Entwurf einer allgemeinen Theorie der Energieübertragung

von

Dr. **Gustav Mie,**

Privatdocent an der technischen Hochschule zu Karlsruhe.

(Mit 7 Textfiguren.)

In neuerer Zeit beginnt, hauptsächlich durch den Einfluss der Maxwell'schen Theorie, die Ansicht herrschend zu werden, dass sich alle Naturerscheinungen durch Nahewirkungen erklären lassen. Eine Folgerung aus dieser Ansicht ist, dass die Energie in eindeutig bestimmbarer Weise im Raume vertheilt sein muss. Man ist nun öfters, besonders seit den Untersuchungen von Poynting und Heaviside über die Energiewanderung im elektromagnetischen Feld, weiter gegangen und hat der Energie auch Bewegungen zuschreiben wollen, die die Änderungen in ihrer räumlichen Vertheilung verursachten. Hiergegen ist vielfach (vergl. z. B. Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie, 1894, S. 296) mit Recht bemerkt worden, dass man von einer Bewegung der Energietheilchen nicht in demselben Sinne sprechen kann, wie von einer Bewegung materieller Theilchen. Ich habe nun in der folgenden Untersuchung, nachdem eine Individualisirung der Energietheilchen, gleich der der materiellen Theilchen, bestimmt zurückgewiesen ist, trotzdem die Theorie der sogenannten Energieströme als eine nothwendige Consequenz aus der Vorstellung der Nahewirkung hergeleitet. Ich habe die Forderung, dass es nur Nahewirkungen gäbe, mathematisch ausgedrückt in Form allgemeiner Principien, deren sich, das Princip der Erhaltung der Energie mitgerechnet, vier nothwendig ergeben haben. Während die beiden ersten von der

Energie selber handeln und zu dem Problem der Berechnung der Energie aus den Eigenschaften der Materie führen, handeln die beiden anderen von der Energieübertragung und bringen das Problem mit sich, die Energieübertragung zu berechnen. Es zeigt sich nun, dass dies mit Hilfe einer durch die Eigenschaften der Materie überall eindeutig bestimmten Vectorgrösse zu geschehen hat, die ich der herkömmlichen Ausdrucksweise folgend, als »wirklichen Energiestrom« bezeichne.

Dieser Vector lässt sich, wie in dem zweiten Theil der Untersuchung gezeigt wird, abgesehen von den noch nicht experimentell erforschten Energieübergängen durch Gravitationswirkungen und durch die neuentdeckten Strahlungen, wirklich immer in einer einfachen Weise berechnen. Besonders wichtig ist es mir hiebei gewesen, die Energieübertragung im elektromagnetischen Felde zu behandeln, und es hat sich ergeben, dass der von Poynting und Heaviside hergeleitete Energiestrom thatsächlich als der wirkliche Energiestrom bezeichnet werden muss.[1]

Damit ist die Poynting'sche Theorie als nothwendige Consequenz der Maxwell'schen erwiesen. Insbesondere ist es mir gelungen, den von Hertz erhobenen Einwand der cyclischen Energieströme in statischen Feldern zu entkräften.

Ausserdem habe ich die bisher über den Gegenstand veröffentlichte Literatur eingehend besprochen, vor Allem die englische, die bisher in Deutschland zum grossen Theil unbeachtet geblieben ist. Die sogenannte Energetik habe ich dabei nicht berücksichtigt, da diese Richtung keinen Einfluss auf meine Untersuchungen gehabt hat.

So viel wie möglich habe ich die allgemeine Theorie an einfachen Beispielen erläutert, z. B. habe ich die Vorgänge in dem Felde einer elektrischen Kugel, die von einer zur Erde abgeleiteten Wand mit constanter Geschwindigkeit entfernt wird, benutzt, um das Wesen der elektromagnetischen Energieübertragung zu erklären. Eine grössere Anzahl von Beispielen denke ich in einer nächstens folgenden Abhandlung zu bringen.

[1] Dieser Nachweis ist mir allerdings nur unter der jedenfalls unwesentlichen Voraussetzung gelungen, dass die Materie im elektromagnetischen Feld sich nicht bewegt.

I. Abschnitt.

Definition des wirklichen Energiestromes.

Erstes Princip: Erhaltung der Energie.

1. Ein System von Körpern, welches im Laufe der Zeit nur solche physikalischen Veränderungen erfährt, die in gar keinem Zusammenhange mit Vorgängen in anderen materiellen Systemen stehen, nennt man ein freies System.

Energie eines freien Systems nennt man eine Function E aller der Grössen, durch die sein Zustand geometrisch und physikalisch in jedem Augenblick charakterisirt ist, die für alle natürlichen Änderungen eine Invariante ist. Erfahrungsgemäss lässt sich diese Function, abgesehen von einer willkürlichen additiven Constante, immer eindeutig[1] bestimmen. Jeder Änderung einer speciellen Art von Zustandsgrössen entspricht eine partielle Änderung dE_α, die man im Allgemeinen als Änderung einer Form der Energie bezeichnet.

Princip von der Erhaltung der Energie.

Die algebraische Summe der partiellen Änderungen der Energie (Energieformen) ist bei natürlichen Vorgängen in einem freien System gleich Null.

$$dE = dE_1 + dE_2 + \ldots + dE_\nu = 0. \qquad \ldots 1$$

Localisation von Energieformen.

2. Fassen wir z. B., wie es die Mechanik conservativer Systeme thut, nur die geometrischen und kinematischen Verhältnisse ins Auge, so finden wir zwei Formen der Energie. Einer Änderung in der geometrischen Configuration entspricht eine solche der »potentiellen Energie« dF, einer Änderung der Geschwindigkeiten eine solche der »kinetischen Energie« dT. Die Mechanik lehrt uns nun, dass dF aufzufassen ist als das

[1] Wodurch die Eindeutigkeit der Bestimmung erzielt wird, soll hier nicht erörtert werden.

totale Differential einer Function der Coordinaten aller materiellen Punkte des Systems, die die Geschwindigkeiten nicht enthält:

$$F = \varphi(x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots z_n).$$

Bei Untersuchung continuirlicher Körper, deren Punktzahl unendlich gross ist, müssen wir uns die Berechnung von F so denken, dass die Coordinaten eines beliebigen Systempunktes (x, y, z) als Functionen der Anfangswerthe und einer Anzahl Parameter $p_1, p_2, \ldots p_k$ (Lagrange'sche Coordinaten) aufzufassen sind und dass man in φ diese Functionen einsetzt:

$$x_\nu = x(x_0^\nu, y_0^\nu, z_0^\nu, p_1, p_2, \ldots p_k)$$
$$y_\nu = y(x_0^\nu, y_0^\nu, z_0^\nu, p_1, p_2, \ldots p_k)$$
$$z_\nu = z(x_0^\nu, y_0^\nu, z_0^\nu, p_1, p_2, \ldots p_k)$$

$$F = \psi(p_1, p_2, \ldots p_k), \qquad dF = \sum \frac{\partial \psi}{\partial p_i} . dp_i .$$

Ebenso ist dT das totale Differential einer Function der Geschwindigkeiten $v_1, v_2, \ldots v_n$ und der Massen der Systempunkte $m_1, m_2, \ldots m_n$:

$$T = \sum \frac{m_\nu v_\nu^2}{2}, \qquad dT = \sum m_\nu v_\nu . dv_\nu .$$

Wenn wir es mit continuirlichen Körpern zu thun haben, so ergibt sich, indem wir mit μ, v, $d\tau$ Dichte, Geschwindigkeit und Volumen eines Körperelementes bezeichnen:

$$T = \int \frac{\mu . v^2}{2} . d\tau, \qquad dT = \int \mu . v . dv . d\tau .$$

Wenn nur mechanische Vorgänge stattfinden, ist also $E = F + T$ die Invariante.

3. Die kinetische Energie des Systems ist nach ihrer Definition eine Summe von unendlich vielen Theilchen, deren jedes einem ganz bestimmten Körperelement zugeordnet ist. Sie hat diese Eigenschaft mit der Masse des Systems gemein, die ebenfalls als Summe der Massen der Körperelemente zu berechnen ist. Wir sagen daher, dass die kinetische Energie eine räumliche Vertheilung besitzt und können sie uns als eine Art immaterielles Fluidum vorstellen, das den einzelnen Körpertheilchen in veränderlicher Dichte $\left(\frac{\mu v^2}{2}\right)$ anhaftet. Diese Eigenschaft der Energie will ich als ihre Localisirbarkeit bezeichnen.

Definition der Localisirbarkeit.

Eine Energieform dE_α heisst localisirbar, wenn ihre Grösse sich als die Summe unendlich vieler Theilchen ergibt, deren jedes einem bestimmten Körperelemente $d\tau$ eindeutig zugeordnet ist.

$$dE_\alpha = \int de_\alpha . d\tau .$$

Die potentielle Energie ist nach der gewöhnlichen Darstellungsweise der Mechanik nicht localisirbar.

Zweites Princip: Localisirbarkeit der Energie.

4. Wir stellen als eine Forderung der heutigen theoretischen Physik, welche die Fernkräfte leugnet,[1] das folgende Princip auf:

Princip der Localisirbarkeit der Energie.

Die Energie eines jeden freien Systems lässt sich berechnen als Summe unendlich vieler Energietheilchen, deren jedes einem bestimmten Körperelement eindeutig zugeordnet ist.

$$E = \int e . d\tau . \qquad \ldots 2$$

Die Grösse e, welche ich die Dichtigkeit der Energie in dem Elemente $d\tau$ nennen will, hängt dabei allein von den Grössen ab, die den Zustand in $d\tau$ charakterisiren.

---

[1] Drude, Über Fernewirkungen. Referat f. d. 60. Vers. deutscher Naturf. und Ärzte. Section f. Physik. Braunschweig, 1897.

Nach diesem Satz ist es auch möglich, von der Energie eines beliebigen, unfreien Systems zu sprechen, wenn man $e . d\tau$ als die Energie des Körperelementes $d\tau$ bezeichnet.

Wenn man, wie es in der mathematischen Physik gewöhnlich geschieht, unter Körperelementen die kleinsten Theilchen der Materie versteht, die man durch irgendwelche physikalische Mittel noch voneinander unterscheiden kann, wenn man ausserdem für die elektrischen und magnetischen Erscheinungen die Maxwell'sche Theorie annimmt, so ist das Princip weiter nichts als der Ausdruck einer allgemeinen Erfahrung. Dabei müssen wir dann allerdings von der noch nicht experimentell erforschten Gravitationskraft absehen, welche gewöhnlich noch als Fernkraft behandelt wird.[1]

Nach diesem Princip darf man sich die Energie unter dem Bilde eines immateriellen Fluidums denken, das mit der Dichtigkeit e im Raume vertheilt ist. Die Änderungen in der räumlichen Vertheilung werden wir dann natürlich schildern als Folgen von Strömungen (u, v, w), welche, je nachdem sie von einem Punkte auseinandergehen oder in ihm zusammenstreben, eine Vergrösserung oder Verkleinerung der Dichtigkeit e bewirken:

$$-\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Heutiger Stand der Theorie.

5. Die geschilderte Vorstellungsweise ist von jeher allgemein gebraucht für die Energieform der Wärme und für die von einer Lichtquelle ausgehende Strahlung. Besonders hat sich bekanntlich die Theorie der Wärmeströme als ausserordentlich nützlich erwiesen.

Versuche, sie zu verallgemeinern, sind erst gemacht, seitdem Poynting[2] und Heaviside,[3] unabhängig von einander, eine Theorie der Energieströmung im elektromagnetischen Felde

---

[1] Siehe Anhang II.

[2] Phil. Trans. London, *175*, p. 343, 10. Jan. 1884.

[3] Electrician, *14*, p. 178 und 306, 10. Jan. und 21. Febr. 1885.

aufstellten, indem sie eine Vectorgrösse (u, v, w) definirten, die immer der Bedingung

$$-\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

genügt.

In der Verfolgung dieser Idee gingen manche Forscher, von denen vor Allen Lodge[1] zu nennen ist, so weit, den Energietheilchen eine ähnliche individuelle Existenz zuzuschreiben, wie den materiellen Partikeln, so dass es möglich sein sollte, von jedem einzelnen Energietheilchen seine Bewegungen, seine Gestaltänderungen, seine ganze Geschichte zu erforschen.

Gegen die Theorie der Energieströmung wurden folgende Einwände erhoben:

1. Dass der Bedingung

$$-\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

eine unendliche Mannigfaltigkeit von Functionen (u, v, w) genügt (J. J. Thomson[2]);

2. dass nach der Poynting'schen Theorie in einem statischen Felde, das durch einen permanenten Magneten und einen daneben liegenden elektrisirten Körper erzeugt wird, die Energie in beständiger Bewegung sein müsste, allerdings in geschlossenen Bahnen (Hertz[3]);

3. dass es sehr fraglich sei, ob die Verfolgung der Energie von Punkt zu Punkt einen deutlichen physikalischen Sinn habe (Hertz[3]).

Eine weitere Verallgemeinerung erfuhr die Theorie zuerst durch die Arbeiten von Pearson[4] und W. Wien,[5] welche sie auf die mechanischen Vorgänge in vollkommen elastischen Körpern und in Flüssigkeiten ausdehnten.

---

1 Phil. Mag. (5), *19*, p. 482, 1885.
2 Brit. Assoc. Reports, 1885, p. 150.
3 Ausbreitung der elektr. Kraft, S. 234 und S. 294.
4 Messenger of Math. *19*, p. 31, 1889.
5 Wied. Ann. *45*, S. 685, 1892.

Die gründlichsten und umfassendsten Untersuchungen über den Gegenstand verdanken wir Heaviside,[1] der vor Allem die Theorie der Energiewanderung auch für mechanische Vorgänge in voller Allgemeinheit aufstellte und zugleich zeigte, dass für alle mechanischen Analogien, die man bis heute für das elektromagnetische Feld geliefert hat, der mechanische Energiestrom mit dem elektromagnetischen identisch wird.

Heaviside hat zuerst darauf hingewiesen, dass die Theorie des mechanischen Energiestromes:

1. an derselben Unbestimmtheit leidet, wie die des elektromagnetischen;

2. ebenfalls zu cyclischen Energiebewegungen bei stationären Zuständen führt.

Er schliesst daraus, dass es in der That unmöglich ist, den Energiestrom bestimmt zu definiren, dass also die Energietheilchen keine individuelle Existenz besitzen, dass der Energiestrom kein physikalisches Phänomen ist, sondern nur ein mathematisches Hilfsmittel, um die Vertheilung der Energie bequem zu verfolgen.

Von neueren Arbeiten sind noch zu erwähnen der Versuch von Macauley,[2] einen anderen Energiestrom für das elektromagnetische Feld herzuleiten, als Poynting, ferner der von Birkeland[3] geführte Nachweis, dass der Poynting'sche Energiefluss unter allen möglichen der einzige ist, der eine reine Functon der elektrischen und magnetischen Feldstärke ist, endlich die interessante Schilderung von Energieströmen von Föppl,[4] der ebenfalls gewichtige Gründe gegen die Individualisirung der Energietheilchen anführt.

6. Wollen wir der üblichen Ausdrucksweise folgen, so müssen wir jedenfalls den mit dem Worte »Energie« bezeichneten Begriff durch folgende Bestimmung fixiren:

---

[1] Electrician, *27*, 3. Juli 1891; *29*, 29. Juli 1892; abgedruckt in Electromagnet. Theory, p. 76 und p. 247 ff.; ferner: Phil. Trans. London, *183*, p. 426, 1892.

[2] Phil. Trans. London, *183*, p. 685, 1892.

[3] Wied. Ann. *52*. S. 357, 1894.

[4] Einführung in die Maxwell'sche Theorie, S. 293.

Festsetzung.

Es ist unmöglich, die Energietheilchen gleich den materiellen Partikeln zu individualisiren. Es hat keinen vernünftigen Sinn, von einer Bewegung der Energietheilchen und von einer Geschwindigkeit dieser Bewegung zu sprechen, wenn man nicht diesen Worten ganz neue Begriffe unterlegt.

Anmerkung. Die Individualisirung der materiellen Partikeln beruht darauf, dass sie bestimmte Eigenschaften besitzen, an denen sie von ihrer Umgebung zu unterscheiden sind, zum mindesten die Undurchdringlichkeit, d. h. die Eigenschaft, einer Änderung ihres Volumens einen bestimmten Widerstand entgegenzusetzen. Niemand aber hat bisher von blauen oder grünen, kalten oder warmen, gepressten oder ausgedehnten, oder ihr natürliches Volumen besitzenden Energietheilchen gesprochen, oder den Energietheilchen überhaupt im Ernst bestimmte Eigenschaften ausser ihrer Quantität beigelegt. In Folge dessen hat auch noch niemals Jemand wirklich ein Energietheilchen individualisiren und seine Geschichte verfolgen können, wie Lodge es wünscht.

Ferner erkennt man die Geschwindigkeit bewegter Materie an den Trägheitswirkungen, wie Stoss, Centrifugalkraft etc. Mit Hilfe dieser Wirkungen kann man z. B. ganz unabhängig von der Stromstärke einer Flüssigkeitsströmung auch ihre Geschwindigkeit messen. Niemand aber hat jemals von einer Trägheit bewegter Energie gesprochen. Es hat daher z. B. noch niemals Jemand versucht, die Geschwindigkeit zu messen, mit der sich fortgeleitete Wärme etwa bewegt, obwohl man die Stromintensität des Wärmestromes genau bestimmen kann.

Drittes Princip: Energieübertragung.

7. Es sei ein freies System Σ vorgelegt. A und B seien zwei durch geschlossene Flächen abgegrenzte Theilsysteme die keinen Theil gemeinsam haben, und die durch ein drittes Theilsystem C zu Σ ergänzt werden, welches dadurch charakterisirt ist, dass seine Energie während der sich in Σ abspielenden Vorgänge immer ungeändert bleibt.

