetzung eines variablen, von

$$m = \frac{1}{7} \text{ (für } l = 10 \text{ m.) bis } m = \frac{1}{11} \text{ für } l = 100 \text{ m.)}$$

abnehmenden Pfeilverhältnisses.

Beispielsweise ergibt sich für eine beschotterte Strassenbrücke von 40 m. Spannweite, 8 m. Breite und bei 4 Hauptträgern, das Gewicht der Hauptträger zu

$$g = 129 \,.\, 8 + 35 \,.\, 4 = 1172 \text{ Klg. pro lfd. met. Brücke.}$$

Für Bogenträger mit 3 Gelenken genügt es, obige Zahlenwerthe um 15 % zu verringern.

b) Bewegliche Belastung.

Nach den Ausführungen in No. 10 müssen bei Eisenbahnbrücken die konzentrirten Radbelastungen eines Eisenbahnzuges der Rechnung zu Grunde gelegt werden. Es erscheint jedoch unnöthig, sich ängstlich an die wirklichen Radbelastungen und Radstände der zur Zeit auf der betreffenden Bahnstrecke kursirenden schwersten Fahrzeuge zu halten, da diese Verhältnisse einem stetigen Wechsel unterworfen sind, und die darauf basirten Resultate in wenig Jahren doch nur noch näherungsweise Gültigkeit besitzen. Man darf daher, um die Rechnung zu vereinfachen, „ideale“ Fahrzeuge voraussetzen, deren Verhältnisse sich zwar denen der vorhandenen Fahrzeuge möglichst anschliessen, deren Achsbelastungen jedoch für ein und dasselbe Fahrzeug gleiche Grösse besitzen und deren Radstände und Radbelastungen möglichst abgerundete Zahlenwerthe aufweisen.

VEREIN CARLSRUHE

Was die Zusammensetzung des Eisenbahnzuges betrifft, so dürfte es hinreichend sein, nur die im gewöhnlichen Betriebe vorkommenden schwersten Belastungsfälle zu berücksichtigen, d. h. zwei vorwärtsschauende Lokomotiven mit darauf folgenden beladenen Lastwagen (Fig. 13).

Eine Belastung durch einen Lokomotivenzug in voller Dienstausrüstung ist zwar theoretisch denkbar, wird aber in Wirklichkeit entweder nie oder doch nur sehr wenige Male während der Lebensdauer einer Brücke vorkommen.

Für diese seltenen Fälle kann jedoch weder die Momentankraft die in Formel 54 und 55 bestimmte Grösse erreichen (über die näheren Gründe muss auf die genannte Abhandlung Lippold's verwiesen werden), noch liegt ein gleichzeitiges Zusammentreffen mit den grössten Temperaturspannungen im Bereiche der Wahrscheinlichkeit. Aus diesen Gründen unterliegt es keinem Bedenken, diese ausserordentlichen Belastungsfälle für die eigentliche Berechnung ausser Acht zu lassen und höchstens, um auch den schlimmsten Spielen des Zufalls Rechnung zu tragen, nachträglich eine Kontrolle der Dimensionen unter Zulassung eines Spannungskoefficienten für ruhende Last von $k = 1500$ Klg. pro □ cm. vorzunehmen.

Schreibt man mit Wöhler nicht sowohl dem plötzlichen Eintritt als der oftmaligen Wiederholung der Spannungswechsel die zerstörende Wirkung auf das Material zu, so kann man obigen Ausführungen um so eher beipflichten, als ja die aussergewöhnlichen Belastungen so selten auftreten, dass ihre zerstörenden Wirkungen gegenüber denen der täglich wiederkehrenden, normalen Belastungen vollständig zurücktreten.

Als Normalbelastung der Strassenbrücken ist Menschengedränge anzusehen, welches bei Chausseebrücken mit 350 Kgl., bei Brücken in Städten mit 450 Kgl. pro □ m. in Rechnung gestellt werden kann.

In denjenigen Fällen, in welchen Belastungen durch aussergewöhnlich schwere Fuhrwerke (Transport von Maschinen etc.) vorkommen, kann dann ebenfalls eine Kontrollrechnung in der bei den Eisenbahnbrücken erwähnten Weise vorgenommen werden.

