Lecture Notes
in Economics and
Mathematical Systems
Managing Editors: M. Beckmann and H. P. Künzi

Econometrics

136

Eduard Kofler
Günter Menges

Entscheidungen bei unvollständiger Information

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1976

Authors
Dr. Eduard Kofler
Universität Zürich
Forchstraße 145
8032 Zürich/Schweiz

Prof. Dr. Günter Menges
Universität Heidelberg
Bergheimer Straße 147
6900 Heidelberg/BRD

Library of Congress Cataloging in Publication Data

Kofler, Eduard, 1911-
Entscheidungen bei unvollständiger Information.

(Lecture notes in economics and mathematical systems ; 136 : Econometrics)
Bibliography: p.
Includes index.
1. Statistical decision. I. Menges, Günter, joint author. II. Title. III. Series: Lecture notes in economics and mathematical systems ; 136.
QA279.4.K63 519.5'4 76-49895

AMS Subject Classifications (1970): 62C05, 62C99, 90A05, 90C15, 90D35

ISBN 3-540-07993-9 Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York
ISBN 0-387-07993-9 Springer-Verlag New York · Heidelberg · Berlin

Printed in Germany
Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.

Vorwort

Wir legen hiermit eine Arbeit vor, welche Untersuchungen zusammenführt, die uns seit mehreren Jahren beschäftigen. Zunächst haben wir getrennt voneinander, in den beiden letzten Jahren in wachsendem Maße gemeinsam an der Theorie der Entscheidungen bei unvollständiger Information gearbeitet. Das Motiv, das jeden von uns von Anfang an bewegte, war die Einsicht, daß die herkömmlichen Entscheidungsmodelle zu unrealistisch und daher für die praktische Anwendung ungeeignet, insbesondere zu starr sind. Dies gilt für die deterministischen Entscheidungsmodelle ebenso wie für die sog. Bernoullimodelle oder die Modelle der Risikosituation, bei denen die Verteilung über den Zuständen als exakt bekannt vorausgesetzt ist.

Was der Praktiker, der Statistiker ebenso wie der betriebs- oder volkswirtschaftliche Planer und Entscheider, in der Hand hat, sind in der Regel unvollständige Informationen über seine Umwelt und über seine Entscheidungskonsequenzen. Auf dieser unzulänglichen Basis muß er Entscheidungen treffen, und diese Entscheidungen sollen gleichwohl "möglichst rational" sein.

Diesem Zweck, rationale Entscheidungsfindung bei unzulänglicher Information, dient unsere Theorie, die durchgängig als angewandte konzipiert ist. Diesem Zweck ordnen sich alle Überlegungen und Theoreme unter, d.h. alle Begriffe und Theoreme sind nicht wegen ihres mathematischen Gehalts oder aus anderen rein theoretischen Gründen in das Buch aufgenommen worden, sondern nur deshalb, weil wir überzeugt sind, daß sie die Entscheidungstheorie anwendungsfähiger machen.

Mit Hilfe der Theorie der Entscheidungen unter unvollständiger Information können klassische statistische Probleme gelöst, d.h. Hypothesen geprüft, Parameter geschätzt und Prognosen aufgestellt werden, aber auch Entscheidungsprobleme in Industrie, Verwaltung und Wirtschaftspolitik einer Optimallösung zugeführt werden.

Wir sehen den Nutzen unserer Theorie aber nicht allein in der Vermittlung von Rezepten, sondern auch darin, daß sie erlaubt, Entscheidungssituationen zu analysieren, die Unbestimmtheit bezüglich der Zustände und der Entscheidungskonsequenzen zu strukturieren und schrittweise zu vermindern. (In der Tat wird durch LPI-Strukturen auch die Ungewißheit strukturiert.)

Wir setzen uns in den ersten drei Kapiteln mit der Entscheidungstheorie im klassischen Rahmen auseinander und diskutieren in diesem Rahmen unmittelbare Erweiterungen in Bezug auf unvollständige Informationen. Im vierten Kapitel beschreiben wir einen anderen, nichtklassischen Weg, indem wir Verteilungsmengen analysieren, die unvollständiger Information entsprechen, und hierzu eine neue Theorie entwickeln, die Theorie der Linearen Partiellen Information (LPI). Sie wird mit der klassischen Theorie, aber auch mit modernen, dem LPI-Ansatz verwandten Strömungen, wie der weichen Modellbildung und dem fuzzy set approach, verglichen. In den Kapiteln 5 bis 8 wird die LPI-Theorie nach verschiedenen Richtungen ausgestaltet. Das dabei stets verfolgte Grundprinzip ist Anpassungsfähigkeit, d.h. unsere wissenschaftliche Grundüberzeugung äußert sich in dem Postulat, daß eine Theorie desto anwendungsfähiger ist, je anpassungsfähiger sie ist.

*

Zum Schlusse möchten wir uns noch bedanken, und zwar bei Herrn PD Dr. B. Leiner, Herrn Dr. Ch. v. Rothkirch, Herrn Dipl.Vw. F.A. Hadi und Frau Dipl.Vw. D. Jäck-Stärk für zahlreiche Hinweise und Verbesserungsvorschläge und ihre Hilfe bei der Korrektur des Manuskripts und bei Frl. U. Reitnauer für die Mithilfe bei der Anfertigung des Maschinenskripts, besonders in der Endphase.

Blatten im Lötschental, im Juli 1976

E. Kofler
G. Menges

Inhaltsverzeichnis

6. Kapitel: Einstufige Entscheidungen

7. Kapitel: Mehrstufige Entscheidungen

Wichtige Bezeichnungen

Seite	Bezeichnung	Bedeutung
16	$A = \{\alpha_i\}$, $i = 1,\ldots,n$; auch $\{\alpha\}$.	Aktionsraum
19	$B = \{\beta_j\}$, $j = 1,\ldots,m$; auch $\{\beta\}$.	Zustandsraum
21	λ	A-priori-Verteilung
22	$\rho = (p_1,\ldots,p_m)$; $p_j \geq 0$; $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$.	der endliche Fall der Verteilung
23	$e(\beta, \alpha)$	Ergebnis beim Zusammentreffen von β und α
24	$E = \{e\}$	Ergebnisraum
27	$a\,p\,b$	Ergebnismischung (mit Wahrscheinlichkeit p der Gewinn a, mit $1-p$ der Gewinn b).
29	$\mathfrak{X}$	der zur Zufallsvariablen X gehörige Stichprobenraum
29	$\mathfrak{D} = \{d\}$	der Raum der Entscheidungsfunktionen
29	D	der Raum der zulässigen Entscheidungsfunktionen
30	F; F_j	Verteilung über den Zuständen

Seite	Bezeichnung	Bedeutung
30	$\mathfrak{A}$	σ - Algebra
30	Ω	der Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße F auf $\mathfrak{A}$
30	$u(F, d(x))$	Nutzenfunktion
30	$U(F, d)$	Nutzenerwartung
31	$\Delta = \{\delta\}$	Klasse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen über A
33	$\succ$	Präferenzpräordnung
33	$\sim$	Äquivalenzrelation
34	$\bar{e} = (p_1 e_1, \ldots, p_n e_n)$	Ungewißheitssituation (Prospekt)
34	$\bar{\bar{e}} = (\pi_1 \bar{e}_1, \pi_m \bar{e}_m)$	der zusammengesetzte Prospekt
51	$S(\beta_j; \alpha_i)$	Enttäuschungsfunktion
90	$p(\rho) \in R^m$	der Wahrscheinlichkeitspunkt im R^m
90	$S^{(m)}$	(m-1)-dimensionales Verteilungssimplex
91	PI	Partielle Information
91	LPI	Lineare partielle Information
91	T(PI)	Teilgebiet des Simplexes
92	T(LPI)	Teilgebiet des der LPI entsprechenden Verteilungssimplexes
92	US	Ungleichungssystem
93	$P^{(m)}$	das LPI-Polyeder

Seite	Bezeichnung	Bedeutung
93	M(LPI)	Extremalpunkte-Matrix
98	U; U_E	Nutzenmatrix; Nutzenerwartungsmatrix
129	$H_{rel}^{(m)}$(LPI)	Relative LPI-Entropie
138	$[\{\alpha_i\}; \{\beta_j\}; p = (p_1,\ldots,p_m); [\mu_{ij}]]$ $i = 1,\ldots,n$; $j = 1,\ldots,m$	Grundmodell der Risikosituation
138	α^*	Optimale Strategie oder Aktion
138	$V(\alpha^*)$	der Entscheidungswert
142	$G = [\{\alpha_i\}; \{p^{(\gamma)}\}; A(\alpha_i, p^{(\gamma)})]$ $i = 1,\ldots,n$; $\gamma = 1,\ldots,k$	das LPI-Spiel
148	$I_1, I_2,\ldots$	Informationsmengen
150	α_B	die Bernoulli-Strategie
150	$V(\alpha_B)$	der Bernoulli-Entscheidungswert
155	$\sigma_{ES}(\Delta I)$	Sensitivität gegenüber der Informationsänderung ΔI in der Entscheidungssituation ES
156	ΔI^*	Optimale Informationsänderung (Steuerung)
157	$[\{\alpha_i\};\{\beta_j\};\{LPI^{(k)}\}; [u_{ij}]]$ $i = 1,\ldots,n$; $j = 1,\ldots,m$; $k = 1,2,3,\ldots$	Entscheidungssituation bei LPI-Ketten

Seite	Bezeichnung	Bedeutung
175	$ES^{(i)}: [X^{(i)}; Y^{(i)}; LPI^{(i)}; Z^{(i)}]$ $i = 1,\ldots,\nu$	komponente LPI-Entscheidungssituationen
175	$\widehat{ES} : [X; Y; \overline{LPI}; [Z]]$ $X = X_1 \times \ldots \times X_\nu;\ Y = Y_1 \times \ldots \times Y_\nu;$ $[Z] = [(Z^{(1)},\ldots,Z^{(\nu)})]$	zusammengesetzte LPI-Entscheidungssituation
176	$V_{ES^{(k)}}(\Delta I^{(k)});\ V_{\widehat{ES}}(\Delta I^{(k)})$	komponenter, globaler Informationswert
193	$\overbrace{LPI}$	LPI mit nicht abgeschlossenem konvexen Polyeder
194	$\widehat{LPI}$	LPI mit abgeschlossenem konvexen Polyeder
200	$V_H(\alpha_i)$	der Hurwicz-Wert einer Strategie
201	$V_{HL}(\alpha_i)$.	der Hodges-Lehmenn-Wert einer Strategie
237	SUE	stochastische Unbestimmtheit des Entscheidungswertes
239	$G^{(k)}$	Grad der SUE einer Risikosituation mit k Spalten
244	ν_{rs}	die Varietät des variablen Elementes $\bar{u}_{rs}$ der Entscheidungsmatrix
246	$\bar{W}_B(ES)$	Bewertungsvektor der Entscheidungssituation ES

Seite	Bezeichnung	Bedeutung
247	$EU(ES)$	entropische Unbestimmtheit der ES
248	$\overline{EU}(ES)$	obere Schranke der EU
252	$P : k_1 \to N : l_1;\ \rho_1,\dots,l_{k_1};$ $\rho_{k_1} \to P : m_1,\dots,m_{l_1}, m_{l_1+1},\dots$ $\dots m_{l_1+\dots+l_{k_1}} \to \dots$	Beschreibung des Entscheidungsbaumes
270	$\delta_{EB}(\Delta I)$	Sensitivität δ gegenüber der Informationsänderung ΔI im Entscheidungsbaum EB
271	$V_d(EB;\ I^{(1)} \to I^{(2)})$	der dynamische Informationswert des Übergangs $I^{(1)} \to I^{(2)}$ im EB
272	$V_d^{(n)}(EB;\ I^{(1)} \to I^{(2)})$	dynamischer Informationswert in mehrstufigen n-Personen-Spielen
276	$VAP(I^{(1)} \to I^{(2)})$	der Wert des Adaptionsprozesses beim Übergang $I^{(1)} \to I^{(2)}$
276	$\overline{VAP}(I^{(1)} \to I^{(2)})$	der Nettowert
313	$K_\nu : A_{i_0} \to A_{i_1} \to \dots \to A_{i_\nu}$	einfache endliche Markoffsche Kette
313	$r^{(0)}$	Verteilung der möglichen Anfangszustände A_{i_0}
313	$r^{(i)}$	Verteilung der i-ten Zeile der Übergangsmatrix ($i = 1,\dots,n$)

1. Kapitel:

Einführung

§ 1. Historische Notizen

Die Theorie statistischer Entscheidungen wurde von Abraham Wald (1902 - 1950) in den Vierziger Jahren begründet. Das Hauptwerk "Statistical Decision Functions" erschien im Todesjahr A. Walds. Trotz ihrer Neuartigkeit hat die statistische Entscheidungstheorie zahlreiche Vorläufer in Statistik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Wirtschaftstheorie, Philosophie, Theologie und Mathematik gehabt [Bott 1962]. Legt man die Betonung auf das Adjektiv, so hat die statistische Entscheidungstheorie ihre wichtigsten Vorläufer in den Arbeiten von drei Mitgliedern der berühmten Basler Gelehrtenfamilie Bernoulli.

Jacob Bernoulli (1654 - 1705) begründete mit seiner Ars conjectandi [1713] die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Auf ihn geht die Unterscheidung zwischen A-priori- und A-posteriori-Wahrscheinlichkeit zurück [J.Bernoulli 1713, deutsch 1899]. Nikolaus Bernoulli (1695 - 1726), ein Neffe von Jakob, versuchte erstmals die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Entscheidungsprobleme, besonders solche juristischer Art, anzuwenden [N. Bernoulli 1709].

Daniel Bernoulli (1700 - 1782), ein Bruder von Nikolaus, sah als erster, daß beliebige Entscheidungsprobleme mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung allein nicht gelöst werden können. Vielmehr sind die Konsequenzen von Ereignissen bzw. Entscheidungen zu bewerten. Er entwickelte ein Nutzenkonzept und verband es mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff [D. Bernoulli 1730/31, deutsch 1896]. Diese Verbindung bezeichnet man heute als Bernoullinutzen bzw., da das Konzept in unserer Zeit von

John v. Neumann und Oskar Morgenstern [1944] wieder aufgegriffen wurde, als Neumann-Morgenstern-Nutzen. Daniel Bernoulli hat jedoch nicht nur den "Bernoullinutzen" entdeckt und einen bestimmten Typ von Nutzenfunktion vorgeschlagen, sondern auch eine Entscheidungsregel formuliert, die inzwischen besonders von H. Schneeweiß [1967] untersucht wurde und die uns in Form des Bernoulli-Kriteriums in diesem Buch mehrfach begegnen wird.

Die nächste Station auf dem Weg von den Bernoullis zu A. Wald ist durch den Namen von Bayes markiert. Thomas Bayes (1702 - 1761) hat mit seiner 1763 durch seinen Freund R. Price posthum publizierten Arbeit [Bayes 1763, deutsch 1908] mehrere Grundlagen für die moderne Entscheidungstheorie gelegt. Er hat als erster eine Methode geliefert, mit der von empirischen Beobachtungen auf Verteilungen geschlossen werden kann, er hat die Rolle von A-priori-Wahrscheinlichkeiten studiert und ihre Bedeutung erkannt. Das wichtigste Kriterium der Entscheidungstheorie, das häufig mit A-priori-Wahrscheinlichkeiten assoziiert ist, wurde deshalb von A. Wald als Bayes-Kriterium bezeichnet. Wir werden im folgenden jedoch den Ausdruck Bernoullikriterium verwenden, da der Beitrag von D. Bernoulli zeitlich früher (1730)und auch näher im Zentrum des Problems liegt als der Beitrag von Bayes. Erste praktische Nutzanwendungen aus der Bayes'schen Abhandlung hat Pierre-Simon de Laplace (1749 - 1827) im Jahre 1812 gezogen [Laplace 1812]. Die Entwicklung von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik nach Laplace ist zugleich die Entwicklung entscheidungstheoretischer Konzepte und mündet direkt in die moderne Entscheidungstheorie. Die hauptsächlichen Impulse, die A. Wald zur Konzipierung seiner Theorie anregten, sind die Testtheorie von J. Neyman und E. S. Pearson [1933], die Theorie der strategischen Spiele von J. v. Neumann und O. Morgenstern [1944] sowie die Theorie des Sequentialtests, die zuvor von A. Wald entwickelt worden war [Wald 1947].

Neyman und Pearson haben die Annahme bzw. Ablehnung einer Hypothese als "Aktionen" (Wahlhandlungen) sowie die Konsequenzen dieser Aktionen unter verschiedenen Umweltbedingungen betrachtet und damit das Testproblem als Entscheidungsproblem. Mit der Spieltheorie von J. v. Neumann und O. Morgenstern wurde ein großartiger allgemeiner Rahmen für die Formalisierung und Lösung von Entscheidungsproblemen unter strategischen Gesichtspunkten geschaffen, darunter ein Gerüst von auch für die statistische Entscheidungstheorie wichtigen Begriffen wie Strategie, Aktionswahrscheinlichkeit, Normalform eines Spieles, Ergebnisfunktion, Nutzenfunktion usw. sowie von Theoremen wie das Minimaxtheorem und der Existenzsatz über den Erwartungsnutzen. Speziell statistisch war der Beitrag von A. Wald in seiner Sequentialanalyse, welche so konzipiert ist, daß auf jeder Stufe des statistischen Vorgehens drei mögliche Entscheidungen getroffen werden: Annehmen, Ablehnen oder Weiterbeobachten.

Trotzdem die statistische Entscheidungstheorie, wie alle heutigen wissenschaftlichen Disziplinen und Theorien, nicht aus dem Nichts entstanden ist, sondern Vorläufer hat, sollte man nicht übersehen, daß sie in ihrer spezifischen Form etwas grundlegend Neues darstellt. Neu ist vor allem die Entwicklung von Methoden, die rationale Entscheidungen auch in ungewissen Situationen und evtl. ohne Realitätsurteile ermöglichen. Neu ist auch, daß man versucht, praktische Entscheidungsprobleme in all ihrer Komplexität zu formalisieren und mit exakten Hilfsmitteln (Mathematik, Statistik, EDV) zu lösen.

§2. Das Entscheidungssubjekt

Für den Rest dieses Kapitels wollen wir das Grundmodell des Entscheidens in seinen wichtigsten Begriffen und Bestandteilen formulieren, ohne hier schon auf mathematische Strenge zu achten. Doch wollen wir hier das Modell und seine Bestandteile plausibel und verständlich zu machen versuchen und die Diskussion der Anwendungsproblematik vorbereiten.

Die Entscheidungstheorie ist eine auf eigenartige Weise personalisierte Theorie, in deren Zentrum ein Subjekt steht, der "decision maker" (Entscheidender, Entscheidungssubjekt, Entscheidungsträger, Planer, Verantwortlicher). Er ist ein naher Verwandter des homo oeconomicus. Wie dieser handelt er rational, besitzt unendlich große Sensitivität und Reaktionsgeschwindigkeit und wird durch vieles Denken nicht unlustig. Was ihn, den Zeitgenossen, vom älteren homo oeconimicus unterscheidet, ist die vollständige Information, die ihm fehlt und hohe Rechenkapazität, die er besitzt.

Seine Rationalität ist Gegenstand ausgedehnter Kontroversen. Unproblematisch ist nur, daß Rationalität konsistentes Handeln und ein gewisses "Streben" einschließt. Dieses Streben manifestiert sich in der Maximierung von irgendetwas; darüber, was maximiert werden soll, laufen die Meinungen bereits auseinander. Wir sagen vorläufig:

er will seinen "Nutzen" maximieren. Als weiteres Merkmal der Rationalität wird zumeist die Existenz (mindestens) einer Präordnung angesehen: Der Entscheidungsträger besitzt die Fähigkeit, von je zwei Objekten angeben zu können, ob sie ihm indifferent sind oder ob er das eine dem anderen vorzieht. Präordnungen haben die Eigenschaften der Reflexivität und Transitivität. Letztere ist Gegenstand lebhafter Diskussionen in Vergangenheit und Gegenwart. Sie besagt (im Kontext von Präferenzsystemen), daß wenn der Entscheidungsträger ein Objekt a einem anderen Objekt b und dieses einem dritten Objekt c vorzieht, er dann auch a dem c vorziehen muß. Zahlreiche Experimente und Betrachtungen erweisen zwar, daß die Transitivität empirisch häufig verletzt wird, aber diese Erfahrung ist für uns aus zwei Gründen irrelevant. Erstens ist der Entscheidungsträger der Theorie ein hochidealisiertes Subjekt, dem die Transitivitätseigenschaft seines Verhaltens einfach unterstellt wird. Daß die Transitivität ein Gebot der Rationalität ist, wird von niemand bestritten. Viele betrachten die Transitivität sogar als ein Gebot der Logik. Zweitens aber interessiert uns auch vom wirklichen Entscheidungsträger nicht sein psychologisch determiniertes Verhalten, vielmehr wollen wir ihm Regeln an die Hand geben, nach denen er sich verhalten sollte.

Diese Dualität geht weit über die Transitivitäts- und Rationalitätsdiskussion hinaus. Man charakterisiert diese Dualität heute häufig - im Anschluß an J. Marschak [1950] - durch das Begriffspaar "präskriptiv - deskriptiv". Die modernen Entscheidungstheorien sind sowohl präskriptiv als auch deskriptiv konzipiert oder interpretierbar, woraus viele Mißverständnisse und Irrtümer resultieren. Rein präskriptive Theorien geben Normen für Verhaltensweisen, rein deskriptive Theorien versuchen wirkliches Verhalten zu beschreiben und auf Grund realer Einflußfaktoren zu erklären. Zwar sind wir der Auffassung, daß die Entscheidungstheorie eine Kombination von Präskription und Deskription darstellt, die man "operational" nennen könnte [Menges 1974, S. 80], aber in diesem Buch wird nur der präskriptive Aspekt der Entscheidungstheorie verfolgt, d. h. wir betrachten den Entscheidungsträger als Klienten, dem wir gute Ratschläge geben wollen, und nicht als Objekt der Erkenntnis. Wir unterstellen ihm lediglich die Fähigkeit, die Konsequenzen seiner Handlungen zu kennen und eine Präordnung unter ihnen herstellen zu können sowie den Wunsch, sich konsistent verhalten zu wollen und nach etwas zu "streben". Ob er darüberhinaus auch noch fähig ist, (subjektive) Wahrscheinlichkeiten zu produzieren, lassen wir vorerst dahingestellt.

Der Entscheidungsträger ist ein Individuum, also weder eine Gruppe noch ein Gremium. Zwar ist von verschiedenen Seiten, z. B. schon von Luce und Raiffa [1957, Kapitel 14] und neuerdings besonders von Marschak und Radner [1972] versucht worden, die Bindung der Entscheidungstheorie an ein einzelnes Individium zu lösen. Wir gehen auf diese Modifikationen hier jedoch nicht ein.
Was dringend nötig wäre, ist eine Loslösung vom Individuum derart, daß ganze Kollektive als Entscheidungsträger zugelassen werden. Trotz mannigfacher Versuche, das Unmöglichkeitstheorem von Arrow [1950 ,1951] zu überwinden, ist bisher noch nicht gelungen, befriedigende Wege zu einer demokratischen Lösung des Problems der Aggregation von individuellen Präferenzen zu finden. Die "Überwindung" des Arrow'schen Theorems kann freilich, da es einen vielfach bewiesenen mathematischen Satz darstellt, nur darin liegen, daß die ihm zugrundeliegenden Axiome

umformuliert werden oder gewisse Einschränkungen aufgegeben werden, wie die, daß die Alternativen eine geordnete Menge darstellen. Wir können es nicht als unsere Aufgabe betrachten, diese Modifizierungen zu suchen und zu begründen, da sie weit außerhalb des Rahmens unseres Vorhabens liegen. Wir sind uns aber der äußersten Wichtigkeit dieses Problems bewußt.

Wir betrachten durchgängig in diesem Buch den Entscheidungsträger als ein Individuum.

Außerdem nehmen wir zunächst an (vgl. jedoch Kapitel 3), daß der Entscheidende eine einmal getroffene Entscheidung weder korrigieren noch aus früheren Entscheidungen und ihren Folgen lernen kann. Dies ist eine scharfe Einschränkung. Arrow behauptet sogar: "Learning is one of the most important forms of behaviour under uncertainty." [Arrow 1958, S. 13]. Aber die bisherigen Ausgestaltungen der statistischen Entscheidungstheorie tragen dieser Bdeutung nicht Rechnung. Die von uns in den Kapiteln 5 - 7 vorgetragene Theorie erlaubt hingegen die Einbeziehung eines Lernprozesses.

Das sind die üblichen Annahmen, die über den Entscheidungsträger der statistischen Entscheidungstheorie getroffen werden.

§3. Die Entscheidung

Im engeren Sinn ist der Entscheidungsträger der "Statistiker". Seine Entscheidungen richten sich auf die Prüfung von Hypothesen, auf die Schätzung unbekannter Parameter und die Prognose zukünftiger Beobachtungen. Diese drei Typen von Entscheidungen sind der Theorie statistischer Entscheidungen primär aufgegeben. Im weiteren Sinn faßt man "statistische " Entscheidungen aber auch als Entscheidungen irgendwelcher Individuen (Produzenten, Konsumenten, Bankiers, Investoren, Regierende, militärische Befehlshaber usw.) auf, in denen Wahrscheinlichkeiten in irgendeiner Form, direkt oder indirekt, mitspielen und bei denen die Auswahl der Handlungsweise von statistischen Beobachtungen abhängt. Wenn auch der moderne statistische Entscheidungsbegriff somit sehr weit ist, so sind doch mehrere Einschränkungen gegeben. Einige folgen direkt aus der Definition des Entscheidungsträgers in § 2. Hauptsächlich ist zu beachten, daß sich der Entscheidungsbegriff der Statistik von dem der Psychologie, der Theologie und Jurisprudenz unterscheidet, besonders durch seinen operationellen, "utilistischen" Charakter. Der Entscheidungsbegriff der Psychologie ist vorwiegend deskriptiv, derjenige in Theologie und Jurisprudenz normativ, ohne zugleich unmittelbar operationell zu sein. Der statistische Entscheidungsbegriff ist außerdem auf bewußte, überlegte, reflektierte Entscheidungen beschränkt. Er umgreift weder Reflexe, Triebhandlungen oder impulsives Verhalten noch traditionelle oder gewohnheitsmäßige Entscheidungen. Damit korrespondiert der moderne statistische Entscheidungsbegriff mit dem Wahlhandlungsbegriff der älteren Nachfragetheorie. Außerdem muß die Entscheidungssituation eine gewisse "Ausreifung" erreicht haben, damit die Theorie auf sie paßt. Auf völlig "offene" Situationen, bei denen die Konstituenten, besonders die Handlungsalternativen und möglichen Zustände der Umwelt nicht (oder nocht nicht), bekannt sind, läßt sich die statistische Entscheidungstheorie nicht anwenden. Schließlich sind zwei wichtige konstituierende Merkmale des statistischen Entscheidungsbegriffs zu nennen: 1. die

Determiniertheit vom Ergebnis, von den Entscheidungskonsequenzen, her, die Aktionen werden ausschließlich danach beurteilt, zu welchen Ergebnissen sie überhaupt bzw. mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten führen können; 2. das Vorliegen einer aus Ungewißheit resultierenden Konfliktsituation (darüber in § 5. mehr), die durch nur formale Hilfsmittel - wie in der Mathematischen Programmierung - nicht beseitigt werden kann.

Das Vorliegen eines Konflikts ist der Angelpunkt der ganzen Theorie. Er ist primär und liegt vor der Entscheidung. Wenn ein Konflikt vorliegt und der Entscheidungsträger sich nicht entscheidet, so hat er natürlich auch eine Entscheidung getroffen, wie schon Pascal gezeigt hat. Nun sind aber nicht irgendwelche Konflikte der Angelpunkt statistischer Entscheidungen, sondern nur solche, die aus Ungewißheit resultieren. Die vorhandene Theorie paßt nicht auf Konfliktsituationen, die aus dem Unvermögen zur Aufstellung eines Präferenzsystems resultieren, und der Konflikt darf auch nicht so beschaffen sein, daß er konsistentes Verhalten verletzt oder unmöglich macht. Die sehr wichtige und für das Verständnis aller weiteren Betrachtungen fundamentale Rolle der Ungewißheit als Ursache des "statistischen" Konflikts wollen wir an einem einfachen Beispiel erläutern.

Ein Investor steht vor der Alternative, ein gegebenes Kapital in Form von Wertpapieren oder in Anlagenform einzusetzen. Seine Entscheidung für die eine oder andere Alternative (Alternativenmischungen wollen wir hier noch nicht zulassen) ist davon abhängig, ob innerhalb der nächsten drei Jahre eine Rezession eintritt (Zustand β_1) oder ob die gegenwärtige Konjunktur fortdauert (Zustand β_2). Wenn er Wertpapiere kauft und es tritt eine Rezession ein, dann beträgt sein Gewinn 40.000 DM, hält die Konjunktur an, dann kann er einen Gewinn von 70.000 DM machen. Wenn er hingegen in Anlagen investiert, dann beträgt sein Gewinn 10.000 DM, wenn eine Rezession kommt, und 110.000 DM, wenn die Konjunktur fortdauert.

Die "Ergebnismatrix" lautet also:

Gewinne in 1.000 DM	β_1 (Rezession)	β_2 (Konjunktur)
α_1 (Wertpapiere)	40	70
α_2 (Anlagen)	10	110

Der Investor stellt jetzt folgende Überlegung an: Am liebsten würde ich in Anlagen investieren und darauf hoffen, daß die Konjunktur fortdauert. Denn dann mache ich den Maximalgewinn von 110.000 DM. Aber wenn ich in Anlagen investiere und es wird eine Rezession eintreten, bin ich sehr schlecht dran. Tritt nämlich eine Rezession ein, dann wäre es besser gewesen, in Wertpapieren zu investieren, denn in diesem ungünstigen Fall bringt es mir immer noch 30.000 DM mehr ein, als wenn ich in Anlagen investiert hätte.

In einem Beispiel wie diesem wird der Entscheidungsträger sich natürlich fragen, wie wahrscheinlich es ist, daß eine Rezession eintritt. Diese Modifikation werden wir im nächsten Abschnitt behandeln. Doch liefert die Entscheidungstheorie auch eine Lösung des Problems, wenn diese Wahrscheinlichkeit unbekannt ist.

Wir haben uns auf einige wichtige Aspekte des Entscheidungsbegriffs beschränkt. Der an der Problematik des Entscheidungsbegriffs und seinen philosophischen Implikationen interessierte Leser sei auf das Buch von Gäfgen [1968] verwiesen.

§ 4. Aktionen

Im Beispiel des vorigen Paragraphen sind zwei Handlungsalternativen, α_1 und α_2, aufgetreten. Solche Handlungsalternativen heißen auch Aktionen; und ihre Menge sei fortan mit A bezeichnet. A enthält die Elemente α_i (i = 1,..., n) bzw. α .

Letztlich besteht das Entscheidungsproblem darin, eine "gute" Aktionenwahl zu treffen, was immer das heißen möge:

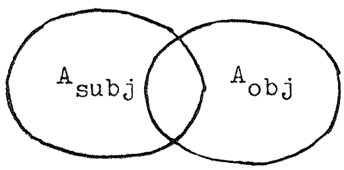
ein "gutes" (aussichtsreiches, vertretbares) $\alpha \in A$

oder:

einen "guten" (vernünftigen) Wahlmodus zu benutzen.