Ich nehme nun an, es gehe in dem Theil A eine Veränderung vor sich, die eine Verminderung seiner Energie dE_A mit sich bringt. Dann folgt ohne Weiteres, dass in demselben Moment in B eine Zustandsänderung eintreten muss, der eine ebensogrosse Vermehrung der Energie entspricht: $dE_B = -dE_A$.

Das heisst, es muss zwischen den Zuständen der Punkte von A und denen der Punkte von B nothwendig ein mathematischer Zusammenhang bestehen. Diesen charakterisiren wir durch den Ausdruck, es geht die Energie dE_A zwischen A und B über.

Definition des Energieüberganges.

Stehen die Zustände zweier materieller Systeme A und B für alle natürlichen Vorgänge in einem derartigen mathematischen Zusammenhang, dass einer Energieverminderung dE im einen stets eine gleiche und gleichzeitige Energievermehrung im anderen entspricht, so sagen wir, dass zwischen A und B die Energie dE übergeht.

Bezeichnet dt die Zeit, während welcher dE übergeht, so ist $\frac{dE}{dt}$ die Stärke des Energieüberganges.

Wir können nun die beiden ersten Energieprincipe gemeinsam in folgender Form aussprechen:

In einem System A, welches der eine Theil eines freien Systems Σ ist, kann sich die Energie nur dadurch ändern, dass zwischen A und den übrigen Theilen von Σ Energieübergänge stattfinden.

Sind A und B räumlich getrennt, so sind bei den Energieübergängen zwischen ihnen zwei Hauptmöglichkeiten zu unterscheiden.

Erstens kann zwischen A und B eine Fernwirkung bestehen.

Definition der Fernwirkung.

Wenn zwischen zwei räumlich getrennten materiellen Systemen A und B Energieübergänge stattfinden, ohne dass sie mit bestimmten Zuständen eines A und B verbindenden Körpers C nothwendig verknüpft sind, so sagt man, zwischen A und B bestehe eine Fernwirkung.

Zweitens kann der Energieübergang durch einen Körper C vermittelt sein.

Definition der Energieübertragung.

Wenn zwischen zwei räumlich getrennten materiellen Systemen A und B nur solche Energieübergänge stattfinden, die in einem nothwendigen Zusammenhang mit den Zustandsgrössen in den Punkten eines beide verbindenden Körpers C stehen, so dass man den Energieübergang $\frac{dE}{dt}$ ohneweiteres berechnen kann, wenn man nur den Zustand in allen Punkten von C kennt, so sagt man, dass die Energie dE zwischen A und B durch C übertragen wird.

Wir können uns z. B. unter A einen Motor, unter B eine Arbeitsmaschine, unter C die Transmission (Welle und Riemen) zwischen A und B vorstellen. So lange A, B und C verbunden sind und so lange (A, B, C) ein freies System bilden, das durch äussere Kräfte also nicht beeinflusst wird, stehen A und B für alle natürlichen Vorgänge in einem derartigen Zusammenhang, dass jeder Energieänderung in A eine genau gleiche entgegengesetzte in B entsprechen muss, vorausgesetzt, dass wir von den geringfügigen Energieänderungen und Reibungsverlusten in den Theilen der Transmission absehen dürfen. Die Energie geht also von A nach B über. Sobald aber dieser Übergang stattfindet, muss in der verbindenden Transmission ein bestimmter Zustand elastischer Spannung und gleichzeitiger Bewegung herrschen, aus dem man den Energieübergang berechnen kann, ohne die Vorgänge in A und B zu kennen. Durch Riemen und Welle wird also die Energie übertragen.

Ausser diesen beiden Hauptmöglichkeiten ist es natürlich auch denkbar, dass Energieübergänge stattfinden, die weder durch reine Fernewirkung, noch durch reine Übertragung vor sich gehen, sondern durch eine Combination beider. Indessen hat die nähere Untersuchung aller dieser Möglichkeiten für uns kein Interesse, da wir entsprechend der Anschauungsweise, dass es nur Nahewirkungen gibt, folgendes Princip voraussetzen werden:

Princip von der Übertragung der Energie.

Energieübergänge, d. h. überhaupt Änderungen der räumlichen Vertheilung der Energie, können nur durch reine Energieübertragung eintreten.

Problem der Energieübertragung.

8. Die Annahme dieses Principes führt uns zu dem Problem, die Form zu suchen, in der der mathematische Zusammenhang zwischen den Zuständen des Energieüberträgers und dem Energieübergang darzustellen ist.

Die Lösung dieses Problems würde uns eine allgemeine Methode liefern, aus den Zuständen des Überträgers die während jedes Zeitelementes dt von A nach B übergehende Energiemenge dE zu berechnen, ohne dass wir die Vorgänge in A und B zu kennen brauchen.

Ich schneide durch eine geschlossene Oberfläche S aus dem freien System Σ ein Gebiet A aus, construire eine Oberfläche S', welche ganz ausserhalb von S, aber überall unendlich nahe an S verläuft, so dass die Energie der unendlich dünnen Schale $\overline{SS'}$ gegen die ganze Energie von Σ stets zu vernachlässigen ist.[1] Nenne ich den Theil von Σ, der ganz ausserhalb S' liegt, B, so ist die Schale SS' als der Energieüberträger C zu betrachten, dessen Energie selber keine merklichen Änderungen erfährt.

Statt nun zu sagen, dass durch die Schale $\overline{SS'}$ die Energie dE von A nach B übertragen wird, werde ich häufig den Ausdruck brauchen, dass durch die A und B trennende Oberfläche S die Energie dE nach aussen hindurchtritt.

Unser Problem ist also zunächst darauf reducirt, zu untersuchen, wie sich aus den Zustandsgrössen auf jeder beliebigen geschlossenen Oberfläche S die Stärke des durch S hindurchtretenden Energieüberganges $\dfrac{dE}{dt}$ berechnet.

---

[1] Dabei ist als selbstverständlich vorausgesetzt, dass die Energie sich nicht unendlich dicht anhäufen kann.

Viertes Princip: Localisirbarkeit der Energieübertragung.

9. Ich denke mir nun, es gebe zu einem beliebig begrenzten Stück F der Oberfläche S immer ein materielles System M, welches sich mit F verbinden lässt und die Eigenschaft hat, dass man dann zur Berechnung der Energieübertragung nach M hinein nur die Zustände auf F zu berücksichtigen hat. Damit dies der Fall ist, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein. Erstens muss jede Energieänderung in M als reine Function der Zustände in F zu berechnen sein. Zweitens, wenn M' ein ähnliches System ist wie M, das sich in gleicher Weise mit F' verbinden lässt, einem F in allen Punkten unendlich benachbarten Flächenstück, dessen Begrenzungscurve mit der von F zusammenfällt, und zwar so, dass M und M' auf verschiedenen Seiten des Schalenstückes $\overline{FF'}$ liegen, so muss die Energie des Systems $(M, M', \overline{FF'})$ bei allen natürlichen Vorgängen ungeändert bleiben. Nennen wir nämlich die freien Oberflächen von M und M': G und G', so ist die Oberfläche des zusammengesetzten Systems (G, G'), es können also Energieänderungen nur dadurch eintreten, dass durch G oder G' Energie übertragen wird, was ausgeschlossen sein soll.

Von einem derartigen System M sage ich, dass es nur durch F vermittelte Energieübergänge $\frac{dE}{dt}$ erfahren kann, und $\frac{dE}{dt}$ nenne ich den realisirbaren Energieübergang durch F.

Der realisirbare Energieübergang muss jedenfalls durch die Zustände in F eindeutig bestimmt sein. Denn seien M_1, $M_2, \ldots$ verschiedene Systeme, die bei ihrer Verbindung mit F nur durch F vermittelte Energieänderungen erfahren würden, M' ein entsprechendes System für die andere Begrenzung F' des unendlich dünnen Schalenstückes $\overline{FF'}$, seien ferner die Energieübergänge, die sich bei einem bestimmten Zustand in FF' für $M_1, M_2, \ldots M'$ berechnen würden:

$$\frac{dE_1}{dt}, \quad \frac{dE_2}{dt}, \ldots \quad \frac{dE'}{dt},$$

so muss offenbar sein:

$$\frac{dE_1}{dt} = -\frac{dE'}{dt}, \quad \frac{dE_2}{dt} = -\frac{dE'}{dt}, \ldots$$

Es sei nun dS ein Element der das Gebiet A umschliessenden Oberfläche S, n die Richtung der Normale nach aussen, $f_n . dS$ der realisirbare Energieübergang durch dS, $\frac{dE}{dt}$ die Energieänderung, die A erfährt, so ist

$$-\frac{dE}{dt} = \int_S f_n . dS.$$

Wir können also in eindeutig bestimmbarer, stets zutreffender Weise den ganzen Energieübergang auf die einzelnen Elemente von S localisiren.

Da dies nur unter der Annahme der Existenz materieller Systeme M möglich ist, die nur durch ein beliebiges Flächenstück F vermittelte Energieänderungen erfahren, da aber die Existenz solcher Systeme M a priori nicht nachzuweisen ist, stellen wir als Ergänzung des dritten Principes ein weiteres allgemeines Princip auf.

Princip der Localisirbarkeit der Energieübertragung.

Der Energieübergang durch eine geschlossene Oberfläche S vertheilt sich in eindeutig bestimmbarer Weise auf die Elemente von S:

$$-\frac{dE}{dt} = \int_S f_n . dS; \qquad \ldots 3$$

$f_n . dS$ ist der durch dS tretende realisirbare Energieübergang, f_n hängt nur von dem Zustand in dS ab.

Methode der Berechnung der Energieübertragung.

10. Ich denke mir den Punkt (x, y, z) als Spitze eines unendlich kleinen Tetraëders, dessen drei Seitenkanten den Richtungen der Coordinatenaxen parallel sind. Die drei Seitenflächen seien: dS_1, dS_2, dS_3, und zwar seien diese Grössen als positiv oder als negativ zu rechnen, je nachdem die nach aussen gerichtete Normale die positive oder die negative Richtung der parallelen Coordinatenaxe besitzt. Die Grundfläche sei dS, die Richtungscosinus ihrer nach aussen gerichteten Normale n seien: λ, μ, ν, so dass also: $\lambda . dS = -dS_1$, $\mu . dS = -dS_2$, $\nu . dS = -dS_3$. Die durch diese vier Flächen nach aussen tretenden realisirbaren Energieübergänge seien:

$$u . dS_1, \; v . dS_2, \; w . dS_3, \; f_n . dS.$$

Da die Energieänderung in dem Tetraëder unendlich klein von einer höheren Ordnung sein muss wie diese Grössen (nämlich von der Ordnung $dx . dy . dz$), so ist:

$$u . dS_1 + v . dS_2 + w . dS_3 + f_n . dS = 0.$$

Also:

$$f_n = u . \lambda + v . \mu + w . \nu.$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

Finden in dem System Σ alle Energieübergänge nur durch localisirte Energieübertragung statt, so müssen sich für jeden Punkt von Σ drei Grössen u, v, w eindeutig als Functionen der Eigenschaftsgrössen der Materie bestimmen lassen, mit deren Hilfe man die durch eine beliebige Fläche F austretende Energie $\frac{dE}{dt}$ immer berechnen kann:

$$-\frac{dE}{dt} = \int_F (u . \lambda + v . \mu + w . \nu) . dF \qquad \ldots 4$$

λ, μ, ν die Richtungscosinus der auf dem Flächenelement dF nach aussen errichteten Normale n.

Damit ist der Weg zur Lösung des Problems der Energieübertragung gefunden.

Fassen wir u, v, w als Componenten eines f Vectors auf $f = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, so ist:

$$f_n . dS = f . \cos(f, n) . dS.$$

Aus dieser Gleichung folgt ohneweiters, dass, wenn die Fläche $dS \parallel f$ ist: $f_n . dS = 0$. Wir haben hier die Verallgemeinerung des von Kirchhoff für Lichtschwingungen bewiesenen Satzes,[1] dass sich immer eine Richtung (f) angeben lassen muss, derart, dass durch ein zu ihr paralleles Flächenelement keine Energie übertragen wird. Durch ein zu f senkrechtes Flächenelement findet das Maximum der Energieübertragung statt.

Ist E die in der geschlossenen Fläche S enthaltene Energie, so ist nach 4):

$$-\frac{dE}{dt}=\int_S (u\,.\,dy\,dz+v\,.\,dz\,dx+w\,.\,dx\,dy) \qquad \ldots 5$$

oder wenn S unendlich klein und e die Dichtigkeit der Energie in S:

$$-\frac{de}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}. \qquad \ldots 6$$

Durch diese Gleichungen ist der gesuchte Zusammenhang zwischen dem Zustande des Energieüberträgers und dem Energieübergang gegeben.

Continuität der Energie.

11. Brauchen wir nun das anschauliche Gleichniss des Fluidums für die Energie, so wollen wir den Vector f als die Intensität der wirklichen Strömung bezeichnen. Dabei ist aber zu bemerken, dass, während die Strömung eines materiellen Fluidums nothwendig eine bestimmte Geschwindigkeit besitzt, hievon in unserer Theorie der Energieübertragung nicht die Rede ist. Ob man das Wort Geschwindigkeit der Energie in diesem Gleichniss überhaupt consequent in irgend einer Weise deuten kann, lasse ich dahingestellt sein.

Definition des wirklichen Energiestromes.

Der wirkliche Energiestrom ist ein Vector f, dessen Componenten u, v, w folgende drei Bedingungen erfüllen:

---

[1] Kirchhoff, Optik. Vorlesung 12, S. 205.

1. Sie genügen der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{de}{dt},$$

wo e die Dichte der Energie im Punkte (x, y, z) ist.

2. Sie sind reine Functionen der Eigenschaftsgrössen der Materie im Punkte (x, y, z) (nebst ihren Ableitungen nach Ort und Zeit) und enthalten nicht explicite die Coordinaten und die Zeit.

3. Sie stellen nur realisirbare Energieübergänge durch die durch den Punkt (x, y, z) zu legenden Flächenelemente dar.

Wie in **18.** gezeigt, gilt dann der Satz:

Der wirkliche Energiestrom muss sich stets eindeutig bestimmen lassen.

Mit Hilfe dieses Begriffes lassen sich die in den vorhergehenden Paragraphen getrennt ausgesprochenen vier Energieprincipe zu dem folgenden Satze vereinigen:

Satz von der Continuität der Energie.

Alle Energieverschiebungen sind die Folgen wirklicher Energieströme.

Ich bemerke dabei ausdrücklich, dass die Ähnlichkeit zwischen diesem Satz und dem von der Continuität der Masse nur eine ganz äusserliche ist, da ihm durchaus die unmittelbare Anschaulichkeit des letzteren fehlt.

Definition der fingirten Energieströme.

12. Alle Vectoren $f'(u', v', w')$, die der Gleichung:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{\partial e}{\partial t}$$

genügen, die man also alle benützen kann, um die Energieänderungen anschaulich zu schildern, die aber den anderen Bedingungen des wirklichen Energiestromes nicht genügen, nenne ich fingirte Energieströme.

Unter Umständen ist es bequem, mit fingirten Energieströmen zu rechnen.

Eine Classe von fingirten Energieströmen sind die, welche auch die Coordinaten oder die Zeit noch explicite enthalten. Es ist leicht, Beispiele dafür zu finden. Seien ein Motor und eine Arbeitsmaschine mit den Riemscheiben R_1 und R_2 einer Transmissionswelle verbunden, so geht der wirkliche Energiestrom im Innern der Welle von R_1 nach R_2. Da nun aber in der Welle keine Energieanhäufungen stattfinden, so kann ich einen Strom f' fingiren, der irgendwie durch die Luft geht, wenn er nur R_1 und R_2 verbindet und die richtige Intensität besitzt. f' wird die Energieübergänge richtig darstellen, steht aber mit dem Vorgange der Energieübertragung in gar keinem Zusammenhang.

Die andere Classe wird von solchen Vectoren gebildet, die freilich von den Coordinaten und der Zeit nicht explicite abhängen, aber nicht nur realisirbaren Energieübergängen entsprechen. Man kann beispielsweise in einem elektromagnetischen Felde dem wirklichen Energiestrom noch einen superponiren, der überall längs der magnetischen Inductionslinien verläuft und dessen Intensität der magnetischen Induction proportional ist. Dieser superponirte Strom ändert die Dichtigkeit der Energie nirgends, da die magnetischen Inductionslinien sich cyclisch schliessen. Der resultirende Strom $f'(u', v', w')$ genügt also der Bedingung $\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{de}{dt}$, er ist ausserdem eine reine Function der Grössen, die das elektromagnetische Feld charakterisiren, aber niemals lässt sich der ihm entsprechende Energieübergang vollständig realisiren, weil die superponirte Strömung ihrem Wesen nach immer cyclisch verlaufen muss. So ist er z. B. auch im Felde eines ruhenden permanenten Magneten, in welchem überhaupt niemals Energieübergänge stattfinden können, von Null verschieden. Derartige cyclische Energieströme nenne ich wesentlich cyclisch. Man kann die dritte Bedingung, der der wirkliche Energiestrom genügt, auch so ausdrücken:

Wirkliche Energieströme enthalten keine wesentlich cyclischen Bestandtheile.

II. Abschnitt.

Die Formen des wirklichen Energiestromes.

Eintheilung der Energieströme.

13. Um die Energieänderung dE in einem abgeschlossenen Raume zu berechnen, muss man erstens die Änderung dE_0 suchen, welche in Folge der Verschiebung der materiellen Theilchen auftritt, wenn die Energie ihnen unverändert anhaftet, und zweitens die Änderung dE', welche die Energie der den Raum momentan erfüllenden Materie erleidet. Die ganze Änderung dE erhält man als algebraische Summe dieser beiden Grössen:

$$dE = dE_0 + dE'.$$

Ich nenne dE_0 die Energieänderung durch Convection, dE' die Energieänderung durch Leitung.