13. Durchbiegung von Bogenfachwerkträgern.

In ähnlicher Weise, wie in No. 1 die Vergrösserung der Spann-

weite, erhält man die Senkung eines beliebigen, in der Entfernung a vom linksseitigen Widerlager befindlichen Knotenpunktes der unteren Gurtung zu

$$dh = -\frac{l-a}{l}\sum_{o}^{a}\left\{v.(y_1-y_o)+dW.x\right\} - \frac{a}{l}\sum_{a}^{l}\left\{-v.(y_1-y_o)+dW.(l-x)\right\} \qquad (57)$$

wo v die spezifische Verlängerung eines unteren Gurtstabes,
y_1 und y_o die Ordinaten von dessen rechtsseitigem bezw. linksseitigem Endpunkte,
dW die Vergrösserung eines unteren Knotenpunktswinkels,
x die Abscisse des betreffenden Knotenpunktes.

Der Knotenpunktswinkel bei dem betrachteten Punkte a kann sowohl in die erste als auch in die zweite Summe einbezogen werden.

Für symmetrische Verhältnisse ergibt sich aus Gleichung 57 die Senkung des Scheitels zu:

$$dh = -\sum_{o}^{\frac{1}{2}l}\left\{v\,(y_1-y_o)+dW\,x\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Auf Bogenträger mit versteiften Zwickeln (No. 2) angewendet erhält man hieraus, indem man für dW seinen Werth als Funktion der spezifischen Verlängerungen σ, v, δ, φ setzt:

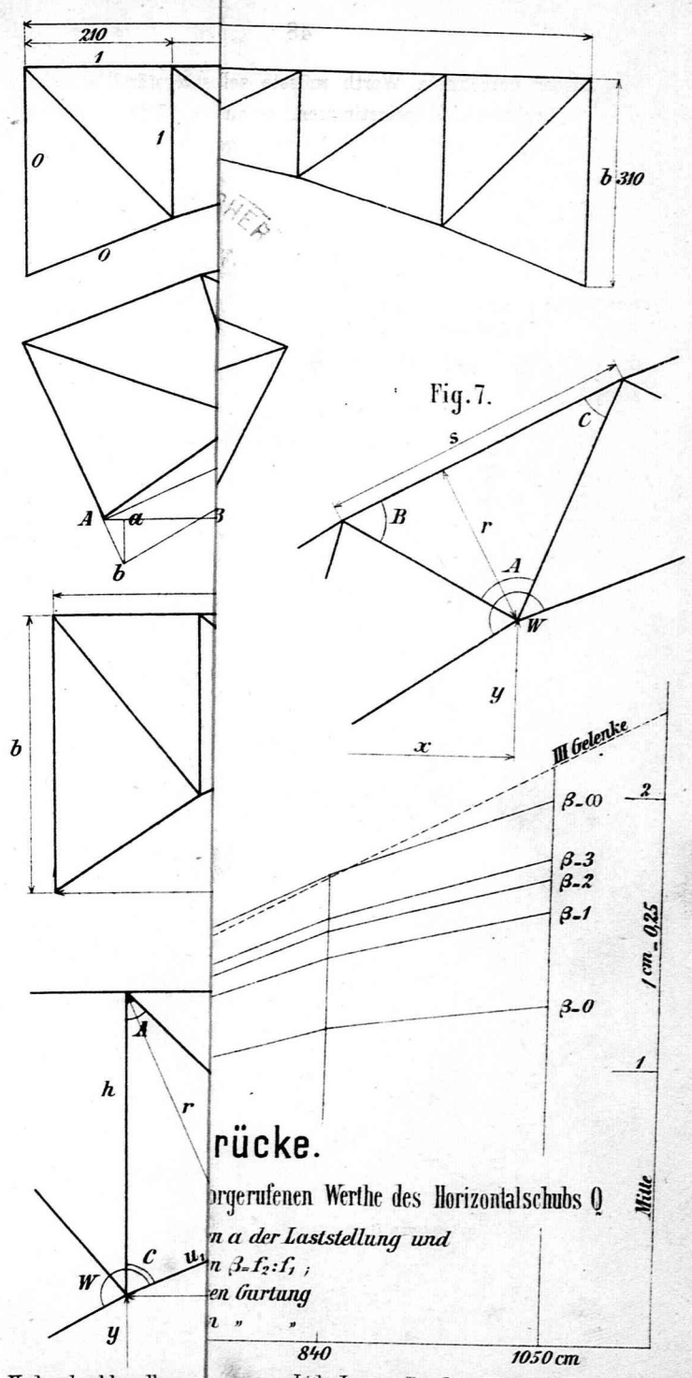
$$dh = \sum_{o}^{\frac{1}{2}l} -\frac{\sigma s x}{h} + \frac{v\,u^2 x}{h\,s} + \frac{\delta\,d^2}{s\,h\,h_1}\,[(x+s)\,h - x\,h_1] - \frac{\varphi}{s}[h\,(x+s) - h_1\,x] \qquad (59)$$