In der Empfehlung einer Aktion als Lösung des Entscheidungsproblems tritt der präskriptive Charakter der Entscheidungstheorie deutlich zutage. Bei Entscheidungsproblemen der Statistik stellt die Menge A eine Hypothesenmenge, eine Menge von Schätzwerten (Parameterraum) oder eine Menge von zukünftigen Beobachtungen (Beobachtungsraum) dar, in denen der Statistiker seine Wahl zu treffen hat, je nachdem, ob eine Hypothese zu prüfen, eine Schätzung zu finden oder eine Prognose aufzustellen ist. Ganz allgemein sind Aktionen bestimmte Vorgänge oder Phänomene, die der Kontrolle des Entscheidenden unterliegen, die er in Gang setzen bzw. realisieren kann und die partiell bestimmte Folgen haben; völlig bestimmt wird die Handlungsfolge erst durch das Hinzutreten des jeweiligen "Zustandes der Umwelt" (s. u. § 5). Durch die Festsetzung einer bestimmten Menge A in einer gegebenen Situation wird eine der Dimensionen des Entscheidungsproblems fixiert; es wird sozusagen der "Entscheidungshorizont" festgelegt. Der Entscheidungshorizont wird objektiv abgegrenzt durch die Fähigkeiten des Subjekts. Manche Handlungen setzen allerdings zu ihrer Ingangsetzung noch gewisse Umweltbedingungen voraus.

Wohl zu unterscheiden von der objektiven Abgrenzung des Entscheidungshorizontes ist die subjektive. Der Entscheidungshorizont wird vom Entscheidenden insofern subjektiv beeinflußt, als A begrenzt ist auf die Menge der Handlungen, die er kennt und die er in Betracht ziehen will. Diese Menge A_{subj} kann über den objektiven Aktionenvorrat A_{obj} hinausgehen und umgekehrt (s. Abb.). Der Entscheidende



kann mögliche Handlungen übersehen und unmögliche Aktionen ins Auge fassen. Im ersten Fall übersieht er vielleicht eine vorteilhafte oder sogar die optimale Handlung. Schließt er dagegen eine ihm bekannte Aktion bewußt aus, so trifft er damit eine u. U. legitimierbare Vorentscheidung. Hat er das Gefühl, noch nicht alle Handlungen zu kennen, dann kann er sich nach weiteren möglichen Aktionen umsehen, also sein A_{subj} noch erweitern, bevor er an die eigentliche Entscheidungsfindung herangeht. Das Entscheidungsmodell ermuntert den Entscheidenden geradezu, alle erdenklichen Handlungen in Betracht zu ziehen, sofern nicht a priori für ihren Ausschluß gute Gründe sprechen; es schützt den Entscheidenden davor, Aktionen aus Tradition oder Gewohnheit zu ignorieren, und stellt schon damit ein Element der Rationalität dar.

Ist dem Entscheidenden eine Aktion α bekannt, wenn er ihre Konsequenzen (unter den verschiedenen Zuständen der Umwelt) nicht auswerten kann? Er weiß zwar, was er tun muß, um α auszuführen, nicht aber, was daraus resultieren kann. Er kann deshalb α nicht in das Entscheidungsmodell einbringen, bevor er sich über die Konsequenzen von α informiert hat. Der Entscheidende wird somit aufgefordert, sich die Erfahrung zunutze zu machen; darin tut sich ein Element der gesellschaftlichen Wissensverbreitung kund, ohne die die individuelle Entscheidung nicht auskommt. - Übrigens kann die Unkenntnis dessen, was auf Grund von α passieren wird, zum Teil auch von einer ungenauen Beschreibung dieser Handlung herrühren. Sie wird beseitigt oder eingeschränkt durch eine Aufspaltung des ursprünglichen α in detailliertere Aktionen α', α'', ..., von denen genau eine zu wählen ist; die Entscheidung für α stellt nur eine "Vor-Wahl" dar. Präzision bei der Beschreibung der Aktionen (und ebenso der Zustände) ist in der Entscheidungstheorie allerdings nicht Selbstzweck; sie soll vielmehr eine hinreichend präzise Beschreibung der Konsequenzen ermöglichen, damit man die Aktionen von der Ergebnisseite her trennscharf genug diskriminieren kann. Auf der anderen Seite erschwert eine zu feine Aufschlüsselung der Zustände die Vorhersage, welcher von diesen Zuständen der wahre oder wahrscheinlichste sein wird.

Studenten der Wirtschaftswissenschaft erliegen leicht dem Mißverständnis anzunehmen, daß - ähnlich wie in einschlägigen ökonomischen Theorien - zur Lösung des Entscheidungsproblems ein Präferenzfeld über der Aktionenmenge (Wahlhandlungsmenge) gegeben sein müßte. Tatsächlich verlangt die statistische Entscheidungstheorie vom Entscheidungssubjekt etwas ganz anderes, nämlich die Aufstellung eines Präferenzfeldes über der Menge von Konsequenzen von Aktionen. (Das wird in § 6 noch deutlich werden). Wir müssen sogar verlangen, daß der Entscheidungsträger keine Präferenzen für Aktionen mitbringt.

§ 5. Die "Zustände der Realität", die Ungewißheit und ihre Reduktion

Es gibt Vorgänge und Phänomene der Umwelt, die für das Handeln des Entscheidungsträgers zwar von großer Bedeutung sind, indem sie nämlich die Konsequenzen seiner Aktionen mitaffizieren, die sich aber seiner Kontrolle absolut entziehen. Solche Vorgänge oder Phänomene bezeichnen wir als Zustände der Natur (Welt, Umwelt, Realität). Im Investorbeispiel haben wir zwei mögliche Zustände der Natur: Rezession, Fortdauer der Konjunktur.

Einen einzelnen Zustand bezeichnen wir fortan mit β_j ($j = 1, \ldots, m$) bzw. β. Die Menge der Zustände sei B. Diese Menge B nennen wir Zustandsraum oder "Zustandshorizont". Analog wie der Entscheidungshorizont A (§ 4) ist der Zustandshorizont einerseits objektiv, andererseits subjektiv determiniert. Objektiv wird B abgegrenzt als der "Bereich des Möglichen". Subjektiv braucht der Entscheidende die Zustände nur soweit zu erfassen und zu unterscheiden, als sie in der gegebenen

Entscheidungssituation zu einer unterscheidenden Bewertung der Aktionen beihelfen. Beispielsweise hat es keinen Sinn, eine (überdies sehr unwahrscheinliche) kosmische Katastrophe in Betracht zu ziehen, bei deren Eintreten alle Aktionen gleichermaßen inadäquat wären. Wenig Sinn hat auch die Unterscheidung zweier Zustände, wenn sie für keine Aktion unterschiedliche Konsequenzen erkennen läßt oder alle Handlungskonsequenzen in gleicher Weise affiziert. Aber auch abgesehen von den Konsequenzen hilft die Differenzierung von Zuständen im Endeffekt nur dann weiter, wenn über die zu erwartende Realisierung der unterschiedenen Zustände differenzierte Indizien vorhanden (oder beschaffbar) sind. Vor allem läßt man einen Zustand dann weg, wenn man vom Eintreten seines Gegenteils überzeugt ist. Diese Überzeugung kann irrig sein, dann wurde der Zustand irrtümlich weggelassen. Ist sie jedoch richtig, dann erspart das Weglassen des Zustandes Arbeit bei der Analyse des Entscheidungsproblems. Bleibt dagegen ein Merkmal des Umweltzustandes bewußt oder gewollt unberücksichtigt, so hat unser Subjekt damit eine wichtige Vor-Entscheidung getroffen, welche die endgültige Entscheidungsfindung bereits in bestimmte Bahnen lenkt. Im Investorbeispiel (s. o.) beschränkt sich der Entscheidende auf die ökonomischen Aspekte seines Handelns; er läßt u.a. die Möglichkeit einer Umwälzung des Wirtschaftssystems außer Acht. Irgendwie muß der Entscheidende immer seinen Zustandshorizont beschneiden, sehr oft in drastischer Weise, will er nicht ins Uferlose geraten. Er kann dann natürlich auch nur eine <u>relativ zum gewählten Zustandshorizont</u> gute (oder beste) Entscheidung fällen.

Der Entscheidungstheoretiker ermahnt den Entscheidenden, keinen relevanten Zustand zu vergessen, und macht ihn darauf aufmerksam, daß eine folgenschwere Vor-Entscheidung gefällt wird, wenn ein Umwelt-Merkmal (bewußt oder unbewußt) ignoriert wird. Die entscheidungstheoretischen Verfahren können die irrtümliche Auslassung eines Zustandes nachträglich nicht mehr reparieren. Wichtig ist auch, daß die Zustände sich gegenseitig ausschließen, doch bedeutet die gegenseitige Ausschließung nicht, daß die Berücksichtigung von Zustandsmischungen verboten wäre.

Schließlich muß der Entscheidungstheoretiker verlangen, daß der Entscheidungsträger keine Präferenzen für die Zustände per se mitbringt. Oder vielleicht genauer: Präferenzen für die Zustände werden als solche vom Entscheidungsmodell "unterschlagen", es sei denn, sie wurden auf die Entscheidungskonsequenzen "umgebucht".

Für das Entscheidungsproblem ist von fundamentaler Bedeutung, ob der Entscheidungsträger den wahren Zustand der Realität kennt bzw. was er über ihn weiß. Wir unterscheiden mehrere Fälle. Wir sprechen von einem Entscheidungsproblem unter Gewißheit, wenn der wahre Zustand der Realität bekannt ist und die Entscheidung nur noch in der Aufstellung einer Präferenzordnung unter den möglichen Ergebnissen besteht. Dieser Fall ist zwar der Fall der klassischen Wirtschaftstheorie und liegt den modernen Verfahren der mathematischen Programmierung zugrunde, er soll jedoch nicht mehr als echtes Entscheidungsproblem angesehen werden.

Von einem Entscheidungsproblem unter Risiko sprechen wir, wenn der Zustand β der Realität nur bis auf eine Wahrscheinlichkeitsverteilung λ (der sogenannten "A-priori-Verteilung") bekannt ist. Später bezeichnen wir diese Wahrscheinlichkeitsverteilung - im endlichen Fall und ohne die A-priori-Bindung - auch als Vektor ρ. Ist die

Wahrscheinlichkeitsverteilung λ nur bis auf eine gewisse Klasse Λ^* von Wahrscheinlichkeitsverteilungen bekannt, so steht das Entscheidungsproblem unter einem gewissen Grad von Ungewißheit, welcher so weit steigen kann, daß über Λ^* lediglich noch ausgesagt werden kann, daß es alle jene Wahrscheinlichkeitsverteilungen enthält, welche durch die mathematischen Voraussetzungen zur Existenz dieser Lösung nicht ausgeschaltet sind. Ein solches Entscheidungsproblem heißt ein Entscheidungsproblem unter völliger Ungewißheit.

Auch diesen Fall werden wir nicht gesondert betrachten, da er völlig unrealistisch ist. Allerdings stellt er einen Grenzfall bei unseren Überlegungen dar.

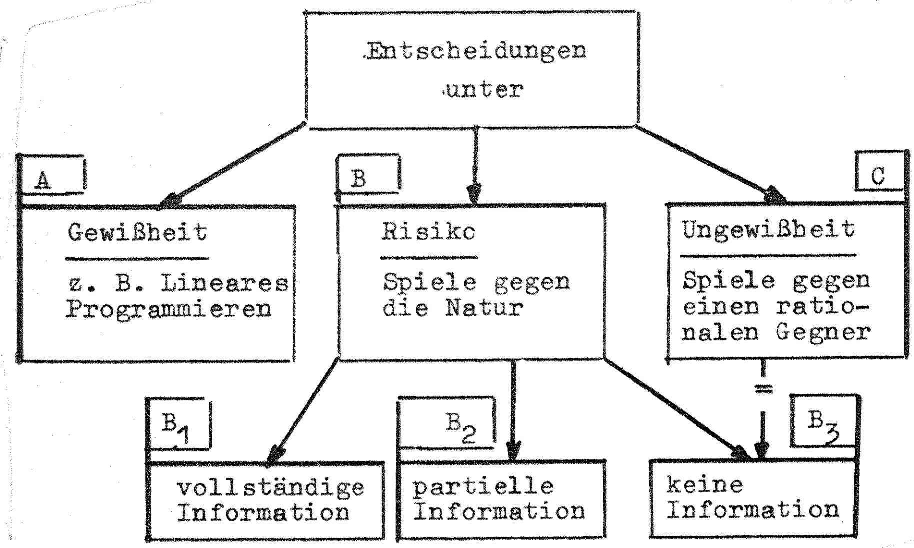
Unser alleiniges Interesse gilt dem sog. Risikofall, der eine breite Skala von Möglichkeiten umfaßt. Als Grenzfall der vollständigen Information bezeichnen wir den klassischen Risikofall, bei welchem λ, die sog. A-priori-Verteilung über den Zuständen, ganz genau bekannt ist; im diskreten endlichen Fall ist λ die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\rho = \{(p_1, p_2, \ldots, p_m);\ p_j \geq 0;\ \sum_{j=1}^{m} p_j = 1\}$$

über den Zuständen.

Indessen sind wir nicht nur an diesen Grenzfall vollständiger Information interessiert, sondern gerade und viel mehr an dem Fall partieller Information, bei dem die A-priori-Verteilung λ also nicht genau bekannt ist, wohl aber z. B. eine Klasse Λ^* von A-priori-Verteilungen. Im vierten Kapitel werden wir den Begriff der Information einführen, der diesen Fall zu formalisieren und zu behandeln gestattet.

Übersichtlich stellt sich die Skala und Hierarchie der Entscheidungsmodelle wie folgt dar:



Um es noch einmal deutlich zu sagen: Unser Buch ist dem Fall B_2 gewidmet, den wir für den realistischsten ansehen. Die Fälle B_1 und B_3 sind Grenzfälle von B_2.

<u>§ 6. Die Entscheidungskonsequenzen (Ergebnisse) und ihr Nutzen für das Entscheidungssubjekt</u>

Bei jedem Zusammentreffen einer Aktion $\alpha \in A$ mit einem Zustand $\beta \in B$ entsteht ein <u>Ergebnis</u> (engl. outcome), das wir mit $e(\beta, \alpha)$ bezeichnen. $e(\beta, \alpha)$ ist die Konsequenz, die sich für den Entscheidenden einstellt, wenn er $\alpha \in A$ gewählt hat, während die Natur den Zustand $\beta \in B$ realisiert hat. Die Entscheidungskonsequenz $e(\beta, \alpha)$ wird durch die Angabe des Aspekts charakterisiert, auf den es dem Entscheidungsträger ankommt - durch die Ausprägung eines qualitativen Merkmals (z. B. des Gesundheitszustands) oder eines numerischen Merkmals (z. B. des Geldeinkommens). Ist eine Skala möglicher Ergebnisse abgesteckt, so braucht man darauf nur die Stelle anzugeben, an der $e(\beta, \alpha)$ einzuordnen ist. Wir formalisieren dieses Vorgehen, indem wir eine Menge möglicher Ergebnisse E zugrundelegen, von der $e(\beta, \alpha)$ ein Element ist. Von der inneren Natur dieser Elemente wird in der mengentheoretischen Darstellung abstrahiert. E heißt der Ergebnisraum. Auf der Menge E muß eine Präferenzbeziehung definiert sein, welche die Zielvorstellungen des Entscheidenden zum Ausdruck bringt; sonst können wir das Entscheidungsproblem nicht in seinem Sinne lösen. Im allgemeinen verlangt man, daß diese Beziehung total ist, d. h. daß für alle Paare von Elementen aus E ein Präferenzurteil des Entscheidungssubjektes vorliegt. Treten weitere Eigenschaften hinzu, dann kann die Präferenzbeziehung mit Hilfe von (reellen) Nutzenwerten ausgedrückt werden: man kann an den Nutzenwerten die Präferenzen des Entscheidenden erkennen, und zwar zeigt ein Ergebnis durch seinen größeren Nutzenwert an, daß es vom Entscheidenden einem Ergebnis mit kleinerem Nutzenwert vorgezogen wird. Bevor wir den Weg von der Präferenzbeziehung zur (gegebenenfalls erwartungstreuen oder kardinalen) Nutzenfunktion im einzelnen verfolgen, wollen wir den Nutzenbegriff der modernen Entscheidungstheorie allgemein charakterisieren.

Der moderne entscheidungstheoretische Nutzenbegriff, der von J. v. Neumann und O. Morgenstern entwickelt wurde, unterscheidet sich fundamental von den Nutzenbegriffen der Nutzwerttheoretiker und der Grenznutzenschule. Er hat lediglich - in bestimmtem Sinn - einen Vorläufer in dem Nutzenkonzept von Daniel Bernoulli.

Ein erstes wesentliches Merkmal des modernen entscheidungstheoretischen Nutzens ist, daß er aus Präferenzen abgeleitet wird, niemals umgekehrt. (Und er ist auch keine Eigenschaft von Dingen). Im Sinne der modernen Theorie ist der folgende Satz falsch: Weil a nützlicher ist als b, ziehe ich a vor. Der umgedrehte Satz hingegen trifft die Sache: Weil ich a im Vergleich zu b vorziehe, ist der Nutzen von a (für mich) größer als der von b.

Weitere wichtige Merkmale des entscheidungstheoretischen Nutzenbegriffs sind seine Kardinalität, seine Subjektivität und seine stochastische Ausrichtung.

Nach Majumdar [1958] kann man die älteren und neueren Nutzenkonzepte in folgende vier Klassen einteilen:

(a) Introspektiver Ordinalismus,
(b) Behavioristischer Ordinalismus,
(c) Behavioristischer Kardinalismus,
(d) Introspektiver oder Neo-Kardinalismus.

Nach dieser Klassifikation ist der v. Neumann-Morgensternsche Nutzenbegriff behavioristisch-kardinalistisch, d. h. es wird angestrebt, den Nutzen kardinal zu messen; dies geschieht zwar mit Hilfe einer ausgefeilten Axiomatik, aber diese soll so beschaffen sein, daß sie konsistent zu empirisch beobachteten Verhaltensmustern ist.

Die wenigen Vertreter der introspektiven Richtungen wollen den Nutzenbegriff psychologisch deduzieren, und zwar ohne auf die empirischen Verhaltensweisen sehr zu achten. Die Ordinalisten, deren Zahl auch heute noch beachtlich ist, streben nur die ordinale Nutzenmessung an. Die Grenze zwischen Ordinalismus und Kardinalismus ist fließend, und im Laufe der Zeit haben sich die Ansichten über die Grenze zwischen beiden mehrfach verschoben. Heute definiert man überwiegend:

Ordinal ist die Messung, die bis auf <u>monotone</u> Transformationen eindeutig ist.

Kardinal ist die Messung, die bis auf <u>lineare</u> Transformationen eindeutig ist.

Bei der kardinalen Messung, auf die wir uns beschränken, ist also weder eine objektive Maßeinheit noch ein Nullpunkt gegeben. Es existiert kein Bezugspunkt außerhalb des "präferierenden Subjekts", welcher interpersonale Vergleiche ermöglichte. Selbst der kardinal gemessene Nutzen ist und bleibt somit an das Subjekt gebunden.

Neben der subjektivistischen kennzeichnet den modernen entscheidungstheoretischen Nutzenbegriff die stochastische Ausrichtung. Tatsächlich gehen in der modernen Theorie Wahrscheinlichkeit und Nutzen eine kaum lösbare Verbindung ein. Es sollen nicht nur Nutzenmaße für sichere (= reine) Ergebnisse, sondern auch für ungewisse (= gemischte) Ergebnisse gefunden werden.

Das bedeutet ein Zweifaches:

(a) Daß der Entscheidende originär zwischen Ergebnismischungen Präferenzen "empfindet";

(b) daß der Nutzen einer Ergebnismischung sich aus dem Nutzen der an der Mischung partizipierenden Ergebnisse durch Gewichtung mit ihren anteiligen Wahrscheinlichkeiten herleitet (s. u. Erwartungstreue, Erwartungsnutzen, Bernoulli-Prinzip).

Eine (stochastische) Ergebnismischung von paradigmatischer Einfachheit ist die folgende: Mit Wahrscheinlichkeit p wird der Gewinn a, mit Wahrscheinlichkeit 1 - p der Gewinn b eintreten. Wir schreiben dafür: apb.

Z. B. steht der Investor im obigen Beispiel vor der Wahl zwischen den beiden Ergebnismischungen

$$40 \text{ p } 70 \quad \text{und} \quad 10 \text{ p } 110,$$

wobei p die Wahrscheinlichkeit $P(\beta_1)$ für das Auftreten einer Rezession (β_1) bedeutet. Der Einfachheit halber nehmen wir hier an, p sei als 0,6 bekannt. Das Nächstliegende wäre, die Erwartungswerte der beiden Ergebnismischungen zu berechnen:

$$\mu_1 = E(40 \text{ p } 70) = 52$$

$$\mu_2 = E(10 \text{ p } 110) = 50.$$

Mit Recht wird aber eingewendet, daß diese Erwartungswerte für den Investor (allgemein: den Entscheidungsträger) ziemlich irrelevant sind, da sie sich zwar auf die Dauer und im Durchschnitt einstellen mögen, aber wenn das Entscheidungsproblem sich nur ein einziges Mal stellt, ist dieser Aspekt für ihn unwichtig. Die ältere Theorie nahm an, daß weitere Verteilungsparameter, neben dem Erwartungswert besonders die Streuung, Bedeutung gewinnen. Stattdessen nimmt die neue Theorie an, daß der Entscheidungsträger bestimmte subjektive Präferenzen für Ergebnismischungen der beschriebenen Art hat. Ergebnismischungen seien, so behauptet z. B. Edwards [1954, S. 392], "behaviorally meaningful". (Diese Präferenzen drücken wir später im sog. Erwartungsnutzen aus.) Die Existenz subjektiver Präferenzen für Ergebnismischungen ist in der Tat eine tiefreichende und zugleich problematische Annahme.

Die moderne Theorie bezweifelt aber zugleich, daß der Nutzen selbst sicherer Ergebnisse sich proportional nach ihrem monetären Wert bemißt. Dafür ein Beispiel: Jemand hat 10,- DM und möchte sich damit einen schönen Abend machen. Wir unterscheiden zwei Situationen: (1) Er will für sein Geld Bier kaufen. (2) Er will für sein Geld in ein Konzert gehen; die billigste verfügbare Eintrittskarte kostet aber 12,- DM Im ersten Fall ist der Nutzen seines Geldes relativ hoch, im zweiten Fall praktisch Null. An diesem Beispiel läßt sich auch die Ungewißheitspräferenz zeigen: Bietet ihm ein anderer eine Wette an: Verlust der 10,- DM und Gewinn von 2,- DM je mit Wahrscheinlichkeit - sagen wir - 0,5, wird er vermutlich ablehnen, d. h. die sicheren 10,- DM vorziehen, denn für 10,- DM bekommt er eine ganze Menge Bier. Dieselbe Ergebnismischung $(-10)\ \frac{1}{2}\ (+2)$ wird er aber im Fall (2) dem sicheren Besitz von 10,- DM vorziehen, denn durch die Wette stehen seine Chancen, doch noch ins Konzert zu gelangen, 1 : 1.

§ 7. Modifikationen des Entscheidungsmodells

1. Informationsbeschaffung, Entscheidungsfunktionen

Die wichtigste Modifikation des Grundmodells der statistischen Entscheidungstheorie, wie es in den vorangegangenen §§ dargelegt wurde, besteht darin, daß dem Entscheidenden die Möglichkeit der Beschaffung von Informationen über die Realität mittels Stichprobenbeobachtungen eingeräumt wird.

Die Stichprobeninformation dient zwei Zwecken. Der eine Zweck, den Wald allein intendierte, ist die Verwendung der Information derart, daß statt konstanter Aktionen sogenannte Entscheidungsfunktionen oder Strategien gewählt werden. Der zweite Zweck ist für unser Buch von einer großen Bedeutung: Durch die Stichprobeninformation kann die Ungewißheit reduziert werden, entweder indem die Situation totaler Ungewißheit in die Situation partieller Ungewißheit transformiert wird, oder indem eine Situation partieller Ungewißheit, die schon gegeben ist, in eine verbesserte Situation partieller Ungewißheit übergeführt wird.

Die Stichprobe x zeigt die Realisation einer Zufallsvariablen X. Der zu X gehörige Stichprobenraum sei mit $\mathfrak{X}$ bezeichnet. Eine Entscheidungsfunktion oder Strategie ist eine Abbildung

$$d: \mathfrak{X} \to A;$$

d ist somit ein Rezept, welches je nach dem Ausfallen der Beobachtung $x \in \mathfrak{X}$ die Wahl eines $\alpha \in A$ vorschreibt.

Den Raum der Entscheidungsfunktionen bezeichnen wir mit $\mathfrak{D}$. Aus dieser Menge sondern wir später die Menge D der zulässigen Entscheidungsfunktionen aus.

Vorher berücksichtigen wir noch, daß mit dem Übergang von A zu $\mathfrak{D}$ auf der Aktionenseite ein analoger Übergang auf der Seite der Zustände erforderlich wird. Statt konstanter Zustände β_j $(j = 1,\ldots, m)$ haben wir jetzt Verteilungen $F_j(j = 1,2,\ldots, m')$ zu berücksichtigen. Die ursprünglichen Zustände waren die $\beta_j(j = 1,\ldots, m)$; ihre Menge bezeichneten wir mit B. Wir betrachten sie nun als charakterisiert durch die Zufallsvariable X, die in diesem Zusammenhang auch Zustandsvariable heißt. Der zu X gehörige Stichprobenraum $\mathfrak{X}$ wird zu einem meßbaren Raum durch die Angabe einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$, d. h. einer volladditiven Klasse von Mengen in $\mathfrak{X}$. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß (eine Verteilung) F auf $\mathfrak{A}$ heißt jetzt der Zustand der Variablen X. Durch $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, F)$ ist der stochastische Vorgang bezgl. der Zustandsvariablen X eindeutig bestimmt. Den Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße (Verteilungen) F auf $\mathfrak{A}$ bezeichnen wir mit Ω.

Den analogen Übergang erfährt später die Nutzenfunktion.

In Vorwegnahme der späteren Betrachtungen (hauptsächlich in § 8) wollen wir jetzt schon festhalten, daß auf dem kartesischen Produkt $\Omega \times \mathfrak{D}$ eine beschränkte reellwertige Funktion u definiert wird, die Nutzenfunktion

$$u : \Omega \times \mathfrak{D} \to R.$$

u(F, d(x)) ist der Nutzen, den der Entscheidende hat, wenn er nach der Entscheidungsfunktion d verfährt, während der wahre Zustand der Realität durch die Verteilung F repräsentiert ist. Durch u wird auf dem kartesischen Produkt $\Omega \times \mathfrak{D}^{\mathfrak{X}}$ eine Funktion definiert

$$U(F, d) = \int_{\mathfrak{X}} u(F, d(x))\, dF,$$

die wir als Nutzenerwartung bezeichnen.

Nunmehr können wir nämlich den Raum $\mathfrak{D}$ auf die Klasse der zulässigen Entscheidungsfunktionen D einschränken. Eine Entscheidungsfunktion heißt zulässig, wenn sie von keiner anderen dominiert wird.

Dominanz: Seien d_1, $d_2 \in \mathfrak{D}$ zwei beliebige Entscheidungsfunktionen mit

$$U(F, d_1) \leq U(F, d_2) \text{ für alle } F \in \Omega$$
$$U(F, d_1) < U(F, d_2) \text{ für mindestens ein } F \in \Omega;$$

dann wird d_1 von d_2 dominiert.

2. Andere Modifikationen

Da das Stichprobenziehen Kosten verursacht, verwandte Wald in seiner Originalarbeit und verwenden viele Autoren der Entscheidungstheorie Kostenfunktionen für die Stichprobenelemente. Auf diese Modifikationsmöglichkeit verzichten wir jedoch aus Gründen der Einfachheit und besseren Übersichtlichkeit.

Eine weitere Modifikation ergibt sich daraus, daß man analog zu den A-priori-Verteilungen $\lambda \in \Lambda^*$ über dem Zustandsraum auch über dem Aktionsraum A eine Klasse Δ von Wahrscheinlichkeitsverteilungen einführt, von welchen jede angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit jede Aktion $\alpha \in A$ zu wählen ist. Damit wird also d(x) für eine Beobachtung x nicht mehr ein $\alpha \in A$ zugeordnet, sondern eine Verteilung $\delta \in \Delta$ über A. Die $\delta \in \Delta$ heißen zufällige Aktionen und die Entscheidungsfunktionen d(x) mit Funktionswerten δ in Δ heißen gemischte Strategien. (In der Bezeichnung d(x) sind sowohl zufällige als auch nicht-zufällige Entscheidungsfunktionen zusammengefaßt.)

In der ursprünglichen Spieltheorie, wo alle Spieler rational vorgestellt werden und sich gegenseitig (zum eigenen Nutzen)schaden wollen, sind die Konzepte der zufälligen Aktion und der gemischten Strategie sinnvoll, da sie den Gegnern und den Gegenspielern das Kennenlernen der eigenen Strategie erschweren.Bei den Spielen gegen die Natur (Realität) ist es dann nicht sinnvoll,Aktionen oder Strategien zufällig zu mischen, wenn die Verteilung über den Zuständen fest ist.Ist dies nicht der Fall, dann ist es auch bei den Spielen gegen die Natur sinnvoll, Aktionen zu mischen (der LPI-Ansatz macht von Aktionenmischungen Gebrauch).

Ein wesentlicher Faktor wurde bei den bisherigen Aspekten übergangen - nämlich die Zeit.

Stillschweigend hatten wir bisher vorausgesetzt, daß die Abfolge "Formulierung des Problems - Vorentscheidung über die Informationsbeschaffung und eventuell weitere Vorentscheidungen - Informationsbeschaffung - Berechnung der optimalen Strategie - konkrete Aktion - Zusammentreffen der Aktion mit einem Zustand der Realität - Eintreten des Ergebnisses" zeitlich dimensionslos ist, also mit unendlich großer Prozeßgeschwindigkeit abläuft. Ein solch hoher Idealisierungsgrad ist in der Tat bei den allerwenigsten Anwendungsproblemen vertretbar und das Modell bedarf einer realitätsadäquaten Modifikation, welche die Zeitabhängigkeit berücksichtigt. Diese Modifikation umfaßt die Einführung des Zeitfaktors in fast allen Stationen des Entscheidungsproblems, vom zeitlich veränderlichen Strategien- und Zustandsraum über zeitabhängige Nutzenfunktionen, zeitlich bedingte Klassen von A-priori-Verteilungen bis zur zeitabhängigen Wahl des Entscheidungskriteriums. Auf diese wichtige Modifikation gehen wir später (besonders in § 16) ein.

2. Kapitel:

Nutzenaxiomatik und Entscheidungskriterien

In diesem Kapitel wollen wir den Weg vom Präferenzsystem zum Erwartungsnutzen verfolgen und die verschiedenen Entscheidungskriterien diskutieren.

§ 8. Von der Präferenzpräordnung zum Erwartungsnutzen

Wir lehnen uns an die weitverbreitete Axiomatik des v. Neumann-Morgenstern-Nutzens in der Form von Luce und Raiffa [1957, S. 23 ff] an, welche etwas einfacher und durchsichtiger ist als das ursprüngliche Axiomensystem in der 2. Auflage des Buches von J. v. Neumann und O. Morgenstern [v. Neumann-Morgenstern 1947]. Wegen anderer Axiomatiken vgl. Marschak [1950], Herstein und Milnor [1953], Hausner [1954] und Menges [1974, § 9].

Zum Ausgangspunkt nehmen wir eine Präferenzpräordnung, die mit

$$\boxed{\gtrsim}$$

bezeichnet wird. $\gtrsim$ ist eine reflexive, transitive Relation auf der Menge E der Ergebnisse [Menges 1974, §9]. Derartige Ordnungen heißen Präordnungen. Da sie die Wertvorstellungen der Entscheidenden widerspiegeln, heißen sie Präferenzpräordnungen.