Die Energie eines beliebigen materiellen Systems kann nun durch folgende Einwirkungen verändert werden:

1. Dadurch, dass eine mechanische Arbeit an der Oberfläche des Systems geleistet wird,

2. dadurch, dass Wärme ab- oder zugeleitet wird,

3. durch elektromagnetische Vorgänge (elektrischer Strom, Entstehung elektrischer und magnetischer Kraftfelder, Strahlung[1]),

4. durch die Wirkung der Gravitation.

Andere Einflüsse, die die Energie eines materiellen Systems ändern, sind bisher nicht bekannt geworden.

Von diesen Energieübergängen müssen wir die durch Gravitationswirkungen erfolgten als gänzlich unerforscht bei Seite lassen, zumal da sie im Allgemeinen noch als Ferne-

---

[1] Dabei ist zu bemerken, dass von den fast unerforschten neuen Strahlungsarten (Röntgenstrahlen etc.) noch nicht feststeht, ob sie ebenfalls nur elektromagnetische Vorgänge im Sinne der Maxwell'schen Theorie sind, oder ob sie nicht eine ganz neue Art mit Energieleitung verbundener Vorgänge darstellen.

wirkungen behandelt werden.[1] Wir betrachten also nur die Energieänderungen, die durch je eine der drei ersten Wirkungen hervorgebracht werden, dE_1, dE_2, dE_3. dE' ergibt sich durch algebraische Summirung dieser drei Grössen, und es ist also die ganze in dem betrachteten Raum eintretende Energieänderung:

$$dE = dE_0 + dE_1 + dE_2 + dE_3.$$

Wir haben demnach vier Arten von Energieströmen einzeln zu berechnen, aus denen sich der gesammte Energiestrom durch Superposition zusammensetzt.

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \\ v &= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 \\ w &= w_0 + w_1 + w_2 + w_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots 7$$

Convectionsstrom.

14. Der Convectionsstrom hat die Grösse $f_0 = e . \omega$, wo e die Dichtigkeit der Energie, ω die Geschwindigkeit der materiellen Theilchen bedeuten. Seine Richtung fällt zusammen mit der von ω. Sind die Componenten von ω: α, β, γ, so ist:

$$u_0 = e . \alpha, \; v_0 = e . \beta, \; w_0 = e . \gamma. \quad \ldots 8$$

1. Findet nur Convection von Energie statt, so berechnen sich die Dichtigkeitsänderungen überall nach der Formel:

$$-\frac{de_0}{dt} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = e . \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right).$$

2. Die Grössen u_0, v_0, w_0 enthalten die Zeit und die Coordinaten nicht explicite.

---

[1] Heaviside hat (Electrician, *31*, 4. August, 1893, abgedruckt: Electromagnetic Theory, p. 463) hypothetisch eine der Maxwell'schen Theorie nachgebildete Theorie aufgestellt, die die Energieübergänge durch Gravitation als Nahewirkungen behandelt und den entsprechenden Energiestrom berechnet. Durch einige sehr interessante Zahlenbeispiele hat er dem Beobachter die Mittel zur Prüfung dieser Theorie an die Hand gegeben.

3. f_0 stellt nur realisirbare Energieübergänge dar. Untersuchen wir beispielsweise einen Fall genauer, wo keine Energieübergänge stattfinden und doch f_0 von Null verschieden ist.

Die Theile eines rotirenden Schwungrades besitzen eine beträchtliche kinetische Energie, die sie bei der Rotation mit sich führen, in der Art jedoch, dass, wenn der Radkranz homogen ist, an keinem Orte Energieänderungen eintreten. Wir haben hier einen cyclischen Convectionsstrom. Dennoch aber stellt (u_0, v_0, w_0) realisirbare Energieübergänge dar. Um dies einzusehen, denke man sich den Radkranz (Fig. 1) an einer Stelle durchbrochen und construire zwei geschlossene Oberflächen, deren jede eine Begrenzung an der Durchbrechung ganz in sich schliesst und die andere ganz ausschliesst.

Nennen wir die Theile dieser Flächen, die in der Masse des Radkranzes liegen, F und F', nennen wir die Theile des Radkranzes, die ganz von diesen Flächen umschlossen sind, M und M', so sieht man unmittelbar, dass der eine Theil, z. B. M, die ganze durch F eintretende Energiemenge aufnimmt, während der andere, M', die ganze durch F' austretende Energiemenge abgibt.

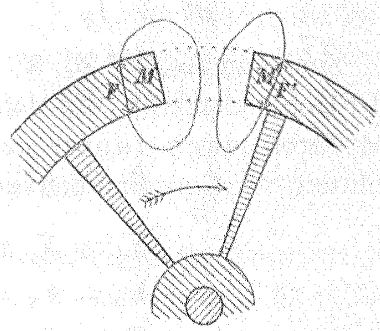

Fig. 1.

Es ist leicht einzusehen, dass sich durch dasselbe Beweisverfahren stets zeigen lässt, dass (u_0, v_0, w_0) nur realisirbare Energieübergänge darstellt.

Einen wirklichen Energiestrom, der cyclisch verläuft, nenne ich »zufällig cyclisch«.

Es ist sehr bequem, für einen zufällig cyclischen Energiestrom den Strom Null zu fingiren.

Mechanischer Leitungsstrom.

15. Man denke sich einen ganz beliebigen materiellen Körper Σ, der durch die geschlossene Fläche S begrenzt ist. Auf die Fläche S wirken Mechanismen, die sich unter Ausübung von Druckkräften bewegen und dadurch an Σ eine Arbeit leisten. Sind X_n, Y_n, Z_n die Componenten des Druckes auf das Flächenelement dS, dessen nach innen gerichtete Normale n die Richtungscosinus λ, μ, ν habe, sind ferner α, β, γ die Componenten der Geschwindigkeit ω an dieser Stelle, so ist die Leistung der Druckkräfte auf dS:

$$(X_n \cdot \alpha + Y_n \cdot \beta + Z_n \cdot \gamma) \cdot dS,$$

also die zeitliche Änderung der Energie im Körper Σ in Folge dieser Leistungen:

$$\frac{dE_1}{dt} = \int_S (X_n \cdot \alpha + Y_n \cdot \beta + Z_n \cdot \gamma) \cdot dS.$$

Sind nun X_x, Y_x, Z_x, X_y, ... die Componenten der Drucke auf Flächenelemente, die den Coordinatenebenen parallel sind und deren nach innen gerichteten Normalen die positive Richtung der Coordinatenaxen haben, so ist:

$$\begin{aligned} X_n &= X_x \cdot \lambda + X_y \cdot \mu + X_z \cdot \nu \\ Y_n &= Y_x \cdot \lambda + Y_y \cdot \mu + Y_z \cdot \nu \\ Z_n &= Z_x \cdot \lambda + Z_y \cdot \mu + Z_z \cdot \nu, \end{aligned}$$

also:

$$\frac{dE_1}{dt} = \int_S \{(X_x \cdot \alpha + Y_x \cdot \beta + Z_x \cdot \gamma)\lambda + (X_y \cdot \alpha + Y_y \cdot \beta + Z_y \cdot \gamma)\mu + \\ + (X_z \cdot \alpha + Y_z \cdot \beta + Z_z \cdot \gamma)\nu\} \, dS.$$

Daraus folgt, wenn wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= X_x \cdot \alpha + Y_x \cdot \beta + Z_x \cdot \gamma \\ v_1 &= X_y \cdot \alpha + Y_y \cdot \beta + Z_y \cdot \gamma \\ w_1 &= X_z \cdot \alpha + Y_z \cdot \beta + Z_z \cdot \gamma \end{aligned}\right\} \ldots 9$$

1. Die Grössen u_1, v_1, w_1 erfüllen Gleichung 5 (Punkt **10**)[1] und folglich auch Gleichung 6:

$$-\frac{de_1}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z};$$

[1] Wo zu beachten ist, dass λ, μ, ν die Richtungscosinus der nach aussen gerichteten Normale bedeuten.

2. sie enthalten die Coordinaten und die Zeit nicht explicite;

3. sie liefern nur realisirbare Energieübergänge. Denn man kann die Oberfläche S beliebig in Gebiete F zertheilen und jedes Stück F mit einem eigenen Mechanismus M in Verbindung setzen, der unabhängig von allen übrigen arbeitet. Es liefert dann immer (u_1, v_1, w_1) den nach M hinein stattfindenden Energieübergang.

16. Ich will noch einen anderen, mehr analytischen Nachweis liefern, dass die durch Gleichung 9 definirten Grössen u_1, v_1, w_1 die erste Bedingung erfüllen, der sich freilich nicht wesentlich von dem in (**15**) gebrachten unterscheidet.

Es sei μ die Massendichte, (α, β, γ) die Geschwindigkeit im Punkte (x, y, z), dann ist die kinetische Energie des im Raumelement $d\tau$ befindlichen materiellen Theilchens:

$$T = \frac{1}{2}\mu.(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).d\tau.$$

Es seien ferner die zeitlichen Änderungen der Geschwindigkeitscomponenten, welche sie allein durch den Einfluss der Druckkräfte erleiden:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_1, \quad \left(\frac{d\beta}{dt}\right)_1, \quad \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_1,$$

so genügen diese Grössen den Gleichungen:[1]

$$\mu.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_1 = -\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)$$

$$\mu.\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_1 = -\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)$$

$$\mu.\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_1 = -\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right).$$

Es ist nun die zeitliche Änderung der kinetischen Energie unter dem Einflusse der Druckkräfte allein:

---

[1] Die sich aus Kirchhoff, Mechanik, S. 113, Vorl. 11, Gl. 8) ergeben, indem man alle Kräfte ausser den Druckkräften gleich Null setzt.

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_1 = \mu . \left\{ \alpha . \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_1 + \beta . \left(\frac{d\beta}{dt}\right)_1 + \gamma . \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_1 \right\} . d\tau .$$

Ferner ist die zeitliche Änderung der inneren Energie unter dem Einfluss der Druckkräfte allein:[1]

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_1 = \left\{ \left(X_x . \frac{\partial \alpha}{\partial x} + X_y . \frac{\partial \alpha}{\partial y} + X_z . \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) + \right.$$

$$+ \left(Y_x . \frac{\partial \beta}{\partial x} + Y_y . \frac{\partial \beta}{\partial y} + Y_z . \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) +$$

$$\left. + \left(Z_x . \frac{\partial \gamma}{\partial x} + Z_y . \frac{\partial \gamma}{\partial y} + Z_z . \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) \right\} . d\tau .$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung:

$$\frac{de_1}{dt} . d\tau = \left(\frac{dT}{dt}\right)_1 + \left(\frac{dF}{dt}\right)_1$$

ein, so ergibt sich unter Berücksichtigung der oben hingeschriebenen Bewegungsgleichungen:

$$-\frac{de_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} (X_x . \alpha + X_y . \beta + X_z . \gamma) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} (Y_x . \alpha + Y_y . \beta + Y_z . \gamma) + \frac{\partial}{\partial z} (Z_x . \alpha + Z_y . \beta + Z_z . \gamma) .$$

Es erfüllen also die in Gleichung 9 definirten Grössen u_1, v_1, w_1 die Bedingung:

$$-\frac{de_1}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} .$$

Dabei sei ausdrücklich hervorgehoben, dass keine Hypothesen über die Natur der elastischen Kräfte und keine irgendwie beschränkenden Annahmen über das Medium gemacht sind. Dieses darf fest, flüssig oder gasförmig sein, reibungslos

[1] Kirchhoff, Mechanik, S. 117, Vorl. 11, Gl. 18), wo zu setzen:

$$\partial x = \alpha . dt, \quad \partial y = \beta . dt, \quad \partial z = \gamma . dt; \quad X_y = Y_x, \quad X_z = Z_x, \quad Y_z = Z_y .$$

oder mit innerer Reibung; in allen Fällen sind die Gleichungen, von denen wir ausgingen, nur der einfachste Ausdruck der Erfahrungsthatsachen (Lagrange'sche Gleichungen).

17. Seien die Richtungscosinus der Geschwindigkeit l, m, n, so dass $\alpha = \omega . l$, $\beta = \omega . m$, $\gamma = \omega . n$.

Sei ein zu ω senkrechtes Flächenelement dS_ω, die darauf wirkenden Drucke X_ω, Y_ω, Z_ω, so ist:

$$X_\omega = X_x . l + X_y . m + X_z . n$$
$$Y_\omega = Y_x . l + Y_y . m + Y_z . n$$
$$Z_\omega = Z_x . l + Z_y . m + Z_z . n,$$

also:

$$u_1 = X_\omega . \omega, \quad v_1 = Y_\omega . \omega, \quad w_1 = Z_\omega . \omega. \qquad \ldots 10$$

Nennen wir die resultirende Druckkraft P_ω und ihre Richtungscosinus l_1, m_1, n_1, so ist:

$$u_1 = P_\omega . \omega . l_1, \quad v_1 = P_\omega . \omega . m_1, \quad w_1 = P_\omega . \omega . n_1. \qquad \ldots 11$$

Die Grösse des mechanischen Energiestromes f_1 berechnet sich als das Product der Geschwindigkeit und der Grösse des Druckes, der auf das zur Richtung der Geschwindigkeit senkrechte Flächenelement wirkt: $f_1 = P_\omega . \omega$. Seine Richtung fällt mit der Richtung dieses Druckes $P_\omega(l_1, m_1, n_1)$ zusammen.

Durch jedes zu P_ω parallele Flächenelement findet also keine mechanische Energieübertragung statt.

Es sei nun die Normalcomponente von P_ω mit N_ω, die Tangentialcomponente mit T_ω bezeichnet, die Richtungscosinus von T_ω seien l', m', n'; dann ist:

$$N_\omega = X_\omega . l + Y_\omega . m + Z_\omega . n,$$
$$T_\omega = X_\omega . l' + Y_\omega . m' + Z_\omega . n',$$

$$l . l' + mm' + nn' = 0,$$

$$X_\omega = l . N_\omega + l' . T_\omega, \quad Y_\omega = m . N_\omega + m' . T_\omega,$$
$$Z_\omega = n . N_\omega + n' . T_\omega.$$

Ich setze nun:

$$u_1' = \omega . N_\omega . l, \quad v_1' = \omega . N_\omega . m, \quad w_1' = \omega . N_\omega . n,$$
$$u_1'' = \omega . T_\omega . l', \quad v_1'' = \omega . T_\omega . m', \quad w_1'' = \omega . T_\omega . n',$$

so ist:

$$u_1 = u_1' + u_1'', \quad v_1 = v_1'' + v_1'', \quad w_1 = w_1' + w_1''.$$

Der Vector f_1 ist also in zwei Vectoren f_1' und f_1'' zerlegt, von denen der erste in der Richtung von ω, der andere senkrecht dazu verläuft. Ich nenne f_1' den Longitudinalstrom, f_1'' den Transversalstrom der Energie.

Der Longitudinalstrom der Energie f_1' ist gleich dem Product aus der Geschwindigkeit und dem Normaldruck auf der zur Bewegungsrichtung senkrechten Ebene. Seine Richtung fällt entweder mit der der Bewegung zusammen oder ist ihr gerade entgegengesetzt, je nachdem der Normaldruck einen positiven Werth (Druck) oder einen negativen Werth (Zug) hat.

$$u_1' = N_\omega . \omega . l, \quad v_1' = N_\omega . \omega . m, \quad w_1' = N_\omega . \omega . n. \qquad \ldots 12$$

Es sei dS ein Flächenelement parallel zu ω, und zwar senkrecht zu T_ω, ferner dS' ein beliebiges anderes parallel zu ω, der Normalenwinkel zwischen dS und dS' sei φ.

Seien ferner die Tangentialdrucke auf dS und dS': T und T', seien die Componenten von T und T' parallel zu ω: T_1 und T_1'. Nach dem Satz: $X_y = Y_x$ etc., ist dann:

$$T_\omega = T_1 = T . \cos(\omega, T),$$
$$T_1' = T_\omega . \cos\varphi = T_1 . \cos\varphi,$$

also:

$$T_1' < T_1,$$

Daraus folgt:

Der Transversalstrom der Energie fliesst senkrecht zu derjenigen der Bewegungsrichtung parallelen Ebene, für welche der Tangentialdruck parallel zur Bewegung ein Maximum ist. Seine Grösse ist gleich dem Product aus der Geschwindigkeit und aus der zu ihr parallelen Componente des Tangentialdruckes in dieser Ebene. Diese Componente hat dieselbe Grösse, wie der Tangentialdruck in der zur Bewegungsrichtung senkrechten Ebene, und die Richtung des Stromes fällt mit der Richtung dieses Tangentialdruckes zusammen.

$$\left.\begin{array}{ll} u_1'' = \omega\,.\,T.\cos(\omega, T)\,.\,l', & v_1'' = \omega\,.\,T.\cos(\omega, T)\,.\,m', \\ \quad = \omega\,.\,T_\omega\,.\,l' & \quad = \omega\,.\,T_\omega\,.\,m' \\ \multicolumn{2}{c}{w_1'' = \omega\,.\,T.\cos(\omega, T)\,.\,n} \\ \multicolumn{2}{c}{\quad = \omega\,.\,T_\omega\,.\,n'} \end{array}\right\} \ldots 13$$

Wirkt auf das zur Bewegungsrichtung senkrechte Flächenelement immer nur ein Normaldruck (wie z. B. bei einer reibungslosen Flüssigkeit), so ist der Energiestrom ein reiner Longitudinalstrom, wirkt nur ein Tangentialdruck (wie z. B. in einer Transmissionswelle), so ist er ein reiner Transversalstrom.

Im Allgemeinen entsteht der mechanische Leitungsstrom durch Superposition eines Longitudinal- und eines Transversalstromes.[1]

$$u_1 = u_1' + u_1'', \quad v_1 = v_1' + v_1'', \quad w_1 = w_1' + w_1''. \qquad \ldots 14$$

Für alle diese Fälle werde ich in einer demnächst folgenden Publication Beispiele geben.