Hierin beziehen sich für die Gurtstäbe, x und h jeweils auf die gegenüberliegenden Knotenpunkte der anderen Gurtung; für die Diagonalen bezeichnet h die längere, h_1 die kürzere der beiden durch die Endpunkte derselben gehenden Vertikalen, x die Entfernung der Vertikalen h vom Auflager; für die Vertikalen, h die Länge und x die Entfernung vom Auflager, h_1 die nächste kleinere Vertikale.

Sind die inneren Kräfte des Bogenträgers nach den früher entwickelten Methoden ermittelt, so erhält man die specifischen Verlängerungen σ, v, δ, φ durch Division der entsprechenden Stabkräfte durch das Produkt von Querschnitt und Elasticitätsmodul und kann somit die Senkung des Scheitels nach Gleichung 59 berechnen.

Dieser berechnete Werth müsste selbstverständlich genau mit dem beobachteten übereinstimmen, wenn die Voraussetzungen der Theorie den wirklichen Verhältnissen genau entsprechen würden. Da dies jedoch nach den Ausführungen in No. 3 nur annähernd der Fall ist, so wird eine gewisse Differenz zum Vorschein kommen, deren Betrag rückwärts auf den Genauigkeitsgrad der gemachten Annahmen schliessen lässt. Es wäre von grossem wissenschaftlichen Interesse, wenn derartige sorgfältige Beobachtungen an ausgeführten Brücken vorgenommen würden, um die Grundlagen der Theorie und die Zuverlässigkeit ihrer Resultate einer gehörigen Prüfung unterziehen zu können.

Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke) in Berlin N.



rücke.

orgerufenen Werthe des Horizontalschubs Q

n a der Laststellung und

n β_f₂:f₁ ;

en Gurtung

n " "

Verlagsbuchhandlung v

Lith. Inst. v. Bogdan Gisevius. Berlin. SO.

ostverständlich genau mit
die Voraussetzungen der
nau entsprechen würden.
No. 3 nur annähernd der
zum Vorschein kommen,
gkeitsgrad der gemachten
grossem wissenschaftlichen
achtungen an ausgeführten
rundlagen der Theorie und
gehörigen Prüfung unter-

rancke) in Berlin N.

F. Engeſser, Bogenfachwerkträger.

Itterbrücke bei Eberbach.