$e_1 \gtrsim e_2$ bedeutet, daß e_2 dem e_1 nicht vorgezogen wird, d.h. e_1 wird dem e_2 entweder vorgezogen oder ist ihm äquivalent. Das Zeichen $\sim$ bedeutet $\gtrsim \cap \lesssim$ und heißt Äquivalenzrelation. $\sim$ ist eine reflexive, symmetrische, transitive Relation; inhaltlich bedeutet $e_1 \sim e_2$, daß dem Entscheidenden e_1 und e_2 gleich viel wert sind, daß er präferentiell zwischen e_1 und e_2 nicht unterscheiden kann. Die Präferenzpräordnung ist total, d. h. für alle $e_1, e_2 \in E$ gilt

$$e_1 \gtrsim e_2 \vee e_2 \gtrsim e_1 .$$

Die Nutzenfunktion u bildet E in $\mathbb{R}$ bezüglich $\gtrsim$ ab derart, daß für alle e_1, $e_2 \in E$ gilt

$$e_1 \gtrsim e_2 \Leftrightarrow u(e_1) \geq u(e_2).$$

Wir wollen allerdings nicht nur eine Nutzenfunktion aus einer gegebenen Präordnung ableiten, sondern zugleich den Nutzen einer Ungewißheitsituation bestimmbar machen. Diese Erweiterung ist gerade auf statistische Entscheidungsprobleme abgestellt. Sie verlangt zunächst, daß die Ergebnisse $e \in E$ zu Ungewißheitssituationen oder Prospekten $\bar{e}$ kombiniert werden können (für eine endliche Menge n von Ergebnissen $e_1, \ldots, e_n$): $\bar{e} = (p_1 e_1, p_2 e_2, \ldots, p_n e_n)$.

Die p_i $(i = 1, \ldots, n)$ sind die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Ergebnisse auftreten $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Natürlich kann es mehrere Prospekte geben: $\bar{e}_j = (e_1 p_{j1} \ldots, e_n p_{jn}) (j=1, \ldots, m)$. Die Prospekte ihrerseits werden zu zusammengesetzten Prospekten $\bar{\bar{e}}$ oder "Geschichten" (Marschak) oder "Geschäften" (Menges) kombiniert:

$\bar{\bar{e}} = (\pi_1 \bar{e}_1, \pi_2 \bar{e}_2, \ldots, \pi_m \bar{e}_m)$, wobei die π_j $(j = 1, \ldots, m)$ die Wahrscheinlichkeiten sind, mit denen die einzelnen Prospekte auftreten. $\sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1$; $\sum_{j=1}^{m} \pi_j \, p_{ji} = p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$

$e_1 \succ e_2$ oder $e_2 \prec e_1$ bedeutet: e_1 wird e_2 vorgezogen,

$e_1 \sim e_2$ bedeutet: e_1 indifferent zu e_2,

$e_1 \gtrsim e_2$ bedeutet: e_2 wird e_1 nicht vorgezogen.

Nach diesen Vorbereitungen geben wir die sechs Axiome nach Luce und Raiffa an:

(1) Ordnungsaxiom bezüglich der Ergebnisse $e_i \in E$ $(i = 1,\ldots, n)$. Die Relation $\succsim$ gilt für je zwei beliebige Ergebnisse e_i, $e_j \in E$. Die Relation ist transitiv, d. h. : Aus $e_i \succsim e_j$ und $e_j \succsim e_k$ folgt $e_i \succsim e_k$ $(e_i, e_j, e_k \in E)$. Dieses Axiom besagt also, daß eine Präordnung auf E existiert. Es gelte:

$$e_1 \succsim e_2 \succsim \ldots \succsim e_n \;.$$

(2) Reduktionsaxiom(bezüglich der zusammengesetzten Prospekte). Jeder zusammengesetzte Prospekt der Art $\bar{\bar{e}}$ läßt sich auf einen gewöhnlichen Prospekt $\bar{e}'$ reduzieren, welcher indifferent zu $\bar{\bar{e}}$ ist. Luce und Raiffa kommentieren dieses Axiom wie folgt (S. 20):".. it abstracts away all ‚joy in gambling', ‚atmosphere of the game', ‚pleasure in suspense', and so on ...". Die wichtige Konsequenz dieses Axioms ist, daß man nur einfache Prospekte zu betrachten braucht.

(3) Stetigkeitsaxiom. Jedes Ergebnis $e_i \in E$ $(i = 1,\ldots,n)$ ist indifferent zu einem Prospekt der Form $\tilde{e}_i = [q_i\, e_1, (1-q_i)\, e_n]$ $(i = 1,\ldots, n)$. Derartige zweiwertige Prospekte drücken wir wieder in der folgenden einfacheren Schreibweise aus: $\tilde{e}_i = e_1 q_i e_n$. Das Axiom (3) hat einige Kritik erfahren; man wendet zu Recht ein, daß es folgende Situation inpliziert. Gegeben seien 3 Ergebnisse: e_1 = Gewinn von 1 DM, e_2 = Gewinn von 2 DM, e_3 = Verlust der Existenz. Dann gilt für die meisten Menschen $e_1 \succ e_2 \succ e_3$. Das Stetigkeitsaxiom verlangt aber nun, daß es rational für den Entscheidungsträger ist, indifferent zu sein, bezüglich e_2 (2 DM zu gewinnen) und dem Prospekt $e_1 q e_3$, d. h. dem Prospekt mit Wahrscheinlichkeit q 1 DM zu gewinnen und mit Wahrscheinlichkeit 1-q die Existenz zu verlieren. Selbst wenn 1-q sehr nahe bei Null liegt, wird kein Unternehmer diese Konsequenz akzeptieren. Doch war schon den Grenz-

nutzentheoretikern des vorigen Jahrhunderts klar, daß Präferenz- und Nutzenbetrachtungen nur innerhalb eines festen, relativ homogenen "Milieus" sinnvoll sind.

(4) Substitutionsaxiom. Für drei beliebige Ergebnisse $e_1, e_2, e_3 \in E$ mit $e_1 \sim e_2$ gilt für jedes p $(0 < p < 1)$

$$e_1 p e_3 \sim e_2 p e_3$$

und umgekehrt d. h. sind von drei Ergebnissen e_1, e_2, e_3 zwei (z. B. e_1 und e_2)indifferent zueinander, dann sind die Prospekte, die darin bestehen, daß e_1 mit e_3 und e_2 mit e_3 kombiniert wird, beide mit Wahrscheinlichkeit p, ebenfalls indifferent zueinander. Andere Autoren nennen dieses Axiom Unabhängigkeitsaxiom, Sure-thing-Prinzip oder (zusammen mit Axiom 3) Prinzip der Unabhängigkeit "irrelevanter" Alternativen. Es ist das wichtigste und zugleich am heftigsten umstrittene Axiom der modernen Nutzenaxiomatik. Wichtig ist es, da der Verzicht auf dieses Axiom den Nutzenbegriff auf die lexikographische Ordnung reduziert. Problematisch ist es, weil im allgemeinen die Ergebnisse untereinander nicht den vom Axiom verlangten hohen Grad an Unabhängigkeit bezüglich der Bewertung durch den Entscheidungsträger besitzen.

(5) Axiom der Transitivität der Prospekte untereinander. Die Relation $\gtrsim$ ist auch bezüglich der Prospekte transitiv, d. h.: Aus $\bar{e}_1 \gtrsim \bar{e}_2 \gtrsim \bar{e}_3$ folgt $\bar{e}_1 \gtrsim \bar{e}_3$. Dieses Axiom ist (unter präskriptivem Aspekt) unproblematisch.

(6) Monotonieaxiom. Ein Prospekt $\bar{e}_1 = e_1 p e_n$ wird genau dann einem Prospekt $\bar{e}_2 = e_1 q e_n$ vorgezogen, wenn $p > q$ ($\bar{e}_1 \sim \bar{e}_2$ genau dann, wenn $p = q$). Von zwei Prospekten, die dieselben Ergebnisse enthalten, wird also der Prospekt vorgezogen, der dem bevorzugten Ergebnis ($e_1 \succ e_n$) eine höhere Wahrscheinlichkeit erteilt. Auch dieses Axiom ist (unter präskriptivem Aspekt) unproblematisch.

Satz über den Erwartungsnutzen: Genügt eine endliche Menge E von Ergebnissen, die sich beliebig zu Prospekten zusammenstellen lassen, den Axiomen (1) bis (6), dann lassen sich den Ergebnissen $e_i \in E$ $(i = 1, \ldots, n)$ Zahlen $u_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ derart zuordnen, daß für zwei Prospekte $\bar{e}$ und $\bar{e}'$ die Erwartungswerte

$$u(\bar{e}) = p_1 u_1 + \ldots + p_n u_n, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

$$u(\bar{e}') = p_1' u_1 + \ldots + p_n' u_n, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i' = 1$$

Maße der Präferenz zwischen den Prospekten darstellen.

Wir bezeichnen Maße der Form $u(\bar{e})$ bzw. $u(\bar{e}')$ als Erwartungsnutzen oder Bernoullinutzen (nach D. Bernoulli) oder v. Neumann-Morgenstern- Nutzen.

Der obige Satz bedeutet die Existenz einer kardinalen Nutzenfunktion nicht nur auf der Menge E der Ergebnisse, sondern auch auf der Menge der Prospekte. Wichtig ist auch, daß aus den individuellen Nutzenerwartungen

$$p_i \, u_i = p_i \, u_i \, (e_i) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

der Ergebnisse der Bernoullinutzen der Prospekte direkt ermittelt werden kann. Da die Beziehung zwischen den individuellen Nutzen und dem Bernoullinutzen linear ist, nennt man Funktionen der Form $u(\bar{e}) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i$ auch lineare Erwartungsnutzen oder (leider sehr häufig) lineare Nutzenfunktionen. Wir wollen jedoch den zuletztgenannten Ausdruck vermeiden und den Begriff der (kardinalen) Nutzenfunktion für Funktionen der Art

$$u : E \to R$$

reservieren.

Als Beispiel betrachten wir die Ergebnisse, welche in der kleinen Ergebnistabelle am Ende von §3 aufgetreten sind. Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein:

Gewinne (in 1000 DM)	β_1	β_2
α_1	$e_{11} = 40$	$e_{12} = 70$
α_2	$e_{21} = 10$	$e_{22} = 110$

Die Entscheidung für α_1 oder α_2 fassen wir jetzt als eine Wahl zwischen zwei Prospekten $\bar{e}_1$ und $\bar{e}_2$ auf. Nach den ökonometrischen Prognosen eines wirtschaftswissenschaftlichen Instituts beträgt die Wahrscheinlichkeit für β_1 : $P(\beta_1) = 0,6$ und für β_2 : $P(\beta_2) = 0,4$. Würde der Investor nach dem Prinzip der Maximierung der Gewinnerwartung (μ-Prinzip) verfahren, so würde er die Gewinnerwartungen μ_1 und μ_2 berechnen (in Tausend Mark):

$$\mu_1 = P(\beta_1) \cdot e_{11} + P(\beta_2)\, e_{12} = 0,6 \cdot 40 + 0,4 \cdot 70 = 52$$

$$\mu_2 = P(\beta_1) \cdot e_{21} + P(\beta_2)\, e_{22} = 0,6 \cdot 10 + 0,4 \cdot 110 = 50$$

und hiernach α_1 vorziehen, weil zu dieser Aktion die größere Gewinnerwartung gehört. Dasselbe Ergebnis käme heraus, wenn der Investor eine lineare Nutzenfunktion besäße und nach dem Bernoulliprinzip (Maximierung des Erwartungsnutzens) verführe. Um die Sache interessanter zu machen, nehmen wir jedoch an, daß seine Nutzenfunktion nicht linear ist. Dann müssen wir auf die Nutzenaxiomatik und die hinter ihr stehende Logik zurückgreifen.

Zunächst halten wir die Präferenzordnung unter den Ergebnissen fest:

$$e_{22} \succ e_{12} \succ e_{11} \succ e_{21}.$$

Jetzt definieren wir die beiden Prospekte $\bar{e}_1$ und $\bar{e}_2$:

$$\bar{e}_1 = (0\ e_{22};\ 0{,}4\ e_{12};\ 0{,}6\ e_{11};\ 0\ e_{21})$$

$$\bar{e}_2 = (0{,}4\ e_{22};\ 0\ e_{12};\ 0\ e_{11};\ 0{,}6\ e_{21})$$

Im Sinne des Stetigkeitsaxioms drücken wir e_{11} und e_{12} durch je einen Prospekt aus, der das am wenigsten (e_{21}) und das am stärksten (e_{22}) vorgezogene Ergebnis kombiniert. Wir bitten den Investor, uns zu sagen, welcher Prospekt der Art $\tilde{e}_{11} = e_{21}p_1e_{22}$ ihm indifferent zu e_{11} und welcher Prospekt der Art $\tilde{e}_{12} = e_{21}p_2e_{22}$ ihm indifferent zu e_{12} ist. Aus direkt ersichtlichem Grund heißen e_{11} bzw. e_{12} in diesem Zusammenhang Sicherheitsäquivalente für die Prospekte $e_{21}p_1e_{22}$ bzw. $e_{21}p_2e_{22}$. Die Bitte an den Investor läuft auf die Frage nach p_1 und p_2 hinaus, d. h. bei welchen Aufteilungen der Wahrscheinlichkeitsmasse 1 auf e_{21} und e_{22} folgende Indifferenzen gelten:

$$\tilde{e}_{11} \sim e_{11} \text{ und } \tilde{e}_{12} \sim e_{12}.$$

Die Indifferenzen stellen sich, so laute die Antwort des Investors, gerade bei $p_1 = 0{,}9$ und $p_2 = 0{,}65$ ein.

Das heißt, ihm ist gleichgültig,

- ob er 40 Tausend Mark Gewinn sicher hat oder einen Gewinn von 10 Tausend Mark mit Wahrscheinlichkeit 0,9 und einen solchen von 110 Tausend Mark mit Wahrscheinlichkeit 0,1 und

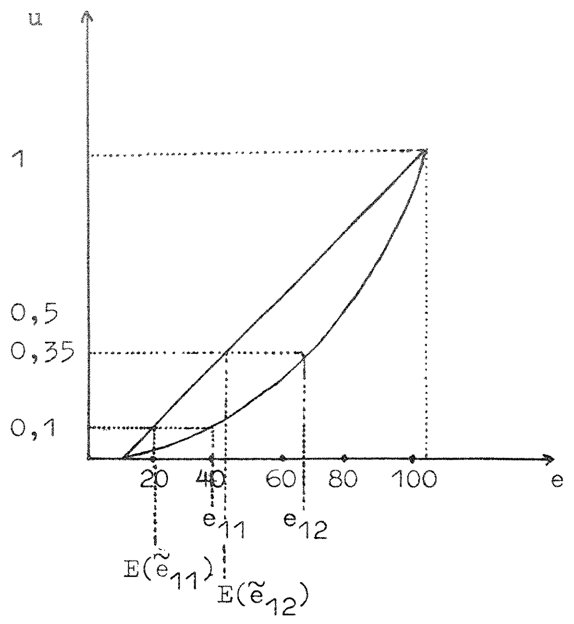
- ob er 70 Tausend Mark Gewinn sicher hat oder einen Gewinn von 10 Tausend Mark mit Wahrscheinlichkeit 0,65 und einen solchen von 110 Tausend Mark mit Wahrscheinlichkeit 0,35.

Daraus kann man schließen, daß der Investor risikofreudig ist. Seine Nutzenfunktion ist konvex (siehe Figur auf S.41).

Aus $e_{11} \sim e_{21}\ 0{,}9\ e_{22}$ und $e_{12} \sim e_{21}\ 0{,}65\ e_{22}$ folgt wegen des Substitutionsaxioms (4) und des Transitivitätsaxioms (5):

$$\bar{e}_1 = [0{,}6\ (0{,}1\ e_{22},\ 0{,}9\ e_{21}),\ 0{,}4\ (0{,}35\ e_{22},\ 0{,}65\ e_{21})]$$

$$\bar{e}_2 = [0{,}4\ e_{22},\ 0{,}6\ e_{21}]$$



Nutzenfunktion für das Investorproblem

Wegen des Reduktionsaxioms (2) folgt daraus

$$\bar{e}_1 = [0{,}2\ e_{22},\ 0{,}8\ e_{21}]$$

$$\bar{e}_2 = [0{,}4\ e_{22},\ 0{,}6\ e_{21}].$$

Wegen des Monotonieaxioms folgt daraus, da $e_{21} \prec e_{22}$:

$$\bar{e}_1 \prec \bar{e}_2$$

und daraus wiederum, wenn der Investor das Bernoullische Entscheidungsprinzip der Maximierung des Erwartungsnutzens befolgt: $\alpha_2 \succ \alpha_1$, d. h. die Aktion α_2 (Anlageninvestition) wird vorgezogen. Das μ-Prinzip hatte die gegenteilige Empfehlung ausgesprochen. Angesichts der Risikovorliebe unseres Investors ist dieses Resultat durchaus plausibel.

Das Erwartungsnutzentheorem erlaubt uns schließlich die Zuordnung von Nutzenmaßen zu den Ergebnissen und Prospekten (siehe noch einmal Fig. S.41). Es ist üblich festzusetzen

$$u\ (\max_{e \in E} e) = 100 \text{ (oder 1).}$$

$$u\ (\min_{e \in E} e) = 0.$$

Dann ergibt sich folgende Nutzentabelle:

$$u_{11} = u\ (e_{11}) = u\ (\tilde{e}_{11}) = 10$$

$$u_{12} = u\ (e_{12}) = u\ (\tilde{e}_{12}) = 35$$

$$u_{21} = u\ (e_{21}) = 0$$

$$u_{22} = u\ (e_{22}) = 100$$

$$u(\alpha_1) = u\ (\bar{e}_1) = 0{,}6\ u\ (e_{11}) + 0{,}4\ u\ (e_{12}) = 20$$

$$u(\alpha_2) = u\ (\bar{e}_2) = 0{,}6\ u\ (e_{21}) + 0{,}4\ u\ (e_{22}) = 40$$

Die kardinale Aussage lautet jetzt: Der (Erwartungs-)Nutzen von α_2 ist doppelt so groß wie der von α_1.

Wir wollen abschließend noch festhalten, daß die Nutzenfunktion die Matrix der Ergebnisse in die Matrix der Nutzen transformiert; im Beispiel

$$u : \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

bzw. numerisch

$$u : \begin{pmatrix} 40 & 70 \\ 10 & 110 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 35 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix der Nutzen heißt auch Entscheidungsmatrix. Manchmal wird sie so definiert, daß ihre Elemente nicht Nutzenmaße sondern Verlustmaße sind. Die Verluste sind $v(\beta_j, \alpha_i) = C - u(\beta_j, \alpha_i)$, wobei im allgemeinen $C = \max_{i,j} u(\beta_j, \alpha_i)$.

§ 9. Die beiden Grundtypen von Entscheidungskriterien

1. Das Bernoullikriterium (für Aktionen)

Seien wieder α_i $(i = 1,\ldots, n)$ die Aktionen des Entscheidenden und β_j $(j = 1,\ldots, m)$ die Zustände der Realität mit den bekannten Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_m$, und sei schließlich $u\ (\beta_j, \alpha_i)$ der Nutzen, der sich einstellt, wenn der Entscheidende α_i wählt, während β_j der wahre Zustand ist, dann besagt das Bernoullikriterium (für Aktionen): Man wähle $\alpha^* \in A$ so, daß

$$U\ (\alpha^*) = \max_{\alpha_i \in A} U\ (\alpha_i),$$

wobei $U\ (\alpha_i) = \sum_{j=1}^{m} u(\beta_j, \alpha_i)\ p_j$ die Nutzenerwartung bezüglich des Wahrscheinlichkeitsvektors $\rho = (p_1,\ldots, p_m)$ ist.

Für das Beispiel des Investors (§8) ergibt sich:

p \	$p_1 = 0{,}6$	$p_2 = 0{,}4$	$U(\alpha_i)$
A \ B	β_1	β_2	
α_1	$u(\beta_1, \alpha_1) = 10$	$u(\beta_2, \alpha_1) = 35$	20
α_2	$u(\beta_1, \alpha_2) = 0$	$u(\beta_2, \alpha_2) = 100$	$40 = \max\limits_{i=1,2} U(\alpha_i)$

Bernoulli-optimal ist somit die Aktion α_2. Sie verspricht die größte Nutzenerwartung.

<u>2. Das Bernoullikriterium (für Entscheidungsfunktionen)</u>

Wenn der Entscheidende von der Möglichkeit der Informationsbeschaffung Gebrauch macht, um am Ausfallen der Beobachtungen seine Aktionswahl zu orientieren, so steht er vor der Matrix der Nutzenerwartungen (§7)

$$
\begin{array}{c|c}
D \setminus \Omega & \ldots \quad F \quad \ldots \\
\hline
\vdots & | \\
d & - \; U(F,d) = \int_{\mathfrak{X}} u(F, d(x)) \, dF \\
\vdots & |
\end{array}
$$

Falls die A-priori-Verteilung über den F, nennen wir sie wieder λ , dem Entscheidenden bekannt ist, wählt er gemäß dem <u>Bernoullikriterium</u> (<u>für Entscheidungsfunktionen</u>) diejenige Entscheidungsfunktion d^* aus dem Raum der zulässigen Entscheidungsfunktionen D, für die gilt

$$\overline{U}_\lambda (d^*) = \sup_{d \in D} \overline{U}_\lambda (d),$$

wobei

$$\overline{U}_\lambda\ (d) = \int_\Omega U(F,\ d)\ d\lambda,$$

d. h. die - relativ zu λ - erwartete Nutzenerwartung.

Die durch das Bernoullikriterium implizierte Voraussetzung, λ (bzw. ρ) sei bekannt, ist der einzige ernsthafte Einwand gegen dieses Kriterium. Im übrigen ist es das rationale Kriterium schlechthin [Schneeweiß 1967].

Dem einzigen Einwand der mangelhaften A-priori-Kenntnis hilft (scheinbar) das sog. Laplace-Kriterium ab, indem es die A-priori-Verteilung λ als Gleichverteilung annimmt. Die Begründung der Anhänger dieses Kriteriums ist etwa folgende: Wenn nichts über die Zustände der Realität bekannt ist, dann ist es nicht möglich, A-priori ein Wahrscheinlichkeitsmaß λ vorauszusetzen, doch ist es nicht unvernünftig, jedem möglichen Zustand der Realität ein identisch gleiches Wahrscheinlichkeitsmaß zuzuordnen und diejenige Strategie zu wählen, für welche die Nutzenerwartung - bezüglich der Gleichverteilung - ein Maximum annimmt.

Diese Art von Begründung fußt auf dem Prinzip des unzureichenden Grundes, das schon vor mehr als zweitausend Jahren in die Wissenschaft eingeführt worden ist, wenn es auch erst von Jacob Bernoulli [1713] und später (in fundierterer Form) von Laplace [1812] der Statistik inkorporiert wurde. Für die spezifisch entscheidungstheoretische Fragestellung wurde es von Chernoff [1949] vorgeschlagen. Die vordergründige Kritik wendet gegen das Laplacekriterium seine Abhängigkeit von der - oft willkürlichen - Zahl der zum Problem zugelassenen Zustände und die Möglichkeit einer sehr großen - theoretisch unendlich großen - Anzahl von Zuständen der Realität, in welchem Fall die Aussonderung eines einzelnen Zustandes nicht möglich ist. Die tiefergehende Kritik, wie sie bereits von der sog. kontinentalen Schule der mathematischen Statistik (Cournot, v.Kries, Lexis, v. Bortkiewicz und Tschuprow) vorgebracht wurde, richtet sich gegen den Wahrscheinlichkeitssubjektivismus, dem es aufs engste verbunden ist. Auf die damit angerührten philosophischen Implikationen gehen wir in § 11 ein.

3. Das Maximinkriterium (für Aktionen)

Abraham Wald hat für den Fall, daß die A-priori-Verteilung über den Zuständen nicht objektiv bekannt ist, einen ganz anderen Vorschlag gemacht. Er empfahl eine Philosophie des "Als - ob", nämlich "als ob" die Realität dem Entscheidenden wie ein rational handelnder Gegner entgegenstehen würde, d.h. den Übergang zum Fall C (= B_3) der Tafel in § 5.

Diese Empfehlung läuft darauf hinaus, in jeder Zeile der Entscheidungsmatrix den bezüglich $\beta_j \in B$ kleinsten Nutzen zu suchen und alsdann diejenige Aktion zu wählen, bei der das Zeilenminimum am größten ist, also im endlichen Fall:

Maximinkriterium: Man wähle $\alpha_0 \in A$ so, daß

$$\min_{\beta_j \in B} u(\beta_j, \alpha_0) = \max_{\alpha_i \in A} \min_{\beta_j \in B} u(\beta_j, \alpha_i)$$

Diese Lösung ist also von der Kenntnis der A-priori-Verteilung unabhängig.

Für das Investorbeispiel (§8) ergibt sich

A \ B	β_1	β_2	$\min\limits_j u(\beta_j, \alpha_i)$
α_1	10	35	$10 = \max\limits_i \min\limits_j u(\beta_j, \alpha_i)$
α_2	0	100	0

Während also die Bernoullilösung unseres kleinen Beispiels α_2 gelautet hatte, ist die Maximinlösung α_1; α_1 repräsentiert die vorsichtig-pessimistische Verhaltensweise: "Lieber nicht den Nutzen Null (mit der Möglichkeit allerdings, den hohen Nutzen 100 zu erzielen) riskieren, der Nutzen von 10 ist mir absolut sicher, wenn ich α_1 wähle. Dabei nehme ich in Kauf, daß ich bei der Wahl von α_1 auf keinen Fall einen höheren Nutzen von 35 erzielen kann." Das Bernoullikriterium hingegen hatte die "optimistischere", gleichwohl rationale Wahl von α_1 empfohlen, da der hohe Nutzen von 100 immerhin mit Wahrscheinlichkeit 0,4 zu erwarten ist. Die Bernoullilösung fiele erst dann mit der Maximin-Lösung zusammen, wenn die Wahrscheinlichkeit für β_2 $0,1\overline{3}$ ... oder kleiner ist.

4. Das Maximinkriterium (für Entscheidungsfunktionen)

Ist bei Fortgeltung der Möglichkeit der Informationsbeschaffung mittels Stichproben $x \in \mathfrak{X}$ die A-priori-Verteilung λ über Ω nicht bekannt, dann ist im Sinne der klassischen Entscheidungstheorie wieder das Maximinkriterium (für Entscheidungsfunktionen) heranzuziehen:

Man wähle $d_o \in D$ so, daß

$$\inf_{F \in \Omega} U(F, d_o) = \sup_{d \in D} \inf_{F \in \Omega} U(F, d).$$

Das Maximin- bzw. für Verlustfunktionen Minimaxkriterium hat eine viel längere Vorgeschichte als die Entscheidungstheorie selbst. Sie beginnt im Jahre 1895 in Minkowskis Geometrie der Zahlen. Im Jahre 1944 wurde es zum Kernstück der Theory of Games and Economic Behavior von J. v. Neumann und O. Morgenstern. Abraham Wald hat es 1939 adaptiert und 1950 in seinem grundlegenden Werk zum heute üblichen Minimax-Risk-Kriterium modifiziert [Wald 1939, 1950].

Das Minimaxkriterium im Sinne Walds hat vier begründende Interpretationen erfahren:

a) Es ist, unter sehr schwachen Voraussetzungen, das Bernoulli-Kriterium bezüglich der ungünstigsten A-priori-Verteilung. Es steht also gleichsam auf dem Boden des Bernoulliprinzips. Da aber das wahre λ nicht bekannt ist, nimmt man - um sicher zu gehen - die ungünstigste A-priori-Verteilung aus dem Raum der A-priori-Verteilungen (Walds Begründung).

b) Da Unkenntnis von λ bedeutet, daß man "die Natur" nicht kennt, unterstellt man der Natur ein Verhalten, als ob sie eine rational handelnde Gegnerin sei, die dem Entscheidenden schaden wolle. Luce und Raiffa [1957, S. 279] sprachen von dem "teuflischen Fräulein Natur" (spieltheoretische Begründung).

c) Man interpretiert die Zeilenminima

$$\min_{\beta_j \in B} u(\beta_j, \alpha_i) \text{ bzw. } \inf_{F} U(F, d)$$

der Entscheidungsmatrix als Sicherheitsniveau, die keine "noch so teuflische Natur" unterschreiten kann. Die Maximinstrategie bzw. -aktion ist dann diejenige, die das Sicherheitsniveau maximiert (Begründung von Luce und Raiffa [1957, S. 278]).

Schließlich interpretiert man unter dem Gewißheitsaspekt:

d) Die Maximinlösung ist diejenige Entscheidungsfunktion bzw. Aktion, über welche die gewisseste Aussage getroffen werden kann, was in dem Sinne richtig ist, daß man sicher ist, daß die eigene Position nicht verschlechtert werden kann,welche Strategie die Natur auch immer hervorbringen wird (Begründung von Arrow) [1950,S.329].

Gegen das Maximin- bzw. Minimaxkriterium ist von zahlreichen Autoren - zu Recht - eingewandt worden, daß es pessimistisch und konservativ ist.Der Einwand des Pessimismus gegen das Minimaxkriterium wird gerade durch das LPI-Modell gemildert. Savage kritisierte, daß es das"Prinzip der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen" verletze. Wir wollen uns diesen wichtigen Einwand an einem Beispiel verdeutlichen. Mit der folgenden Entscheidungsmatrix

$u\ (\beta,\ \alpha)$	β_1	β_2	min	max
α_1	0	1000	0	
α_2	0,001	0,001	0,01	0,01

konfrontiert, würde wohl jeder vernünftige Mensch α_1 wählen, sofern eben die Wahrscheinlichkeit $P\ (\beta_2) > 0$, mag sie auch noch so klein sein. Denn bei der Wahl von

α_1 hat der Entscheidende die Chance (mag sie auch noch so klein sein) 1000 zu gewinnen; während er bei der Wahl von α_2 in keinem Fall nennenswert gewinnen kann. Tatsächlich empfiehlt jedoch das Maximinkriterium die Wahl von α_2.

*

Aus Gründen der Einfachheit werden wir im folgenden die beiden Fälle "für Entscheidungsfunktionen" vernachlässigen. Alles, was für die Fälle reiner Aktionenwahl gesagt wird, läßt sich unmittelbar und auf natürliche Weise auf die Wahl von Entscheidungsfunktionen übertragen.

§ 10. Modifizierungen und Hybridformen

1. Enttäuschungsfunktion und Minimax-Regret

Da man bald nach Erscheinen des Buches von A. Wald [1950] die spezifischen Schäden seiner beiden Grundtypen von Entscheidungskriterien erkannte, versuchte man, mit Modifizierungen und Mischformen die Schäden zu mildern.

Savage [1951] meinte sogar, daß Wald eigentlich ein Minimax-Regret-Kriterium gemeint habe und modifizierte das Wald'sche Kriterium. Er führte die Enttäuschungsfunktion (regret function) ein.

Um sie und das weitere Vorgehen erläutern zu können, transformieren wir $u(\beta_j, \alpha_i)$ wie folgt:

wir setzen $v(\beta_j, \alpha_i) = \max\limits_{i,j} u(\beta_j, \alpha_i) - u(\beta_j, \alpha_i)$,

v steht für Verlust, Die Enttäuschungsfunktion lautet dann

$$S(\beta_j, \alpha_i) = v(\beta_j, \alpha_i) - \min_{\alpha_i \in D} v(\beta_j, \alpha_i).$$

Nicht der Verlust (bzw. die Verlusterwartung) $v(\beta_i, \alpha_i)$ wird minimaxiert, sondern die Enttäuschung über eine falsch gewählte Aktion:

Man wähle $\bar{\alpha} \in A$ mit

$$\max_{\beta_j \in B} S(\beta_j, \bar{\alpha}) = \min_{\alpha_i \in A} \max_{\beta_j \in B} S(\beta_j, \alpha_i).$$

Die Kritik an diesem Kriterium besteht neben den allgemeinen Einwänden gegen das Wald'sche Kriterium in zwei speziellen Einwänden [Chernoff 1949, 1954]:

Erstens ist es fraglich, ob Differenzen in Verlust- oder Verlusterwartungsfunktionen tatsächlich eine Enttäuschung messen, d. h. ob ein Verlust von 100 statt 98 soviel Enttäuschung bereitet wie ein Verlust von 10 statt 8.