18. In der Technik spielt der mechanische Leitungsstrom der Energie naturgemäss eine bedeutende Rolle. Er wird bezeichnet als der durch die Transmission übertragene Effect. Die Dimension seiner Masseinheit ist Kraft × Geschwindigkeit. Nimmt man als Krafteinheit das Kilogramm, als Geschwindigkeitseinheit Meter pro Secunde, so erhält man als Einheit der Stromstärke der Energie das Kilogrammmeter pro Sec. Die praktisch gebräuchliche Einheit ist das 75fache dieser Einheit, man nennt sie Pferdekraft.

[1] Pearson (Messenger of Math. *19*, p. 31, 1889) hat den mechanischen Leitungsstrom auf andere Weise in drei Partialströme zerlegt, indessen ist seine Zerlegung nur bei vollkommen elastischen Körpern möglich.

Für die Intensität des Energiestromes (die Grösse f) hingegen ist keine besondere Einheit eingeführt.

Die Instrumente zum Messen des Energiestromes nennt man Dynamometer. Ich gedenke ihre Theorie später mit den übrigen Beispielen zusammen zu behandeln.

19. Ebenso wie unter den Convectionsströmen finden sich unter den mechanischen Leitungsströmen der Energie sehr häufig zufällig cyclische. Ist z. B. um ein rotirendes Rad ein elastisches Band in gespanntem Zustand geschlungen (wie bei den Fahrrädern der Gummischlauch), so findet ausser dem cyclischen Convectionsstrom noch ein cyclischer Leitungsstrom in der der Bewegung entgegengesetzten Richtung statt. Schneidet man aber das Band auf und erzeugt die Spannung durch zwei an den Schnittflächen angebrachte Zugkräfte, etwa dadurch, dass man Gewichte anhängt (Fig. 2), so ist der durch (u_1, v_1, w_1) dargestellte Energieübergang realisirt. Denn offenbar haben wir nun das eine Ende mit einem System M verbunden, das die ganze übertragene Energie aufnimmt, das andere mit einem System M', das die ganze übertragene Energie abgibt.

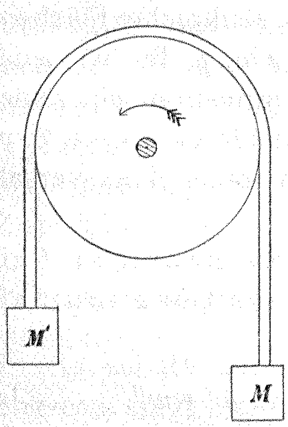

Fig. 2.

Auch für cyclische Leitungsströme fingirt man gewöhnlich den Strom Null.

Beispiele für wesentlich cyclische Ströme erhält man, wenn man irgend eine Vector-Grösse, die nur von den Eigenschaftsgrössen der Materie abhängt und die an allen Stellen des Raumes einen bestimmt angebbaren Werth hat, nimmt, etwa die Geschwindigkeit (α, β, γ), und die folgenden Werthe bildet (die Wirbelcomponenten):

$$u' = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad v' = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad w' = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Natürlich hat es niemals einen Sinn, eine derartige Energieströmung anzunehmen.

Relative Energieströme.

20. Wir haben bisher stillschweigend vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeit sich in absoluter Weise ermitteln lässt. Indessen können wir Geschwindigkeiten nur relativ zu irgend einem System messen, aus dem wir ebensogut in ein anderes transformiren dürfen, das sich im ersten mit constanter Geschwindigkeit parallel verschiebt.

Ist $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ die Geschwindigkeit, mit der sich unser Bezugscoordinatensystem in einem anderen bewegt, in das wir transformiren wollen, ferner (α, β, γ) die gemessene Geschwindigkeit in einem Punkte (x, y, z), so sind die Componenten der transformirten Geschwindigkeit: $(\alpha) = \alpha + \alpha_0$, $(\beta) = \beta + \beta_0$, $(\gamma) = \gamma + \gamma_0$.

Setzen wir nun:

$$\left.\begin{array}{c} u_r = X_x\alpha_0 + X_y\beta_0 + X_z\gamma_0, \quad v_r = Y_x\alpha_0 + Y_y\beta_0 + Y_z\gamma_0, \\ w_r = Z_x\alpha_0 + Z_y\beta_0 + Z_z\gamma_0 \end{array}\right\} \quad \ldots 15$$

und ist der mechanische Leitungsstrom im ersten Coordinatensystem: u_1, v_1, w_1, so ist er im zweiten:

$$(u_1) = u_1 + u_r, \quad (v_1) = v_1 + v_r, \quad (w_1) = w_1 + w_r. \quad \ldots 16$$

Die Transformation des Energiestromes geschieht also dadurch, dass man dem Strom f_1 einen Strom f_r superponirt. Dieser Strom f_r verläuft keineswegs cyclisch, er ruft Energieänderungen hervor, welche die aus den gemessenen Geschwindigkeiten α, β, γ berechnete Vertheilung der kinetischen Energie in die aus den transformirten Geschwindigkeiten (α), (β), (γ) berechnete Vertheilung überführen. Die Vertheilung der anderen Energieformen bleibt bei der Transformation ungeändert. Ich nenne den durch Gleichung 15) definirten Strom $f_r(u_r, v_r, w_r)$ den Umrechnungsstrom.

Ein Beispiel möge diese Umrechnung erläutern. Sei R der Radius der Erde, Ω ihre Rotationsgeschwindigkeit, K ihr Trägheitsmoment. In einem Punkt unter dem Breitengrad φ, dessen Abstand von der Erdaxe also $r = R . \cos \varphi$ ist, werde ein Geschoss von der Masse m aus einer Kanone geschleudert, und zwar genau horizontal von Osten nach Westen mit der

Geschwindigkeit $c = r.\Omega$, relativ zur Erdoberfläche. Es soll nun der Energiestrom berechnet werden, der von dem explodirenden Pulver aus in das Geschoss geht, indem man, wie es im Allgemeinen bei physikalischen Untersuchungen geschieht, die Erdoberfläche als ruhend ansieht. Selbstverständlich muss man finden, dass der Strom f_1 dem Geschoss schliesslich im Ganzen die Energie $T = \frac{m.c^2}{2}$ zugeführt hat, abgesehen von den durch die Reibung und die Rotation des Geschosses verbrauchten Energiemengen, die uns hier nicht weiter interessiren. Transformiren wir nun in ein anderes Coordinatensystem, das die Erde als mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um die ruhende Erdaxe rotirend beschreibt, so bewegt sich das vorhin gebrauchte Bezugscoordinatensystem in diesem mit der Geschwindigkeit c, West—Ost. Wir nehmen an, dass nur so kurze Zeiträume in Betracht kommen, dass man diese Bewegung als Parallelverschiebung ansehen kann. In dem neuen System hat das Geschoss zuerst die Geschwindigkeit c, West—Ost, nach dem Abfeuern des Schusses ist es in Ruhe, es hat die Energie $T = \frac{m.c^2}{2}$ abgegeben. Dafür hat nach dem Flächensatz die Erde einen sehr kleinen Zuwachs $d\Omega$ ihrer Rotationsgeschwindigkeit erhalten, nach der Beziehung:

$$m r.c = K.d\Omega,$$

sie hat also die kinetische Energie gewonnen:

$$K.\Omega.d\Omega = m.c^2 = 2T.$$

Der transformirte Energiestrom (f_1) führt also schliesslich sowohl die vom explodirenden Pulver abgegebene Energiemenge T, als auch die ursprüngliche Energie des Geschosses T beide durch das Postament der Kanone in die Erde.

Der Umrechnungsstrom $f_r = (f_1) - f_1$ ergibt also die Verlegung der Energiemenge $2T$ aus dem Geschoss in die Erde.

21. Noch in anderer Hinsicht können die mechanischen Energieströme relativ sein, wenn man nämlich die Druckkräfte nicht von ihrem absoluten Nullpunkt aus rechnet, sondern von einem willkürlichen, wenn man z. B. in einem Gase den Druck einer Atmosphäre als Nullpunkt wählt und den Druck im Vacuum gleich $-760\,mm$ Quecksilber setzt. Durch diese Wahl des Nullpunktes wird die Vertheilung einer Form der inneren Energie, der Deformationsenergie, beeinflusst. Während z. B. nach der absoluten Rechnung beim Evacuiren eines Gefässes die dazu verbrauchte Energie der Atmosphäre zugeführt wird, die eine unendlich kleine Verdichtung erfährt, geht sie nach der relativen Rechnung in das Vacuum. Wenn die Vertheilung der anderen Energieformen durch diese Nullpunktsverlegung nicht beeinflusst wird, so ist es sehr bequem, sie anzuwenden, beispielsweise in der Theorie der Schallwellen. Auch hier müssen wir dem so berechneten Energiestrom, wenn wir den Nullpunkt des Druckes verlegen, einen Umrechnungsstrom f_r superponiren.

Thermischer Leitungsstrom.

22. Über den mechanischen Leitungsstrom superponirt sich in erster Linie der Wärmeleitungsstrom f_2, dessen Componenten sich aus der Vertheilung der Temperatur ϑ und den Coëfficienten der Wärmeleitungsfähigkeit $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{33}$, die natürlich von ϑ abhängen können, folgendermassen berechnen:[1]

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= -\left(a_{11}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + a_{12}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + a_{13}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right) \\ v_2 &= -\left(a_{21}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + a_{22}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + a_{23}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right) \\ w_2 &= -\left(a_{31}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + a_{32}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + a_{33}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots 17$$

1. Diese Grössen u_2, v_2, w_2 genügen der Bedingung, dass, wenn keine anderen Energieänderungen als durch Wärmeleitung stattfinden:

$$-\frac{de_2}{dt} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z}$$

[1] Kirchhoff, Wärme. Vorlesung 1, S. 9 und 10.

2. Sie hängen nur von den Eigenschaftsgrössen der Materie und ihren Differentialquotienten (Temperaturgefälle) in der Materie ab.

3. Sie stellen nur realisirbare Energieübergänge dar, denn man kann die Wärme in jedem Theil einer Schnittfläche unabhängig von allen anderen Theilen zu- und ableiten.

23. Der thermische Leitungsstrom hat eine charakteristische Eigenthümlichkeit, die ihn vor allen anderen Energieströmen auszeichnet: er kann niemals cyclisch sein.

Angenommen nämlich, der Strom verliefe cyclisch:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0,$$

so müssten nach bekannten Sätzen die Stromlinien geschlossene Curven bilden, man könnte also einen ringförmigen Körper V abgrenzen, dessen Oberfläche S aus einer continuirlichen Folge von Stromlinien bestünde. Untersuchen wir die Vorgänge in einem derartigen Körper. Wir haben die folgenden zwei Bedingungen:

1. f_n, der aus der Oberfläche S austretende Energiestrom, ist in allen Punkten von S Null.

2. In allen Punkten von V ist

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0.$$

Da nun:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vartheta . u_2) = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot u_2 + \vartheta \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\vartheta . v_2) = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \cdot v_2 + \vartheta \cdot \frac{\partial v_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\vartheta . w_2) = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \cdot w_2 + \vartheta \cdot \frac{\partial w_2}{\partial z},$$

so ist nach dem Green'schen Satz:

$$\int_S \vartheta . f_n . dS = \int_V \left(u_2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w_2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \cdot d\tau + $$

$$+ \int_V \vartheta \cdot \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) d\tau,$$

also, wenn wir die zwei gemachten Bedingungen einführen:

$$\int_V \left(u_2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w_2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) d\tau = 0.$$

Nun ist aber eine wesentliche Eigenschaft des Wärmestromes, dass er durch ein Element einer isothermen Fläche nur in der Richtung von der wärmeren Seite nach der kälteren Seite fliessen kann. Die Grösse

$$u_2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w_2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial z}$$

ist also eine wesentlich negative Grösse,[1] die nur an den Stellen Null wird, wo keine Wärmeleitung stattfindet. Daraus folgt, damit das Integral über dieser Grösse Null sein kann, dass in jedem Punkte des betrachteten Körpers der Wärmestrom Null herrschen muss. Es kann also keinen cyclischen Wärmestrom geben.

Man nennt wegen der Unmöglichkeit cyclischer Ströme den Wärmeleitungsstrom einen nicht-umkehrbaren Vorgang.

Poynting's Theorem.

24. Wir setzen die Maxwell'sche Theorie[2] voraus, also vor Allem auch den Satz, dass, wenn:

L, M, N die Componenten der magnetischen Kraft,
$\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ die Componenten der magnetischen Induction,
X, Y, Z die Componenten der elektrischen Kraft,
$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Componenten der elektrischen Verschiebung,
a, b, c die Componenten des elektrischen Leitungsstromes,

der zeitliche Zuwachs der Energie in irgend einem Raumelement $d\tau$, der rein durch die elektromagnetischen Vorgänge hervorgerufen wird, unter allen Umständen den Werth hat:

---

[1] Kirchhoff, Wärme. 4. Vorlesung, S. 48.

[2] Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie, S. 2 und 3.

$$\frac{de_3}{dt}\cdot d\tau = \left\{\frac{1}{4\pi}\cdot\left(L\cdot\frac{d\mathfrak{L}}{dt} + M\cdot\frac{d\mathfrak{M}}{dt} + N\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dt}\right) + \right.$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\cdot\left(X\cdot\frac{d\mathfrak{X}}{dt} + Y\cdot\frac{d\mathfrak{Y}}{dt} + Z\cdot\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}\right) +$$
$$\left. + (X.a + Y.b + Z.c)\right\}\cdot d\tau.$$

In welcher Form diese Energie aber auftritt, lasse ich, wie bei den anderen Formen der Energieübertragung, gänzlich unbeachtet.

Aus den Maxwell'schen Gleichungen:[1]

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} + 4\pi a = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \qquad \frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$
$$\frac{d\mathfrak{Y}}{dt} + 4\pi b = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$$
$$\frac{d\mathfrak{Z}}{dt} + 4\pi c = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \qquad \frac{d\mathfrak{N}}{dt} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

die für jeden elektromagnetischen Vorgang in ruhenden Körpern erfüllt sein müssen, folgt durch Multiplication mit X, Y, Z, L, M, N und Addition:

$$4\pi\cdot\frac{de_3}{dt} = -\left\{\frac{\partial}{\partial x}(YN - ZM) + \frac{\partial}{\partial y}(Z.L - XN) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}(X.M - YL)\right\}.$$

Setzen wir nun:

$$\left.\begin{aligned} u_3 &= \frac{1}{4\pi}\cdot(YN - ZM) \\ v_3 &= \frac{1}{4\pi}\cdot(ZL - XN) \\ w_3 &= \frac{1}{4\pi}\cdot(XM - YL) \end{aligned}\right\} \quad \ldots 18$$

---

[1] Alle Grössen sind in demselben Masssystem, elektrostatisch oder elektromagnetisch gemessen.

so können wir behaupten:

1. Diese Grössen erfüllen die Bedingung

$$-\frac{de_3}{dt} = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z}.$$

2. Sie enthalten die Coordinaten und die Zeit nicht explicite, sondern sind reine Functionen der Zustandsgrössen.

Die dritte Frage, ob sie nur realisirbare Energieübergänge darstellen, lasse ich fürs erste offen.

Poynting's Satz.

Der durch die Gleichungen 18) definirte Vector stellt alle Energieänderungen in einem elektromagnetischen Felde richtig dar. Er ist, abgesehen von dem Zahlenfactor $\frac{1}{4\pi}$, gleich dem Product aus der elektrischen Kraft P, der magnetischen Kraft H und dem Sinus des von beiden gebildeten Winkels φ:

$$f_3 = \frac{1}{4\pi} . H . P \sin \varphi.$$

Seine Richtung steht senkrecht auf P sowohl, als auch auf H, und zwar in dem Sinne, in welchem man durch die von P und H gebildete Ebene sehen muss, um den concaven Winkel von P nach H als positiv (Uhrzeigerdrehung) wahrzunehmen.

25. Wir haben uns bei der Herleitung des Poynting'schen Satzes zunächst auf ruhende Körper beschränkt. Er gilt aber ebenso für bewegte Körper. Denn in diesen entstehen die elektromagnetischen Erscheinungen durch Superposition der folgenden beiden Vorgänge.

Erstens führt die bewegte Materie einen Theil der in ihr herrschenden Zustände convectiv mit sich[1] (geradeso wie ihre Temperatur, elastische Spannungen etc.), während jedenfalls

[1] Vergl. Hertz, Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper. Wied. Ann., *41*, S. 369, 1890. Ausbreitung der elektrischen Kraft, S. 256. Hertz macht unnöthigerweise die specielle Annahme, dass die Materie den ganzen elektromagnetischen Zustand mit sich führt, eine Annahme, die sicher nicht richtig ist, wie die Versuche über Lichtgeschwindigkeit in bewegten Medien beweisen.

ein Theil seine Stelle unverändert beibehält. Hiedurch entstehen im Allgemeinen Deformationen des Feldes und Änderungen der magnetischen und elektrischen Kräfte in Leitern und Dielektrica.

Zweitens treten in Folge dieser Kräfteänderungen Vorgänge elektrischer Leitung, dielektrischer Polarisation und Magnetisirung in den verschobenen materiellen Theilchen ein, die ihrerseits ein Feld erzeugen, das sich über das erste superponirt. Für das superponirte Feld gelten die Maxwell'schen Gleichungen genau so, wie bei ruhenden Körpern.

Der erste Theil dieses Vorganges, die mechanische Deformation des Feldes, bewirkt nun auf zweierlei Weise Änderungen in der Energie des Feldes:

1. Dadurch, dass die bewegte Materie einen Theil der Energie mit sich führt (Convectionsstrom);

2. dadurch, dass das Feld deformirt wird, d. h. dass sich die Kraftröhren verkürzen oder verlängern, verbreitern oder verengen. Um die hiemit verbundenen Energieänderungen hervorzubringen, muss durch positive oder negative Arbeit den bewegten materiellen Theilchen Energie zugeführt oder abgenommen werden. Es muss also ein mechanischer Leitungsstrom vorhanden sein, dessen Stromlinien in den bewegten Theilchen ihr Ende oder ihren Anfang haben.