Taf. I

1:100

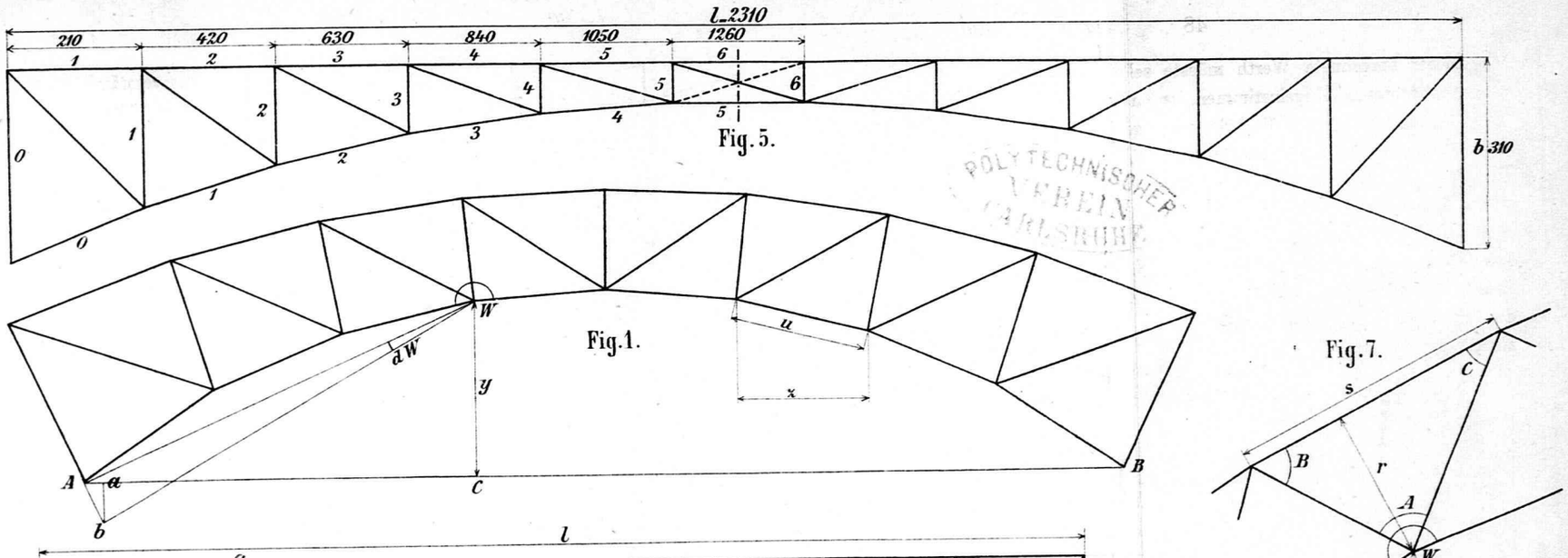


Fig. 5.

Fig. 1.

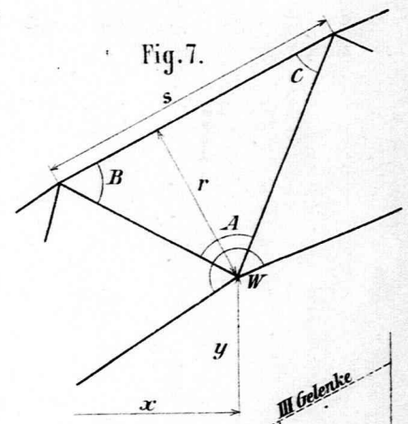


Fig. 7.

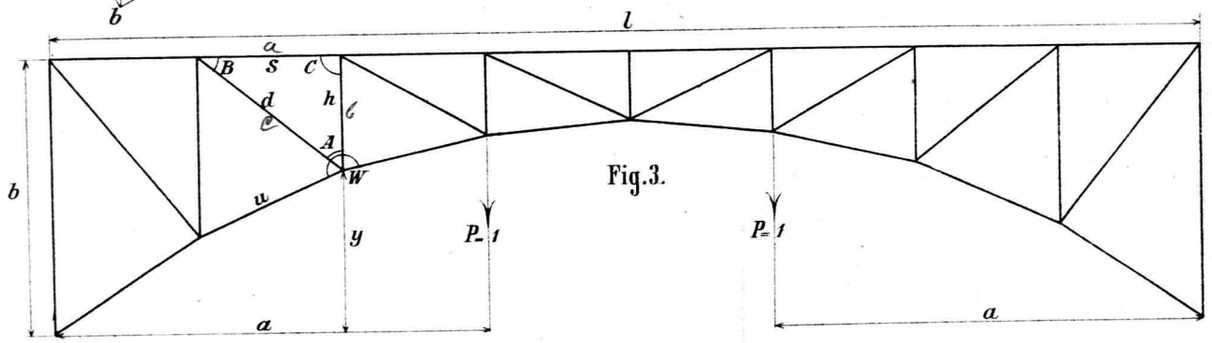


Fig. 3.