Zweitens reagiert das Kriterium empfindlich auf Weglassungen oder Hinzufügungen von Aktionen bzw. Entscheidungsfunktionen; z. B. kann durch den Wegfall einer Aktion, die nie in Betracht kommt, die Lösung wesentlich verändert werden.

2. Das Optimistenkriterium

L. Hurwicz [1951] versuchte den Pessimismus des Wald'schen Kriteriums zu mildern, indem er dem Entscheidenden erlaubte, den Grad seines Optimismus in das Problem einzubringen. Der Optimismusgrad drückt sich in einer Konstanten $c \in [0,1]$ aus; c ist der Faktor für das optimistische Zeilenmaximum $\max_{\beta_j \in B} u(\beta_j, \alpha_i)$; entsprechend $1-c$ der

Faktor für das pessimistische Zeilenminimum $\min\limits_{\beta_j \in B} u\ (\beta_j, \alpha_i)$.

Die Entscheidungsregel lautet: Man wähle $\alpha^* \in A$ mit

$$c \max_{\beta_j \in B} u\ (\beta_j, \alpha^*) + (1-c) \min_{\beta_j \in B} u\ (\beta_j, \alpha^*)$$

$$= \max_{\alpha_i \in A} [c \max_{\beta_j \in B} u\ (\beta_j, \alpha_i) + (1-c) \min_{\beta_j \in B} u\ (\beta_j, \alpha_i)].$$

Ist der Optimismusparameter $c = 0$, findet sich der uneingeschränkte Pessimismus Walds wieder; ist der Optimismusparameter $c = 1$, so empfiehlt das Kriterium, sich so zu verhalten, als ob die Natur der Freund des Entscheidenden sei; bei $c \in (0,1)$ resultieren entsprechende Mischungen. Gegen dieses Kriterium bestehen mindestens zwei Einwände: Wie findet man c? Kann ein Maß, das den Optimismus mißt, Grundlage für rationale Entscheidungen sein? Luce und Raiffa [1957, S. 282] geben einige weitere, z. T. axiomatisch begründete Einwände an. Unsere eigenen Einwände sind in §35 formuliert.

3. Das Erfahrungskriterium

Während die bisher betrachteten Sonderformen kaum geeignet sind, den fundamentalen Schwierigkeiten abzuhelfen, wies ein anderer Vorschlag den Weg zu sinnvollen Lösungen: Hodges und Lehmann [1952] waren die ersten, welche eine Hybridform aus Bernoulli- und Maximinkriterium vorschlugen. Es soll die Erfahrung, welche der Entscheidende besitzt oder sich einholen kann, in das Entscheidungsproblem eingebracht werden. Im Maße, wie der Entscheidende auf Grund seiner Erfahrung der A-priori-Verteilung vertraut, soll er das Bernoullikriterium anwenden, im übrigen das Maximin-Kriterium. Das Vertrauen des Entscheidenden in die A-priori-Verteilung wird durch den Vertrauensparameter $h \in [0,1]$ gemessen. Die Entscheidungsregel lautet: Man wähle $\alpha^{**} \in A$ mit

$$h \sum p_j u\,(\beta_j,\ \alpha^{**}) + (1-h) \min_{\beta_j \in B} u\,(\beta_j,\ \alpha^{**})$$

$$= \max_{\alpha_i \in A} \left[h \sum p_j u\,(\beta_j,\ \alpha_i) + (1-h) \min_{\beta_j \in B} u\,(\beta_j,\ \alpha_i) \right].$$

Bei $h = 0$ (unbeschränktes Mißtrauen) geht das Hodges-Lehmann-Kriterium in das Maximin-Kriterium über. Bei $h = 1$ (unbeschränktes Vertrauen) geht das Hodges-Lehmann Kriterium in das Bernoullikriterium über.
Bei $h \in (0,1)$ resultieren entsprechende Mischungen.

Die Idee von Hodges und Lehmann wurde von zahlreichen Autoren aufgegriffen, so von Schneeweiß [1964], Menges [1966], Blum und Rosenblatt [1967], Jackson et al. [1970], Randles and Hollander [1971], Solomon [1972 a + b] und S. R. Watson [1974], der auch einen Überblick gibt.

Das im 4. Kapitel einzuführende Max E_{min}-Prinzip ist gleichfalls mit dem Hodges-Lehman-Kriterium verwandt.

Außerdem gehen wir in § 16 auf einige verallgemeinerte Hybridformen ein.

§ 11. Das "integrierte Axiomensystem" und subjektive Wahrscheinlichkeiten

Zahlreiche Autoren, besonders in den USA, allen voran L.J. Savage [1954] , sind der Empfehlung Walds nicht gefolgt, der ja die Auffassung vertreten hatte, daß im Falle fehlender Kenntnis der A-priori-Verteilung das Entscheidungsproblem als Spiel des Statistikers gegen die Natur aufzufassen und entsprechend das Maximin- bzw. Minimaxkriterium anzuwenden sei. Stattdessen versuchen sie, das Bernoullikriterium auch bei fehlender objektiver A-priori-Kenntnis zu retten, und sie verwenden statt objektiven subjektive Wahrscheinlichkeiten. Für die subjektiven Wahrscheinlichkeiten und die Erwartungsnutzen wurde von Savage [1954] und Schneeweiß [1974] ein integriertes Axiomensystem entwickelt, das die simultane axiomatische Grundlegung von Wahrscheinlichkeit und Nutzen leisten soll. Dieses integrierte Axiomensystem ist nicht nur unzweckmäßig, sondern kann leicht zu paradoxen Resultaten führen. Dies wollen wir im folgenden kurz darlegen. Anschließend kritisieren wir den Wahrscheinlichkeitssubjektivismus als solchen.

Das erste integrierte Axiomensystem wurde von Ramsey [1931] aufgestellt. Es wurde später von de Finetti [1937] in modifizierter Form weitergeführt und fand einen gewissen Abschluß bei Savage [1954], Schneeweiß [1974] hat das System etwas vereinfacht und seine Eigenarten klar herausgearbeitet. Im folgenden stützen wir uns vornehmlich auf die Arbeit von Schneeweiß.

Das erste Axiom des integrierten Axiomensystems ist ein Ordnungsaxiom. Es besagt: Gegeben eine Untermenge Z des Zustandsraumes B, wobei Z die "relevante Subwelt" ist, d. h. B-Z enthält alle diejenigen Elemente von B, von denen man weiß, daß sie unmöglich sind. (Schneeweiß bezeichnet die Information "gegeben Z" als leere Information, da B voraussetzungsgemäß alle Zustände enthält, die für das jeweilige Problem relevant sind. [Schneeweiß 1974, S. 132]. Auf dem Aktionsraum A ist eine totale Präferenzpräordnung $\succsim_Z$ gegeben.

Dieses Axiom ist viel stärker als das analoge Ordnungsaxiom des v. Neumann-Morgenstern-Nutzens. Es ist so stark, daß es die Begriffe der Wahrscheinlichkeit und des Entscheidens suspendiert. Ist das erste Axiom erfüllt, dann weiß der Entscheidende bereits alles, was für seine Entscheidung relevant ist. Er wählt die höchstpräferierte Aktion.

Das zweite Axiom, ein Unabhängigkeitsaxiom, besagt für zwei Aktionen a, b $\in$ A, $\bar{Z} = B - Z$ und $Z \neq \emptyset$

$$a \succsim_Z b \wedge a \succsim_{\bar{Z}} \Rightarrow a \succsim b$$

$$a \succ_Z b \wedge a \succsim_{\bar{Z}} \Rightarrow a \succsim b.$$

Auch dieses Axiom ist viel stärker als das entsprechende v. Neumann-Morgenstern-Axiom.

Von Savage und anderen wurde es unter dem Namen Sure-Thing-Prinzip diskutiert. Blyth [1972 a + b] zeigte, daß das Unabhängigkeitsaxiom des integrierten Axiomensystems zu paradoxen Resultaten führen kann. Insbesondere kann das sog. "Paradoxon der falschen Korrelation" auftreten, d. h. hier, daß das folgende möglich ist:

$$a \succsim_Z b \wedge a \succsim_{\bar{Z}} b \Rightarrow b \succ a.$$

Dies wurde von Blyth [1972 b, S.366] bewiesen. Auch konnte die Kritik von Allais [1953] noch nicht entkräftet werden [Hagen 1972].

Das dritte Axiom ist ein Dominanzprinzip und besagt: Für Aktion a_c mit dem Ergebnis c und die Aktion $a_{c'}$ mit dem Ergebnis c' gilt für jeden Zustand $\beta \in Z \subset B$:

$$a_c \succ_Z a_{c'} \Leftrightarrow c \succ c' \text{ .}$$

Selbst Schneeweiß, ein Anhänger des integrierten Axiomensystems, hält das trivial und unschuldig aussehende Axiom für problematisch, da es in der Praxis schwierig oder unmöglich sein dürfte, eine Aktion zu finden, die für alle Zustände aus Z ein identisches Ergebnis zur Folge hat [Schneeweiß 1974, S. 133].

Das letzte und vierte Axiom des eindeutigen Wettens besagt:

Sei $a_{Xc\bar{c}}$ die Aktion, die das Ergebnis c zur Folge hat, wenn $\beta \in X \subset B$ sich ereignet und das Ergebnis $\bar{c}$, wenn sich $\beta \in \bar{X} = B - X$ ereignet. Für $c \succ \bar{c}$ und $d \succ \bar{d}$ folgt dann für beliebige X, $Z \subset B$

$$a_{Xc\bar{c}} \succsim a_{Zc\bar{c}} \Leftrightarrow a_{Xd\bar{d}} \succsim a_{Zd\bar{d}} \text{ .}$$

Dieses Axiom soll zwar zu kardinalen subjektiven Wahrscheinlichkeiten führen, aber tatsächlich führt es nur zu ordinalen subjektiven Wahrscheinlichkeiten. Die letzteren können zwar durch die Konstruktion künstlicher Aktionen in kardinale Maße transformiert werden, Aktionen, deren Ergebnisse vom Werfen einer Münze (oder von einem ähnlichen Zufallsmechanismus) abhängen. Aber die Verwendung dieser Krücke bedeutet die Heranziehung von objektiven Wahrscheinlichkeiten in einem System subjektiver Wahrscheinlichkeiten. Diese Inkonsistenz spricht für sich selbst.

Wir halten aus den vorstehenden Erwägungen heraus das integrierte Axiomensystem für unzweckmäßig und unplausibel, und wir lehnen es infolgedessen ab. Wir verkennen nicht, daß es eine vereinheitlichte Axiomatisierung des Nutzens und der Wahrscheinlichkeit anstrebt. Aber dieser Vorteil wiegt keineswegs die schweren Nachteile auf.

Das Konzept der subjektiven Wahrscheinlichkeit per se kann zwar ein nützliches Surrogat sein, aber es kann niemals die Rolle substituieren, die objektive Wahrscheinlichkeiten (seien diese a priori oder a posteriori gegeben) in der Entscheidungslehre spielen. Darauf gehen wir in § 13 noch einmal näher ein.

Einige Argumente der Wahrscheinlichkeitssubjektivisten sind interessant genug, um erörtert zu werden. Subjektive Wahrscheinlichkeiten können unbeschränkt zum Nulltarif produziert werden; sie passen in Kolmogoroffs Axiomensystem. Das Denken mit subjektiven Wahrscheinlichkeiten entbehrt nicht einer gewissen rationalen Logik. Wenn der Entscheidende die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der verschiedenen Zustände der Realität falsch einschätzt, so ist dies sein eigener Fehler und er wird selbst die Konsequenzen zu tragen haben. Er wird daher versuchen, sich einen möglichst "wahren" Eindruck der Wahrscheinlichkeiten zu vermitteln. Selbst wenn ihm das nicht gelingt, kann er immer noch subjektiv rational handeln, ohne sich selbst zu widersprechen.

Argumente gegen den Wahrscheinlichkeitssubjektivismus wurden in der Vergangenheit von Augustin Cournot, Johannes v. Kries, Wilhelm Lexis, Alexander Tschuprow und Ladislaus v. Bortkiewicz, in jüngerer Zeit von R. A. Fisher, Egon Pearson, R. Blyth, G. Barnard und G. Menges vorgebracht [vgl. Menges 1970]. Der Hauptgrund für das Wiederaufleben des Wahrscheinlichkeitssubjektivismus im Rahmen der modernen Entscheidungstheorie liegt vielleicht im subjektiv orientierten Aufbau des Entscheidungsmodells. So ist das Präferenzfeld auf den Ergebnissen subjektiv orientiert, wenn seine Objekte Nutzen sind, die nur für den Entscheidenden gelten.

Die Entscheidungskriterien, deren Formen wir bisher kennen, müssen eher subjektiv als objektiv rational genannt werden. Subjektiv ist auch das Element der Selbstbestimmung, das Element der persönlichen Anteilnahme des Entscheidenden, das wir schon früher erwähnt haben.

Aber während die Subjektivität der persönlichen Anteilnahme ein typisches Merkmal des Entscheidens ist, das keinen Schaden anrichten kann, während die subjektive Rationalität von Entscheidungskriterien durch die flexible Bindung an den Informationsstand "objektiviert" werden kann und während die persönliche Einschätzung der Ergebnisse unvermeidbar von der Entscheidungssituation diktiert wird und tolerabel ist, solange die Transitivität der Nutzen gegeben ist - scheint es trotz alledem in der Tat zweifelhaft, ob Wahrscheinlichkeit anders als objektiv sein kann, wenn sie Urteile über die Realität abgibt. Wahrscheinlichkeiten können nicht mögliche Erlebnisinhalte sein; es gibt keine beweisbare Beziehung zwischen der subjektiven Behauptung, man glaube, daß ein Ereignis eine bestimmte Wahrscheinlichkeit hat, und der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit des Eintretens dieses Ereignisses.

Hinzu kommen fünf Einwände gegen subjektive Wahrscheinlichkeiten [Menges 1970, S. 74].

(1) Beschränkte interpersonale Kommunizierbarkeit.
(2) Die persönliche Wahrscheinlichkeitseinschätzung weicht systematisch von den objektiven Wahrscheinlichkeiten ab; die Art der Deformation variiert von Individuum zu Individuum.
(3) Intellektuelle und emotionale Faktoren spielen bei der subjektiven Wahrscheinlichkeitsbemessung eine Rolle.
(4) Menschliche Individuen sind nicht in der Lage, zwischen nahe beieinander liegenden Wahrscheinlichkeiten zu unterscheiden.
(5) Menschliche Individuen sind nicht in der Lage, ihren "degree of belief" ohne weiteres zu messen, z. B. ohne die Hilfe geschulter Psychologen.

Wegen einer modernen Apologie des Wahrscheinlichkeitssubjektivismus vgl. [de Finetti 1974].

Wir haben mit einiger Ausführlichkeit den Wahrscheinlichkeitssubjektivismus und das integrierte Axiomensystem kritisiert, um den naheliegenden Einwand zu entkräften, daß die Konzepte der partiellen (objektiven) Information, wie wir sie vom nächsten Kapitel an verfolgen, entbehrlich seien, da unvollständige Information stets auf subjektivem Wege zu einer vollständigen gemacht werden kann.

Im übrigen halten wir den Wahrscheinlichkeitssubjektivismus keineswegs für ein Fundamentalproblem der statistischen Entscheidungstheorie. Er ist kein Problem, sondern eine Irrlehre.

Wir werden den Wahrscheinlichkeitssubjektivismus daher auch nicht im nächsten Kapitel erwähnen; wir werden ihn überhaupt nicht mehr erwähnen. Basta!

3. Kapitel:

Drei Fundamentalprobleme und ihre Überwindung

§ 12. Der hohe Idealisierungsgrad und die Notwendigkeit zu Vorentscheidungen

Der Anwendung des statistischen Entscheidungsmodells auf konkrete Entscheidungsprobleme steht eine Reihe grundsätzlicher Hindernisse entgegen. Diese grundsätzlichen, der praktischen Anwendbarkeit entgegenstehenden Hindernisse bezeichnen wir im folgenden als Fundamentalprobleme der statistischen Entscheidungstheorie.

Das erste derartige Fundamentalproblem begegnet uns bereits in dem hohen Idealisierungsgrad des Modells.

Man könnte vielleicht alle Fundamentalprobleme der statistischen Entscheidungstheorie auf die mangelnde Konkretheit oder die mangelnde Realitätsangemessenheit des Modells zurückführen. In einem engeren Sinne fassen wir jedoch nur die Voraussetzungen des Modells unter dem ersten Fundamentalproblem (des hohen Idealisierungsgrades) zusammen, die nicht spezifisch statistisch sind, vielmehr im allgemeinen Entscheidungsmodell auch auftreten. Es sind die Voraussetzungen, die ein Entscheidungsproblem überhaupt erst konstituieren, die die Bestandteile des Problems definieren oder formalisieren.

Hierher gehört zunächst die Möglichkeit der Enumeration aller für das Entscheidungsproblem wesentlichen Aktionen und Zustände der Realität. Bedingung dieser Möglichkeit ist eine sehr genaue Kenntnis der Umweltfaktoren, des Milieus des jeweiligen Entscheidungsproblems, aber auch der wahren Ziele des Entscheidenden und der Ausgangslage, in welcher sich die Entscheidungssituation vor der Applizierung des Kalküls befindet. Der Entscheidende muß vor der Lösung des eigentlichen Entscheidungsproblems bereits entscheiden können, welche möglichen Aktionen und welche möglichen Zustände der Realität er zum Problem überhaupt zuläßt.

Über diese Frage haben wir in §§ 4 und 5 bereits einige Erwägungen angestellt.

Die Theorie setzt voraus, daß die wesentlichen Aktionen und die relevanten Zustände der Realität lückenlos enumeriert sind und in das Entscheidungsproblem einfließen.

Die Theorie setzt des weiteren voraus, daß die Konsequenzen des Zusammentreffens einer Aktion mit einem Zustand, die Ergebnisse e (β_j, α_i) erstens tatsächlich unmittelbar durch Aktion und Zustand bestimmt werden und zweitens dem Entscheidenden bekannt sind. Wenn diese Kenntnisse dem Entscheidenden nicht zur Verfügung stehen, aber beschafft werden können, so mag er sich einer abermaligen Vorentscheidung gegenübersehen, ob er nämlich Geld, Zeit und Mühe daran wenden soll, sich die Kenntnisse zu beschaffen oder nicht.

Während die drei bisher betrachteten Aspekte unseres ersten Fundamentalproblems von der Literatur wenig oder nicht beachtet wurden, hat man sich viel Gedanken über die Realgeltung eines weiteren Komplexes von Voraussetzungen gemacht, nämlich der Existenz und Meßbarkeit einer Präferenzordnung unter den Konsequenzen oder

Ergebnissen. Ohne auf die Diskussion im einzelnen eingehen zu können, möchten wir auf folgende Schwierigkeiten hinweisen:

Dem Entscheidenden muß eine unbeschränkte Sensitivität für Nutzendifferenzen unterstellt werden, weil anders die Indifferenz nicht mehr die erforderliche Transitivitätseigenschaft besäße und damit empirisch ad absurdum geführt würde. Indifferenz wäre anders nämlich eine Funktion der Fähigkeit zur Wahrnehmung von Nutzenunterschieden; das ist sie vielleicht in Wahrheit, aber die Theorie käme in kaum übersteigbare Schwierigkeiten, wenn sie in dieser Frage Konzessionen machen würde. Für die Praxis besteht die Hoffnung, daß die empirischen Nutzenunterschiede ausgeprägt genug sind, um eindeutig wahrgenommen zu werden. Ohne Zweifel sind zahlreiche vermeintliche Entscheidungsprobleme der Praxis in Wahrheit Probleme der Aufstellung einer Präferenzordnung oder allgemein einer Werthierarchie.

Des weiteren muß vorausgesetzt werden, daß der Entscheidende überhaupt bereit ist, rational (und zwar Bernoulli-rational, d.h. rational im Sinne des Bernoullikriteriums) zu handeln und daß er bereit und in der Lage ist, Alternativen auch in Form von Ungewißheitssituationen, präzuordnen. Sodann muß man annehmen, daß die Realität vom Entscheidenden nicht beherrscht werden kann und daß die Abfolge von der Formulierung des Problems über Vorentscheidungen, Informationsbeschaffung usw., bis hin zum Eintreten des Ergebnisses, zeitlich dimensionslos ist, bzw. daß die Prozeßgeschwindigkeit unendlich groß ist.

All diese Voraussetzungen belegen den hohen Idealisierungsgrad des Entscheidungsmodells. Zwar ist jede dieser Voraussetzungen für sich genommen vielleicht unschädlich, in ihrem allseitigen Zusammenwirken führen sie jedoch zu einer beträchtlichen Entfernung von praktischen Aufgaben und werden - in ihrer Gesamtheit - zu einem Fundamentalproblem.

Die meisten Voraussetzungen verlangen gewisse Vorentscheidungen, in der Regel solche, die das konkrete Problem so zurechtschneiden, daß Problem und Modell einander möglichst adäquat sind.

Die Notwendigkeit zu Vorentscheidungen tritt auch bei der in §7 erwähnten Modifikation der Informationsbeschaffung im statistischen Entscheidungsmodell auf. Vom Entscheidenden werden z. B. Vorentscheidungen darüber vorausgesetzt, ob er eine Stichprobe überhaupt ziehen soll oder nicht, welche Variable er messen soll, wenn mehrere Variablen zugleich die Zustände der Realität charakterisieren, wie groß die Stichprobe sein soll, ob sequentiell vorgegangen werden soll oder nicht, usw. [Menges - Behara 1962].

§ 13. Der "prinzipielle Agnostizismus"

Dieser Ausdruck stammt von Tschuprow [1924] und bezeichnet die grundsätzliche Schwierigkeit der Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilung λ über dem Zustandsraum B.

Wie kann der Entscheidende diese Verteilung λ kennenlernen?

Historisch die erste Möglichkeit, welche den Namen A-priori-Verteilung stiftete, wurde von Jacob Bernoulli [1713] und später von Thomas Bayes [1763] in Erwägung gezogen:
Es ist im voraus bekannt, noch bevor Beobachtungen gemacht wurden, daß λ eine spezifische Verteilung ist, z. B. eine Binomialverteilung mit bekanntem Bernoulliparameter oder eine Normalverteilung mit bekanntem Mittelwert und bekannter Varianz. Solches A-priori-Wissen mag gelegentlich in der Physik und in Nachbarwissenschaften mit vergleichbar hohem Genauigkeitsgrad vorhanden sein. Wo solche A-priori-Kenntnis vorhanden ist, sollte sie auf jeden Fall benutzt werden, man wird dann Bernoullikriterien anwenden, und das jeweilige Entscheidungsproblem wird auf eine Weise gelöst, die in einem recht objektiven Sinne als rational gelten kann.

In den meisten Fällen ist jedoch eine solch genaue A-priori-Kenntnis nicht vorhanden; in der Regel ist daher der A-priori-Weg versperrt.

Wenn der Entscheidende keine A-priori-Kenntnis besitzt, wird er sich relevante Informationen zu verschaffen versuchen, also den A-posteriori-Weg einschlagen. Er wird Experimente durchführen, und selbst wenn diese Experimente ihm nicht erlauben, eindeutige Schlüsse auf ein exaktes Verteilungsgesetz zu ziehen, wird er dennoch Kenntnis über eine kleine Klasse von Wahrscheinlichkeitsmaßen erlangen, für die unter bestimmten Umständen ebenfalls die Bernoulli-Lösung berechnet werden kann. In allen Fällen, in denen verläßliche A-priori-Kenntnis nicht zur Verfügung steht, in denen aber Genaueres mit Hilfe von Experimenten erfahren werden kann, wird man es mit dem A-posteriori-Weg versuchen.

Jedoch gibt es, gerade in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, häufig genug Situationen, in denen sowohl der A-priori- als auch der A-posteriori-Weg versperrt sind. Solche Situationen entstehen dann, wenn (wegen finanzieller oder technischer Beschränkungen) keine Experimente durchgeführt werden können oder wenn die Bedingungen, unter denen die Experimente stattfinden, nicht kontrollierbar sind (z. B. auf Grund mangelnder Stabilität von λ).

Tschuprow hatte diese recht unangenehme und in der Praxis nicht einmal seltene Situation im Sinne, als er, gerade im Hinblick auf die Sozialwissenschaften, den Ausdruck "prinzipieller Agnostizismus" prägte.

Dieser prinzipielle Agnostizismus verlangt nach Entscheidungsmodellen und Kriterien, die flexibel genug sind, um jede nur erreichbare Information aufzunehmen und zu verwerten; fragmentarische A-priori-Kenntnisse ebenso wie ungenaue A-posteriori-Kenntnisse. Wir werden später Modelle und Verfahren diskutieren, die genau dies erlauben.

§ 14. Das Stabilitätsproblem

Eine letzte Schwierigkeit muß noch erörtert werden, nämlich die Stabilität der Entscheidungssituation. Diese Frage könnte vernachlässigt werden, wenn die Abfolge "Formulierung des Entscheidungsproblems $\longrightarrow$ Eintreten des Ergebnisses als Folge der getroffenen Entscheidung" unendlich schnell vor sich ginge, so, wie die Theorie annimmt.

In der Realität wird jene Abfolge eine gewisse Zeit benötigen, sagen wir ein Zeitintervall von der Länge G. Besitzt die Entscheidungssituation Stabilität im Intervall von der Länge T, und wird das Prozeßintervall G vom Stabilitätsintervall T vollständig eingeschlossen, so ist die empirische Situation offenbar gleichwertig derjenigen, welche die Theorie voraussetzt.

Die empirische Situation entfernt sich jedoch von der Voraussetzung des Modells in dem Maße, wie das Prozeßintervall wächst und bzw. oder das Stabilitätsintervall schrumpft. Der Länge des Prozeßintervalls werden wir nicht weiter nachfragen; sie wird in der Regel durch technologische Faktoren, u. a. durch die Rechengeschwindigkeit bei der Lösung des Entscheidungsproblems, bestimmt. Das Stabilitätsintervall hingegen impliziert eine Reihe von charakteristischen Problemen [Menges 1963].

Das Stabilitätsintervall wird u.a. begrenzt entweder erstens von einer Veränderung der Zielvorstellungen des Entscheidenden, soweit sie in der Menge A der zugelassenen Aktionen α_i ihren Niederschlag gefunden hat, oder

zweitens von einer Veränderung der Menge B der für wesentlich erachteten Zustände β_j der Realität, oder

drittens von einer Veränderung der Bewertung der Ergebnisse e (β_j, α_i). Diese Begrenzung ist selbst bei kardinal meßbaren, in Geldeinheiten ausgedrückten Konsequenzen von Entscheidungen leicht möglich, wenn nämlich die Preise der Güter, welche die Konsequenzen bilden, sich in der Zeit ungleichmäßig verändern. Veränderungen eines ordinalen Präferenzfeldes auf der Menge E der Ergebnisse können leicht eintreten, wenn der Entscheidende in der Bewertung der möglichen Ergebnisse nicht vollkommen sicher und konsequent ist. Solche Bewertungsstabilität wird ihm vermutlich desto schwerer fallen, je geringer die Nutzenunterschiede zwischen den einzelnen Ergebnissen sind. Insbesondere wird die empirische Transitivität von Indifferenzbeziehungen kaum für längere Zeit aufrechterhalten bleiben.

Das Stabilitätsintervall wird des weiteren begrenzt

viertens von einer Veränderung des Verhaltensstandards, wie er in der Wahl eines bestimmten Entscheidungskriteriums seinen Niederschlag gefunden hat, oder

fünftens von einer Veränderung entweder der A-priori-Verteilung oder der a priori bzw. a posteriori gefundenen Klasse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen über dem Zustandsraum B.

§ 15. Überwindung der drei Fundamentalprobleme durch flexible Modellbildung

Es wäre sicherlich vermessen, wenn wir alle drei Fundamentalprobleme in allen Aspekten zu überwinden versprächen. Doch hoffen wir zeigen zu können, daß durch verschiedene Modifizierungen der klassischen statistischen Entscheidungstheorie, besonders aber durch die Theorie und die Methoden der Linearen Partiellen Information, die Fundamentalprobleme der statistischen Entscheidungstheorie beträchtlich abgemildert, ja in einigen wesentlichen Aspekten gänzlich gelöst werden können. In diesem Paragraphen betrachten wir zunächst nur Möglichkeiten der Überwindung der drei Fundamentalprobleme im Rahmen der klassischen statistischen Entscheidungstheorie. Der Rest des Buches ist dann den Möglichkeiten der Überwindung der drei Fundamentalprobleme im Rahmen der LPI-Theorie gewidmet.

Bei der Betrachtung des hohen Idealisierungsgrades des Entscheidungsmodells haben wir gesehen, daß die meisten Voraussetzungen des Entscheidungsmodells von einer Art sind, daß sie vom Entscheidenden vor der Lösung des eigentlichen Entscheidungsproblems gewisse Vorentscheidungen verlangen, welche die jeweilige Entscheidungssituation dem Modell anpassen. Eine derartige Approximationsaufgabe findet man häufig in der Statistik (und in anderen anwendungsbezogenen Wissenschaften) vor [Menges 1967]. Gelegentlich mag es gelingen, Vorentscheidungsprobleme selber entscheidungstheoretisch zu formulieren und zu lösen. Doch sind dann wieder "Vor-Vorentscheidungsprobleme" zu lösen, und man gelangt in einen regressus ad infinitum. Praktisch wichtiger erscheinen uns die Möglichkeiten, die darin bestehen, daß man das ursprüngliche Entscheidungsproblem so uminterpretiert, daß die Vorentscheidungen in das Hauptproblem integriert werden. Dafür ein Beispiel: Es seien zwei mögliche Zustände β_1 und β_2 gegeben, der Entscheidende weiß mit Bestimmtheit, daß ihm zwei Aktionen α_1 und α_2 zur Verfügung stehen, vermutet aber die Existenz einer dritten möglichen Aktion α_3. Die Beschaffung der Information über die Existenz von α_3 verursache Kosten im Betrage K. Als mögliche Aktionen sind nun zu definieren:

$\bar{\alpha}_1 = \alpha_1$ wählen, ohne Berücksichtigung von α_3

$\bar{\alpha}_2 = \alpha_2$ wählen, ohne Berücksichtigung von α_3

$\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_3$ berücksichtigen, und falls es aufgefunden wird

α_i anwenden, falls es nicht aufgefunden wird,

α_j anwenden, mit $i = 1, 2, 3$ und $j = 1, 2$.

Alle möglichen Zustände der Realität sind jetzt zu definieren.

$\bar{\beta}_{1i} = \beta_i$ liegt vor und α_3 wird aufgefunden

$\bar{\beta}_{2i} = \beta_i$ liegt vor und α_3 wird nicht aufgefunden.