Der zweite Theil des Vorganges, die elektromagnetische Änderung des Feldes, ruft Änderungen der Energie hervor, die, weil die Maxwell'schen Gleichungen gelten, vollständig und richtig durch den Poynting'schen Energiestrom beschrieben werden.

Es ist damit bewiesen, dass das Poynting'sche Theorem auch für bewegte Körper unbeschränkt Giltigkeit behält.

Dies möge zunächst an einigen Beispielen aus der Elektrostatik deutlich gemacht werden.

Bewegung elektrisirter Körper.

26. Es seien A und B (Fig. 3) die Platten eines ebenen Condensators, die so gross sind, dass man die Randwirkungen vernachlässigen und das elektrische Feld als homogen ansehen kann. A sei festgehalten und mit der Erde leitend verbunden, B sei beweglich, vollkommen isolirt und mit einer bestimmten Elektricitätsmenge geladen. Die Intensität P des elektrischen Feldes hängt nicht vom Abstande der Platten ab, sie bleibt bei den Verschiebungen von B ungeändert.

Wird nun B mit der Geschwindigkeit ω gegen A vorbewegt, so schieben sich die elektrischen Kraftlinien in B hinein. Da aber die elektrische Ladung (Kraftlinienendungen) an der Oberfläche eines Conductors ein Zustand der materiellen Molekeln ist, welcher mit der Materie festverbunden fortschreitet, so müssen die Kraftlinien im Leiter gleichzeitig eine derartige Schrumpfung erfahren, dass ihre Enden immer in der Oberflächenschicht der Platte B bleiben.

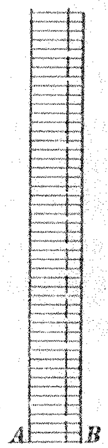

Fig. 3.

Da dieser Vorgang nicht mit dem Auftreten magnetischer Kräfte verbunden ist und da an allen anderen Stellen des Feldes der Zustand fortwährend derselbe bleibt, wie wenn B in Ruhe wäre, so superponirt sich kein neues elektromagnetisches Feld über das vorhandene.

In Folge der Verkürzung der Kraftlinien tritt fortwährend der Energieübergang $\frac{dE}{dt} = \frac{P^2}{8\pi} . \omega$ pro Flächeneinheit aus dem Felde in die Platte B, wird durch diese mechanisch weiter geleitet und kann auf ihrer Aussenseite abgenommen werden.

Sonst treten im Felde keine Energieverschiebungen ein, der Poynting'sche Strom ist Null.

Ganz ebenso lassen sich die Vorgänge beschreiben, die bei einem Wegziehen der Platte B von A eintreten. Nur dass dann die in B haftenden Kraftlinienreste eine Dehnung erfahren, die mit einer Energieabgabe an das Feld verbunden ist.

Die innere Oberfläche der Platte B ist ein Gebiet von Quellpunkten oder von Sinkstellen für den mechanischen Energiestrom.

27. Verschiebt man eine dünne, ebene Platte, die beiderseits mit der Flächendichte σ belegt ist, mit der Geschwindigkeit ω, deren Richtung den Begrenzungsebenen parallel ist, so tritt eine Verkürzung oder Verlängerung der Kraftlinien an den beiden Begrenzungsebenen nicht ein. Dagegen würden die in der Oberflächenschicht steckenden Kraftlinienendchen durch den mechanischen Vorgang schief gezogen werden, wenn sie sich nicht durch einen immer gleichzeitig erfolgenden Leitungsvorgang wieder senkrecht aufrichteten. Die Flächendichte dieses in der Oberflächenschicht verlaufenden elektrischen Leitungsstromes ist natürlich $\sigma . \omega$, er ist mit einer magnetischen Kraft verbunden, die innerhalb der Platte Null ist, unmittelbar über ihr aber den Werth $H = 4\pi\sigma . \omega$ hat, deren Richtung senkrecht auf ω und parallel zur Platte ist. Man sieht dies unmittelbar ein, wenn man das Linienintegral von H längs einer geschlossenen Curve bildet, durch die der Strom i tritt und berücksichtigt, dass es den Werth $4\pi i$ haben muss. Ausserdem haben wir den Werth der elektrischen Kraft in unmittelbarer Nachbarschaft der Platte: $P = 4\pi\sigma$, ihre Richtung ist senkrecht zur Platte. Da hier P und H beide im elektrostatischen Maass angegeben sind, so ergibt sich die Dichte des Poynting'schen Stromes unmittelbar an der Platte:

$$f_3 = \frac{1}{4\pi} . H . P = \frac{1}{4\pi} . P^2 \omega .$$

Seine Richtung fällt mit der von ω zusammen.

Die Hälfte dieses Stromes:

$$\frac{1}{2} f_3 = \frac{P^2}{8\pi} . \omega$$

stellt den Energieübergang dar, der mit dem Vorrücken des elektrischen Feldes mit der Platte verbunden ist. Die andere Hälfte bringt die Energiezufuhr zu dem vor dem vorderen Rande der Platte befindlichen Theil des Feldes zum Ausdruck, wo durch das Vorrücken der Platte fortwährend Energie absorbirt wird.

Der mechanische Energiestrom hat nur an den Rändern der Platte Quell- und Sinkstellen, an denen die Energie durch den Poynting'schen Strom zu- und abgeführt wird. Ausserdem ist das Vorrücken des ganzen Feldes mit einem Poynting'schen Energiestrome verbunden.

28. Ein kugelförmiger Körper K, der elektrisch geladen und isolirt ist, werde mit der Geschwindigkeit ω von einer zur Erde abgeleiteten Platte A entfernt. Es wird erstens auf der Vorderseite der Kugel eine Schrumpfung, auf der Hinterseite eine Dehnung der Kraftlinien eintreten. Zweitens wird auf der Oberfläche der Kugel ein elektrischer Leitungsstrom vorhanden sein, der dafür sorgt, dass die Kraftlinien immer senkrecht auf der Oberfläche stehen (wir nehmen also an, wie es immer in der Elektrostatik geschieht, dass die Kugel ein vollkommener Leiter ist).

Es entsteht nun ein Poynting'scher Strom, der durch nebenstehende Skizze (Fig. 4) veranschaulicht werden soll. Die Stromlinien verlaufen immer senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien, also auf der Oberfläche der Kugel tangential. Sie führen von der Hinterseite der Kugel, wo fortwährend Energie austritt, nach der Vorderseite hin und geben hier den grössten Theil der Energie wieder an die Kugel zurück. Ein Theil jedoch gelangt ins Feld, da die Stromlinien ein wenig divergiren. Diesen Theil wollen wir nun im Folgenden berechnen.

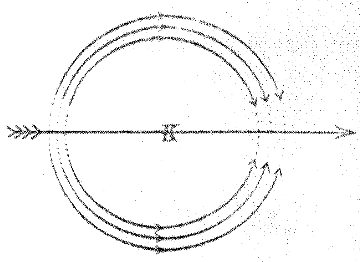

Fig. 4.

Es bedeuten:

ρ Abstand eines Punktes von der Symmetrieaxe;

z Abstand eines Punktes von der Ebene A;

R, Z die Componenten der elektrischen Kraft nach den Richtungen ρ und z;

H die magnetische Kraft, deren Kraftlinien Kreise um die Symmetrieaxe bilden; ihre Richtung ist positiv, wenn die Kraftlinien, in der positiven Z-Richtung gesehen, im Sinne der Uhrzeigerdrehung verlaufen;

t die Zeit;

V die Lichtgeschwindigkeit.

Alle Kräfte seien in demselben Maass-System (elektrostatisch) gemessen.

Man kann nun das elektromagnetische Feld der Kugel leicht berechnen mit Hilfe einer Function $f(\rho, z, t)$, die der folgenden Differentialgleichung genügt:[1]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \qquad \ldots a)$$

Es ist dann:

$$H = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}, \qquad Z = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial \rho}, \qquad R = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}. \quad \ldots b)$$

Ich führe noch folgende Bezeichnungen ein:

$$s = s_0 + \omega t$$

sei der Abstand des Kugelmittelpunktes von der Ebene A;

$$1 - \frac{\omega^2}{V^2} = k^2;$$

$$\sqrt{k^2 \rho^2 + (s-z)^2} = r_1; \qquad \sqrt{k^2 \rho^2 + (s+z)^2} = r_2;$$

$$\frac{s-z}{r_1} = \mu_1; \qquad \frac{s+z}{r_2} = \mu_2.$$

Ferner beschränke ich mich hier auf den Specialfall,[2] wo der Radius der Kugel gegen s verschwindend klein ist, d. h. auf die Untersuchung der Bewegung eines sogenannten elektrischen Punktes.[3] Diesem Fall entspricht die folgende Lösung der Differentialgleichung *a)*:

$$\left.\begin{aligned} &f = \frac{\varepsilon}{k^2}(\mu_1 + \mu_2), \quad \varepsilon \text{ die Ladung des Punktes;} \\ &R = \varepsilon . \rho . \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right); \quad Z = -\varepsilon . \left(\frac{s-z}{r_1^3} + \frac{s+z}{r_2^3}\right); \\ &H = \omega . \varepsilon . \rho \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3}\right). \end{aligned}\right\} \ldots c)$$

---

[1] Hertz, Wied. Ann. *36*, S. 1, 1888; abgedr. Ausbreitung der elektr. Kr. S. 150.

[2] Die allgemeine Lösung für eine endliche Kugel findet sich im Anhange I.

[3] Vergl. J. J. Thomson, Recent Researches. p. 16.

Da es sich um ein elektrostatisches Problem handelt, so dürfen wir uns eine weitere Vereinfachung erlauben, da dann ω gegen V verschwindend klein ist, also $k^2 = 1$.

Da nun:

$$r_1 = \sqrt{\rho^2+(s-z)^2}, \qquad r_2 = \sqrt{\rho^2+(s+z)^2},$$

so hat die elektrische Kraft überall denselben Werth, den sie haben würde, wenn der elektrische Punkt an der Stelle, durch die er gerade geht, in Ruhe wäre.

Das magnetische Feld ist so schwach, dass man es bei der Berechnung der Feldenergie nicht zu berücksichtigen braucht.

Die elektrische Kraft in der Nähe des elektrischen Punktes hat den Werth:

$$P = \frac{\varepsilon}{r_1^2} + \frac{\varepsilon}{r_2^2}\,.(\mu_1+\Delta),$$

wo Δ eine sehr kleine Grösse von der Ordnung $\frac{r_1}{r_2}$ ist.

Setzen wir ferner:

$$2s = S,$$

so ist:

$$r_2 = S.(1+\Delta'),$$

wo Δ' ebenfalls von der Grössenordnung $\frac{r_1}{r_2}$.

In der Nähe des elektrischen Punktes ist also mit genügender Annäherung zu setzen:

$$P = \frac{\varepsilon}{r_1^2} + \frac{\varepsilon}{S^2}\,.\mu_1.$$

Die Energie in dem Raumelement $d\tau$ ist:

$$\frac{1}{8\pi}\,.P^2.d\tau = \left(\frac{\varepsilon^2}{r_1^4} + \frac{2.\varepsilon^2.\mu_1}{r_1^2.r_2^2}\right).\frac{d\tau}{8\pi}.$$

Es seien nun um den elektrischen Punkt zwei sehr kleine concentrische Kugeln mit den Radien a und b geschlagen, so ist die Energie in der von ihnen gebildeten Kugelschale, wenn wir Polarcoordinaten anwenden, folgendermassen zu berechnen:

Radius: r_1; Breite: $\vartheta(\mu_1 = \cos\vartheta)$; Länge: φ

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{\varepsilon^2}{8\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^b\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{2.\cos\vartheta}{S^2}\right).\sin\vartheta.dr_1.d\vartheta.d\varphi \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right). \end{aligned}\right\}\ldots d)$$

Dieser Werth hängt nicht von S ab. Es ist nun leicht zu sehen, dass innerhalb einer Kugel, die um den elektrischen Punkt mit einem sehr kleinen Radius geschlagen ist, und die man sich mit dem Punkt fortbewegt denkt, die Energie ungeändert bleibt.

Anders ist es aber, wenn man die Kugel ruhend lässt. Alsdann vermehrt sich bei der Bewegung des elektrischen Punktes in Folge der Kraftliniendehnungen ihre Energie. Um diese Vermehrung zu berechnen, suche ich die Energie in dem Zwischenraume zwischen den beiden Kugeln mit den Radien a und b, wenn die grössere Kugel (rad. b) an ihrem Orte geblieben ist, die kleinere dagegen (rad. a) sich mit dem elektrischen Punkte während des Zeitelementes dt weiter bewegt hat. Dies ist dann schon ohneweiters die Vermehrung der Energie in dem ganzen von der äusseren Kugel (rad. b) umschlossenen Raum.

1. Berechnung der Energievermehrung in dem Zwischenraume zwischen den beiden Kugelflächen bei dem mechanischen Deformationsvorgange.

Während der unendlich kleinen Zeit dt rückt der Mittelpunkt der kleineren Kugel um die Strecke $CC' = \omega dt$ vor (siehe

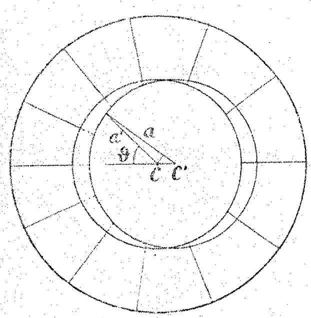

Fig. 5.

nebenstehende Skizze Fig. 5). Denkt man sich das Feld dabei ganz ungeändert, so ergibt sich nach dieser Bewegung die Energie des Zwischenraumes :

$$E' = \frac{\varepsilon^2}{8\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{a'}^{b}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{2.\cos\vartheta}{S^2}\right).\sin\vartheta.dr_1.d\vartheta.d\varphi,$$

wo

$$a' = a - \omega.dt.\cos\vartheta.$$

Die Integration über φ und r_1 gibt zunächst:

$$E' = \frac{\varepsilon^2}{4}.\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{a-\omega.dt\cos\vartheta} - \frac{1}{b} + \right.$$

$$\left. + \frac{2.\cos\vartheta}{S^2}\cdot(b-a+\omega.dt.\cos\vartheta)\right\}\sin\vartheta d\vartheta,$$

oder mit Vernachlässigung aller höheren Potenzen von $\omega.dt$:

$$E' = \frac{\varepsilon^2}{4}\cdot\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{2.(b-a)}{S^2}.\cos\vartheta\right]\sin\vartheta d\vartheta +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{4}.\omega dt.\int_0^{\pi}\left[\frac{\cos\vartheta}{a^2} + \frac{2\cos^2\vartheta}{S^2}\right]\sin\vartheta d\vartheta,$$

$$E' = \frac{\varepsilon^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{\varepsilon^2}{3}\cdot\frac{\omega dt}{S^2}. \qquad \ldots e)$$

Der Zuwachs an Energie beträgt also:

$$dE = \frac{\varepsilon^2}{3}\,\frac{\omega.dt}{S^2}.$$

Während des mechanischen Theiles des Vorganges tritt durch die mit dem elektrischen Punkte bewegte Kugelfläche (rad. a) der Energieübergang:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_1 = \frac{1}{3}\,\frac{\varepsilon^2.\omega}{S^2}. \qquad \ldots f)$$

2. Berechnung des Energieüberganges durch den Poynting'schen Strom.

Die beiden Kugeloberflächen stehen keineswegs senkrecht zu den Kraftlinien (sie sind keine Niveauflächen). Die tangentiale Componente der Kraft ist z. B. auf der kleineren:

$$T = \left(R \cdot \frac{s-z}{a} + Z \cdot \frac{\rho}{a}\right) = -\frac{\varepsilon}{S^2} \cdot \frac{\rho}{a} = -\frac{\varepsilon}{S^2} \cdot \sin\vartheta,$$

wo gleich die Glieder der Ordnung $\frac{a}{r_2}$ gegen 1 vernachlässigt sind. Mit der gleichen Vernachlässigung ergibt sich für die magnetische Kraft:

$$H = \omega . \varepsilon \cdot \frac{\rho}{a^3} = \frac{\omega . \varepsilon}{a^2} \cdot \sin\vartheta.$$

Durch die Kugel tritt nach aussen der Energieübergang:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_2 = -\frac{1}{4\pi} \cdot H . T . dS = \frac{\omega . \varepsilon^2}{4\pi . S^2} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta . d\vartheta . d\varphi$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_2 = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon^2 . \omega}{S^2}.$$

Bei dem elektromagnetischen Vorgang tritt durch die kleinere Kugelfläche der Energieübergang:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon^2 . \omega}{S^2}. \qquad \ldots g)$$

Derselbe Energieübergang geht aber, wie man unmittelbar erkennt, auch durch die äussere Kugelfläche, die Energie des Zwischenraumes erfährt also keine weitere Vermehrung.

Der Raum, der von einer ruhenden, mit unendlich kleinem Radius *(b)* um den elektrischen Punkt beschriebenen Kugelfläche eingeschlossen wird, erfährt einen zeitlichen Energiezuwachs:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\varepsilon^2 . \omega}{S^2}.$$

Durch seine Oberfläche tritt der Energieübergang:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon^2 . \omega}{S^2}.$$

An dem elektrischen Punkte wird also in Folge der Dehnung der Kraftlinien dem Felde im Ganzen die Leistung zugeführt:

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{dE}{dt}\right)_1 + \left(\frac{dE}{dt}\right)_2 = \frac{\varepsilon^2}{S^2} \cdot \omega.$$

Der Punkt wird mit der Kraft $\frac{\varepsilon^2}{S^2}$ nach der abgeleiteten Wand hingezogen.

Andere Theorien.

29. Der Poynting'sche Strom f_3 schildert erstens die Energieänderungen in einem elektromagnetischen Felde unter allen Umständen richtig und vollständig. Zweitens ist er aus den Zustandsgrössen allein zu berechnen. Bisher ist keine andere Theorie der elektromagnetischen Energieübertragung aufgestellt, die auch dieser zweiten Forderung genügte.