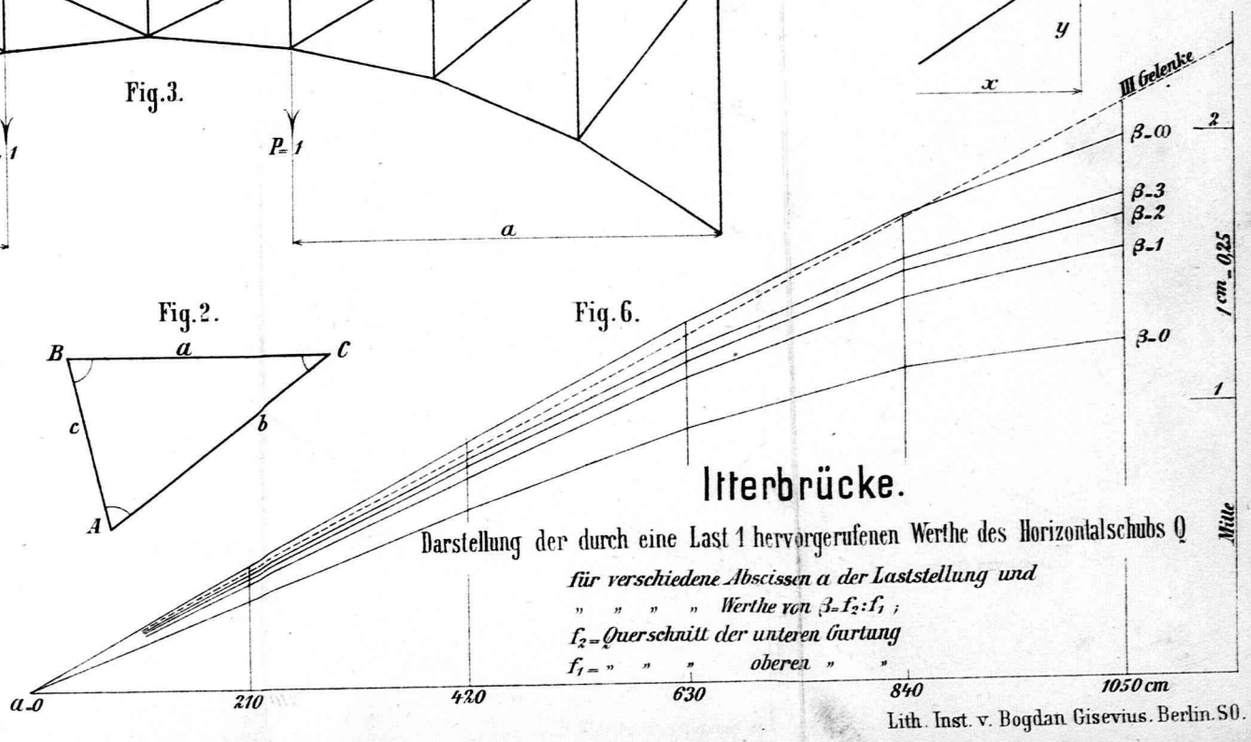


Fig. 6.

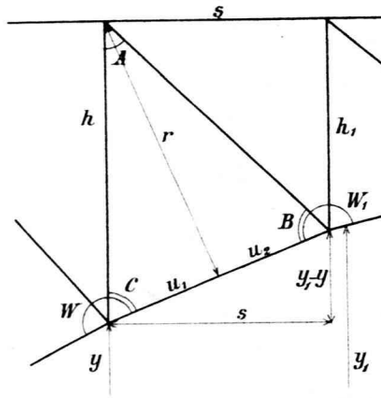


Fig. 4.

Fig. 2.

Itterbrücke.

Darstellung der durch eine Last 1 hervorgerufenen Werthe des Horizontalschubs Q

für verschiedene Abscissen a der Laststellung und

„ „ „ „ Werthe von β=f₂:f₁ ;

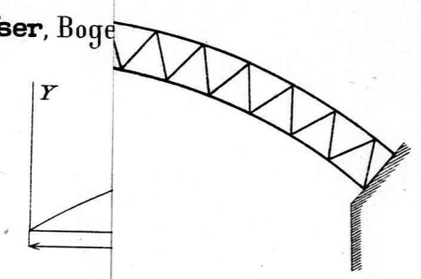
f₂= Querschnitt der unteren Gurtung

f₁= „ „ „ oberen „ „

Verlagsbuchhandlung v. Julius Springer. Berlin. N.

Lith. Inst. v. Bogdan Gisevius. Berlin. SO.

POLYTECHNISCHER VEREIN CARLSRUHE



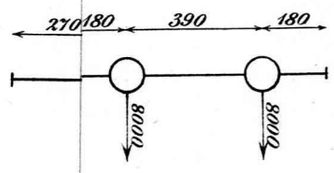


Fig. 8.