Die Ergebnismatrix enthält freilich jetzt statt der ursprünglichen 4 Elemente deren 32; 8 davon können jedoch sofort eliminiert werden, weil sie zu Aktionen gehören, die von anderen dominiert werden. Die Ergebnismatrix lautet nach der Uminterpretation, wenn die e_{ij} als Gewinne definiert sind:

	$\bar{\beta}_{11}$	$\bar{\beta}_{12}$	$\bar{\beta}_{21}$	$\bar{\beta}_{22}$
$\bar{\alpha}_{11}$	$e_{11} - K$	$e_{12} - K$	$e_{11} - K$	$e_{12} - K$
$\bar{\alpha}_{12}$	$e_{11} - K$	$e_{12} - K$	$e_{21} - K$	$e_{22} - K$
$\bar{\alpha}_{21}$	$e_{21} - K$	$e_{22} - K$	$e_{11} - K$	$e_{12} - K$
$\bar{\alpha}_{22}$	$e_{21} - K$	$e_{22} - K$	$e_{21} - K$	$e_{22} - K$
$\bar{\alpha}_{31}$	$e_{31} - K$	$e_{32} - K$	$e_{11} - K$	$e_{12} - K$
$\bar{\alpha}_{32}$	$e_{31} - K$	$e_{32} - K$	$e_{21} - K$	$e_{22} - K$
$\bar{\alpha}_{1}$	e_{11}	e_{12}	e_{11}	e_{12}
$\bar{\alpha}_{2}$	e_{21}	e_{22}	e_{21}	e_{22}

Die beiden auszuschließenden Aktionen sind $\bar{\alpha}_{11}$ und $\bar{\alpha}_{22}$, sie werden entsprechend von $\bar{\alpha}_1$ und $\bar{\alpha}_2$ dominiert.

Die hier angedeutete Lösung und andere mögliche Lösungen von Vorentscheidungsproblemen lassen sich einem gemeinsamen Grundsatz unterordnen, dem Prinzip der Akkommodation des Modells an die empirische Situation.

Er bezeichne das Bestreben, mittels Anwendung geeigneter Techniken und Uminterpretation des Entscheidungsmodells die gleichsam natürliche Diskrepanz zwischen der jeweiligen praktischen Entscheidungsaufgabe und dem Modell so weit wie möglich zu reduzieren.

Diesem Grundsatz läßt sich noch ein Stück eines weiteren Fundamentalproblems unterordnen: Nicht nur der hohe Idealisierungsgrad des Grundmodells als solcher, sondern auch das Problem der Stabilität der Entscheidungssituation kann – zumindest partiell – durch Anwendung geeigneter Techniken und durch Modifizierungen des Entscheidungsmodells gelöst werden. Genauer: Von den fünf zuvor behandelten Stabilitätsbedingungen sind die ersten drei mögliche Gegenstände der Akkommodation, nämlich die Menge A der zugelassenen Aktionen, die Menge B der zugelassenen Zustände der Realität und das Präferenzfeld auf E. Die Vorentscheidungen bezüglich A und B sind nicht nur daran zu orientieren, eine möglichst kleine Zahl wesentlicher Elemente zuzulassen, sondern die Bildung der Mengen A und B ist außerdem so anzustreben, daß sie alle (wesentlichen) Elemente enthalten, die <u>im Intervall T</u> auftreten können. Dies wird in der Regel nur auf einem Akkommodationsweg gelingen können, ebenso wie der Versuch, ein stabiles Präferenzfeld aufzustellen.

Somit ist das Problem des hohen Idealisierungsgrades des Entscheidungsmodells und ein Teil des Problems der Stabilität der Entscheidungssituation zwar nicht restlos überwindbar, aber doch graduell, insofern es möglich sein sollte, die Idealisierung jeweils gerade dort und gerade so zu vermindern und die Stabilität gerade dort und gerade so zu erhöhen, daß Modell und Entscheidungssituation einander möglichst affin sind.

Ebenso kompromißhaft wird die Lösung des zweiten Fundamentalproblems aussehen müssen, der wir uns nun zuwenden.

§ 16. Das Adaptionskriterium bei partieller Information

1. Erweitertes Bernoullikriterium

Dem Grundsatz, möglichst alle Informationen über die Verteilung der Zustände, seien diese a priori oder a posteriori gewonnen, bei der Lösung eines Entscheidungsproblems auszunutzen, wird keines der herkömmlichen Kriterien gerecht .

Keines der herkömmlichen Kriterien ist nämlich geeignet, sich dem Grad an Ungewißheit sowie dem Grad an Instabilität anzupassen oder auch - gleichsam ersatzweise - Möglichkeiten des Eingreifens des Entscheidenden in die Realität zuzulassen.

Das Bernoullikriterium verlangt die vollständige und genaue Kenntnis der A-priori-Verteilung, eine Kenntnis, die praktisch nie vorliegt.

Das Maximin- bzw. Minimax-Kriterium repräsentiert andererseits eine zu pessimistische Haltung, die nur in Situationen vollständiger, unbegrenzter Ungewißheit berechtigt ist. Selbst wenn die Ungewißheit reduziert werden kann, rät die klassische Entscheidungstheorie, die pessimistische Verhaltensnorm beizubehalten bis die Ungewißheit zum Risikofall wird. Es erscheint daher vernünftig, das Prinzip zu modifizieren oder zu "bernoullifizieren", um es auf diese Weise dem im jeweiligen Entscheidungsproblem gegebenen Ungewißheitsgrad anzupassen.

Um dieser Art der "Bernoullifizierung" näherzukommen, wollen wir die folgende Erweiterung des Bernoulli'schen Lösungstyps betrachten. Der Entscheidende weiß, daß eine bestimmte A-priori-Verteilung λ über B existiert. λ selbst ist ihm unbekannt, aber er kennt einige Restriktionen über λ, er weiß beispielsweise, daß λ in einer bestimmten Teilmenge Λ^* der gesamten Klasse Λ von A-priori-Verteilungen liegt. Wenn der Entscheidende Wissen dieser Art besitzt, ist ihm zu empfehlen, eine bestimmte Kombination aus Bernoulli- und Maximin-Kriterium anzuwenden, die wir als "erweitertes Bernoullikriterium" bezeichnen:

Man wähle $\alpha^o \in A$ mit

$$\inf_{\lambda \in \Lambda^*} \bar{U}(\lambda, \alpha^o) = \max_{\alpha_i \in A} \inf_{\lambda \in \Lambda^*} \bar{U}(\lambda, \alpha_i)$$

Das Bernoulli-Element dieser Lösung besteht in der Aufstellung der Nutzenerwartungen $\bar{U}(\lambda, \alpha_i) = \int_B u(\beta_j, \alpha_i)\, d\lambda$ für jedes $\lambda \in \Lambda^*$ und jedes $\alpha_i \in A$. Das Maximinelement besteht darin, α^o so auszuwählen, daß die kleinste Nutzenerwartung möglichst groß ist, gleichgültig, welches $\lambda \in \Lambda^*$ das wahre ist. Der Bernoulli'sche Charakter dieser Lösung ist umso ausgeprägter, je kleiner die Teilmenge Λ^* ist und umgekehrt.

2. Das Adaptionskriterium

Für eine Verallgemeinerung dieser "erweiterten Bernoulli-Lösung" wollen wir folgende Annahmen treffen:

a) Der Raum B der Zustände der Realität β_j kann in eine Menge disjunkter Teilmengen zerlegt werden

$$B = \bigcup_{\nu} B_{\nu}, \quad B_{\nu} \cap B_{\mu} \neq \emptyset \text{ für } \nu \neq \mu \quad (\nu, \mu = 1,2, \ldots)$$

b) Der Entscheidende weiß, daß B_{ν} mit der Wahrscheinlichkeit p_{ν} eintritt, wobei $\Sigma p_{\nu} = 1$.

$$\int_{B_{\nu}} d\lambda = p_{\nu} \quad (\nu = 1,2, \ldots)$$

c) Λ^* sei die Klasse der A-priori-Verteilungen, welche B_{ν} die Wahrscheinlichkeit p_{ν} zuordnen.

d) Die (bedingte) Wahrscheinlichkeitsverteilung der Klasse B_{ν} ist unbekannt.

Wenn der Entscheidende Wissen dieser Art besitzt, wird ihm empfohlen, α_o so auszuwählen, daß

$$\inf_{\lambda \in \Lambda^*} \sum_{\nu} \int_{B_{\nu}} u(\beta_j, \alpha_o)\, d\lambda = \max_{\alpha_i \in A} \inf_{\lambda \in \Lambda^*} \sum_{\nu} \int_{B_{\nu}} u(\beta_j, \alpha_i)\, d\lambda$$

unter Beachtung der in a) bis d) gegebenen Bedingungen. Dieses Kriterium ist das Adaptions-Kriterium.

Da $\min_{\lambda \in \Lambda^*}$ für das λ eintritt, welches dem $\min_{\beta_j \in B_\nu} u(\beta_j, \alpha_i)$ die Wahrscheinlichkeit p_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) zuordnet, können wir das obige Kriterium in folgender Form ausdrücken:

Man wähle α_o mit

$$\sum_\nu p_\nu \min_{\beta_j \in B_\nu} u(\beta_j, \alpha_o) = \max_{\alpha_i \in A} \sum_\nu p_\nu \min_{\beta_j \in B_\nu} u(\beta_j, \alpha_i)$$

Die Zerlegung von B und die Angabe von Wahrscheinlichkeiten p_ν für die Teilklassen $B_\nu \subset B$ erscheint als ein vernünftiger Weg, alle Informationen über das wahre, aber unbekannte λ bzw. die Klasse Λ^* von A-priori-Verteilungen auszunutzen. Offenbar gestattet wachsende Kenntnis die Zerlegung in eine wachsende Anzahl von Teilmengen B_ν. Je mehr Informationen über λ der Entscheidende gewinnt, umso kleiner wird Λ^*, und B kann in immer mehr Teilklassen B_ν zerlegt werden. Besteht jedes B_ν nur aus einem Element $\beta_j \in B$, dann erreicht die Zerlegung ihren höchsten Grad und das obige Kriterium geht in das Bernoullikriterium über.

Es soll noch erwähnt werden, daß ein Sonderfall des "erweiterten Bernoullikriteriums" dem von Hodges und Lehmann (vgl. § 10) vorgeschlagenen Kriterium entspricht.

3. Die Schneeweiß'sche Variante

Schneeweiß [1964] betrachtet folgende Situation:

Die Menge B der Zustände der Realität wird in endlich viele Teilmengen zerlegt, denen bestimmte (bekannte oder unbekannte) Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden. Diese Teilmengen werden wiederum in weitere Teilmengen zerlegt, denen bestimmte bedingte (bekannte oder unbekannte) Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden usw. Der Prozeß der schrittweisen Unterteilung von B (wobei B als endlich angenommen wird) endet nach einer endlichen Anzahl von Schritten. Für ein solches Modell empfiehlt H. Schneeweiß ein Kriterium, das entweder die Bernoulli- oder die Maximin-Lösung anwendet, je nachdem, ob die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten der Teilmengen auf der jeweiligen Ebene bekannt oder unbekannt sind. Zur näheren Erläuterung betrachten wir das folgende einfache Beispiel von nur zwei Zerlegungsschritten. B sei endlich und enthalte die Elemente $\beta_1, \ldots, \beta_n$. B kann in zwei fremde Teilmengen zerlegt werden,

$$B_1 = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\} \text{ und } B_2 = \{\beta_{k+1}, \ldots, \beta_m\}.$$

B_1 ordnen wir die Wahrscheinlichkeit p und B_2 die Wahrscheinlichkeit 1-p zu. Wenn B_1 eintritt, treten die Elemente $\beta_1, \ldots, \beta_k$ von B_1 mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_k$ ein, während die Wahrscheinlichkeiten für die Elemente $\beta_{k+1}, \ldots \beta_m$ aus B_2 unbekannt sind.

Dem Entscheidenden wird dann empfohlen, dasjenige α zu wählen, das

$$(s) \quad p \sum_{j=1}^{k} u(\beta_j, \alpha_i)\, p_j + (1-p) \min_{j=k+1,\ldots,m} u(\beta_j, \alpha_i)$$

maximiert.

4. Beziehung zwischen dem Schneeweiß'schen und dem erweiterten Bernoullikriterium

Wir betrachten den Sonderfall von (s) mit $k = 1$ und $p_1 = 1$:

Man wähle $\alpha_o \in A$ so, daß

$$(s^*) \quad p\, u(\beta_1, \alpha_o) + (1-p) \min_{j=2,\ldots,m} u(\beta_j, \alpha_o)$$

$$= \max_{\alpha_i \in A} p\, u(\beta_1, \alpha_i) + (1-p) \min_{j=2,\ldots,m} u(\beta_j, \alpha_i).$$

Dieses Kriterium (s^*) ist gleichwertig mit einem Sonderfall des erweiterten Bernoullikriteriums, den man erhält, wenn man B in B_1 und B_2 aufspaltet und $B_1 = \{\beta_1\}$, mit der Wahrscheinlichkeit $p_1 = p$, $B_2 = B - \{\beta_1\}$, mit der Wahrscheinlichkeit $p_2 = 1 - p$ setzt:

Man wähle $\alpha_o \in A$

$$p\, u(\beta_1, \alpha_o) + (1 - p) \min_{\beta_j \in B_2} u(\beta_j, \alpha_o)$$

$$= \max_{\alpha_i \in A} [p\, u(\beta_1, \alpha_i) + (1 - p) \min_{\beta_j \in B_2} u(\beta_j, \alpha_i)]$$

5. Dynamische Erweiterungen

Die Betrachtungen können auf den dynamischen Fall im Sinne des Stabilitätsproblems (§ 14) ausgedehnt werden, indem wir als zusätzlichen Entscheidungsfaktor die Zeit t einführen [Menges, Diehl 1967].

Die Ungewißheit des Entscheidungsproblems liegt jetzt sowohl in der Unkenntnis des wahren $\beta_j \in B$ als auch in der Unkenntnis des Zeitpunktes $t \in T$, in welchem die Entscheidungssituation sich zuträgt, d. h. die Aktion $\alpha_i \in A$ mit einem Zustand $\beta_j \in B$ relativ zusammentrifft. Wir führen die Unbestimmtheitsmaße

$$\lambda(\beta_j) = \int_T \lambda(\beta_j, t)\, dt \qquad (j = 1,\ldots,m)$$

und

$$\lambda(\beta_j | t) = \frac{\lambda(\beta_j, t)}{\int_B \lambda(\beta_j, t)\, d\beta_j}$$

ein. Hierbei ist $\lambda(\beta_j, t)$ ein voll-additives normiertes Maß über $B \times T$. Wir bezeichnen $\lambda(\beta_j)$ als zeitunabhängige Zustandsdichte über B und $\lambda(\beta_j | t)$ als zeitabhängige Zustandsdichte über B.

Das Nutzenmaß ist jetzt nicht nur von $\alpha_i \in A$ und $\beta_j \in B$ abhängig, sondern auch noch von dem Zeitpunkt $t \in T$:

$$u: A \times B \times T \to R.$$

$u(\beta_j, \alpha_i, t)$ ist der Nutzen für den Entscheidenden, der sich einstellt, wenn β_j der wahre Zustand zum Zeitpunkt t ist und α_i die Aktion, die der Entscheidende ergreift und zwar derart, daß das Ergebnis zum Zeitpunkt $t \in T$ in Erscheinung tritt.

Auch im dynamischen Modell betrachten wir drei Fälle:

I. Vollkommene Information (Risikofall).
$\lambda\ (\beta_j,\ t)$ ist genau bekannt.

II. Keine Information (völlige Ungewißheit).
$\lambda\ (\beta_j,\ t)$ ist völlig unbekannt.

III. Partielle Information, mit den Unterfällen:

a) $\lambda\ (\beta_j | t)$ ist bekannt, die Zeitdichte $\lambda\ (t)$ ist hingegen völlig unbekannt.
b) $\lambda\ (t)$ ist bekannt, aber $\lambda\ (\beta_j | t)$ ist unbekannt.
c) $\lambda\ (\beta_j | t)$ und $\lambda\ (t)$ sind partiell bekannt.

Der praktisch wenig häufige Fall I erlaubt die Anwendung eines verallgemeinerten Bernoullikriteriums derart, daß sowohl über B als auch über T der Erwartungswert gebildet wird und diejenige Aktion $\alpha^* \in A$ zu wählen ist, für die gilt

$$\int_T \sum_{j=1}^{m} u\ (\alpha^*,\ \beta_j,\ t)\ \lambda\ (\beta_j,\ t)\ dt$$

$$= \max_{\alpha_i \in A} \int_T \sum_{j=1}^{m} u\ (\beta_j,\ \alpha_i,\ t)\ \lambda\ (\beta_j,\ t)\ dt$$

Der Grenzfall II völliger Ungewißheit verlangt die Anwendung des Maximin-Kriteriums in doppelter Hinsicht: Man wählt diejenige Aktion $\alpha^* \in A$, für die gilt:

$$\min_{\beta_j \in B} \inf_{t \in T} u(\alpha^*, \beta_j, t)$$

$$= \max_{\alpha_i \in A} \min_{\beta_j \in B} \inf_{t \in T} u(\beta_j, \alpha_i, t).$$

Praktisch interessant sind die Fälle III a–c.

a) Bei bekannter zeitabhängiger Zustandsdichte und völlig unbekannter Zeitdichte wählt man die Aktion $\alpha^* \in A$, für welche gilt:

$$\inf_{t \in T} \sum_{j=1}^{m} u(\beta_j, \alpha^*, t) \, \lambda(\beta_j \mid t)$$

$$= \max_{\alpha_i \in A} \inf_{t \in T} \sum_{j=1}^{m} u(\beta_j, \alpha_i, t) \, \lambda(\beta_j \mid t).$$

b) Bei bekannter Zeitdichte und völlig unbekannter Zustandsdichte wählt man $\alpha^* \in A$ mit

$$\min_{\beta_j \in B} \int_T u(\beta_j, \alpha^*, t) \, \lambda(t) \, dt$$

$$= \max_{\alpha_i \in A} \min_{\beta_j \in B} \int_T u(\beta_j, \alpha_i, t) \, dt.$$

c) Praktisch am interessantesten ist der Fall, daß sowohl über B als auch über T partielle Information vorliegt. Diese letztere sei so beschaffen, daß man weiß, daß

$$\lambda(\beta_j, t) \in \Lambda^*(\beta_j, t) \subset \Lambda(\beta_j, t) ,$$

wobei $\Lambda(\beta_j, t)$ der Raum der Unbestimmtheitsmaße $\lambda(\beta_j, t)$ ist. Entsprechend dem erweiterten Bernoullikriterium ist die Wahl desjenigen $\alpha^* \in A$ optimal, für welche gilt:

$$\text{(K)} \inf_{\lambda \in \Lambda^*} \int_T \sum_{j=1}^{m} u(\beta_j, \alpha^*, t)\, \lambda(\beta_j, t)\, dt$$

$$= \max_{\alpha_i \in A} \inf_{\lambda \in \Lambda^*} \int_T \sum_{j=1}^{m} u(\beta_j, \alpha_i, t)\, \lambda(\beta_j, t)\, dt .$$

Enthält Λ^* nur ein Element, dann stellt (K) die unter I angegebene Modifikation des Bernoullikriteriums bei zweidimensionaler Ungewißheit dar. Ist hingegen $\Lambda^* = \Lambda$, so geht (K) in die unter II angegebene Modifikation des Maximin-Kriteriums bei zweidimensionaler Ungewißheit über. Es geht dann nämlich der Ausdruck

$$\inf_{\lambda \in \Lambda^*} \int_T \sum_{j=1}^{m} u(\beta_j, \alpha_i, t)\, \lambda(\beta_j, t)\, dt$$

über in

$$\min_{\beta_j \in B} \inf_{t \in T} u(\beta_j, \alpha_i, t),$$

da das Infimum bezüglich Λ gerade durch diejenige Verteilung $\lambda \in \Lambda$ erreicht wird, welche dem Paar (β_j, t) die Wahrscheinlichkeit 1 erteilt, über welchem $u(\beta_j, \alpha_i, t)$ absolut minimal ist.

Die Allgemeinheit des obigen Kriteriums (K) tritt besonders deutlich zutage, wenn wir $\lambda(\beta_j, t)$ wie folgt zerlegen:

$$\lambda(\beta_j, t) = \lambda(\beta_j \mid t) \cdot \lambda(t).$$

Den Raum aller möglichen zeitabhängigen Zustandsdichten $\lambda(\beta_j \mid t)$ bezeichnen wir mit Λ_1, den der Zeitdichte

$\lambda(t)$ mit Λ_2. Die entsprechenden Teilräume seien mit

$$\Lambda^*_1 \subset \Lambda_1$$

$$\Lambda^*_2 \subset \Lambda_2$$

bezeichnet. Wir zerlegen nun Λ^* wie folgt:

$$\Lambda^* = \Lambda^*_1 \times \Lambda^*_2.$$

Wird die partielle Information in dieser Zerlegung aufgefaßt, dann modifiziert sich das Kriterium (K) zu dem folgenden: Man wähle $\alpha^* \in A$ mit

$$(K^*) \inf_{\lambda(t)\in\Lambda^*_2} \int_T \left[\min_{\lambda(\beta_j|t)\in\Lambda^*_1} \sum_{j=1}^{m} u(\beta_j, \alpha^*, t) \lambda(\beta_j \mid t)\right] \lambda(t)\, dt$$

$$= \max_{\alpha_i\in A} \inf_{\lambda(t)\in\Lambda^*_2} \int_T \left[\min_{\lambda(\beta_j|t)\in\Lambda^*_1} \sum_{j=1}^{m} u(\beta_j, \alpha_i, t) \lambda(\beta_j \mid t)\right] \lambda(t)\, dt \; .$$

Das Kriterium (K*) geht in das Adaptionskriterium über, wenn Λ^*_2 nur ein Element enthält. Natürlich sind auch die anderen Hybridformen Spezialfälle von (K*), wie sich leicht zeigen läßt.

Unsere Vorschläge zur Überwindung der drei Fundamentalprobleme lassen sich auf den Grundsatz reduzieren:

Ausnutzung aller verfügbaren Informationen und entsprechende Flexibilität und Anpassungsfähigkeit sowohl bei der Modellbildung als auch bei der Wahl des Entscheidungskriteriums.

Im nächsten Kapitel werden wir diesen Grundsatz in einer besonders operablen und algorithmisch strukturierten Form aufgreifen.

4. Kapitel:

Der Begriff der partiellen Information

§ 17. Weiche Modellbildung und partielle Information

Der zum Ende des vorigen Kapitels aufgestellte Grundsatz läßt sich in einen weiteren Rahmen einpassen, den man mit H. Wold [1973, 1974] als weiche Modellbildung bezeichnen könnte, vgl. auch [Menges 1974]. Zwar hat H. Wold den Begriff für eine bestimmte Klasse von ökonometrischen Verfahren geprägt, aber die hinter dem Begriff stehende Grundidee, nämlich einerseits mit möglichst schwachen A-priori-Annahmen auszukommen, andererseits allen Informationen, auch unzulänglichen, Beachtung zu schenken, ist dieselbe, die auch hinter unseren Bemühungen um eine Theorie statistischer Entscheidungen bei unvollständiger Information steht.

Der Gedanke der weichen Modellbildung ist in mehreren neueren Bestrebungen sichtbar. Viele nicht-parametrische Verfahren [vgl. z.B. Puri und Sen 1971] beruhen auf dieser Idee, in gewissem Sinn gehört auch die Bayesianische Analyse [vgl. z.B. Zellner 1971, Box und Tiao 1973] zu der weichen Modellbildung. Zu erwähnen ist auch die Verwendung unbeobachtbarer Variablen in der Pfadanalyse [Hauser und Goldberger 1971], und die Aufstellung von Informations- und Entscheidungssystemen in der Umweltforschung [Menges 1975]. Eine enge Beziehung besteht auch zu dem fuzzy set approach und zu der Verwendung unscharfer Begriffe [Menges und Skala 1974]. Auf diese wichtige Beziehung werden wir in § 22 näher eingehen.

All diese Bestrebungen vereint das Bemühen, weiche Begriffe und Modelle aufzustellen, welche durch Ausnutzung aller Informationen dazu verhelfen, die Realität möglichst wenig zu verletzen.

Im folgenden werden wir dieses Bestreben in der Form der linearen partiellen Information verwirklichen.

Die Modelle der vollständigen und der Nullinformation und entsprechend die Bernoulli- und Maximin-Philosophien entsprechen einer harten Modellbildung. Im ersten Fall wird die harte Annahme zugrundegelegt, die Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Zuständen der Realität sei exakt bekannt und gegeben, wo dieser Fall in der Praxis doch so gut wie nie verwirklicht ist. Andererseits tut auch das Modell der Nullinformation der Realität Gewalt an, da auch das Fehlen jeglicher Information über die Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Zuständen unrealistisch ist. Außerdem ist es unrealistisch und unflexibel, so extrem pessimistisch zu sein, wie es dem Maximin-Prinzip entspricht. Wir betrachten als weiche Modellbildung hingegen das Modell der partiellen Information.

Im Rahmen der klassischen Entscheidungstheorie ist es uns in § 15 und besonders in § 16 in Form des erweiterten Bernoulliprinzips und des Adaptionskriteriums mit seinen Spezialisierungen und Verallgemeinerungen begegnet.

Doch beschreiten wir jetzt einen anderen "nicht-klassischen" Weg, indem wir die Verteilungsmengen analysieren, die der partiellen Information entsprechen. Diese Analyse stützt sich auf die Arbeiten von Fishburn [1964, 1965], Kofler [1970], Cassidy, Field und Kirby [1971], Henry-Labordère und Zerhouni [1972], Kofler [1974] und Bühler [1975].

Der wichtige Zusammenhang zwischen weicher Modellbildung und Information besteht hierbei darin, daß dem Begriff der partiellen Information zunächst - für gegebenen Informationsstand, der selbst durch die lineare partielle Information (s. u.) ausgedrückt wird, - ein weiches Modell entspricht. Durch zusätzliche Information wird ein neues weiches Modell ermöglicht, das sozusagen weniger weich ist als das vorhergehende, und so fort. Auf diese Weise kann man zu harten Modellen (Modellen mit geringer Ungewißheit oder Vagheit) gelangen, wobei die "Härte" der neu gewonnenen Modelle indessen nicht auf Annahmen, sondern auf Information beruht.

Vollständige, partielle und Nullinformation

Anschaulich lassen sich die drei Fälle wie folgt vorstellen. In allen Fällen ist eine (n x m) - Nutzenmatrix gegeben:

A \ B	β_1	β_2	$\cdots$	β_m
α_1	u_{11}	u_{12}	$\cdots$	u_{1m}
α_2	u_{21}	u_{22}	$\cdots$	u_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
α_n	u_{n1}	u_{n2}	$\cdots$	u_{nm}

$$u_{ij} \equiv u\,(\beta_j, \alpha_i)$$

Damit <u>ein</u> $\alpha_i^* \in A$ als optimales identifiziert werden kann, muß diese Matrix auf einen Skalar reduziert werden. Diese Reduktion erfolgt in den beiden Grenzfällen der vollständigen und der Nullinformation in zwei Schritten mit Hilfe zweier Operatoren wie folgt:

Vollständige Information $\rho = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$	Nullinformation
1. Erwartungsoperator $U_i \equiv U(\alpha_i) = E_\rho(u_{ij}) = \sum_{j=1}^{m} u_{ij}\, p_j$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ 2. Max-Operator $U(\alpha^*) = \max_i U(\alpha_i)$	1. Min-Operator $\bar{U}_i \equiv \bar{U}(\alpha_i) = \min_j u_{ij}$ $(i = 1,2,\ldots n)$ 2. Max-Operator $\bar{U}(\alpha^*) = \max_i \bar{U}(\alpha_i)$

Während somit im Falle der vollständigen Information der erste Reduktionsschritt der Erwartungsoperator ist, der angewandt werden kann, da die wahre Verteilung $\rho = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ über den Zuständen bekannt ist, wird dieser im Fall der Null-Information durch den Min-Operator ersetzt. Resultat des ersten Reduktionsschrittes ist in beiden Fällen ein Spaltenvektor, nämlich

Vollständige Information $\quad$ Nullinformation

$$\begin{bmatrix} U(\alpha_1) \\ U(\alpha_2) \\ \vdots \\ U(\alpha_n) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \bar{U}(\alpha_1) \\ \bar{U}(\alpha_2) \\ \vdots \\ \bar{U}(\alpha_n) \end{bmatrix}$$

Mit Hilfe des Max-Operators werden die beiden Vektoren auf Skalare reduziert, welche die optimale Aktion identifizieren.

So wie die weiche Modellbildung in der Regel schwieriger ist als die harte, so ist auch die Situation im Fall der unvollständigen Information am schwierigsten. Statt einer Verteilung ρ über den Zuständen haben wir k solcher Verteilungen

$$\begin{aligned}
\rho^{(1)} &= (p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_m^{(1)}) \\
&\vdots \\
\rho^{(k)} &= (p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \ldots, p_m^{(k)})
\end{aligned}$$

Die Reduktion auf einen Skalar kann im Sinne des gestreckten Bernoullikriteriums so vorgenommen werden, daß wir die Matrix der Nutzenerwartungen

$$\begin{array}{cc|ccc}
 & & \rho^{(1)} & \overset{(\nu)}{\cdots} & \rho^{(k)} \\
\hline
 & \alpha_1 & U_{11} & \cdots & U_{1k} \\
 & \alpha_2 & U_{21} & \cdots & U_{2k} \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
(i) & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & \alpha_n & U_{n1} & \cdots & U_{nk}
\end{array}$$

bilden, wobei $U_{i\nu} = E_{\rho^{(\nu)}}(u_{ij}) = \sum_{j=1}^{m} u_{ij}\, p_j^{(\nu)}$,

und auf die Nutzenerwartungsmatrix $[\,U_{i\nu}\,]$ den Maximin-Operator zur Ermittlung der optimalen Aktion

$\alpha^* \in A$ anwenden ($U_{i\nu} \equiv U_\nu(\alpha_i)$):

$$\min_\nu U_\nu(\alpha^*) = \max_i \min_\nu U_\nu(\alpha_i)$$

§ 18. Operationalisierung des Begriffs der partiellen Information

1. Das Verteilungssimplex

Um jedoch weichere Informationen besser ausdrücken und ausnutzen zu können, beschreiten wir von jetzt an einen anderen Weg, der uns zum Max E_{min}-Prinzip führt. und zwar repräsentieren wir jede Verteilung $\rho^{(\nu)} = (p_1^{(\nu)}, p_2^{(\nu)}, \ldots, p_m^{(\nu)})$; $\nu = 1, \ldots, k$; durch einen Punkt $p(\rho)$ im m-dimensionalen euklidischen Raum:

$$(18.1) \qquad p(\rho) \in R^m.$$

Ein derartiger Punkt $p(\rho)$ heißt Wahrscheinlichkeitspunkt im R^m. Die Punkte in (18.1) spannen für alle zugelassenen Verteilungen im R^m ein $(m-1)$ -dimensionales Simplex $S^{(m)}$ auf, das wir Verteilungssimplex nennen

$$(18.2) \qquad S^{(m)} = \{(p_1, \ldots, p_m) | p_j \geq 0, \sum_{j=1}^{m} p_j = 1\}.$$

Im Falle der vollständigen Information definiert ρ genau einen Punkt des Verteilungssimplexes. Im Fall der Nullinformation müssen alle Punkte des Verteilungssimplexes als Unbestimmtheitsbereich in Betracht gezogen werden.

Der dazwischenliegende Fall der partiellen Information führt offensichtlich zu einer Teilmenge des Verteilungssimplexes. Auf diese Weise kommen wir zu einer plausiblen Definition.