So haben Föppl[1] und Andere für den stationären elektrischen Strom eine Theorie vorgeschlagen, nach welcher der ganze Energiestrom im Leiter, und zwar parallel zu den Linien des elektrischen Stromes verlaufen soll, ähnlich dem Energiestrom in einer hydraulischen Kraftübertragung. Ist J die Stärke des elektrischen Stromes, U das Potential an einer bestimmten Stelle, so soll der Energieübergang durch den betreffenden Querschnitt sein:

$$\frac{dE}{dt} = J.U.$$

J ist ohne Zweifel eine Grösse, die einen bestimmten Zustand des Stromleiters charakterisirt. U hingegen ist sicher nicht unter die Zustandsgrössen zu rechnen, allein schon aus dem Grunde, weil überhaupt nur in constanten magnetischen Feldern von einem elektrischen Potential gesprochen werden kann. Ausführlicher hat Heaviside[2] diesen Gegenstand erörtert bei Besprechung der Arbeit von Macauley,[3] der dieselbe Theorie aufgestellt hat.

---

[1] Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie, S. 306.

[2] Electrician, *29*, 29. Juli, 1892, abgedruckt in Electromagnet. Theory, p. 248.

[3] Phil. Trans. London, *183*, p. 685, 1892.

30. Macauley hat der Theorie noch eine weitere Änderung hinzugefügt. Er zerlegt (dem Maxwell'schen Treatise folgend) die elektrische Kraft in zwei Summanden, in eine, die ein Potential hat (elektrostatische Kraft), und in eine, die keines hat (elektrodynamische Kraft). Zur Berechnung des Energiestromes verwendet er nur den zweiten Summanden. Indessen darf man auch diese elektrodynamische Kraft nicht als Zustandsgrösse bezeichnen. Man denke nur an das in Nr. **28** durchgeführte Beispiel. Ist in Gleichung *c)* k^2 von 1 verschieden, so hat die elektrische Kraft sicher kein Potential, ist $k^2 = 1$, so hat sie eines. Ist nun im ersten Falle die Kraft Repräsentant eines ganz anderen physikalischen Zustandes wie im zweiten? Oder lässt sich ein elektrostatischer und ein elektrodynamischer Theil an ihr physikalisch unterscheiden? Die Trennung dürfte wohl in jedem Falle willkürlich sein.

Der Macauley'sche Energiestrom ist, soweit er sich vom Poynting'schen unterscheidet, willkürlich fingirt.

Cyclischer Energiestrom.

31. Ich komme nun zur Untersuchung der dritten Frage. Hertz[1] hat gegen die Poynting'sche Theorie den schwerwiegenden Einwand gemacht, dass sie in Fällen, wo gar keine Energieübertragung stattfindet, von Null verschiedene cyclische Energieströme liefert. Ein Beispiel möge dies erläutern.

In der Z-Axe liege ein unendlich dünner Magnetstab von der Länge l und der Polstärke m, der positive Pol sei dem Coordinatenanfang zugekehrt und im Abstande p von ihm. Im Coordinatenanfang sei ein elektrisirtes Partikelchen mit der positiven Ladung ε angebracht. ε und m seien beide in demselben Maasssystem (etwa elektrostatisch) gemessen.

Benutzen wir nun wieder das Coordinatensystem der z und ρ (siehe Nr. **28**), so haben wir in einem Punkte (z, ρ) folgende Kraftcomponenten:

---

[1] Wied. Ann., *40*, S. 577, 1890, abgedr. in Ausbreitung der elektr. Kraft, S. 234.

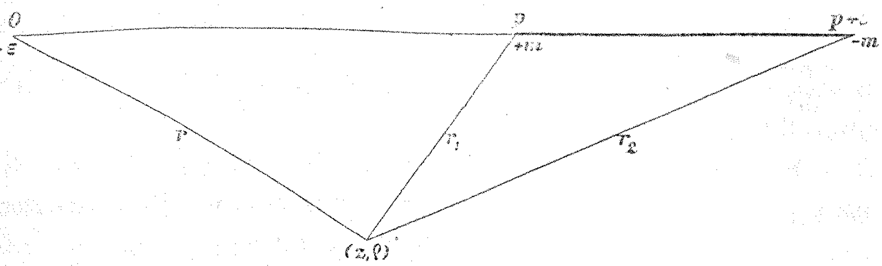

Fig. 6.

Componenten der elektrischen Kraft P: Z, R:

$$Z = \varepsilon . \frac{z}{r^3}, \quad R = \varepsilon . \frac{\rho}{r^3}, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}. \qquad \ldots a_1)$$

Componenten der magnetischen Kraft H: N, Q:

$$N = m . \left(\frac{z - p}{r_1^3} - \frac{z - (p+l)}{r_2^3} \right), \quad Q = m . \rho . \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right),$$

$$r_1 = \sqrt{\rho^2 + (z-p)^2}, \quad r_2 = \sqrt{\rho^2 + (z-p-l)^2}. \qquad \ldots a_2)$$

Es kreist also um die z-Axe im positiven Sinne der cyclische Energiestrom:

$$f_3 = \frac{1}{4\pi} . (QZ - N . R) = \frac{\varepsilon . m}{4\pi} \cdot \frac{\rho}{r^3} \cdot \left(\frac{p}{r_1^3} - \frac{p+l}{r_2^3} \right). \quad \ldots b)$$

32. Nun nehme ich den Magnetstab fort und lege dafür durch die z-Axe eine unendlich ausgedehnte Ebene S, die auf beiden Seiten eine elektrische Belegung hat, auf der einen eine positiv elektrische von der gleichförmigen Flächendichte σ, auf der anderen eine ebenso grosse negativ elektrische $-\sigma$. Diese Belegungen ändern also das elektrische Feld des Punktes ε nicht. Nun sollen sie mit einer an jeder Stelle constant bleibenden Geschwindigkeit bewegt werden, deren Componenten für die positive Belegung seien, wenn man die Ebene S als x-z-Ebene wählt:

$$\alpha = -\left(\frac{z-p}{r_1^3} - \frac{z-(p+l)}{r_2^3} \right); \quad \gamma = + \left(\frac{x}{r_1^3} - \frac{x}{r_2^3} \right) \qquad \ldots c)$$

für die negative Belegung dagegen $-\alpha$, $-\gamma$.

Da nun: $\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0$, so ist die Strömung der elektrischen Partikelchen cyclisch, die Dichtigkeit σ und $-\sigma$ bleibt überall ungeändert.

Wie der Rowland'sche Versuch bewiesen hat, ist die Bewegung elektrischer Partikelchen mit ebensolchen magnetischen Kräften verbunden, wie ein elektrischer Strom. Die Componenten der Flächendichte unseres Stromes sind:

$$a = 2\sigma.\alpha, \quad c = 2\sigma.\gamma. \qquad \ldots d)$$

Die magnetische Kraft dieses Stromes lässt sich leicht berechnen, wenn man bedenkt, dass:

1. das Linienintegral der Kraft um eine geschlossene Curve, die die Ebene des Stromes nicht schneidet, Null sein muss;

2. das Linienintegral um eine die Ebene schneidende Curve den Werth $4\pi J$ hat, wenn J der durch die Curve tretende elektrische Strom ist.

Bilden wir das Linienintegral längs eines schmalen, unendlich kleinen Rechtecks (Fig. 7), dessen längere Seite parallel der x-Axe ist und das die Ebene S in dem Linienelement dx schneidet, so ergibt sich, wenn L_1 und L_2 die X-Componenten der magnetischen Kraft zu beiden Seiten der Ebene sind:

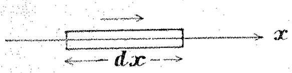

Fig. 7.

$$(L_1 - L_2)\,dx = 4\pi c.dx,$$

also:

$$L_1 = +2\pi c, \quad L_2 = -2\pi c. \qquad \ldots e_1)$$

Ebenso, wenn N_1 und N_2 die z-Componenten zu beiden Seiten der Ebene:

$$N_1 = -2\pi a, \quad N_2 = +2\pi a. \qquad \ldots e_2)$$

Gehen wir wieder zu dem Coordinatensystem der z, ρ über, so ergeben sich in dem einen der beiden Gebiete, in welches die Ebene S den Raum theilt, sagen wir dem vorderen:

$$Q_1 = 4\pi\sigma.\left(\frac{\rho}{r_1^3} - \frac{\rho}{r_2^3}\right); \quad N_1 = 4\pi\sigma.\left(\frac{z-p}{r_1^3} - \frac{z-(p+l)}{r_2^3}\right),$$

in dem anderen, dem hinteren Gebiet:

$$Q_2 = -4\pi\sigma.\left(\frac{\rho}{r_1^3} - \frac{\rho}{r_2^3}\right); \quad N_2 = -\pi\sigma\left(\frac{z-p}{r_1^3} - \frac{z-(p+l)}{r_2^3}\right).$$

Nun lege ich an dieselbe Stelle, wo sich früher der Magnetstab befand, einen anderen von derselben Länge l, aber von der halben Polstärke $\frac{m}{2}$. Ferner setze ich fest, dass die Flächendichte der elektrischen Belegung $\sigma = \frac{m}{8\pi}$ sei. Dann ergibt sich in dem vorderen Raumgebiete die magnetische Kraft:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Q}{2} + Q_1 &= m\left(\frac{\rho}{r_1^3} - \frac{\rho}{r_2^3}\right) = Q \\ \frac{N}{2} + N_1 &= m\left(\frac{z-p}{r_1^3} - \frac{z-(p+l)}{r_2^3}\right) = N \end{aligned}\right\} \quad \ldots g)$$

Im hinteren Raumgebiet dagegen:

$$\frac{Q}{2} + Q_2 = 0, \quad \frac{N}{2} + N_2 = 0. \qquad \ldots h)$$

Es muss also der Energiestrom im hinteren Raumgebiete Null sein, im vorderen dagegen, wo ganz dieselben Verhältnisse herrschen, wie in dem vorher beschriebenen Falle [siehe Gleichungen *a)*], muss er auch dieselbe Intensität f_3 [Gleichung *b)*] haben.

Der Energiestrom verläuft jetzt in Halbkreisen, er ist nicht mehr cyclisch.

In der That beschreibt er die Verhältnisse richtig. Bei der Bewegung des positiven Elektricitätstheilchens $\sigma.dS$ an einer Stelle $z = z_1$, $x = x_1$ mit der Geschwindigkeit (α, γ) im Felde des elektrischen Partikelchens ε gewinnt man die Leistung:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_1 = \sigma.dS.(Z\alpha + R.\gamma) = \frac{\sigma.\varepsilon.x_1}{r^3}.\left(\frac{p}{r_1^3} - \frac{p+l}{r_2^3}\right).dS.$$

Genau dieselbe Leistung gewinnt man auch durch die Bewegung des Theilchens $-\sigma.dS$ an derselben Stelle. Im Ganzen also, wenn man berücksichtigt, dass $\sigma = \frac{m}{8\pi}$, ist:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m.\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{x_1}{r^3} \cdot \left(\frac{p}{r_1^3} - \frac{p+l}{r_2^3}\right).dS = f_3.dS. \qquad \ldots i)$$

Ebenso muss man den Theilchen $\sigma.dS$ und $-\sigma dS$ an der Stelle $z = z_1$, $x = -x_1$ diese Leistung $f_3.dS$ zuführen.

Durch den Äther wird in Form eines auf einer halbkreisförmigen Bahn verlaufenden Energiestromes f_3 die an einer Stelle $(z_1, -x_1)$ zugeführte Leistung nach der Stelle $(z_1, +x_1)$ übertragen, wo sie wieder abgenommen werden kann.

Der Energiestrom im statischen Felde ist nur ein zufällig cyclischer, er lässt sich vollständig realisiren.

Der wirkliche Energiestrom.

33. Das im letzten Abschnitte benützte Verfahren lässt sich verallgemeinern. Ich nehme an, dass die Materie in dem elektromagnetischen Felde sich nicht bewegt. Es sei durch eine geschlossene Oberfläche S aus dem elektromagnetischen Felde ein Raumgebiet G ausgeschnitten. In dieser Fläche S seien die Grössen $L, M, N, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, X, Y, Z, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ und die Componenten des elektrischen Leitungsstromes a, b, c gegeben. Die Richtungscosinus der nach innen gerichteten Flächennormale n seien: λ, μ, ν, ferner die Richtungscosinus zweier auf einander senkrecht stehenden Tangenten n_1 und n_2: λ_1, μ_1, ν_1 und λ_2, μ_2, ν_2. Die Drehrichtung von n_1 nach n_2 sei positiv, wenn man von aussen nach innen durch die Fläche sieht. Die Linien n, n_1, n_2 können aufgefasst werden als Tangenten an die Schnittcurven dreier orthogonaler Flächenschaaren $F(x, y, z) = k$; $F_1(x, y, z) = k_1$; $F_2(x, y, z) = k_2$. S sei eine Fläche der Schaar $F(x, y, z) = k$. Es sind nun:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{L}.\lambda + \mathfrak{M}.\mu + \mathfrak{N}.\nu = B \\ \mathfrak{X}.\lambda + \mathfrak{Y}.\mu + \mathfrak{Z}.\nu = D \end{array}\right\} \qquad \ldots a)$$

die Dichten der Kraftlinienschnitte auf S, ferner:

$$\left.\begin{array}{ll} L.\lambda_1 + M.\mu_1 + N.\nu_1 = H_1 & X.\lambda_1 + Y.\mu_1 + Z.\nu_1 = P_1 \\ L.\lambda_2 + M.\mu_2 + N.\nu_2 = H_2 & X.\lambda_2 + Y.\mu_2 + Z.\nu_2 = P_2 \end{array}\right\} \ldots b)$$

die zur Oberfläche parallelen Kraftcomponenten.

34. Es sollen nun über S zwei materielle Schichten von folgender Beschaffenheit ausgebreitet gedacht werden:

1. Die äussere Schicht soll eine ungeheure Anzahl unendlich kleiner Magnetnadeln enthalten, deren Axen parallel zu S, und zwar so gerichtet sind, dass ihr freier Magnetismus überall die Flächendichte $\sigma'' = \frac{B}{4\pi}$ besitzt.

Ist m die Stärke eines Poles, so muss also die Summirung über alle in dem Flächenelement dS enthaltenen Pole ergeben:

$$\Sigma m = \sigma''.dS = \frac{B}{4\pi}.dS. \qquad \ldots c)$$

Diese Bedingung kann bei genügender Zahl und Stärke der Nädelchen immer erfüllt werden, da

$$\int_S B.dS = 0.$$

Ausserdem sollen die Nädelchen Drehungen innerhalb der Fläche S um ihre Mittelpunkte erfahren, in der Weise, dass, wenn m die Polstärke, β_1 und β_2 die Geschwindigkeitscomponente des Poles nach n_1 und n_2 sind, die Summirung über alle Pole in dS ergibt:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m.\beta_1 &= b_1.dS = +\frac{P_2}{4\pi}.dS \\ \Sigma m.\beta_2 &= b_2.dS = -\frac{P_1}{4\pi}.dS. \end{aligned}\right\} \ldots d)$$

$b_1 = \frac{P_2}{4\pi}$, $b_2 = -\frac{P_1}{4\pi}$ sind also die Componenten der Flächendichte des magnetischen Convectionsstromes auf S. P_1 und P_2 sind die in $b)$ definirten Grössen.

2. Die innere Schicht soll von einer ungeheuren Anzahl elektrisirter Partikelchen, positiven und negativen, gebildet sein, die so vertheilt sind, dass die freie Elektricität überall eine Dichte $\sigma' = \frac{D}{4\pi}$ hat. Ist also ε die Ladung eines Partikelchens, so muss die Summirung über alle Partikeln auf dem Flächenstück dS ergeben:

$$\Sigma\varepsilon = \sigma'.dS = \frac{D}{4\pi}.dS. \qquad \ldots e)$$

Ausserdem sollen die positiv geladenen Theilchen sich sämmtlich mit einer Geschwindigkeit auf der Fläche S bewegen, deren Componenten nach n_1 und n_2, α_1 und α_2 sind, die negativen mit der Geschwindigkeit $-\alpha_1$, $-\alpha_2$; und zwar sollen diese Grössen α_1 und α_2 so bestimmt sein, dass:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1.\Sigma[\varepsilon] &= a_1.dS = -\frac{H_2}{4\pi}.dS \\ \alpha_2.\Sigma[\varepsilon] &= a_2.dS = +\frac{H_1}{4\pi}.dS, \end{aligned}\right\} \qquad \ldots f)$$

wo $[\varepsilon]$ den absoluten Betrag der Ladung ε bedeutet.

$a_1 = -\frac{H_2}{4\pi}$ und $a_2 = \frac{H_1}{4\pi}$ sind also die Componenten der Flächendichte des elektrischen Convectionsstromes auf S. H_1 und H_2 sind in *b)* definirt.

35. Erstens lässt sich nun beweisen, dass, solange man die magnetischen und elektrischen Strömungen, wie es in *d)* und *f)* gefordert wird, im Gange hält, die Vertheilung des freien Magnetismus und der freien Elektricität immer von selbst die Dichte $\frac{B}{4\pi}$ und $\frac{D}{4\pi}$ annimmt. Ich zeige dies für die elektrische Strömung.

Sei die Gleichung der Fläche S:

$$F(x, y, z) = k,$$

die einer unendlich benachbarten, sie umhüllenden Fläche S':

$$F(x, y, z) = k + dk,$$

sei der Abstand zwischen S und S' an einer Stelle dn, seien die Projectionen von dn auf die Coordinatenaxen dx, dy, dz, so ist offenbar:

$$\frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial y}.dy + \frac{\partial F}{dz}.dz = dk,$$

also:

$$dn = \frac{dk}{R}, \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}, \qquad \ldots g)$$

$$\lambda . R = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \mu . R = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \nu . R = \frac{\partial F}{\partial z}. \qquad \ldots h)$$

Ferner seien die elektrisirten Partikeln über den ganzen Zwischenraum zwischen S und S' gleichmässig vertheilt, so dass $\sigma' = \tau' . dn$, wenn τ' ihre räumliche Dichte bedeutet. Ferner soll die Bewegung nur auf Flächen der Schaar $F =$ const. vor sich gehen, so dass die Vertheilung zwischen S und S' gleichmässig bleibt; die Componenten der räumlichen Stromdichte nach n_1 und n_2 sind also: $\frac{a_1}{dn}$ und $\frac{a_2}{dn}$, die Componente nach n ist mit all ihren Ableitungen gleich Null.