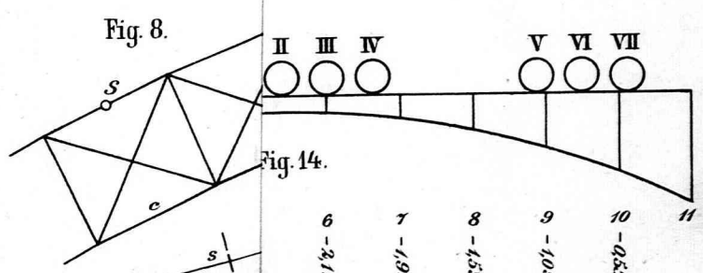


Fig. 14.

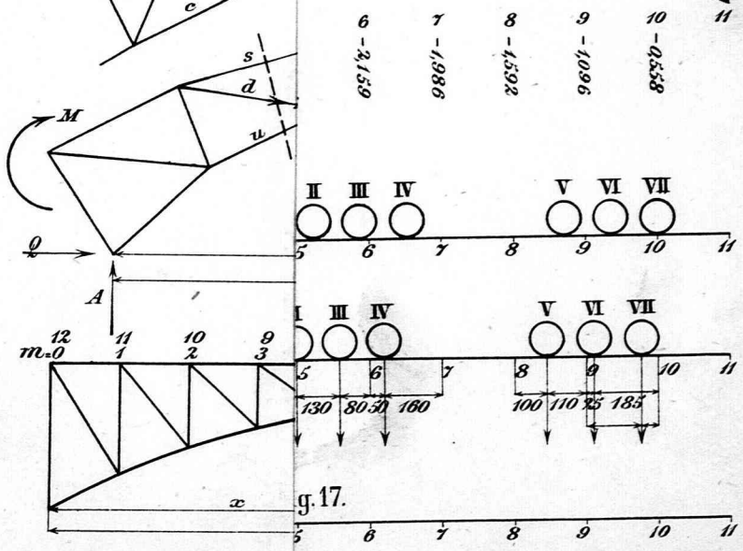
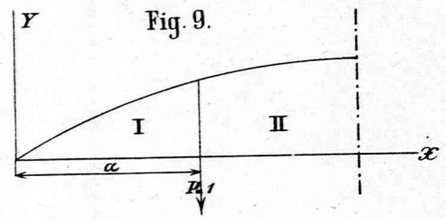


Fig. 17.

Fig. 9.



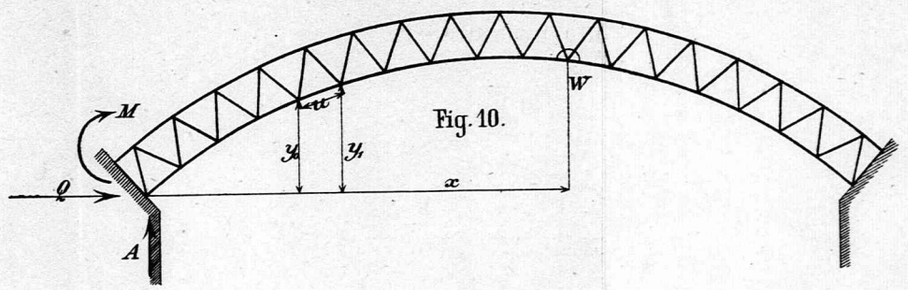


Fig. 10.

Fig. 13.

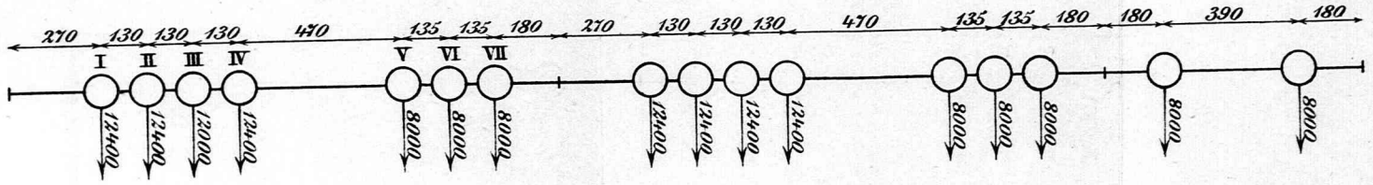
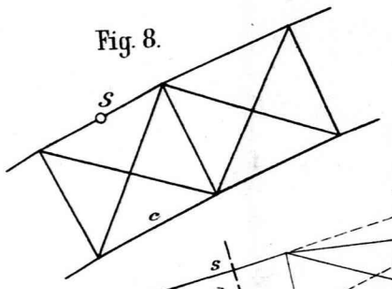


Fig. 8.