2. Definitionen der LPI

Def. 18.1:

Die Information I über die Verteilung ρ ist eine partielle Information (PI), wenn sie zu einem echten, mehr als ein Element enthaltenden Teilgebiet T(PI) des Verteilungssimplexes $S^{(m)}$ führt. Also

$$(18.3) \qquad I \in \{PI\} \Leftrightarrow T(PI) \subset S^{(m)} \wedge |T(PI)| \notin \{0;1\}.$$

In (18.3) entspricht dem Zeichen $\subset$ eine echte Teilmenge, und $|T(PI)|$ bedeutet die der Menge T(PI) entsprechende Kardinalzahl. Sie gehört nicht zur Menge $\{0,1\}$, die aus den Elementen 0 und 1 besteht, da diese beiden Fälle ausgeschlossen sind. Im weiteren wollen wir jede PI mit der ihr entsprechenden Menge T(PI) identifizieren. Gemäß der Definition sind hier als T(PI) alle möglichen endlichen, unendlichen, konvexen und konkaven Teilmengen zulässig.

Aus den weiteren Betrachtungen geht jedoch hervor, daß es bei vielen Anwendungen und in vielen Aspekten genügt, sich auf eine besondere Klasse, die Klasse der konvexen Polyeder, zu beschränken. Auf diese Weise kommen wir zum Begriff der sogenannten linearen partiellen Information (LPI).

Def. 18.2:

Eine partielle Information PI über die Verteilung ρ ist eine lineare partielle Information (LPI), wenn das entsprechende echte Teilgebiet T(LPI) des Verteilungssimplexes $S^{(m)}$ ein konvexes Polyeder ist.

Eine äquivalente Definition, die das Verteilungssimplex als Ungleichungssystem auffaßt, ist die folgende:

Def. 18.3:

Eine partielle Information PI über die Verteilung ρ ist eine lineare partielle Information LPI, wenn das entsprechende Teilgebiet T(LPI) des Verteilungssimplexes mit variablen

$$\rho = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$$

mit

$$(18.4)\ \text{US:}\quad G\rho \geq g,\ p_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{m} p_j = 1;$$

$$G: k \times m;\ g: k \times 1;\ \rho = m \times 1$$

betrachtet werden kann.

In (18.4) ist G eine Matrix der Ordnung $k \times m$ (entsprechend der k Ungleichungen); g und ρ sind Spaltenvektoren mit k bzw. m Gliedern.

Die Äquivalenz der beiden Definitionen 16.2 und 16.3 folgt daraus, daß ein Ungleichungssystem stets ein konvexesPolyeder impliziert. Die Frage nach den Bedingungen für (G, g), welche eine Lösung des Systems gewährleisten, lassen wir zunächst offen.

Im übrigen werden wir zunächst stets voraussetzen, daß bei der ursprünglichen Angabe von PI und LPI zunächst keine Informationen über die Verteilung der Punkte in den entsprechenden Teilgebieten des Verteilungssimplexes vorliegen. Diese Voraussetzung erfolgt zu Vereinfachungszwecken; sie ist jedoch durchaus erläßlich. In § 22 werden wir diese Voraussetzung fallenlassen.

Durch die LPI wird jedenfalls stets der jeweilige Informationsstand und damit der Grad der "Weichheit" bzw. "Härte" des Modells ausgedrückt.

Wir betrachten jetzt eine dritte Definition der LPI. Sie ist die zweckmäßigste, da sie die Erörterung der weiter unten behandelten Sätze erleichtert. Außerdem ist sie diejenige, die am besten die algorithmische Strukturierung des Problems erlaubt.

Zum Ausgangspunkt nehmen wir die Definition 18.2 einer LPI und das ihr entsprechende Ungleichungssystem (18.4). Das dem System 18.4 entsprechene Polyeder sei mit $P^{(m)}$ bezeichnet. Als Teilgebiet eines Simplexes ist es ein endliches Polyeder, d. h. ihm entspricht eine endliche Menge von Extremalpunkten oder Extremalverteilungen

$$\{V^{(e)}\} = \{\rho^{(1)}, \ldots, \rho^{(k)}\}.$$

Jedes $\rho^{(\nu)} = (p_1^{(\nu)}, \ldots, p_m^{(\nu)})$; $\nu = 1, \ldots, k$; betrachten wir als m-gliedrigen Spaltenvektor. Aus den Spaltenvektoren $\rho^{(\nu)}$ setzen wir eine Matrix der entsprechenden LPI zusammen, die wir Extremalpunkte-Matrix M(LPI) nennen. Wir haben somit folgende Übergänge:

$$(18.5) \quad \text{LPI} \rightarrow (\text{US}) \rightarrow P^{(m)} \rightarrow \{V^{(e)}\} = \{\rho^{(1)}, \ldots, \rho^{(k)}\}$$

$$\rightarrow M(\text{LPI}) = \left[[\rho^{(1)}], \ldots, [\rho^{(\nu)}], \ldots, [\rho^{(k)}] \right]$$

Hierbei ist $\left[[\rho^{(1)}],\ldots,[\rho^{(k)}]\right]$ die aus den Spaltenvektoren $\rho^{(\nu)}$ zusammengesetzte Matrix. Die Reihenfolge der Extremalpunkte wird als beliebig angenommen.

Die Extremalpunkte-Matrix lautet ausgeschrieben:

$$(18.6) \quad M(LPI) = \begin{bmatrix} p_1^{(1)} & \ldots & p_1^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ p_m^{(1)} & \ldots & p_m^{(k)} \end{bmatrix} .$$

Jeder LPI wird also eine endliche Extremalpunkte-Matrix M(LPI) eindeutig bis auf Spaltenpermutation zugeordnet. Aber auch umgekehrt ist jeder M(LPI) eindeutig eine LPI zugeordnet. Das folgt aus der Tatsache, daß jedes endliche konvexe Polyeder als konvexe Hülle seiner Extremalpunkte betrachtet werden kann [Intriligator,M.D. 1971].Man kann also die Menge {LPI} mit der Menge {M(LPI)} aller möglichen Extremalpunkte-Matrizen identifizieren, selbstverständlich unter der Voraussetzung, daß die "extremen" Extremalpunkte-Matrizen die Fälle der vollständigen Information über ρ und der Nullinformation oder vollständigen Ignoranz ausschließen. Dem Fall der vollständigen Information entspricht eine ausgeartete Extremalpunkte-Matrix, nämlich der Spaltenvektor $\rho = (p_1,\ldots, p_m)$, und dem Fall der Nullinformation entspricht das Verteilungsimplex $S^{(m)}$. Die M(LPI) für alle dazwischenliegenden Fälle betrachten wir hier als echte Extremalpunkte-Matrizen.

Jetzt können wir die Extremalpunkte-Definition einer LPI angeben.

Def. 18.4:

Eine partielle Information PI ist linear (LPI), wenn sie zu einer echten Extremalpunkte-Matrix M(LPI) führt.

Es ist offensichtlich, daß alle drei Definitionen einer LPI äquivalent sind. In den weiteren Betrachtungen wird unter theoretischem wie auch algorithmischem Aspekt besonders die Extremalpunkte-Definition Anwendung finden.

Nun wollen wir die Frage der effektiven Bestimmung von Extremalpunkten (Extremalverteilungen) behandeln. Als Ausgangspunkt betrachten wir das einer gegebenen LPI entsprechende Ungleichungssystem (18.4). Unter der Voraussetzung, daß das System widerspruchsfrei ist, führt folgende Überlegung zur Lösung der Frage:

Die k + m + 1 Gleichungen

$$G\rho = g, \quad p_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{m} p_j = 1$$

bestimmen k + m + 1 Hyperebenen. Aus der Theorie der Ungleichungssysteme [Intriligator,M.D. 1971] folgt, daß jeder Extremalpunkt in (18.4) gleichzeitig auf m Hyperebenen liegen muß. Das ist eine notwendige Bedingung. Sie ist nicht hinreichend, da ja die Erfüllung der m aus k + m + 1 Bedingungen die Erfüllung der übrigen nicht gewährleistet.

Auf diese Weise können wir folgenden Satz formulieren:

Satz 18.1:

Eine Lösung $\rho = (p_1, \ldots, p_m)$ des Systems (16.4) ist dann und nur dann ein Extremalpunkt, wenn m Bedingungen aus den $k + m + 1$ Bedingungen des Systems als Gleichungen erfüllt sind.

Gemäß dem Satz 18.1 führt also folgendes Verfahren zur Ermittlung der Extremalpunkte. Wir lösen alle möglichen Gleichungssysteme mit m Gleichungen aus (18.4) (eine von ihnen ist $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$). Nur diese Lösungen bilden Extremalpunkte, die gleichzeitig Lösungen des ganzen Systems sind. Das beschriebene Verfahren kann sehr mühsam sein, da die Anzahl der möglichen Gleichungssysteme gleich der Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung $(m - 1)$-ter Ordnung von $k + m$ Elementen, gleich $\binom{k + m}{m - 1}$ ist. Für größere m und k ist das eine große Zahl. Aber in vielen praktischen Modellen mit nicht großer Zustandsmenge entspricht den LPI ein relativ kleines m. Aus den Betrachtungen in Kap. 5 folgt, daß man auch bei großen k und m in gewissen Fällen relativ einfach die Extremalpunkte bestimmen kann.

§ 19. Beispiele

1. Das Investorbeispiel

Wir betrachten zur Erläuterung einige Beispiele. Als erstes betrachten wir eine Variante des Investorbeispiels, welches uns seit dem § 3 begleitet hat.

Die Zustandsmenge ist $\{\beta_1, \beta_2\}$, die Verteilung über den Zuständen $\rho = (p_1, p_2)$. Über ρ liege die lineare partielle Information LPI : $p_1 \geq p_2$ vor, d. h. der Investor kennt zwar nicht die Wahrscheinlichkeiten für Rezession (β_1) bzw. Konjunktur (β_2), aber er weiß, etwa aus ökonometrischen Untersuchungen, daß die Wahrscheinlichkeit für Konjunktur jedenfalls nicht größer ist als für Rezession.

In diesem einfachen Beispiel können wir die LPI in folgenden drei äquivalenten Formen darstellen:

a) Als Ungleichungssystem

(19.1)
$$p_1 - p_2 \geq 0$$
$$p_1 \geq 0, \; p_2 \geq 0$$
$$p_1 + p_2 = 1$$

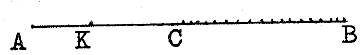
Aus (19.1) erhalten wir auf Grund des Satzes (18.1) zwei Extremalverteilungen:

$$\rho^{(1)} = (0,1); \; \rho^{(2)} = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}).$$

Durch Zusammensetzen dieser zwei Spalten erhalten wir die Extremalpunkte-Matrix M(LPI), also die Form

b) $M(LPI) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

c) Das der LPI entsprechende konvexe Polyeder können wir graphisch darstellen:



In dieser Abbildung entspricht die Strecke AB = 1 dem eindimensionalen Verteilungssimplex $S^{(2)}$. Einem beliebigen Punkt K der Strecke entspricht die Verteilung $\rho(K) = (AK, KB)$. Für die Endpunkte der Strecke haben wir $\rho(A) = (0,1)$; $\rho(B) = (1,0)$. Die Extremalpunkte sind B und C mit $\rho(B) = (1,0)$ und $\rho(C) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Das konvexe Polyeder $P^{(2)}$ ist hier die Strecke CB.

In Vorwegnahme des 5. Kapitels wollen wir hier schon die Lösung des Investorbeispiels bei unvollständiger Information angeben. Das Maximierungsprinzip der minimalen Nutzenerwartung Max. E_{min} [Kofler 1974] verlangt, daß die Nutzenmatrix unseres Beispiels (vgl. § 8) S.94

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} & \left[\begin{array}{cc} u_{11} = 10 & u_{12} = 35 \\ u_{21} = 0 & u_{22} = 100 \end{array} \right] \end{array} \equiv [u\ (\beta_j, \alpha_i)] = U$$

in die Nutzenerwartungsmatrix $U_E = [E\ (\rho^{(j)}, \alpha_i)]$; $i = 1,2$; $j = 1,2$; transformiert wird:

$$U_E = \left[\begin{array}{cc} \sum_j^m u_{1j}\, p_j^{(1)} & \sum_j^m u_{1j}\, p_j^{(2)} \\ \sum_j^m u_{2j}\, p_j^{(1)} & \sum_j^m u_{2j}\, p_j^{(2)} \end{array} \right]$$

$$= U \cdot M(LPI)$$

d.h. die Nutzenerwartungsmatrix ist gleich dem Produkt aus Nutzenmatrix und Extremalpunktematrix. Numerisch erhalten wir für unser Beispiel

$$U_E = U \cdot M \text{ (LPI)}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 35 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 22{,}5 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$$

Auf die Matrix U_E wird alsdann der Maximin-Operator angewandt; d.h. man wähle α^*, für welches gilt:

$$\min_j U_E(\rho^{(j)}, \alpha^*) = \max_{\substack{i \\ \text{Spalte}}} \min_{\substack{j \\ \text{Zeile}}} U_E(\rho^{(j)}, \alpha_i).$$

In unserem Beispiel ist

	$\min U_E(\rho^{(j)}, \alpha_i)$		
α_1	10	=	max min U_E
α_2	0		

Bei der gegebenen LPI führt das Max E_{min}-Prinzip also zu $\alpha_1 \in A$ als optimalerLösung. Sie ist dieselbe wie die Maximin-Lösung in Bezug auf U. Dies kann nicht erstaunen, denn wir fanden zu Ende von § 9, daß die Aktion α_2 nur bis zu $p_2 = 0{,}13$ bernoullioptimal bleibt.

2. Hypothesenprüfung mit der Nutzenfunktion des Wissenschaftlers

Als ein weiteres Beispiel betrachten wir den Fall einer Hypothesenprüfung. Gegeben ist die Menge $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ von "Aktionen": Akzeptierung einer Hypothese. Die Hypothesen seien β_1, β_2, β_3. Über dem Hypothesenraum $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ ist die Verteilung ρ gegeben mit der LPI

$$p_1 \leq p_2 \leq p_3,$$

d. h. der Entscheidende (= Wissenschaftler) weiß a priori, daß die Hypothese β_1 höchstens so wahrscheinlich ist wie die Hypothese β_2 und diese höchstens so wahrscheinlich wie die Hypothese β_3.

a) Das Ungleichungssystem lautet:

$$p_2 - p_1 \geq 0;\ p_3 - p_2 \geq 0;\ p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ p_3 \geq 0;$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Hier ist die G-Matrix $G = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Die Extremalpunkte erhalten wir aus folgenden Gleichungssystemen:

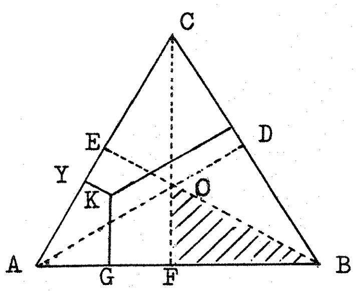
$$\begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} ; \begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 - p_3 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} ; \begin{cases} p_1 - p_2 = 0 \\ p_2 - p_3 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

$$\rho^{(1)} = (0,0,1);\ \rho^{(2)} = (0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2});\ \rho^{(3)} = (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}).$$

b) Die Extremalpunkte-Matrix ist

$$M(LPI) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

c) Die graphische Darstellung des konvexen Polyeders:



Im gleichseitigen Dreieck ABC sind die Höhen $AD = BE = CF = 1$. Daraus folgt, daß die Summe der Abstände eines beliebigen Punktes K des abgeschlossenen Dreiecks ABC von den Seiten gleich 1 ist. (Der Beweis ist einfach). Wenn wir nun die Abstände von AB als p_1, von BC als p_2 und von CA als p_3 betrachten, ist es offensichtlich, daß die Menge aller Punkte des abgeschlossenen Dreiecks ABC äquivalent dem Verteilungssimplex $S^{(3)}$ ist. Den Endpunkten des Dreiecks entsprechen die Verteilungen $\rho(A) = (0,1,0)$; $\rho(B) = (0,0,1)$; $\rho(C) = (1,0,0)$. Die Extremalpunkte sind B, F, O mit $\rho(B) = \rho^{(1)} = (0,0,1)$; $\rho(F) = \rho^{(2)} = (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$; $\rho(O) = \rho^{(3)} = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

Das konvexe Plyeder $P^{(3)}$ ist hier das schraffierte abgeschlossene Dreieck BFO.

Wir kehren wieder zu der Extremalpunkte-Matrix zurück. Um zu einer Lösung des Entscheidungsproblems zu gelangen, müssen wir sie mit der Nutzenmatrix vormultiplizieren. Als Nutzenmatrix verwenden wir die Nutzenfunktion des Wissenschaftlers [Menges, Jacke 1974] im Sinne von Marschak [1974]. Der Wissenschaftler erteilt, da er nur an der Wahrheit interessiert ist, lediglich dem Zusammentreffen (β_j, α_i) mit $j = i$ einen positiven Nutzen zu; da ihm die Wahrheit stets gleich viel bedeutet, sogar ein identisches Nutzenmaß

$$u(\beta_j, \alpha_i) = c \text{ für } j = i,$$

der Einfachheit halber $c = 1$. Alle Fehlurteile, (β_j, α_i) mit $j \neq i$, sind gleich unnütz für ihn, daher

$$u(\beta_j, \alpha_i) = 0 \text{ für } j \neq i.$$

Die Nutzenmatrix lautet somit:

$$U = \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} & \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \end{array}$$

Sie ist gleich der Einheitsmatrix I_3.

Die Matrix der Nutzenerwartungen ist somit

$$U_E = U \cdot M(LPI) = I \cdot M(LPI) = M(LPI);$$

d. h. die Matrix der Nutzenerwartungen ist im Falle der Nutzenfunktion des Wissenschaftlers identisch mit der Extremalpunkte-Matrix. Wir wenden daher das Maximin-Prinzip direkt auf die Extremalpunkte-Matrix an und erhalten als Lösung

$$M(LPI) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{min} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} = \text{max} \end{array}$$

Der Wissenschaftler wählt also α_3, d. h. er akzeptiert die Hypothese β_3. Es ist diejenige mit der größten Wahrscheinlichkeit.

Nunmehr modifizieren wir das Beispiel und nehmen ceteris paribus als LPI an

$$p_1 + p_2 \geq p_3,$$

d. h. wir nehmen diese LPI als ursprüngliche an, aus der die LPI mit $p_1 \leq p_2 \leq p_3$ durch zusätzliche Information hervorgegangen ist.

a) Das Ungleichungssystem lautet hier:

$$p_1 + p_2 - p_3 \geq 0;\ p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ p_3 \geq 0;\ p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Die Extremalpunkte erhalten wir aus den Gleichungssystemen:

$$\begin{cases} p_1 = 0 \\ p_3 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases};\ \begin{cases} p_2 = 0 \\ p_3 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases};\ \begin{cases} p_1 = 0 \\ p_1 + p_2 - p_3 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases};\ \begin{cases} p_2 = 0 \\ p_1 + p_2 - p_3 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

$$\rho^{(1)} = (0,1,0);\ \rho^{(2)} = (1,0,0);\ \rho^{(3)} = (0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2});\ \rho^{(4)} = (\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2})$$

b) Die Extremalpunkte-Matrix $M(LPI) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Bei Verwendung der Nutzenfunktion des Wissenschaftlers ist M(LPI) schon sofort wieder die Nutzenerwartungsmatrix U_E, auf die wir das Maximin-Prinzip anwenden:

$$U_E \equiv M(LPI) = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \min \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

In diesem Fall ist das Problem also nicht eindeutig lösbar.

In Fällen, bei denen das Max E_{min}-Prinzip zu keiner Lösung führt, da der Wert der einzelnen Aktionen gleich ist, kann manchmal trotzdem die Dominanz einer Aktion festgestellt und damit eine eindeutige Lösung erzielt werden. Bei Fishburn [1964] wird das Prinzip der Maximierung der Nutzenerwartung als Grundlage für die Dominanzdefinition angenommen.

Danach ist

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \quad , \text{ wenn } E(\alpha_1) - E(\alpha_2) \geq 0 \; ,$$

wobei $E(\alpha_i)$ die Nutzenerwartung für die Aktion α_i ist.

Entscheidend ist also nur das Vorzeichen von $E(\alpha_1) - E(\alpha_2)$.

Es ergibt sich

$$E(\alpha_1) - E(\alpha_2) = \sum_{j=1}^{m} p_j(u_{1j} - u_{2j}) = \sum_{j=1}^{m} p_j w_j$$

mit $w_j = u_{1j} - u_{2j}$

und nach Umformung aufgrund der Abelschen Identität

$$E(\alpha_1) - E(\alpha_2) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{j} w_k \right)(p_j - p_{j+1}) \text{ mit } p_{m+1} = 0.$$

Nach Fishburn läßt sich eine Dominanz nur feststellen, wenn gilt:

a) $\sum_{k=1}^{j} w_k \geq 0$ für alle $j = 1, \ldots, m \Rightarrow E(\alpha_1) \geq E(\alpha_2)$

b) $\sum_{k=1}^{j} w_k \leq 0$ für alle $j = 1, \ldots, m \Rightarrow E(\alpha_2) \geq E(\alpha_1)$.

Ist die Information über die Zustände der Realität von der Form:

$$p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n$$

muß offensichtlich zur eindeutigen Bestimmung der Dominanz a) oder b) gelten, da immer gilt:

$$p_j - p_{j+1} \geq 0 \ .$$

Bei wechselnden Vorzeichen in den Partialsummen bleibt die Dominanz zwischen α_1 und α_2 unbestimmt.

Wie man leicht zeigen kann, ist eine Aktion, die im Fishburn'schen Sinne dominant ist, auch optimal im Sinne des LPI-Modells.
In manchen Fällen kann Fishburn's Dominanzdefinition zu einer Entscheidung zwischen zwei Aktionen führen, auch wenn sich im Rahmen des LPI-Modells keine eindeutige optimale Aktion finden läßt.

<u>Beispiel</u>: Sei $p_1 \leq p_2$; $p_2 \leq p_3$ und $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$.

Betrachtet wird folgende Nutzenmatrix:

	β_1	β_2	β_3
α_1	100	100	-1
α_2	-1	-1	-1

Die Lösung nach dem Max E_{min}-Prinzip ergibt

$$\begin{bmatrix} 100 & 100 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 199/3 & 99/2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \min \\ -1 \\ -1 \end{array}$$

Da die minimalen Erwartungswerte identisch sind, läßt sich keine Entscheidung zu Gunsten von α_1 bzw. α_2 fällen.

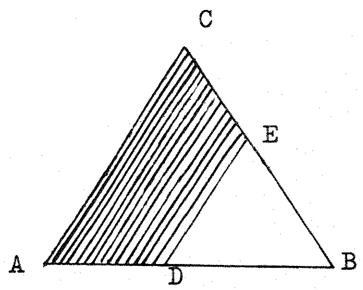
Fishburn's Dominanzdefinition ergibt jedoch eine klare Entscheidung für α_1. Die Partialsummen sind 101, 202 und 202.

Dieses Kriterium ist jedoch nur sehr beschränkt anwendbar, da es ausgesprochen empfindlich selbst auf marginale Änderungen in der Nutzenmatrix reagiert und dann keine Ergebnisse liefert, da die Partialsummen nicht mehr alle von gleichem Vorzeichen sind.

Der Vollständigkeit halber betrachten wir noch

c) Die graphische Darstellung des konvexen Polyeders.

Das Verteilungssimplex ist dasselbe wie im vorigen Beispiel:



Die Extremalpunkte sind: A, C, D, E.

$$\rho(A) = \rho^{(1)} = (0,1,0);\ \rho(C) = \rho^{(2)} = (1,0,0);$$

$$\rho(D) = \rho^{(3)} = (0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2});\ \rho(E) = \rho^{(4)} = (\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2}).$$

Das konvexe Polyeder $P^{(3)}$ ist das schraffierte abgeschlossene Trapez ACDE.

3. Prognosen mit der Nutzenfunktion des Wissenschaftlers und der Nutzenfunktion des Wirtschaftspolitikers

Ein Prognostiker stehe drei möglichen zukünftigen Zuständen der Realität gegenüber

β_1 = Rezession (ist wahr)

β_2 = Stagnation (ist wahr)

β_3 = Konjunktur (ist wahr)

Seine Prognosen (Aktionen) seien

α_1 = Rezession (wird prognostiziert)

α_2 = Stagnation (wird prognostiziert)

α_3 = Konjunktur (wird prognostiziert).

Die Wahrscheinlichkeiten für die zukünftigen Zustände seien von einem ökonometrischen Institut mit Intervallangaben wie folgt geschätzt:

$$\tfrac{3}{5} \leq p_1 \leq \tfrac{4}{5};\ \tfrac{1}{5} \leq p_2 \leq \tfrac{3}{5};\ 0 \leq p_3 \leq \tfrac{2}{5};\ p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

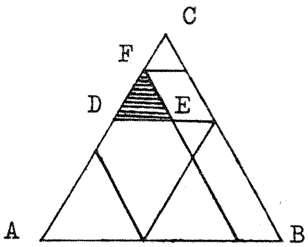
Aufgrund des Satzes 1 8.1 erhalten wir folgende Extremalpunkte:

$$\rho^{(1)} = (\tfrac{3}{5}, \tfrac{2}{5}, 0);\ \rho^{(2)} = (\tfrac{3}{5}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5});\ \rho^{(3)} = (\tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{5}, 0).$$

Die Extremalpunkte-Matrix lautet:

$$M(LPI) = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}0 & 0{,}2 & 0{,}0 \end{bmatrix}.$$

Die graphische Darstellung des konvexen Polyeders :



Die Extremalpunkte sind: D, E, F.

$$\rho(D) = (\tfrac{3}{5}, \tfrac{2}{5}, 0);\ \rho(E) = (\tfrac{3}{5}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5});\ \rho(F) = (\tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{5}, 0).$$

Das konvexe Polyeder $P^{(3)}$ ist das schraffierte abgeschlossene Dreieck DEF.

Ist der Prognostiker ein Wissenschaftler, so hat er wieder die Einheitsmatrix als Nutzenmatrix und die Nutzenerwartungsmatrix, auf die das Maximin-Prinzip angewendet wird, lautet:

$$U_E = I \cdot M(LPI) =$$

$$= M(LPI) = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{min} \\ 0{,}6 = \text{max} \\ 0{,}2 \\ 0 \end{array}$$

Der Prognostiker prognostiziert also

α_1 = Rezession.

Nunmehr nehmen wir an, der Prognostiker sei nicht ein Wissenschaftler, sondern ein Wirtschaftspolitiker, der folgende Nutzenfunktion habe

$$\begin{array}{cccc} \text{Rezession} & \text{Stagnation} & \text{Konjunktur} & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{array}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \alpha_1 \text{ (Rezession)} \\ \alpha_2 \text{ (Stagnation)} \\ \alpha_3 \text{ (Konjunktur)} \end{array}$$

(Der Leser, der mit dieser "sehr subjektiven" Nutzenfunktion nicht einverstanden ist, kann sie sich entsprechend modifizieren.)

Die Nutzenerwartungsmatrix des Wirtschaftspolitikers lautet somit (mit Anwendung des Maximin-Prinzips):

$$U_E = U \cdot M(LPI) = \begin{array}{cl} & \text{min} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 0 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 = \text{max} \end{array} \end{array}$$

Seine Prognose lautet also α_3 = Konjunktur.
Sie stimmt nicht mit der des Wissenschaftlers überein, was auch nicht anders zu erwarten war. Die Nutzenmatrix des Wirtschaftspolitikers läßt erkennen, wie sehr er die Konjunktur schätzt. Selbst die probabilistische Transformation, wie sie in der LPI zum Ausdruck kommt, kann dieser Vorliebe nichts anhaben.

4. Die Glaubwürdigkeit von Experten

Als letztes Beispiel betrachten wir einen Fall, bei dem mit einiger Berechtigung subjektive Wahrscheinlichkeiten, besser: Glaubwürdigkeiten, herangezogen werden können. Eine Ölgesellschaft steht vor der Frage, entweder in einem Gebiet A_1 (Aktion α_1) oder in einem Gebiet A_2 (α_2) nach Öl zu bohren. Die Gesellschaft beauftragt 5 Fachleute mit einer Expertise folgender Art: Für wie wahrscheinlich halten Sie es, daß in A_1 bzw. A_2 Öl gefunden wird? Die Antworten der 5 Experten sind die folgenden:

Experte	1	2	3	4	5
α_1	0,5	0,8	0,3	0	1
α_2	0,5	0,2	0,7	1	0

Alle Experten sind also überzeugt, daß entweder in A_1 oder A_2 Öl gefunden wird. Aber ihre Einschätzung der Fündigkeit bzgl. A_1 und A_2 ist durchaus unterschiedlich. Für die Ölgesellschaft sind die obigen Wahrscheinlichkeiten direkt Nutzenmaße. (Das kommt oft in der Praxis vor, daß der Nutzen einer Sache sich allein nach seiner Wahrscheinlichkeit bestimmt.) Die Glaubwürdigkeit der 5 Experten wird jedoch von der Gesellschaft unterschiedlich beurteilt. Die (subjektiven) Wahrscheinlichkeiten, daß Experte i Recht hat, sei $p_j (j = 1,\ldots, 5)$, mit der LPI

$$p_1 \leq p_2; \; p_4 \leq p_5$$
$$p_1 + \ldots + p_5 = 1$$

Das Ungleichungssystem lautet:

$$p_2 - p_1 \geq 0, \; p_5 - p_4 \geq 0; \; p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \geq 0;$$

$$p_1 + \ldots + p_5 = 1.$$

Die Anwendung des Satzes 18.1 führt zu 8 Extremalpunkten, die folgende Extremalpunkte-Matrix bilden:

$$M(LPI) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(Eine graphische Darstellung des entsprechenden konvexen Polyeders ist hier nicht möglich.)

Die Nutzenerwartungsmatrix lautet:

$$U_E = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 1 & 0{,}65 & 0{,}55 & 0{,}9 & 0{,}65 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0 & 0{,}35 & 0{,}45 & 0{,}1 & 0{,}35 & 0{,}5 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{min} \\ 0{,}3 = \text{max.} \\ 0 \end{matrix}$$

Die Gesellschaft wählt also α_1 und bohrt im Gebiet A_1. Das war zu erwarten, da sie die Experten 2 und 5 favorisiert, und beide gaben A_1 maximale Wahrscheinlichkeiten.

§ 20. Die LPI für Zufallsvektoren

1. Bei Unabhängigkeit

In den Kapiteln 5 - 8 werden oft mehrdimensionale Zufallsvariablen betrachtet. Solche mehrdimensionalen Zufallsvariablen heißen auch Zufallsvektoren [Menges, Statistik I, S. 192 ff]. Wir beschränken uns wieder auf den diskreten Fall: Sei $X^{(n)}$ die n-dimensionale Zufallsvariable oder der n-gliedrige Zufallsvektor mit den Komponenten $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

$$X^{(n)} = (X_1, X_2, \overset{(i)}{\ldots}, X_n).$$

Die Menge der möglichen Realisationen oder der Wertevorrat von X_i (vgl. auch § 7.1) ist

$$X_1^{(i)}, \ldots, X_{Z(i)}^{(i)} \in \mathfrak{X}^{(i)},$$

wobei $\mathfrak{X}^{(i)}$ der Stichprobenraum der i-ten Komponente des Zufallsvektors $X^{(n)}$ ist. Der Stichprobenraum des ganzen Zufallsvektors $X^{(n)}$ ist

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{(1)} \times \mathfrak{X}^{(2)} \times \ldots \times \mathfrak{X}^{(n)}.$$

Über $\mathfrak{X}^{(i)}$ ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$p^{(i)} = (p_1^{(i)}, \ldots, p_{Z(i)}^{(i)}); \; i = 1, \ldots, n;$$

gegeben. $p_j^{(i)}$ ($j = 1, \ldots, Z_{(i)}$) ist die j-te Realisation der Zufallsvariablen X_i.