Die Componenten der räumlichen Stromdichte nach den Coordinatenaxen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, sowie ihre Ableitungen ergeben sich daher, wenn man setzt:

$$\mathfrak{a} . dn = a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2, \qquad \mathfrak{b} . dn = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2,$$
$$\mathfrak{c} . dn = a_1 \nu_1 + a_2 \nu_2 .$$

Benutzt man nun die Gleichungen *f)* und *b)* und berücksichtigt, dass

$$\mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1 = \lambda, \qquad \nu_1 \lambda_2 - \nu_2 \lambda_1 = \mu, \qquad \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = \nu,$$

so erhält man:

$$4\pi \mathfrak{a} dn = (N . \mu - M . \nu), \qquad 4\pi \mathfrak{b} dn = (L\nu - N\lambda),$$
$$4\pi \mathfrak{c} dn = (M\lambda - L\mu),$$

oder nach *g)* und *h)*:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi dk . \mathfrak{a} &= \left(N . \frac{\partial F}{\partial y} - M . \frac{\partial F}{\partial z}\right), \\ 4\pi dk . \mathfrak{b} &= \left(L . \frac{\partial F}{\partial z} - N . \frac{\partial F}{\partial x}\right), \\ 4\pi dk . \mathfrak{c} &= \left(M . \frac{\partial F}{\partial x} - L . \frac{\partial F}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \qquad \ldots i)$$

wo $4\pi . dk$ ein constanter Factor.

Nenne ich nun die Elektricitätszufuhr in das Raumelement $d\tau$, während der Zeit dt: $d\eta . d\tau$, so ist nach der Continuitätsgleichung:

$$\frac{d\eta}{dt} = -\left(\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial z}\right).$$

Setzt man nun aus *i)* die Werthe für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ ein und benutzt nach Ausführung der Differentiation wieder *g)* und *h)*, so ergibt sich:

$$4\pi . \frac{d\eta}{dt} . dn = -\left(\lambda . \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) + \mu . \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right) + \right.$$
$$\left. + \nu . \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)\right).$$

Dies ist aber nach den Maxwell'schen Gleichungen:

$$4\pi . \frac{d\eta}{dt} . dn = \lambda . \left(4\pi a + \frac{d\mathfrak{X}}{dt}\right) + \mu . \left(4\pi b + \frac{d\mathfrak{Y}}{dt}\right) +$$
$$+ \nu . \left(4\pi c + \frac{d\mathfrak{Z}}{dt}\right). \qquad \ldots k)$$

Multipliciren wir die Gleichung *k)* mit $\frac{dS . dt}{4\pi}$, so erhalten wir die ganze Elektricitätszufuhr in das Schalenstück $dS . dn$ während der Zeit dt: $d\eta . dS . dn$. Nennen wir nun I_n die Componente des von dS nach G hineinfliessenden elektrischen Leitungsstromes nach n: $I_n = (a . \lambda + b . \mu + c . \nu) . dS$, so ist:

$$d\eta . dS . dn = I_n . dt + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dD}{dt} . dS dt. \qquad \ldots l)$$

Da nun von der auf dS befindlichen Elektricität während der Zeit dt die Menge $I_n . dt$ nach G hinein fortgeführt wird, so beträgt der Zuwachs der Elektricität auf dS:

$$d\sigma' . dS = d\eta . dS . dn - I_n . dt = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dD}{dt} . dS dt.$$

Es ist also:

$$\frac{d\sigma'}{dt} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dD}{dt}. \qquad \ldots m)$$

Es behält σ' immer den Werth $\frac{D}{4\pi}$.

Genau in derselben Weise folgt, dass σ'' immer den Werth $\frac{B}{4\pi}$ behält.

Wir haben zunächst das folgende Resultat:

Solange die elektrisirten Partikeln ε und die Magnetpole m die durch Gleichung *f)* und *d)* vorgeschriebenen Bewegungen ausführen, erhalten die elektrischen Leitungsströme in dem Raumgebiet G ihre ganze Elektricitätszufuhr aus der elektrischen Belegung der Schale um S, und die Vertheilung der freien Elektricität und des freien Magnetismus in den Belegungen behält immer die Dichte $\sigma' = \frac{D}{4\pi}$ und $\sigma'' = \frac{B}{4\pi}$.

36. Weiter denke ich mir nun alle elektrischen und magnetischen Körper, wenn man will sogar alle Materie aus der Umgebung des Gebietes G entfernt, und dieses nur von den beiden beschriebenen Schichten umhüllt.

Dann lässt sich zweitens zeigen, dass die elektromagnetischen Vorgänge in G sich unter diesen eingebildeten Umständen in genau derselben Weise abspielen müssten, wie sie sich unter den wirklichen Umständen abspielen, dass hingegen ausserhalb G alle Kräfte Null sein müssten.

Der Beweis ist geliefert, wenn man zeigt, dass die behauptete Vertheilung der elektrischen und magnetischen Kräfte den Maxwell'schen Gleichungen genügt. In G, wo die Vorgänge gegeben sind, und ausserhalb G, wo die Kräfte Null sind, ist dies selbstverständlich der Fall. Der Beweis ist nur für die unmittelbare Umgebung der beiden von uns construirten Schichten zu führen, und zwar sind hier folgende vier Behauptungen zu beweisen:

$$\int_s H.ds.\cos(H,s) = 4\pi I \qquad \ldots n)$$

$$\int_s P.ds.\cos(P,s) = -4\pi J \qquad \ldots o)$$

$$\int_F B.dF.\cos(B, N) = 0 \qquad \ldots p)$$

$$\int_F D.dF.\cos(B, N) = 4\pi e, \qquad \ldots q)$$

wo:

H, B magnetische Kraft und Induction,
P, D elektrische Kraft und Verschiebung,
s eine geschlossene Curve,
I, J der durch sie hindurchtretende elektrische und magnetische Convectionsstrom,
F eine geschlossene Oberfläche,
N ihre nach aussen gerichtete Normale,
e die wahre Elektricitätsmenge in F.

Es seien S' und S'' zwei Flächen aus der Schaar $F(x, y, z) = k$, die einander unendlich benachbart sind und die Fläche S mitsammt ihren beiden Belegungen zwischen sich enthalten. Aus der unendlich dünnen Schale $S'S''$ schneide ich mir ein unendlich kleines, rechteckiges Stück $dS'S''$ aus. Die Kanten dieses kleinen rechtwinkeligen Parallelepipedons $dS'S''$ seien dn, dn_1, dn_2, wo n, n_1, n_2 die eingangs erläuterte Bedeutung haben.

Bildet man nun die Linienintegrale von H und P um die vier Rechtecke (dn, dn_1) und (dn, dn_2), die allein in Betracht kommen, da die beiden anderen (dn_1, dn_2) ganz innerhalb und ganz ausserhalb G liegen, so sieht man ohneweiters die Richtigkeit der beiden ersten Behauptungen *n)* und *o)* ein. Es ist z. B.:

$$\int_{(dn,\, dn_1)} H.ds.\cos(H, s) = H_1.dn_1 = 4\pi a_2.dn_1,$$

wo nach Gleichung *f)* $a_2.dn_1$ der durch das Rechteck (dn, dn_1) tretende elektrische Convectionsstrom.

Sei S''' weiter eine Fläche, die zwischen den beiden Schichten verläuft und enthalte die Schale $S''S'''$ die magnetische Schicht. Sei aus $S''S'''$ das unendlich kleine Parallelepiped $F = (dn', dn_1, dn_2)$ ausgeschnitten. Das Linienintegral der magnetischen Kraft um die Rechtecke (dn', dn_1) und

(dn', dn_2) ist Null, da durch sie nur ein magnetischer, aber kein elektrischer Strom geht. Hieraus folgt, dass die magnetische Kraft H ausserhalb der Schale S''' nur noch eine Componente nach der Flächennormale n hat. Nennen wir den auf den vier Schnittflächen (dn', dn_1) und (dn', dn_2) befindlichen freien Magnetismus m_1, m_2, m_3, m_4, so ist, da H keine Componente senkrecht zu diesen Flächen hat, der aus ihnen austretende Inductionsfluss:

$$4\pi.(m_1+m_2+m_3+m_4).$$

Der aus der äusseren Fläche $dS''(dn_1, dn_2)$ austretende Inductionsfluss ist nach Voraussetzung Null, der aus der inneren dS''' hingegen $(\mathfrak{L}.\lambda+\mathfrak{M}.\mu+\mathfrak{N}.\nu).dn_1.dn_2$. Also ist der ganze Inductionsfluss aus dem unendlich kleinen Parallelepipedon F:

$$\int_F B.dF.\cos(B,N) = (\mathfrak{L}.\lambda+\mathfrak{M}.\mu+\mathfrak{N}.\nu).dn_1.dn_2+$$
$$+4\pi.(m_1+m_2+m_3+m_4).$$

Da die Pole einer jeden Magnetnadel entgegengesetzt gleich sind, so muss der auf dem Schalenstück $dn_1.dn_2$ befindliche freie Magnetismus $\sigma''.dn_1.dn_2$ entgegengesetzt gleich sein der Summe $m_1+m_2+m_3+m_4$, also:

$$4\pi.(m_1+m_2+m_3+m_4) = -4\pi\sigma''.dn.dn_2 = -B.dn_2.dn_2$$
$$= -(\mathfrak{L}.\lambda+\mathfrak{M}.\mu+\mathfrak{N}.\nu).dn_1 dn_2.$$

Also:

$$\int_F B.dF.\cos(B,N) = 0.$$

Es bleibt noch die vierte Behauptung *q)* zu beweisen. Zu dem Zwecke denke ich mir aus der Schale $S'S'''$, welche die elektrische Belegung enthält, ein Stück $F'F'''$ ausgeschnitten, so gross, dass die seitliche Begrenzung gegen F' und F''' verschwindend klein ist. Dann reducirt sich das Oberflächenintegral

$$\int_{F'F'''} D.dF.\cos(D,N) \quad \text{auf} \quad \int_{F'} (\mathfrak{X}.\lambda+\mathfrak{Y}.\mu+\mathfrak{Z}.\nu).dF'.$$

Nach Gleichung *e)* ergibt sich dann:

$$\int_{F'F'''} D . dF . \cos(D, N) = \int_{F'} 4\pi\sigma' . dF' = 4\pi e,$$

wo e die wahre Elektricität in dem Schalenstück $F'F'''$ bedeutet.

Wir haben das Resultat:

Entfernt man alle elektrischen und magnetischen Körper aus der Umgebung von G und umhüllt dafür die Oberfläche S mit den beiden durch die Gleichungen *c)* bis *f)* charakterisirten Schichten, so ändert das an den elektromagnetischen Vorgängen in G nichts. Ausserhalb G sind dann hingegen alle Kräfte Null, die elektromagnetischen Vorgänge spielen sich lediglich in G und in den umhüllenden Schichten ab.

37. Durch S ist aus dem elektromagnetischen Felde ein Stück ausgeschnitten, in welchem die Vorgänge allein durch die Bewegungen auf S in derselben Weise im Gange gehalten werden können, wie durch die wirkliche Umgebung. Alle Zufuhr und alle Abnahme von Energie muss dann durch die umhüllenden Schichten geschehen, weil ausserhalb S der Äther völlig im ruhigen Gleichgewicht verharrt. Wir denken uns nun die Bewegungen der Partikeln auf S durch eigene Mechanismen hervorgebracht, die jeder auf einen Theil F von S wirken, ohne irgendwie in Zusammenhang miteinander oder mit anderen Körpern zu stehen. Diese Mechanismen können nur durch die Fläche F Energie aufnehmen oder abgeben, durch sie wird also der ganze Energieübergang durch F realisirt, da ja auch die Bewegung der elektrischen und magnetischen Partikeln auf F nur durch den elektromagnetischen Zustand in dem anstossenden Theil von G geregelt wird, mit den Bewegungen auf den anderen Theilen von S aber gar nicht in Zusammenhang steht. Es sind also Mechanismen M im Sinne der Nr. **9**; die Belegung auf S stellt ihre Verbindung mit dem Äther in G dar.

Der dritte Theil dieser Betrachtung hat sich nun mit der Berechnung der Energieübergänge in diese Mechanismen M zu befassen.

Zunächst ist leicht zu sehen, dass die äussere, magnetische Schicht an der Energieübertragung nicht betheiligt ist. Denn die magnetische Kraft H hat keinen Einfluss auf die parallel zu S vor sich gehenden Bewegungen der Magnetnädelchen, da sie, wie in Nr. **36** gezeigt wurde, senkrecht auf S steht, ebenso wenig natürlich die elektrische Kraft. Sollte die Bewegung der Nädelchen also Energie erfordern oder Energie abgeben, so kann dies nur auf Kosten der der magnetischen Schale selber eigenen Energie geschehen, die wohl von der Anordnung der Nädelchen abhängen kann.

Hieraus folgt, dass die ganze Energieübertragung aus G in die Mechanismen M durch die elektrische Schicht allein vermittelt wird. Wir können uns daher die magnetische Schicht ganz wegdenken, es werden dann allerdings auch ausserhalb S elektromagnetische Vorgänge sich abspielen. Diese haben aber auf die Energieübergänge durch S keinen Einfluss.

Die Energie, welche durch die Bewegung der elektrischen Partikeln in M gewonnen wird, berechnet sich für jedes Flächenelement dF, wie folgt:

$$de \,.\, dF = (P_1 \alpha_1 \,.\, \Sigma[\varepsilon] + P_2 \,.\, \alpha_2 \,.\, \Sigma[\varepsilon])\, dt \qquad \ldots r)$$

oder nach Gleichung $f)$:

$$de = \frac{1}{4\pi} \,.\, (P_2 H_1 - P_1 H_2).$$

Diese Energie kann nicht aus einem etwa in der elektrischen Schicht vorhandenen Energievorrath stammen. Denn sie wäre bei denselben Änderungen innerhalb dieser Schicht Null, wenn nur P_1 und P_2 oder H_1 und H_2 Null wären. Das System M mit der zu ihm gehörenden elektrischen Haut F gewinnt also die Energie:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_F (P_2 \,.\, H_1 - P_1 \,.\, H_2) \,.\, dF =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot \int_F P_S \,.\, H_S \,.\, \sin(P_S, H_S) \,.\, dF, \ldots s)$$

wo P_S, H_S die Kraftcomponenten $\parallel S$.

Damit ist, allerdings nur unter der Voraussetzung, dass die Materie im elektromagnetischen Felde sich nicht bewegt,[1] der Satz bewiesen:

Die elektromagnetische Energieübertragung lässt sich localisiren. Der Vector, durch den sich alle realisirbaren Energieübergänge berechnen lassen, ist der Poynting'sche Energiestrom.

Maasseinheit.

38. Für die Stromstärke der elektromagnetischen Energieübertragung ist eine besondere Einheit eingeführt, für die Intensität des Stromes nicht. Da man das Linienintegral der elektrischen Kraft in Volt, das Linienintegral der magnetischen Kraft (unter Hinzufügung des Factors $\frac{1}{4\pi}$) in Ampère misst, so ist das Flächenintegral des Poynting'schen Stromes, d. h. die Stromstärke der Energie, zu messen in der Einheit 1 Volt $\times$ 1 Ampère $=$ 1 Watt.

Die Instrumente zur Messung des elektromagnetischen Energiestromes nennt man Wattmeter.

Ein besonderes Gebiet bilden die Messungen des Energiestromes bei sehr rapiden elektrischen Schwingungen (Strahlungen). Hiezu benützt man Bolometer, Radiometer etc.

Gesammtstrom.

39. Wenn man von den noch unerforschten Energieübergängen durch die neu entdeckten Strahlungen und durch die Gravitation absieht, so ist gezeigt worden, dass die vier im ersten Abschnitt aufgestellten Energieprincipe alle der Erfahrung entsprechen, dass sich alle Energieänderungen in der Natur folglich durch wirkliche Energieströme schildern lassen.

Diese Energieströme setzen sich durch Superposition aus folgenden Einzelströmen zusammen:

1. Convectionsstrom; bewegte Materie führt ihre Energie mit sich.

---

[1] Die Verallgemeinerung für bewegte Körper behalte ich mir für eine spätere Untersuchung vor.

Grösse: Energiedichte × Geschwindigkeit: $f_0 = e \, . \, \omega$, Richtung: Geschwindigkeit ω.

2. Mechanischer Leitungsstrom; der Energieüberträger bewegt sich unter Druck.

Grösse: Druck auf dem zur Bewegungsrichtung senkrechten Flächenelement × Geschwindigkeit: $f_1 = P_\omega \, . \, \omega$, Richtung: Druck P_ω.

3. Thermischer Leitungsstrom; der Energieüberträger leitet Wärme.

Grösse: Temperaturabfall × Wärmeleitungscoëfficient, Richtung: In isotropen Körpern Temperaturabfall, in anisotropen spitzwinklig zum Temperaturabfall.

4. Elektromagnetischer Leitungsstrom; der Energieüberträger ist der Äther.

Grösse: Elektrische Kraft × magnetische Kraft × Sinus des eingeschlossenen Winkels: $f_3 = \frac{1}{4\pi} P \, . \, H \, . \sin(P, H)$, Richtung: Senkrecht sowohl zur elektrischen, als auch zur magnetischen Kraft.

Nur wenn mindestens einer dieser Vectoren von Null verschiedene Werthe hat, ändert sich die räumliche Vertheilung der Energie, und umgekehrt, wenn einer von ihnen von Null verschieden ist, lässt sich der ihm entsprechende Energieübergang immer vollständig realisiren. Freilich können sie auch zufällig cyclisch verlaufen, mit Ausnahme des thermischen Leitungsstromes, der einen nicht umkehrbaren Vorgang darstellt.