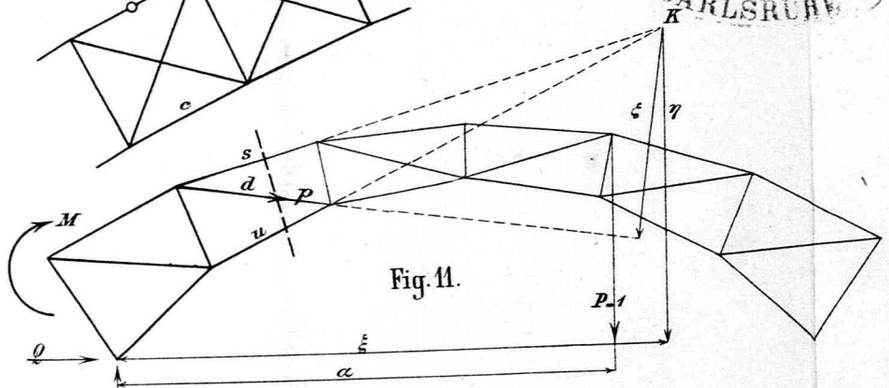


Fig. 11.

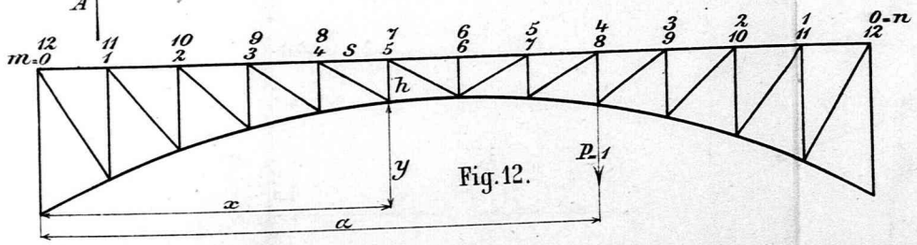


Fig. 12.

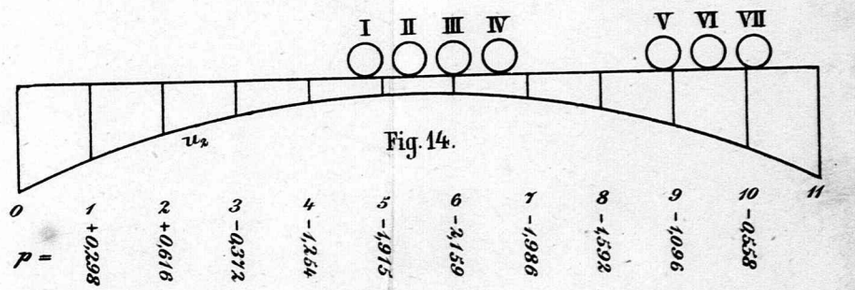


Fig. 14.

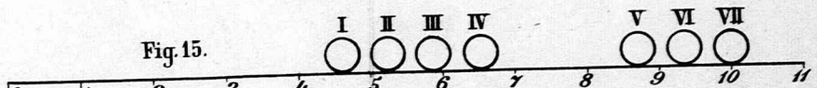


Fig. 15.

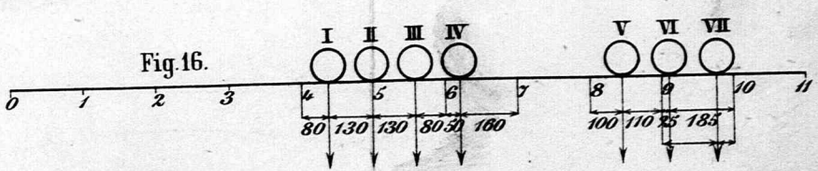


Fig. 16.

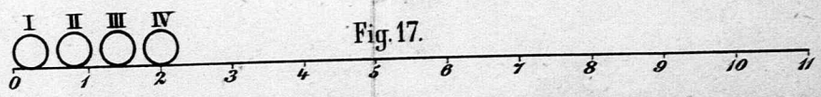


Fig. 17.

POLYTECHNISCHER VEREIN CARLSRUHE

Verlagsbuchhandlung v. Julius Springer, Berlin N.

Lith. Inst. v. Bogdan Gisevius. Berlin. SO.

N11< 31138122 090

UB Karlsruhe