Da die X_i ($i = 1, \ldots, n$) voraussetzungsgemäß unabhängig voneinander sind, ist die Wahrscheinlichkeit für eine Realisation der Stichprobe x

$$\mathfrak{X} \ni x = (x_1, \ldots, x_n),$$

wobei $x_i \in \mathfrak{X}^{(i)}$ die Realisation der i-ten Zufallskomponente ist, gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$P(x) = P(x_1) \cdot P(x_2) \cdot \ldots \cdot P(x_n).$$

Zur Notation: $X^{(i)}$ ist die i-te Zufallsvariable z.B. Augenzahl beim Würfeln eines Würfels. Die möglichen Realisationen (Werte) sind dann $x_1^{(i)} = 1, \ldots, x_6^{(i)} = 6$. Eine beobachtete Realisation ist z. B. $x_i = 3$).

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung von x sei mit $G(x_1, \ldots, x_n) \equiv G(x)$ bezeichnet.

Nun wollen wir, wie es in der Praxis oft der Fall ist, voraussetzen, daß über die Verteilungen $\rho^{(i)}$ der Zufallsvariablen X_i nur partielle Informationen vorliegen. Wir beschränken uns auf den linearen Fall und treffen die Annahme, daß über jede Verteilung $\rho^{(i)}$ eine $(LPI)_i$ bekannt ist.

Es wird jetzt folgender Satz bewiesen:

Satz 20.1:

Sei $\{X_1, \ldots, X_n\}$ eine endliche Menge von unabhängigen diskreten Zufallsvariablen mit bekannten LPI $(\rho^{(i)})$ für die Verteilungen $\rho^{(i)}$ der Zufallsvariablen X_i $(i = 1, \ldots, n)$. Dann liegt auch für die Verteilung $G^{(n)}$ des Zufallsvektors

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine LPI $(G^{(n)}(x))$ vor.

Beweis: Die Menge $\{X\}$ aller möglichen Realisationsvektoren des Zufallsvektors X ist gleich:

$$\{X\} = \left\{ (x_{\alpha_1}^{(1)}, x_{\alpha_2}^{(2)}, \ldots, x_{\alpha_n}^{(n)}) \mid \alpha_i \in \{1, 2, \ldots, Z(i)\}\right\}$$

Daraus folgt, daß die Anzahl der Vektoren in $\{X\}$ gleich $Z(1) \cdot Z(2) \cdot \ldots \cdot Z(n)$ ist. Aus der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Zufallsvariablen X_i folgt

$$\{P\} = \left\{ (P_{\alpha_1}^{(1)} \cdot P_{\alpha_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot P_{\alpha_n}^{(n)}) \mid \alpha_i \in \{1, 2, \ldots, Z(i)\}\right\} .$$

Jeder LPI bezüglich $\rho^{(i)}$ ist gemäß der Definition 18.3 ein Ungleichungssystem $(US)_i$ zugeordnet. Es gelten also folgende Abbildungen:

$$\{X_i\} \to \{\rho^{(i)}\} \to \{LPI(\rho^{(i)})\} \to \{(US)\}_i \ .$$

Sei v_i die Anzahl der Ungleichungen und m_i die Anzahl der Randbedingungen in $(US)_i$. Dann besteht jedes $(US)_i$ aus $v_i + m_i$ Ungleichungen. Die partielle Information über die Verteilung $G^{(n)}$ des Zufallsvektors X, also über die Wahrscheinlichkeiten in $\{P\}$ kann nur auf die Weise ermittelt werden, daß wir alle möglichen Produkte aus n Ungleichungen bilden, nämlich aus jedem $(US)_i$ eine Ungleichung. Auf diese Weise erhalten wir

$$N = (v_1 + m_1) \cdot (v_2 + m_2) \cdot \ldots \cdot (v_n + m_n)$$

Ungleichungen für die Wahrscheinlichkeiten der gemeinsamen Verteilung $G^{(n)}$. In den N Ungleichungen sind aber $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ Randbedingungen enthalten. Also ist die Anzahl der Ungleichungen im Ungleichungssystem (18.4) gleich

$$\hat{N} = \prod_{i=1}^{n} (v_i + m_i) - \prod_{i=1}^{n} m_i \ .$$

Die Linearität des auf diese Weise erhaltenen Ungleichungssystems $(\hat{US})$ ist offensichtlich, und damit ist der obige Satz bewiesen. Er wird in vielen Optimierungsproblemen unter LPI-Bedingungen angewendet.

2. Ein einfaches Beispiel:

Zufallsvariable X_1 :

X_1	a	b
p	p_1	p_2

; [Wertemenge $\{a,b\}$, Verteilung $\rho^{(1)} = (p_1,p_2)$].

Zufallsvariable X_2 :

X_2	c	d
p	q_1	q_2

; [Wertemenge $\{c,d\}$, Verteilung $\rho^{(2)} = q_1,q_2)$].

LPI $(\rho^{(1)})$: $p_1 \geq p_2$; LPI $(\rho^{(2)}$: $q_1 \geq q_2$,

X_1, X_2 sind unabhängige Zufallsvariablen.

Zu bestimmen ist die LPI$(G^{(2)})$, wobei LPI$(G^{(2\ )})$ die gemeinsame (zweidimensionale) Verteilung des Zufallvektors $X = (X_1,X_2)$ ist.

Das $(US)_1$ für X_1 lautet

$$\begin{cases} p_1 - p_2 \geq 0 \\ p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0\ ; \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

das $(US)_2$ für X_2:

$$\begin{cases} q_1 - q_2 \geq 0 \\ q_1 \geq 0,\ q_2 \geq 0 \\ q_1 + q_2 = 1\ . \end{cases}$$

Für X haben wir die Wertemenge $\{(a,c),\ (a,d),\ (b,c),\ (b,d)\}$ mit der Verteilung $G^{(2)} = (p_1q_1,\ p_1q_2,\ p_2q_1,\ p_2q_2)$.

Durch alle Multiplikationen einer der ersten drei Ungleichungen aus $(US)_1$ mit einer der ersten drei aus $(US)_2$ erhalten wir für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $r_1 = p_1q_1$, $r_2 = p_1q_2$, $r_3 = p_2q_1$, $r_4 = p_2q_2$ und für das resultierende Ungleichungssystem $(\hat{US})$, also die LPI $(G^{(2)})$:

$$\begin{cases} r_1 - r_2 - r_3 + r_4 \geq 0 \\ r_1 \geq \frac{1}{4} \\ r_4 \leq \frac{1}{4} \\ r_2 - r_4 \geq 0 \\ r_3 - r_4 \geq 0 \\ r_1 \geq 0,\ r_2 \geq 0,\ r_3 \geq 0,\ r_4 \geq 0 \\ r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1. \end{cases}$$

3. Bei Abhängigkeit

Nun wollen wir den allgemeinen Fall, ohne die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen X_i vorauszusetzen, behandeln. Hier muß man bedingte Wahrscheinlichkeiten einführen. Als Ausgangspunkt betrachten wir den bekannten Multiplikationssatz für die gleichzeitige Realisation n beliebiger diskreter Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, also auch des Zufallsvektors $X = (X_1, \ldots, X_n)$:

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = P(X_1) \cdot P(X_2|X_1) \cdot P(X_3|X_1X_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n|X_1 \ldots X_{n-1}).$$

Diese Formel gilt für alle möglichen festgehaltenen Realisationen der diskreten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$. Nun läßt sich folgender Satz beweisen:

Satz 20.2 :

Sei $\{X_1, \ldots, X_n\}$ eine endliche Menge von diskreten Zufallsvariablen mit bekannten LPI($U^{(i)}$) für die Verteilungen $U^{(i)}$ $(i = 1,\ldots,n)$ der bedingten Zufallsvariablen $X_1; X_2|X_1; X_3|X_1X_2; \ldots; X_n|X_1X_2\ldots X_{n-1}$ bei allen ihren möglichen Realisationen. Dann liegt auch für die Verteilung $G^{(n)}$ des Zufallsvektors $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine LPI ($G^{(n)}$) vor.

Der Satz wird auf analoger Weise wie Satz 20.1 bewiesen. Auf Einzelheiten wollen wir hier nicht eingehen. Es ist offensichtlich, daß Satz 20.1 als Spezialfall des Satzes 20.2 betrachtet werden kann.
Es läßt sich auch ohne Schwierigkeiten folgender Satz beweisen, der für die Praxis eine wesentliche Bedeutung hat:

Satz 20.3 :

Sei $Z = g(X)$ eine beliebige reellwertige Funktion des diskreten Zufallsvektors $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Wenn für die Verteilungen $U^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ der Zufallsvariablen

$$X_1;\ X_2|X_1;\ X_3|X_1X_2; \ldots;\ X_n|X_1X_2\ldots X_{n-1}$$

bei allen ihren möglichen Realisationen entsprechende LPI($U^{(i)}$) vorliegen, liegt auch für die Zufallsvariable $Z = g(X)$ eine entsprechende LPI vor.

Damit gilt die LPI-Interpretation auch für Maßzahlen.

§ 21. LPI und Bayes'sches Theorem

In diesem Paragraphen wollen wir LPI-Betrachtungen in die bekannte Bayes-Formel einführen. Die bewiesenen Sätze sollen angewendet werden.

In der Bayes-Formel [Menges, Statistik I, 1972, § 25]

$$(21.1)\quad P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\cdot P(A_i)} \qquad (i = 1,\ldots, n)$$

sind die $P(A_i)$ die A-priori-Wahrscheinlichkeiten für A_i, die $P(A_i|B)$ sind die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten für A_i nach der Beobachtung von B - und die $P(B|A_i)$ die Likelihoods.

Das Bayes'sche Theorem bedeutet also die Transformation einer A-priori-Verteilung in eine A-posteriori-Verteilung auf Grund einer Beobachtung.

Nun wollen wir voraussetzen, daß für die A-priori-Verteilung $U^{(1)} = (P(A_1),\ldots, P(A_n))$ und für die Likelihoodfunktion $U^{(2)} = (P(B|A_1),\ldots, P(B|A_n))$ nur LPI vorliegen, also entsprechend LPI $(U^{(1)})$ und LPI $(U^{(2)})$. Folgender Satz wird bewiesen:

Satz 21.1

Unter der Voraussetzung, daß für die A-priori-Verteilung $U^{(1)}$ und die Likelihoodfunktion $U^{(2)}$ lineare partielle Informationen LPI$(U^{(1)})$ bzw. LPI$(U^{(2)})$ vorliegen, liegt auch für die A-posteriori-Verteilung $U^{(3)}$ eine LPI$(U^{(3)})$ vor.

Beweis:

Wir betrachten die linke Seite der Bayes'schen Formel (21.1) als Funktion φ_i der Verteilungen $U^{(1)}$ und $U^{(2)}$. Also

$$P(A_i | B) = \varphi_i(U^{(1)}, U^{(2)}); i = 1, \ldots, n.$$

Aus (21.1) und der vorausgesetzten Existenz von LPI $(U^{(1)})$ und LPI $(U^{(2)}$ folgt, daß $\varphi_i(U^{(1)}, U^{(2)})$ eine stetige Funktion in einem kompakten, konvexen Gebiet ist. Die Kompaktheit und Konvexität folgt daraus, daß die den LPI $(U^{(1)})$ und LPI $(U^{(2)})$ entsprechenden Teilgebiete des Verteilungssimplexes kompakt und konvex sind. Aufgrund des Weierstrass'schen Satzes [Intriligator 1971] nimmt eine stetige Funktion im kompakten Gebiet ihren maximalen und minimalen Wert an.
Es ist also die Existenz des max $\varphi_i = M_i$ und min $\varphi_i = \mu_i$ bewiesen, und daraus folgt die Ungleichung

(21.2) $\quad \mu_i \leq P(A_i | B) \leq M_i; \quad i = 1, \ldots, n.$

Für die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $P(A_i | B)$ liegen also, gemäß (21.2), Intervallangaben vor und damit ist die Existenz einer LPI $(U^{(3)})$ bewiesen.

In der Praxis kommt häufig der Fall vor, daß die Likelihoods bekannt sind und daß für die A-priori-Verteilung eine unvollständige Information vorliegt. Oft gibt es nur Intervallangaben für die A-priori-Wahrscheinlichkeiten.

Dann haben wir einen Spezialfall des Satzes 21.1, und wir können folgenden Satz als bewiesen betrachten:

Satz 21.2 :

Bei bekannten Likelihoods führt die Annahme der Existenz von Intervallangaben für die A-priori-Wahrscheinlichkeiten zu Intervallangaben für die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten.

Von theoretischer und praktischer Bedeutung ist die Anwendung eines Bayes-Kettenverfahrens [Morgan 1968]. Es besteht darin, daß die aufgrund der Formel (21.1) erhaltene A-posteriori-Verteilung als neue A-priori-Verteilung betrachtet wird. Die Bayes-Formel vermittelt eine neue A-posteriori-Verteilung, usw. Aus den bewiesenen Sätzen folgt der

Satz 21.3 :

Bei bekannten Likelihoods führt die Annahme der Existenz einer LPI über die A-priori-Verteilung im Ausgangspunkt eines Bayes-Kettenverfahrens immer zu einer LPI über die A-posteriori-Verteilung im Endpunkt der Kette.

§ 22. LPI-Ketten und Unschärfe ("fuzziness")

In den bisherigen Betrachtungen wurde in den Definitionen der PI und LPI vorausgesetzt, daß über die Verteilung der Punkte der Teilgebiete des entsprechenden Verteilungssimplexes keine Informationen vorliegen. Nun wollen wir diese Voraussetzung fallenlassen. In diesem Absatz wird der Fall behandelt, in dem eine partielle Information über die Verteilung der Punkte des einer gegebenen LPI entsprechenden konvexen Polyeders vorliegt.

Dieser Fall kann auch für die Praxis eine wesentliche Bedeutung haben, z. B., wenn aufgrund einer zusätzlichen Information der Übergang von dem gegebenen konvexen Polyeder zu seinem Teilgebeit folgt, wenn z. B. eine $(LPI)_2$ über die Punkte der $(LPI)_1$ vorliegt. Im weiteren soll auch das Problem der auf diese Weise aufgefaßten LPI-Ketten erörtert werden.

Wir orientieren die Betrachtung an einem wichtigen Anwendungsfall, der fuzziness [Zadeh 1965] oder Unschärfe.

Sei $\{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$ eine Zustandsmenge und $(LPI)_1$ (ρ_0) eine lineare partielle Information über die Verteilung ρ_0 dieser Zustände. Dem $(LPI)_1$ (ρ_0) entspricht das konvexe Polyeder $P_1^{(m)}$. Wir unterscheiden jetzt, wie in § 17 drei mögliche Fälle.

Fall a : Reine LPI, maximale Unschärfe

Über die Verteilung ρ_1 der Punkte von $P_1^{(m)}$ liegt keine Information vor. Als Unschärfebereich der Verteilung muß die Menge aller Punkte des Polyeders $P_1^{(m)}$ betrachtet werden, also der bisher besprochene Fall der "reinen" LPI.

Fall b : Vollständige Information, keine Unschärfe

Über die Verteilung ρ_1 der Punkte in $P_1^{(m)}$ liegt eine vollständige Information vor. Es gibt also für die Menge der Punkte von $P_1^{(m)}$ eine gemeinsame Dichtefunktion $f(p_1,\ldots, p_m)$. Dieser Fall führt zu einer strikt determinierten Verteilung $\hat{\rho}(\hat{p}_1,\ldots, \hat{p}_m)$, also zum reinen Risiko-Fall. Das folgt daraus, daß wir in dem Fall, gemäß den Voraussetzungen, die entsprechende mathematische Erwartung für die Punktmenge $P_1^{(m)}$ bestimmen müssen und das führt bei gegebener Dichte eben zum Punkt $\hat{\rho}$:

(22.1)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \overset{(m)}{\cdots} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(p_1,\ldots, p_m)\; f\,(p_1,\ldots,p_m)\; dp_1\ldots dp_m = \hat{\rho}\;(\hat{p}_1,\ldots,\hat{p}_m).$$

Die linke Seite in (22.1) ist, gemäß der Definition der mathematischen Erwartung, ein m-faches Integral über dem Produkt des Wahrscheinlichkeitspunktes $\rho_1(p_1, \ldots, p_m)$ und der gegebenen Dichtefunktion $f(p_1, \ldots, p_m)$.

Fall c : Weniger als maximale, mehr als keine Unschärfe

Bei diesem praktisch wichtigsten, zwischen a) und b) liegenden Fall wird vorausgesetzt, daß über die Verteilung ρ_1 der Punkte in $P_1^{(m)}$ eine zusätzliche Information vorliegt, die das konvexe Polyeder $P_1^{(m)}$ auf ein echtes, mehr als einen Punkt enthaltendes Teilgebiet von $P_1^{(m)}$ reduziert. Bei der Annahme, daß dieses Teilgebiet wieder ein konvexes Polyeder $P_2^{(m)}$ ist, wird die zusätzliche Information als lineare partielle Information über die Verteilung ρ_1 der Punkte in $P_1^{(m)}$ betrachtet. Die Bezeichnung ist $(LPI)_2$.

Man könnte wieder hier drei Definitionen für $(LPI)_2$, wie in § 18.2, einführen: 1) $(LPI)_2$ als konvexes Polyeder $P_2^{(m)}$, wobei es Teilgebiet des Polyeders $P_1^{(m)}$ ist. 2) $(LPI)_2$ als Lösung eines Ungleichungssystems, 3) $(LPI)_2$ als entsprechende Extremalpunktematrix.

Ganz analog können unsere Überlegungen fortgesetzt werden, und wir kommen auf diese Weise zum Begriff einer LPI-Kette (LPI-Folge). Die symbolische Darstellung:

$$S^{(m)}(\rho_0) \to (LPI)_1(\rho_0) \to P_1^{(m)} \subset S^{(m)}(\rho_0) \to (LPI)_2(\rho_1) \to P_2^{(m)} \subset P_1^{(m)} \to (LPI)_3(\rho_2) \to P_3^{(m)} \subset P_2^{(m)} \to \ldots \tag{22.2}$$

In (22.2) ist der Ausgangspunkt das Verteilungssimplex $S^{(m)}(\rho_0)$. Die unendliche Folge der konvexen Polyeder $P_1^{(m)} \subset P_2^{(m)} \subset P_3^{(m)} \subset \ldots$ bildet eine Einschachtelung bei der Annahme

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{(m)} = \rho^*(p_1^*, \ldots, p_m^*),$$

da ja in dem Fall jedes Polyeder $P_i^{(m)}$ $(i = 1,2, \ldots)$ ein echtes Teilgebiet des folgenden Polyeders $P_{i+1}^{(m)}$ ist und die Polyederfolge gegen eine Verteilung (Wahrscheinlichkeitspunkt ρ^* $(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*)$)strebt, die ein gemeinsames Element aller $P_i^{(m)}$ ist.

Aus unseren Überlegungen folgt der

Satz 22.1

a) Jede LPI-Kette über die Verteilung ρ der Zustandsmenge $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ führt bei der Voraussetzung einer Polyederschachtelung zu einer eindeutigen Verteilung ρ^*.

b) Zu einer eindeutigen Verteilung führt auch eine endliche LPI-Kette bei der Annahme, daß für die Verteilung der Punkte des letzten Polyeders eine vollständige Information vorliegt.

Ein wichtiger Spezialfall des Satzes 22.1 lautet:

a) Es wird vorausgesetzt, daß für die Wahrscheinlichkeiten der Verteilung ρ $(p_1, \ldots, p_m)$ über der Zustandsmerge $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ widerspruchsfreie

Intervallangaben vorliegen:

(22.3) $a_j \leq p_j \leq b_j$; $j = 1,\ldots, m$.

Die Intervallangaben in (22.3) betrachten wir als widerspruchsfrei, wenn sie im Raum R^m ein nicht-leeres konvexes Polyeder bestimmen. Bei der Annahme, daß eine unendliche Informationsfolge $I_1, I_2, I_3, \ldots$ zu einer Intervallschachtelung

(22.4) $[a_j, b_j]^{(I_k)}$; $k = 1,2, \ldots$

für alle j führt, sind die Voraussetzungen des Satzes 22.1a erfüllt, und es gilt:

Satz 22.2 :

Unter den Voraussetzungen (22.3) und (22.4) streben die Intervallangaben (22.3) gegen eine eindeutige Verteilung über den Zuständen $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$.

§ 23. LPI-Entropie; LPI-Informationsgehalt; Messung der Unschärfe

Eine LPI bedeutet eine Unschärfe der Verteilung der Zustände. Es ist also plausibel, die Frage nach einem Maß dieser Unschärfe zu stellen.

Die Shannon'sche Formel [Adam, Helten und Scholl 1970]

$$(23.1) \quad H \{\beta_1, \ldots, \beta_m\} = - \sum_{j=1}^{m} p_j(\beta_j) \log_2 p_j(\beta_j)$$

bestimmt die Entropie der Zustandsmenge $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ bei bekannter Verteilung $\rho = (p_1, \ldots, p_m)$. Die Entropie ist das Maß der Unbestimmtheit bezüglich der Zustandsrealisation. Da aber in den LPI-Bedingungen die Verteilung ρ im Bereich des entsprechenden Polyeders variabel ist, findet hier die Formel (23.1) keine unmittelbare Anwendung. In unseren Betrachtungen muß man zu einer neuen Zustandsmenge, der Menge $\{\rho\}$ aller möglichen Verteilungen, also zur Punktmenge des konvexen Polyeders übergehen. Da es sich um kontinuierliche Mengen im Raum R^m handelt, müßte man die Shannonsche Entropie für den Fall eines kontinuierlichen Zufallsvektors in Betracht ziehen. Da aber im allgemeinen die Verteilung über die Punktmenge des entsprechenden Polyeders nicht bekannt ist, könnte man nur, bei Voraussetzung der Gleichverteilung, die maximale Entropie bestimmen und sie als Maß der Verteilungsunschärfe betrachten. Das angegebene Verfahren ist kompliziert und für die Behandlung der LPI-Entropie nicht geeignet.

Im folgenden wird ein um vieles einfacheres Verfahren angewendet. Jeder LPI kann eine sogenannte geometrische Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden.

Das geschieht auf die Weise, daß man die Realisationswahrscheinlichkeit W(LPI) einer LPI, unter der Voraussetzung, daß keine Information über die Verteilung der

Punktmenge des entsprechenden Polyeders vorliegt, bestimmt. Sei $P^{(m)}$ die Punktmenge des Polyeders und $S^{(m)}$ die des Verteilungssimplexes. Wie üblich bei Bestimmung der geometrischen Wahrscheinlichkeiten, wird der Quotient von Volumeninhalt der "günstigen" Punkte und Volumeninhalt aller möglichen Punkte betrachtet. Hier handelt es sich offensichtlich um den Volumeninhalt, im allgemeinen, im m-dimensionalen Raum R^m. Also:

$$(23.2) \quad W(LPI) = \frac{\text{Vol } P^{(m)}}{\text{Vol } S^{(m)}} \; ; \quad m > 1$$

W(LPI) bedeutet die Wahrscheinlichkeit, daß die realisierte Verteilung über der Zustandsmenge $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ dem Bereich der Punktmenge des der LPI entsprechenden Polyeders $P^{(m)}$ angehört.

Es ist ganz plausibel, die Realisationswahrscheinlichkeit W(LPI) einer LPI als Maß der Unschärfe ("fuzziness") einer Verteilung über den Zuständen zu betrachten: Je größer W(LPI), desto größer die Unschärfe der LPI bezüglich der Verteilung. W(LPI) ist aber das relative Maß der Unschärfe, weil ja in (23.2) die absolute Unschärfe der LPI (Vol $P^{(m)}$) bezüglich der Verteilung im Verhältnis zur maximal möglichen Unschärfe (Vol $S^{(m)}$) betrachtet wird. Es ist plausibel, den Zähler in (23.2) als LPI-Entropie und den Nenner als maximale LPI-Entropie zu betrachten.

Es ist auch plausibel, analog wie in der Shannonschen Informationstheorie, W(LPI) als den Wert der relativen LPI-Entropie $H_{rel}^{(m)}$ (LPI) zu betrachten. Wir kommen auf diese Weise zur folgenden Definition:

Def. 23.1:

Die relative LPI-Entropie $H^{(m)}_{rel}$ (LPI) ist gleich dem Quotienten der Volumina des entsprechenden Polyeders und des Verteilungssimplexes.

$$(23.3) \qquad H^{(m)}_{rel}\ (LPI) = \frac{\text{Vol } P^{(m)}}{\text{Vol } S^{(m)}}\ ; \ m > 1$$

In (23.2) und (23.3) wird $m > 1$ vorausgesetzt, da ja für $m = 1$ gilt : Vol $S^{(1)} = 0$.

Gemäß (23.3) ist die relative LPI-Entropie eine Zahl aus dem offenen Intervall (0,1) :

$$(23.4) \qquad 0 < H^{(m)}_{rel}\ (LPI) < 1\ .$$

Die Endpunkte des Intervalls entsprechen den schon betrachteten zwei extremen Fällen:

a) Bei maximaler Unschärfe, d. h. vollständiger Ignoranz über die Verteilung der Zustände ist in (23.2)

$$\text{Vol } P^{(m)} = \text{Vol } S^{(m)} \Rightarrow H^{(m)}_{rel} = 1\ .$$

b) Die Verteilung ρ ist determiniert. Dann ist Vol $P^{(m)} = 0$, also $H^{(m)}_{rel} = 0$.

Im allgemeinen ist die Bestimmung der Volumina im m-dimensionalen Raum algorithmisch ziemlich schwierig. Es müssen entsprechende m-fache Integrale berechnet werden, gemäß der Formel

$$(23.4) \qquad \mathrm{Vol}\ P^{(m)} = \int_{P^{(m)}} \overset{(m)}{\cdots} \int d\,P^{(m)} .$$

Die Definition (23.1) mit (23.3) kann man noch umschreiben, indem man das m-fache Integral für das Simplex $S^{(m)}$ bestimmt. Wie bekannt [z.B. Meschkowski 1966], ist das Volumen eines n-dimensionalen Pyramidengebietes

$G^{(n)} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \forall i;\ x_i \geq 0 \wedge \Sigma x_i \leq h\}$ gleich

$$(23.5) \qquad \mathrm{Vol}\ G^{(n)} = \int_{G^{(n)}} \overset{n}{\cdots} \int d\,G^{(n)} = \frac{h^n}{n!} .$$

Daraus läßt sich die Formel für das Volumen des Simplexes ableiten:

$$(23.6) \qquad \mathrm{Vol}\ S^{(m)} = \frac{\sqrt{m}}{(m-1)!} \ ; \ m > 1 .$$

Die Definitionsformel (23.3) lautet also, gemäß (23.6):

$$(23.7) \qquad H_{rel}^{(m)}\ (\mathrm{LPI}) = \frac{(m-1)!}{\sqrt{m}} \cdot \mathrm{Vol}\ P^{(m)} .$$

Jetzt folgt der Übergang zur absoluten LPI-Entropie (kurz LPI-Entropie mit der Bezeichnung $H^{(m)}(LPI)$).
Es gilt:

$$(23.8) \qquad \frac{H^{(m)}\ (LPI)}{H^{(m)}_{max}\ (LPI)} = \frac{\text{Vol } P^{(m)}}{\text{Vol } S^{(m)}} = H^{(m)}_{rel}\ (LPI)\ .$$

Nun führen wir als Einheit $\delta^{(m)}$ der LPI-Entropie die für m maximale Entropie $H^{(m)}_{max}$ (LPI), also die Entropie bei vollständiger Ignoranz bezüglich der Verteilung, ein.

<u>Def. 23.2:</u>

<u>$\delta^{(m)}$ ist die maximale LPI-Entropie bezüglich der Verteilung bei m Zuständen ($P^{(m)} = S^{(m)}$).</u>

Aus (23.7) und (23.8) folgt:

$$(23.9) \qquad H^{(m)}\ (LPI) = \frac{(m-1)!}{\sqrt{m}}\ \text{Vol } P^{(m)}\,\delta^{(m)}$$

Die (absolute) LPI-Entropie enthält also $\frac{(m-1)!}{\sqrt{m}}$ Vol $P^{(m)}$ $\delta^{(m)}$ Einheiten.

Für die Beispiele in § 19 berechnen wir jetzt $H^{(m)}_{rel}$ und $H^{(m)}$:

1. Investorbeispiel (§ 19.1) : LPI : $p_1 \geq p_2$.

$H^{(2)}_{rel}$ (LPI) = 0,5; $H^{(2)}$ (LPI) = 0,5 $\delta^{(2)}$.

2. Hypothesenprüfung (§ 19.2) : LPI : $p_1 \leq p_2 \leq p_3$.

$H^{(3)}_{rel}$ (LPI) = $\frac{1}{6}$; H^3 (LPI) = $\frac{1}{6}$ $\delta^{(3)}$.

3. Hypothesenprüfung (§ 19.2, Modifizierung) :

LPI : $p_1 + p_2 \geq p_3$

$H^{(3)}_{rel}$ (LPI) = 0,75; $H^{(3)}$ = $\frac{3}{4}$ δ (3)

4. Prognosen (§ 19.3); LPI : $\frac{3}{5} \leq p_1 \leq \frac{4}{5}$,

$\frac{1}{5} \leq p_2 \leq \frac{3}{5}$; $0 \leq p_3 \leq \frac{2}{5}$.

$H^{(3)}_{rel}$ (LPI) = $\frac{1}{25}$; $H^{(3)}$ (LPI) = $\frac{1}{25}$ $\delta^{(3)}$.

Wir führen nun den Begriff des LPI-Informationsgehaltes ein. Ähnlich wie beim Begriff des Informationsgehalts in der Shannon'schen Theorie wird als Maß des LPI-Informationsgehaltes die Verminderung der Entropie betrachtet:

Def. 23.3:

Der Übergang vom $(LPI)_1$-Polyeder $P_1^{(m)}$ zum $(LPI)_2$-Polyeder $P_2^{(m)}$ hat den Informationsgehalt

$$Q(P_1^{(m)} \to P_2^{(m)}) = \frac{(m-1)!}{\sqrt{m}} (\mathrm{Vol}\ P_1^{(m)} - \mathrm{Vol}\ P_2^{(m)}) \cdot \delta^{(m)}.$$

Die Einheit des LPI-Informationsgehalts ist gemäß (23.9) die Einheit $\delta^{(m)}$. Aus der Def. 23.3 folgt, daß man die LPI-Entropie als denjenigen LPI-Informationsgehalt betrachten kann, der zur Bestimmung der realisierten Verteilung der Zustände nötig ist.

Als Beispiel betrachten wir den Übergang von $(LPI)_1 : p_1 + p_2 \geq p_3$ zu $(LPI)_2 : p_1 \leq p_2 \leq p_3$ in § 19.2 (Hypothesenprüfung). Dem Übergang entspricht der Informationgsgehalt

$$Q\ ((LPI)_1 \to (LPI)_2) = (\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{6})\ \delta^{(3)} = \tfrac{7}{12}\ \delta^{(3)}.$$

Vom Standpunkt der LPI-Entropie lassen sich die Sätze 22.1a und 22.1b wie folgt formulieren:

Satz 23.1. : Die LPI-Entropie strebt monoton fallend gegen Null bei der

Voraussetzung einer LPI-Kette mit entsprechender Polyederschachtelung.

b) <u>Die LPI-Entropie für eine endliche LPI-Kette mit bekannter Verteilung für das letzte Polyeder ist gleich Null.</u>

§ 24. LPI bei stetigen Verteilungen

Bisher behandelten wir nur den LPI-Fall für diskrete Verteilungen. Jetzt soll gezeigt werden, daß bei gewissen Voraussetzungen auch bei stetigen Verteilungen LPI-Betrachtungen möglich sind.