Anhang I.

Bewegung einer elektrisirten Kugel von endlicher Ausdehnung.

Um das in **28.** behandelte Problem auch für eine Kugel von endlicher Ausdehnung zu lösen, entwickle ich f, unter Beibehaltung der in **28.** benützten Bezeichnungen, in eine doppelt unendliche Reihe nach Kugelfunctionen.

Ich setze nämlich:

$$f = \sum_0^\infty{}_n \sum_0^\infty{}_\nu \varphi_n^{(\nu)}(s) \cdot \left(\frac{\mathfrak{P}_{n,\nu}(\mu_1)}{r_1} + \frac{\mathfrak{P}_{n,\nu}(\mu_2)}{r_2} \right), \qquad \ldots a)$$

wo $\varphi_n^{(\nu)}$ die ν^{te} Ableitung einer Function $\varphi_n(s)$ bedeutet, über die später verfügt werden wird, $\mathfrak{P}_{n,\nu}$ eine Function bedeutet, die folgender Differentialgleichung genügt:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{P}''_{n\nu} \cdot (1-\mu^2) + \mathfrak{P}_{n,\nu}(n-\nu)(n-\nu+1) = \\ &= 2\delta \cdot (\mathfrak{P}'_{n,\nu-1} \cdot (1-\mu^2) - (n-\nu+1) \cdot \mu \cdot \mathfrak{P}_{n,\nu-1}) + \delta \cdot \mathfrak{P}_{n,\nu-2} \end{aligned}\right\} \ldots b)$$

wo: $\delta = \dfrac{1-k^2}{k^2} = \dfrac{\omega^2}{V^2-\omega^2}$ und für $\mathfrak{P}_{n,\varkappa}$, wenn $\varkappa < 0$, Null einzusetzen ist.

Alsdann befriedigt f die Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Die Werthe der Functionen $\mathfrak{P}_{n,\nu}$ lassen sich mit Hilfe der von Heine[1] als $\mathfrak{P}_1^{(n)}$ bezeichneten ganzen Functionen ausdrücken, die ich der Kürze halber $\mathfrak{P}_n$ nennen werde. Es ist also:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_n &= \frac{(n+1)!}{(2n)!} \cdot \frac{d^{n-1}(\mu^2-1)^n}{d\mu^{n-1}} \quad \text{für } n > 0 \\ \mathfrak{P}_0 &= \mu \\ \mathfrak{P}_{-1} &= 1 \\ \mathfrak{P}_{-2} &= \ldots = \mathfrak{P}_{-n} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots c)$$

$\mathfrak{P}_n$ genügt der Differentialgleichung:

$$\mathfrak{P}''_n \cdot (1-\mu^2) + n \cdot (n+1) \cdot \mathfrak{P}_n = 0.$$

Ich setze daher:

$$\mathfrak{P}_{n,0} = \mathfrak{P}_n. \qquad \ldots d)$$

Ferner lässt sich mit Hilfe dieser Functionen $\mathfrak{P}_n$ auch für jede Differentialgleichung folgender Form eine Lösung finden:

[1] Heine, Handbuch der Kugelfunctionen. I, S. 152.

$$\left.\begin{array}{l} y''.(1-\mu^2)+m.y = \sum_{n_1}^{n_2}{}_i\,\alpha_i\mathfrak{P}_i \\ \text{Man hat nur zu setzen:} \\ y = \sum_{n_1}^{n_2}{}_i\,\beta_i.\mathfrak{P}_i,\ \beta_i = \dfrac{\alpha_i}{i.(i+1)-m} \end{array}\right\}\quad\ldots e)$$

Weiter gelten die Recursionsformeln:

$$\mathfrak{P}'_{n+m}.(1-\mu^2)-(n-\nu).\mathfrak{P}_{n+m}.\mu = -(2n+m-\nu+1).\mathfrak{P}_{n+m+1}+$$
$$+(m+\nu).\frac{(n+m+1)(n+m-1)}{(2n+2m+1)(2n+2m-1)}.\mathfrak{P}_{n+m-1}.\quad\ldots f)$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass das Differentialgleichungssystem *b)* befriedigt wird durch Functionen folgender Form:

$$\mathfrak{P}_{n,\nu} = \delta^{(1)}_{n,\nu}.\mathfrak{P}_{n+\nu}+\delta^{(2)}_{n,\nu}.\mathfrak{P}_{n+\nu-2}+\ldots+\delta^{(\nu)}_{n,\nu}.\mathfrak{P}_{n-\nu+2},\quad g)$$

wo die $\delta_{n,\nu}$ Constanten sind. Setzt man nämlich für $\mathfrak{P}_{n,\nu-1}$, $\mathfrak{P}_{n,\nu-2},\ldots$ ihre aus *g)* ersichtlichen Werthe in die Gleichung *b)* ein und wendet man dann die Formeln *f)* an, so erhält man eine Gleichung von der Form *e)*, die durch eine Function *g)* lösbar ist. Man sieht zugleich, dass sich für die $\delta_{n,\nu}$ Recursionsformeln ergeben, aus denen sie sich vollständig berechnen lassen; sie setzen sich aus einigen Potenzen der Grösse δ, verbunden mit Zahlenfactoren, zusammen und verschwinden mit δ, wenn $\nu > 0$.

Es sind nun in dem Ausdruck *a)* noch die Grössen $\varphi_n(s)$ zu bestimmen. Das geschieht durch die Bedingung, dass die Kraftlinien auf der Oberfläche des kugelförmigen Körpers senkrecht stehen sollen. Es sei die Gleichung dieser Oberfläche: $r_1 = k.a$, welche ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit der z-Axe als Rotationsaxe darstellt. Ist k nahezu 1, so ist der Körper nahezu eine Kugel.

Ersetzen wir nun in dem Ausdruck:

$$\frac{\partial f}{\partial z}.(s-z)-\frac{\partial f}{\partial\rho}.\rho = -\frac{\partial f}{\partial r_1}.r_1+\frac{\partial f}{\partial r_2}.(r_1.\mu_1\mu_2-r_2(1-\mu_2^2))+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial\mu_2}.(1-\mu_2^2).\left(\mu_2+\frac{r_1\mu_1}{r_2}\right)$$

die Grössen r_2 und μ_2 überall durch r_1, μ_1, s mit Hilfe der Beziehungen:

$$r_2^2 = r_1^2 + 4s^2 + 4s \cdot r_1 \cdot \mu_1, \quad r_2 \cdot \mu_2 = 2s - r_1 \cdot \mu_1,$$

so dass man erhält:

$$\frac{\partial f}{\partial z} \cdot (s - z) - \frac{\partial f}{\partial \rho} \cdot \rho = \psi(r_1, \mu_1, s), \qquad \ldots h)$$

so ist die gestellte Forderung erfüllt, wenn ψ für den Werth $r_1 = ka$ identisch verschwindet. Dies ist der Fall, wenn:

$$\left.\begin{aligned} (\psi)_{\substack{r_1 = ka \\ \mu_1 = 0}} &= 0 \ldots \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mu_1}\right)_{\substack{r_1 = ka \\ \mu_1 = 0}} &= 0 \ldots \\ \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu_1^2}\right)_{\substack{r_1 = ka \\ \mu_1 = 0}} &= 0 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad \ldots i)$$

In den Gleichungen *i)* kommt als einzige Variable die Grösse s vor. Sie stellen also ein Differentialgleichungssystem für die $\varphi_n(s)$ vor, durch welche, wie eine genauere Überlegung zeigt, diese Grössen φ als Functionen von s und δ völlig bestimmt sind. Es soll hier auf die Details der Rechnung nicht eingegangen werden. Für den Fall $\delta = 0$ (elektrostatisches Problem) ist die Berechnung von Maxwell durchgeführt, sie findet sich in dem »Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus«, Bd. I, Übersetzung, S. 228 ff., wo man nur $b = a$, $B = -A$, $c = 2s$ zu setzen hat, um unseren Fall zu erhalten.

Anhang II.

Die Localisirbarkeit der bekannten Energieformen.

Ausser der kinetischen Energie kennt man nur die im Folgenden aufgezählten Energieformen.

1. Energie der elastischen Deformation.

Wenn ein Körper eine elastische Deformation oder eine Volumänderung erfährt, so entsteht eine localisirbare Form der

Energie. Denn bekanntlich kann man jedes Körperelement als selbständigen Körper auffassen und aus seiner Deformation das ihm zukommende Energietheilchen berechnen. Durch einfache Summation erhält man die ganze Energie.[1]

2. Oberflächenenergie.

Wenn sich die Oberfläche eines Körpers, sei er flüssig oder fest, vergrössert, so erlangt er in Folge der Oberflächenspannung Energie, die in der Oberflächenhaut localisirt ist.[2]

3. Wärme.

Wenn sich die Temperatur eines Körpers ändert, so gewinnt jedes Körpertheilchen seinen bestimmten Betrag an Energie.

4. Structurenergie, chemische Energie.

Wenn sich ein Körper in einen anderen von ganz verschiedenem physikalischen Verhalten umwandelt, entweder durch Änderung des Aggregatzustandes oder durch Änderung der Structur (Härten, Ausglühen, Ziehen von Metallen u. a. Körpern, Umkrystallisiren krystallinischer oder amorpher Substanzen) oder endlich durch chemische Umlagerung, so ist ebenfalls der Betrag, um den sich die Energie des neuen Körpers in einem bestimmten Zustande (Druck, Temperatur) von der des alten unterscheidet, in bestimmter Weise auf die einzelnen Körperelemente vertheilt.

Dabei sind als Körperelemente immer die kleinsten Theilchen betrachtet, die man noch durch irgendwelche physikalischen Mittel von einander unterscheiden kann. Dass wir guten Grund haben, diese Elemente als sehr complicirte materielle Systeme anzusehen, die sich aus einer ungeheuren Anzahl von Atomen mit dem diese verbindenden Weltäther zusammensetzen, hat für die folgenden Überlegungen keinerlei Bedeutung. Es ist uns vielmehr zunächst gleichgiltig, ob die Energie auch innerhalb dieser Elemente noch bestimmt localisirt

---

[1] Kirchhoff, Mechanik. Vorl. 11. Gl. 30 ff., S. 122.

[2] Kirchhoff, Mechanik. Vorl. 13, S. 135.

ist, und wie sie sich, wenn dies der Fall ist, auf die Atome und den Äther vertheilt.

Ferner ist zu beachten, dass wir von den unter 1. bis 4. aufgezählten Energieformen nicht sagen können, dass eine jede als das totale Differential einer bestimmten Function aufgefasst werden kann. Vielmehr müssen sie als partielle Differentiale einer einzigen, jedenfalls sehr complicirten Function sämmtlicher Zustandsgrössen bezeichnet werden. Diese Function, die aber noch eine willkürliche Constante additiv enthält, nennen wir die innere Energie.

Jedem Körperelement ist also eine bestimmte innere Energie zugeordnet, wenn wir für die willkürliche Constante einen bestimmten Werth gewählt haben. Wir werden bei dieser Wahl natürlich so verfahren, dass Körper, die physikalisch gleich sind, bei gleichen Zuständen auch immer dieselbe Energie besitzen. Wir dürfen uns aber auch wohl vorstellen, dass es für jeden Körper einen bestimmten Zustand gibt, wo jede mögliche Zustandsänderung nur einen positiven Zuwachs der inneren Energie mit sich bringen kann, und wir dürfen wohl annehmen, dass es nur noch an den nöthigen Erfahrungen fehlt, um diesen Zustand, den man als den absoluten Nullpunkt der inneren Energie zu bezeichnen hätte, zu berechnen. Dem sei, wie ihm wolle; für das Folgende genügt es, die innere Energie von einem willkürlichen Nullpunkt ab zu rechnen, so dass sie sowohl positive, als auch negative Werthe annehmen kann.

Eine wesentliche Eigenschaft der inneren Energie ist, dass sie bei blossen Ortsveränderungen des Körpertheilchens, dem sie zugeordnet ist, ihm unverändert zugeordnet bleibt. Es wird sich daher die räumliche Vertheilung der inneren Energie im Allgemeinen ändern, wenn die räumliche Vertheilung der Körperelemente geändert wird, auch ohne dass sonst irgend ein physikalischer Vorgang stattfindet.

Die innere Energie kann noch einige weitere Formen annehmen:

5. Lösungsenergie, chemische Verbindungsenergie.

Wenn mehrere getrennte Körper sich durch Mischung, Lösung, Absorption oder durch chemische Vereinigung in einen einzigen neuen verwandeln, dessen einzelne Körperelemente also aus ganz bestimmten Elementen der ursprünglichen Körper hervorgegangen sind, so wird sich der Betrag, um den sich die innere Energie des neuen Körpers in einem bestimmten Zustande von der Summe der inneren Energieen der ursprünglichen Körper unterscheidet, in bestimmter Weise auf die einzelnen Körperelemente vertheilen, da man jedes Körperelement immer als selbständigen Körper betrachten kann.

Auch wenn bei einer chemischen Umwandlung etc. mehrere neue Körper entstehen, lässt sich ein ganz analoger Satz leicht aussprechen, wenn man dabei nur beachtet, dass der Nullpunkt der Energie für jeden Körper als gegeben betrachtet werden muss, wenn er nur für jeden chemisch einfachen Stoff (chemisches Element) fixirt ist.

6. Elektrische und magnetische Energie.

Wenn an irgend einer Stelle im Raum elektrische oder magnetische Kräfte auftreten, so entsteht dort nach der Maxwell'schen Theorie eine localisirbare Energieform, deren Grösse sich mathematisch für jedes Raumelement berechnen lässt.[1] Befindet sich in dem Raumelement gewöhnliche Materie, so müssen wir jedenfalls einen Theil dieser Energieform als innere Energieform bezeichnen, da sie bei Ortsänderungen der Materie zum Theil mitgeführt wird. Ein Theil aber ist, so viel wir heute wissen, unabhängig von der Materie und folgt den Bewegungen wenigstens nicht unmittelbar, wie auf Seite 1147 (Punkt 25) näher auseinandergesetzt ist. Diesen Theil müssen wir als Energie des Weltäthers an der betreffenden Stelle des Raumes auffassen. Wo elektrische und magnetische Kräfte im leeren Raum auftreten, müssen wir ihre Energie als reine Energie des Weltäthers bezeichnen. Für unseren Zweck können wir die Frage nach dem Substrat der Energie ausser Acht lassen, es genügt, die Thatsache der Localisirbarkeit festgestellt zu haben.

7. Strahlungsenergie.

Strahlung, sichtbare oder unsichtbare, ist eo ipso localisirbare Energie, und zwar sind die bekannteren Strahlungs-

[1] Maxwell, Elektricität und Magnetismus. Bd. 2, Abschnitt 630 ff.

arten nur besondere Formen der elektromagnetischen Energie. Von der Kathodenstrahlung, der Röntgenstrahlung und den mit diesen verwandten lässt sich das letztere wohl noch nicht mit Sicherheit behaupten.

Ausser den aufgezählten Energieformen, denen nur noch die Gravitationsenergie hinzuzufügen ist, dürften wohl keine weiteren bekannt sein.[1] Freilich ist zu erwarten, dass ein eingehenderes Studium der Molecularphysik noch zu einer oder der anderen heutzutage sehr unvollständig oder gar nicht bekannten Form der inneren Energie führen wird. Indessen ist es sehr unwahrscheinlich, dass man jemals nicht localisirbare Formen entdecken wird.

8. Gravitationsenergie.

Eine einzige Energieform bleibt, welche möglicherweise als potentielle Energie im gewöhnlichen Sinne der Mechanik zu bezeichnen wäre: die Energie der Gravitation. Die Grösse dieser Energieform hängt nach der üblichen Darstellungsweise nicht wie die der kinetischen Energie und der sämmtlichen unter 1. bis 7. aufgezählten Formen von dem physikalischen Zustande[2] der Materie und des Äthers ab, sondern nur von der gegenseitigen Lage mehrerer discreter Körper im Raume. Man nennt sie daher auch Energie der Lage. Es ist aus der in 3. gegebenen Definition der Localisirbarkeit unmittelbar einzusehen, dass eine Energie der Lage sich nicht localisiren lässt.

In neuerer Zeit dringt jedoch mehr und mehr die Ansicht durch, dass es keine Energieform geben könne, deren Grösse sich ändert, ohne dass eine wirkliche physikalische Änderung in der Materie (im weiteren Sinne) eintritt, dass also die Abhängigkeit von rein geometrischen Grössen nur eine scheinbare sein könne. Nach dieser Anschauungsweise muss die Gravitation an jeder Stelle des Raumes die Äusserung eines besonderen physikalischen Zustandes im Weltäther sein, ähnlich wie die elektrischen und magnetischen Kräfte es nach der

[1] Selbstverständlich beschränken wir uns ganz auf die anorganische Natur.

[2] Auch die Bewegung eines Körpers ist als physikalischer Zustand anzusehen.

Maxwell'schen Theorie sind. Welcher Art dieser Zustand sein mag, darüber gibt es eine grosse Reihe von Hypothesen.[1] Keine indessen beantwortet die Frage befriedigend.

Der Erste, welcher darauf hinwies, dass man auch ohne specielle Hypothese die Gravitation als physikalischen Zustand behandeln könne, und der den Ausdruck für die Gravitationsenergie in die Form einer localisirbaren Energie brachte, war Heaviside.[2] Später wurde der Gedanke in derselben Weise auch von Föppl[3] ausgeführt.

---

[1] Drude, Über Fernewirkungen. Referat für die 60. Vers. deutscher Naturf. und Ärzte, Sect. Physik. Braunschweig, 1897.

[2] O. Heaviside, Electrician, *31*, 1893, 14. Juli, Elektromagnet. Theory, p. 455.

[3] Föppl, Münchener Akademieber., math.-naturw. Cl. 1897, S. 93.

Inhaltsverzeichniss.