Sei X eine stetige, auf der ganzen Zahlengeraden definierte Zufallsvariable. Die Dichtefunktion $f(x, \theta^{(i)})$ und die Verteilungsfunktion $F(x, \theta^{(i)})$ sind bis auf eine diskrete Menge von möglichen Verteilungsparametervektoren $\{\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(\gamma)}\}$ bestimmt. Es gibt also eine diskrete Schar von möglichen Dichtefunktionen $f(x, \theta^{(1)}), \ldots, f(x, \theta^{(\gamma)})$ auf dem Stichprobenraum der Zufallsvariablen X , zum Beispiel die Normalverteilung mit dem variablen Verteilungsparametervektor $(\mu_1, \sigma_1), \ldots, (\mu_\gamma, \sigma_\gamma)$.

Es könnte eine vollständige Information über die Verteilung der Zustandsmenge $\{\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(\gamma)}\}$ vorliegen. In dem Fall verschwindet die Unschärfe der Verteilungsparameter (man könnte ja die Erwartungswerte für die Verteilungsparameter bestimmen). Im zweiten extremen Fall, bei vollständiger Ungewißheit über diese Verteilung, kommen wir zur maximalen Unschärfe bezüglich der Verteilungsparameter - diese variieren im Bereich des entsprechenden Verteilungssimplexes $S^{(\gamma)}$. Nun wollen wir den dazwischenliegenden Fall betrachten. Über die Verteilung der Zustandsmenge $\{\theta^{(1)},\ldots,\theta^{(\gamma)}\}$ liegt eine LPI vor. Man kann also der LPI eine echte Teilmenge T (LPI), T (LPI) $\subset S^{(\gamma)}$, die ein konvexes Polyeder ist, zuordnen. Aufgrund der erörterten weiteren LPI-Definitionen läßt sich die gegebene LPI als Lösung eines Ungleichungssystems US (LPI) oder in Form der Extremalpunktematrix darstellen. Man kann hier auch den Fall betrachten, in dem aufgrund einer Folge von zusätzlichen Informationen über die Verteilungsparameter eine Folge von LPI (LPI-Kette) vorliegt. Im günstigen Fall könnte das zu einer Polyederschachtelung führen (§ 22).

Wie in § 23 kann man auch hier den Grad der stochastischen Unschärfe der Verteilungsrealisation aufgrund der entsprechenden LPI-Entropie bestimmen.

Es ist noch folgende Tatsache, die in der Praxis wesentlich sein kann, bemerkenswert. Statt die Existenz einer LPI über der Verteilung der Zustandsmenge $\{\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(\gamma)}\}$ vorauszusetzen, genügen die Voraussetzungen aus den Sätzen 20.1 und 20.2 für die einzelnen Komponenten des Parametervektors $\theta^{(i)}$. Sei $\theta^{(i)} = (\theta_1^{(i)}, \ldots, \theta_l^{(i)})$, dann folgt auf Grund der Sätze 20.1 und 20.2 die Existenz einer LPI über $\{\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(i)}\}$ aus der Existenz einer LPI für die Realisationsmöglichkeiten der einzelnen Verteilungsparameter $\{\theta_1^{(i)}\}, \ldots, \{\theta_l^{(i)}\}$.

Die Anwendung des LPI-Falls bei stetigen Verteilungen wird in Kap. 6 besprochen.

5. Kapitel: Das Max E_{min}-Prinzip

§ 25. Die axiomatische Begründung des Bernoulli-Prinzips

Das Grundmodell der Risikosituation wollen wir in der Form

$$(25.1) \quad [\{\alpha_i\};\{\beta_j\};\ \rho = (p_1, \ldots, p_m);\ [e_{ij}]\ ];$$

$$i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m$$

betrachten. Darin ist $\{\alpha_i\}$ die Menge der Aktionen bzw. der Strategien, $\{\beta_j\}$ die Zustandsmenge, $\rho = (p_1, \ldots, p_m)$ die bekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zustände β_j und $[e_{ij}]$ die Ergebnis-Matrix. Die Wahl der Aktion bzw. Strategie α_i bei Realisation des Zustandes β_j führt zum Ergebnis e_{ij}.

Im 2. Kapitel (§§8 und 9) wurde der Weg von der Präferenzordnung zum Erwartungsnutzen axiomatisch verfolgt, der ja zugleich auch ein Weg von der Ergebnis-Matrix $[e_{ij}]$ zur Nutzenmatrix $[u_{ij}]$ ist. Unter Hinwendung auf die axiomatische Begründung unseres Max E_{min}-Prinzips (§26) wiederholen wir zunächst noch einmal kurz die Axiome des Bernoullinutzens:

<u>Axiom 1 :</u> Existenz einer transitiven Präferenzstruktur für die Ergebnisse $\{e_{ij}\}$. Sei die Menge $\{e_{ij}\}$ mit der Menge $\{e_1, \ldots, e_r\}$ äquivalent. Dann gilt für zwei beliebige Ergebnisse e_α, e_β entweder die Präferenzaussage $\succ$ oder die Indifferenzaussage $\sim$; beide sind transitiv.

Also:

$$e_\alpha \succ e_\beta \wedge e_\beta \succ e_\gamma \Rightarrow e_\alpha \succ e_\gamma .$$

Im weiteren wird die Präferenzstruktur

$$e_1 \succ e_2 \succ \ldots \succ e_r$$

angenommen.

Axiom 2: Reduktion von zusammengesetzten Lotterien.
Bei Zusammensetzung von Lotterien $L^{(i)} = (p_1^{(i)}e_1, \ldots, p_r^{(i)}e_r)$ $i = 1, \ldots, s$ gilt $(q_1L^{(1)}, \ldots, q_sL^{(s)}) \sim (\overline{p}_1e_1, \ldots, \overline{p}_re_r)$ mit $\overline{p}_i = q_1p_i^{(1)} + \ldots + q_sp_i^{(s)}$. Es gelten also die bekannten Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Axiom 3 : Kontinuität. Für jedes e_α existiert ein μ_α, wobei $0 \le \mu_\alpha \le 1$, so daß

$$e_\alpha \sim (\mu_\alpha e_1, (1- \mu_\alpha)\, e_r) = \tilde{e}_\alpha .$$

Axiom 4 : Substituierbarkeit. In jeder Lotterie ist e_α durch $\tilde{e}_\alpha$ substituierbar.

Axiom 5 : Transitivität der Präferenz und Indifferenz für Lotterien.

Axiom 6 : Monotonie. Für zwei Lotterien $(pe_1, (1 - p)\, e_r)$ und $(p'e_1, (1 - p')\, e_r)$ gilt

$$(pe_1, (1 - p)\, e_r) \succcurlyeq (p'e_1, (1 - p')\, e_r) \Leftrightarrow p \ge p'.$$

Es läßt sich beweisen (vgl.§8), daß bei Erfüllung der Axiome 1 - 6 :

1) der Übergang im Modell (25.1) von der Ergebnis-Matrix $[e_{ij}]$ zur Nutzenmatrix $[u_{ij}]$ bis auf eine lineare positive Transformation eindeutig möglich ist,
2) dem rational handelnden Entscheidungsträger das Bernoulli-Entscheidungsprinzip logisch aufgezwungen ist.

Dieses Entscheidungsprinzip von Bernoulli lautet:

Die optimale Entscheidung muß den Nutzenerwartungswert maximieren.

Es gibt also einen Übergang vom Modell (25.1) zum Modell

$$(25.2)\quad [\{\alpha_i\};\{\beta_j\};\ \rho = (p_1,\dots, p_m);\ [\mu_{ij}]\ ];$$

$$i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,m.$$

und im Bereich $\{\alpha_i\}$ erfüllt eine optimale Strategie $\alpha^* = \alpha_{i*}$ die Bedingung

$$(25.3)\quad \sum_{j=1}^{m} \mu_{i*j}\, p_j = \max_i \sum_{j=1}^{m} \mu_{ij}\, p_j = V(\alpha^*).$$

Das Bernoulli-Prinzip (25.3) folgt aus den axiomatischen Voraussetzungen derart, daß die Axiome 1 – 6 eine Dominanzdefinition im Bereich $\{\alpha_i\}$ induzieren:

Eine Strategie α_k dominiert die Strategie α_l dann und nur dann, wenn der Nutzenerwartungswert für α_k nicht kleiner als der Nutzenerwartungswert für α_l ist:

$$(25.4)\quad \alpha_k \text{ dom } \alpha_l \Leftrightarrow E(\alpha_k) \geq E(\alpha_l).$$

Aus (25.4) folgt unmittelbar (25.3).
Den Nutzenwert $V(\alpha^*)$ aus (25.3) definiert man als den Wert der Entscheidungssituation (25.2). Bei der Wahl der optimalen Strategie α^* wird also der Nutzenwert $V(\alpha^*)$ gewährleistet. Es ist offensichtlich, daß im behandelten Modell der Wert $V(\alpha^*)$ nur stochastisch erreichbar ist.
Es ist auch bemerkenswert, daß $V(\alpha^*)$ der größtmögliche gewährleistete Wert ist, eine Tatsache, die für jeden Wert einer Entscheidungssituation gilt.

§ 26. Das Max E_{min}-Prinzip. Axiomatische Begründung

Wir wollen nun das Modell (25.1) unter der Voraussetzung einer partiellen Information (PI) über die Verteilung ρ der Zustände β_j betrachten. Insbesondere interessiert uns der Fall einer linearen partiellen Information (LPI). Es handelt sich also um das Modell

$$(26.1)\quad [\{\alpha_i\};\ \{\beta_j\};\ LPI(\rho);\ [e_{ij}]\ ];\ i = 1,\dots,n; j = 1,\dots,m.$$

Da eine LPI eine Unbestimmtheit bezüglich der Verteilung bedeutet, ist hier das Bernoulli-Prinzip nicht anwendbar. Offensichtlich ist das mit diesem Prinzip verbundene Axiomensystem nicht hinreichend. Bei der Ergänzung des Axiomensystems müssen zwei Postulate berücksichtigt werden:

a) Das Axiomensystem muß eine Dominanzdefinition im Strategienbereich $\{\alpha_i\}$ induzieren;

b) die aufgrund der Dominanzdefinition bestimmte optimale Strategie α^* muß den Wert der Entscheidungssituation $V(\alpha^*)$ gewährleisten.

Ad b): Der Wert $V(\alpha^*)$ einer Entscheidungssituation kann deterministisch oder nur stochastisch erreichbar sein. So wird in linearen Programmen oder in strikt determinierten Zweipersonen-Nullsummenspielen bei der Anwendung einer optimalen Strategie der Wert $V(\alpha^*)$ deterministisch gewährleistet, während dies in Spielen im Bereich der gemischten Strategien oder in Spielen gegen die Natur bei bekannter Zustandsverteilung nur stochastisch möglich ist.

Das Axiomensystem 1 – 6 erfüllt beide Postulate im Bereich der Risikosituationen (25.1).
Es induziert die Dominanzdefinition (25.4) und führt zum Bernoulli-Prinzip, also zu einer optimalen Strategie α^*, die den Wert der Entscheidungssituation (25.2) gewährleistet. Im LPI-Modell (26.1) müssen die Axiome 1 – 6 aufrechterhalten werden. Sie ermöglichen den Übergang von der Ergebnis-Matrix $[e_{ij}]$ zur Nutzenmatrix $[u_{ij}]$. Auf diese Weise folgt der Übergang vom Modell (26.1) zum Modell

(26.2) $[\{\alpha_i\}\ ;\ \{\beta_j\}\ ;\ \text{LPI}\ (\rho);\ [u_{ij}]\ ];$

$$i = 1,\ldots, n;\ j = 1,\ \ldots,\ m.$$

Die Berücksichtigung der Postulate a) und b) folgt aufgrund des zusätzlichen Axioms 7:

Axiom 7:

Bei gegebener LPI wird jeder Strategie α_i eine Lotterie L(LPI; α_i) zugeordnet, die im LPI-Bereich den entsprechenden Nutzenerwartungswert minimiert.

Das Axiom 7 induziert im Strategienbereich $\{\alpha_i\}$ eine LPI-Dominanzdefinition:

LPI-Dominanzdefinition

Eine Strategie α_k dominiert die Strategie α_l dann und nur dann, wenn der im LPI-Bereich minimale Nutzenerwartungswert für α_k nicht kleiner ist als der entsprechende minimale Nutzenerwartungswert für α_l :

(26.3) $\alpha_k \text{ dom } \alpha_l \Leftrightarrow \min\limits_{LPI} E(\alpha_k) \geq \min\limits_{LPI} E(\alpha_l)$.

Aufgrund der Axiome 1 - 7 wird dem rational handelnden Entscheidungsträger folgendes Entscheidungsprinzip logisch aufgezwungen:

Das Max E_{min}-Prinzip:

Die Strategie α^* ist nur dann optimal, wenn der im LPI-Bereich minimale Nutzenerwartungswert für α^* maximal ist bezüglich der minimalen Nutzenerwartungswerte für alle möglichen Strategien.

(26.4) $\alpha^* \text{ ist optimal} \Leftrightarrow \min\limits_{LPI} E(\alpha^*) = \max\limits_{\{\alpha_i\}} \min\limits_{LPI} E(\alpha_i)$.

Wie aus den weiteren Überlegungen folgt, sind in (26.4) die Maxima und Minima erreichbar.

Der Beweis dafür, daß aus den Axiomen 1 - 7 die Dominanzdefinition und das Max E_{min}-Prinzip folgen, wird analog zum Beweis für das Bernoulli-Prinzip geführt, da ja das Axiom 7 die LPI-Situation in eine Risikosituation verwandelt. Die Axiome 1 - 6 begründen den Übergang in (26.2) von der Ergebnis-Matrix $[e_{ij}]$ zur Nutzenmatrix $[u_{ij}]$ und das zusätzliche Axiom 7 gewährleistet den aufgrund des Max E_{min}-Prinzips bestimmten Wert $V(\alpha^*)$ der Entscheidungssituation. Im Gegensatz zum Bernoulli-Fall, bei dem der Wert $V(\alpha^*)$ stochastisch erreichbar ist, ist im LPI-Fall <u>mindestens</u> $V(\alpha^*)$ stochastisch erreichbar. Es sei jedoch angemerkt, daß jede vom Axiom 7 verschiedene Zuordnung einer Lotterie einer gegebenen LPI zur Verletzung des Postulates b) führt: Der geänderte Wert $V(\alpha^*)$ kann im allgemeinen nicht gewährleistet werden, obwohl das Postulat a) aufrechterhalten werden kann.

Das definierte Max E_{min}-Prinzip kann als gleichzeitige Verallgemeinerung des Bernoulli-Prinzips und des Maximin-Prinzips für den Fall der Ungewißheit betrachtet werden. Es ist bemerkenswert, daß Versuche einer Beschränkung der LPI-Situationen auf das Bernoulli-Prinzip als gescheitert betrachtet werden müssen [Fishburn 1964; Kofler 1974]. Aus den weiteren Betrachtungen folgt, daß in den LPI-Situationen nur das Max E_{min}-Prinzip gewährleistet, wesentliche Begriffe wie den des Wertes der Entscheidungssituation und den des semantischen Informationswertes einzuführen. Auch Sensitivitätsanalysen sind unter LPI-Bedingungen nur aufgrund des Max E_{min}-Prinzips möglich.

§ 27. Spieltheoretische Auffassung

1. Das algorithmische Verfahren

In diesem Abschnitt wird die Frage der spieltheoretischen Aspekte einer LPI-Entscheidungssituation behandelt. Der hier bewiesene Satz 27.1 führt unmittelbar zu einem

algorithmischen Lösungsverfahren.
Sei (26.2) die aus (26.1) aufgrund der Axiome 1 - 6 erhaltene LPI-Entscheidungssituation. Die LPI kann nach Def. 18.2 - 4 1. als echtes Teilgebiet T(LPI) des entsprechenden Verteilungssimplex $S^{(n)}$, 2. als Ungleichungssystem US(LPI) und 3. als Extremalpunkte-Matrix M(LPI) vorliegen. Hier wird die M(LPI)-Form bevorzugt, für 1. und 2. wird also der Übergang zur entsprechenden M(LPI) erforderlich.

Sei $\{\rho^{(1)}, \ldots, \rho^{(k)}\}$ die den k Extremalpunkten entsprechende Menge der Extremalpunkte-Verteilungen mit

(27.1) $\rho^{(\gamma)} = (p_1^{(\gamma)}, \ldots, p_m^{(\gamma)}); \gamma = 1, \ldots, k.$

M(LPI) ist dann die aus den Spaltenvektoren $\rho^{(\gamma)}$ gebildete Matrix:

(27.2) $M(LPI) = [\rho^{(1)} \ldots \rho^{(k)}].$

Es läßt sich folgender Satz beweisen:

<u>Satz 27.1:</u>

<u>Die Lösung des LPI-Entscheidungsproblems (26.2) führt aufgrund des Max E_{min}-Prinzips zur Anwendung des Maximin-Prinzips im Spiel gegen die Natur:</u>

$$G = [\{\alpha_i\} ; \{\rho^{(\gamma)}\}; A(\alpha_i, \rho^{(\gamma)})]; \; i = 1, \ldots, n; \; \gamma = 1, \ldots, k$$

(27.3) mit $A(\alpha_i, \rho^{(\gamma)}) = [u_{ij}] \cdot M(LPI) = [u_{ij}] \cdot [\rho^{(1)} \ldots \rho^{(k)}]$.

Dabei ist $\{\alpha_i\}$ die Strategienmenge des Entscheidungsträgers, $\{\rho^{(\gamma)}\}$ die neue Zustandsmenge (Strategienmenge der Natur) und $A(\alpha_i, \rho^{(\gamma)})$ die Spielmatrix.

Beweis:

Gemäß (27.2) ist es zweckmäßig, von der Zustandsmenge $\{\beta_j\}$ in (26.2) zur Menge aller im LPI-Bereich möglichen Verteilungen überzugehen. Da aber aufgrund des Max E_{min}-Prinzips für alle Strategien $\{\alpha_i\}$ nur die minimalen Nutzenerwartungswerte berücksichtigt werden, genügt es, die neue Zustandsmenge auf die Menge der Extremalverteilungen zu beschränken. Das folgt aus dem bekannten Satz [Intriligator 1971], der besagt, daß eine lineare Funktion über einem konvexen Polyeder ein Extremum (wenn überhaupt) nur in einem Eckpunkt annehmen kann. In unserem Fall ist für alle $(i, \rho^{(\gamma)})$ der Nutzenerwartungswert $E(\alpha_i; \rho^{(\gamma)}) = \sum_{j=1}^{m} u_{ij}\, p_j^{(\gamma)}$ eine lineare Funktion von $(p_1^{(\gamma)}, \ldots, p_m^{(\gamma)})$.

Wir gelangen auf diese Weise zum Spiel gegen die Natur (27.3) und nach dem Max E_{min}-Prinzip muß in dem Spiel das Maximin-Prinzip angewendet werden. Die Spielmatrix erhält man aus den entsprechenden Nutzenerwartungswerten. Es gilt:

$$(27.4)\quad A(\alpha_i, \rho^{(\gamma)}) = [E(\alpha_i, \rho^{(\gamma)})] = [\sum_{j=1}^{m} u_{ij} p_j^{(\gamma)}]$$

$$= [u_{ij}]\cdot[\rho^{(1)} \ldots \rho^{(k)}] = [u_{ij}]\cdot M(LPI),$$

was eben zu beweisen war.

Gemäß (27.4) führt ein einfaches algorithmisches Verfahren zur Ermittlung der Spielmatrix $A(\alpha_i, \rho^{(\gamma)})$. Es genügt, das Produkt aus Nutzenmatrix $[u_{ij}]$ und Extremalpunkte-Matrix M(LPI) zu bestimmen,

$$(27.5)\quad A(\alpha_i, \rho^{(\gamma)}) = [u_{ij}]\cdot[\rho^{(1)} \ldots \rho^{(k)}] .$$

(27.5) kann als Verallgemeinerung der "Bernoulli-Spalte" betrachtet werden. Dazu führt folgende Überlegung:

Bei bekannter Verteilung $\hat{\rho} = (\hat{p}_1,\ldots,\hat{p}_m)$ ist das Modell (26.2) ein Risikomodell, das aufgrund des Bernoulli-Prinzips gelöst wird. Es müssen also die entsprechenden Nutzenerwartungswerte $E(\alpha_i,\hat{\rho}) = \sum_{j=1}^{m} u_{ij}\hat{p}_j$ berechnet werden; über diesen Werten wird maximiert. Die Entscheidungsmatrix reduziert sich auf diese Weise auf eine "Bernoulli-Spalte":

$$(27.6)\quad A(\alpha_i,\hat{\rho}) = [u_{ij}]\cdot[\hat{\rho}]\ .$$

Es ist offensichtlich, daß die Formel (27.5) als Verallgemeinerung der Formel (27.6) bei variabler Verteilung betrachtet werden kann.

Satz 27.1 kann auch auf andere Weise formuliert werden, indem die Entscheidung (26.2) als Zweipersonen-Nullsummenspiel aufgefaßt wird.

<u>Satz 27.2:</u>

<u>Die optimale Strategie des Entscheidungsträgers in (26.2) und der Entscheidungswert sind mit der optimalen Strategie des Spielers I und mit dem Wert des Zweipersonen-Nullsummenspiels</u>

$$(27.7)\quad G(LPI) = [\{\alpha_i\};\{\rho^{(\gamma)}\};A(\alpha_i,\rho^{(\gamma)})];i= 1,\ldots,n;\quad \gamma = 1,\ldots,k.$$

<u>äquivalent.</u>

Der Beweis wird analog zu dem des Satzes 27.1 durchgeführt.

Bezüglich (27.7) sind zwei Fälle zu berücksichtigen:

a) Das Spiel G(LPI) ist strikt determiniert. Dann existiert im Bereich der reinen Strategien eine optimale, maximinimale Strategie α^* und der Wert des Spiels $V(\alpha^*)$ beinhaltet, daß für den Entscheidenden mindestens der Nutzenerwartungswert $V(\alpha^*)$ stochastisch erreichbar ist.

b) Das Spiel ist nicht strikt determiniert. In diesem Fall wird es erweitert, indem der Bereich der gemischten Strategie $\{\alpha\}$ eingeführt wird. Eine in diesem Bereich optimale Strategie $\hat{\alpha}$ führt im allgemeinen zu einem größeren Nutzenerwartungswert $V(\hat{\alpha})$:

$$V(\hat{\alpha}) \geq V(\alpha^*).$$

Der stochastisch erreichbare Wert $V(\hat{\alpha})$ der Entscheidungssituation (26.2) ist aber mit einem höheren Grad der semantischen Unbestimmtheit verbunden als im Fall a).

Das Problem der stochastischen Grade der semantischen Unbestimmtheit in Entscheidungssituationen wird im weiteren noch behandelt werden.

2. Ein Beispiel

Es ist folgende Entscheidungssituation zu lösen (E - der Entscheidende, N - die Natur).

(27.8)

ρ	p_1	p_2	p_3
	β_1	β_2	β_3
α_1	e_4	e_1	e_6
α_2	e_3	e_5	e_2

Darin ist $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ die Strategienmenge des Entscheidungsträgers, $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ die Zustandsmenge,

$\begin{bmatrix} e_4 & e_1 & e_6 \\ e_3 & e_5 & e_2 \end{bmatrix}$ die Ergebnis-Matrix und $\rho = (p_1, p_2, p_3)$ die Zustandsverteilung.

Es sei vorausgesetzt: Die Axiome 1 - 7 sind erfüllt, gegeben ist die Präferenzstruktur $e_1 \succ e_2 \succ \ldots \succ e_6$ und gemäß dem Kontinuitätsaxiom liegen folgende Indifferenzaussagen vor:

(27.9) $e_2 \sim (\frac{3}{5}e_1, \frac{2}{5}e_6); e_3 \sim (\frac{2}{5}e_1, \frac{3}{5}e_6); e_4 \sim (\frac{1}{5}e_1, \frac{4}{5}e_6); e_5 \sim (\frac{1}{5}e_1, \frac{4}{5}e_6)$.

Über die Verteilung ρ liegt nur eine LPI vor:

(27.10) $p_1 + p_2 \geq p_3; p_1, p_2, p_3 \geq 0; p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Die Lösung soll aufgrund des Max E_{min}-Prinzips bestimmt werden.

Der Übergang von der Ergebnis-Matrix $[e_{ij}]$ zur Nutzenmatrix $[u_{ij}]$ folgt aufgrund von (27.9). Aus der Annahme $u(e_1) = 1$, $u(e_6) = 0$ erhalten wir

(27.11) $[u_{ij}] = \begin{bmatrix} 0,2 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,6 \end{bmatrix}$

Der LPI entspricht die Extremalpunkte-Matrix

$$M(LPI) = [\rho^{(1)} \; \rho^{(2)} \; \rho^{(3)} \; \rho^{(4)}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Die Spielmatrix ergibt sich zu

$$A\ (\alpha_i, \rho^{(\gamma)}) = [u_{ij}] \cdot [\rho^{(1)} \rho^{(2)} \rho^{(3)} \rho^{(4)}]$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Es ist also folgendes Zweipersonen-Nullsummenspiel zu lösen:

(27.12)

	$\rho^{(1)}$	$\rho^{(2)}$	$\rho^{(3)}$	$\rho^{(4)}$
α_1	1	0,2	0,5	0,1
α_2	0,2	0,4	0,4	0,5

Hier könnte man zwei Fälle unterscheiden:

a) Lösung im Bereich der reinen Strategien. Das Maximin-Prinzip führt zur optimalen Strategie α_2 , die mindestens den Nutzenerwartungswert $V(\alpha_2) = 0{,}2$ gewährleistet. Dieser Fall kommt nicht in Betracht, da ja in (27.11) auch bei vollständiger Ignoranz über die Zustandsverteilung ρ die Strategie α_2 den Nutzenwert 0,2 deterministisch sichert.

b) Lösung im Bereich der gemischten Strategien (Das Spiel (27.12) ist nicht strikt determiniert). Die bekannte Lösungsmethode für $2 \times n$ -Spielmatrizen ermittelt die optimale Strategie $\alpha^*(\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$, die mindestens den Nutzenerwartungswert $V(\alpha^*) = 0{,}36$ gewährleistet.

Zur Entscheidungssituation (27.8) übergehend, erhält man aufgrund des Max E_{min}-Prinzips folgende Lösung: Die optimale gemischte Strategie ist $\alpha^*(\frac{1}{5},\frac{4}{5})$, der Wert der Entscheidungssituation beträgt $e^* \sim (0{,}36\ e_1; 0{,}64\ e_2)$.

Das Endergebnis bedeutet, daß im Superspiel (27.8) (die Situation (27.8) ist beliebig oft wiederholbar) bei Anwendung der optimalen Strategie $\alpha^*(\frac{1}{5},\frac{4}{5})$ durchschnittlich mindestens die Situation $e^* \sim (0{,}36\ e_1;\ 0{,}64\ e_2)$ stochastisch erreichbar ist. Es gilt also für die erreichte Situation $\hat{e}$ die Präferenzaussage $\hat{e} \succ e^*$. Allerdings ist der Grad der semantischen Unbestimmtheit für die Strategie α^* höher als in Risikosituationen, da zum Zufallsvektor ρ noch der Zufallsvektor $\alpha^*(\frac{1}{5},\frac{4}{5})$ hinzuzufügen ist.

§ 28. Das Max E_{min}-Prinzip und der semantische Informationswert

(28.1) Sei $ES^{(1)} = [\{\alpha_i\}; \{\beta_j\}; LPI^{(1)}; [u_{ij}]];$

$$i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,m.$$

eine Entscheidungssituation mit gegebener $LPI^{(1)}$ über die Zustandsverteilung ρ. Die im Modell (28.1) enthaltenen Daten bezeichnen wir als Informationsmenge $I^{(1)}$. Nun betrachten wir einen Übergang von der Informationsmenge $I^{(1)}$ zur Informationsmenge $I^{(2)}$ (Bezeichnung $I^{(1)} \to I^{(2)}$). Folgende Aufgabe soll gelöst werden: Wie läßt sich der semantische Informationswert des Überganges $I^{(1)} \to I^{(2)}$ bestimmen?

In der semantischen Informationstheorie wird gewöhnlich der Informationswert für eine gegebene Entscheidungssituation als entsprechender Zuwachs des Entscheidungssituationswertes definiert [Kofler 1968, Menges 1972, 1974].

Als Ausgangspunkt muß also der Wert $V(ES^{(1)})$ der Entscheidungssituation $ES^{(1)}$ betrachtet werden.

Hier zeigt sich wieder die Unentbehrlichkeit des Max E_{min}-Prinzips. Gemäß den Ausführungen in § 26 führt nur das Max E_{min}-Prinzip unter den LPI-Bedingungen zur Ermittlung des Wertes einer gegebenen Entscheidungssituation.

Sei der dem Übergang $I^{(1)} \rightarrow I^{(2)}$ der Informationsmenge entsprechende Übergang der Entscheidungssituation $ES^{(1)} \rightarrow ES^{(2)}$. Dann kann man verschiedene Fälle berücksichtigen, indem man mögliche Änderungen in der Nutzenmatrix, in den Strategienmengen und in der LPI über die Zustandsverteilung in Betracht zieht. Man könnte auch die Wahrheit bzw. Falschheit der Aussage $I^{(1)} \rightarrow I^{(2)}$ analysieren. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf folgenden Fall.

Dem Übergang $I^{(1)} \rightarrow I^{(2)}$ entspricht nur eine LPI-Änderung: Aufgrund zusätzlicher Informationen (z.B. eines statistischen Verfahrens) hat sich erwiesen, daß nicht $LPI^{(1)}$, sondern $LPI^{(2)}$ den wahren Sachverhalt bezüglich der Zustandsverteilung übermittelt. Es gilt also:

$$(28.2) \quad I^{(1)} \rightarrow I^{(2)} \Rightarrow LPI^{(1)} \rightarrow LPI^{(2)}.$$

Sei α^{*1} die aufgrund des Max E_{min}-Prinzips bestimmte optimale Strategie in (28.1). Gemäß (28.2) hat sich aber erwiesen, daß α^{*1} nicht die optimale Strategie ist. Die neue $LPI^{(2)}$ führt zur optimalen Strategie α^{*2}. Damit können wir schon den semantischen Informationswert $V(I^{(1)} \rightarrow I^{(2)})$ ermitteln. Seien die den Strategien α^{*1}, α^{*2} entsprechenden Entscheidungswerte $V(\alpha^{*1})$, $V(\alpha^{*2})$.
Dann gilt

$$(28.3) \quad V(I^{(1)} \rightarrow I^{(2)}) = V(\alpha^{*2}) - V(\alpha^{*1}).$$

Dem Übergang $LPI^{(1)} \rightarrow LPI^{(2)}$ entspricht also der entsprechende Zuwachs des Entscheidungssituationswertes.

Noch eine Bemerkung zum Begriff des Informationswertes netto: In der Praxis ist oft der Übergang von einer Informationsmenge $I^{(1)}$ einer Entscheidungssituation zu einer anderen $I^{(2)}$ mit Kosten verbunden. Sei $K(I^{(1)} \rightarrow I^{(2)})$ die Kostenfunktion der Informationsänderung $I^{(1)} \rightarrow I^{(2)}$. Unter Berücksichtigung der Kosten erhalten wir den Informationswert netto $\bar{V}$ für den Fall, daß die Nutzenmatrix $[u_{ij}]$ und die Kostenfunktion K in Geldeinheiten ausgedrückt sind:

$$(28.4) \qquad \bar{V}(I^{(1)} \rightarrow I^{(2)}) = V(\alpha^{*2}) - V(\alpha^{*1}) - K(I^{(1)} \rightarrow I^{(2)}).$$

Das Vorzeichen von $\bar{V}$ kann auch negativ sein. In dem Fall könnte man die Informationsänderung $I^{(1)} \rightarrow I^{(2)}$ als nicht lohnend betrachten, allerdings nur im statischen Sinn, da ja eine im statischen Sinn nicht lohnende Informationsänderung im dynamischen Sinn eine lohnende sein kann.

Unsere Überlegungen kann man auch in dem für die Praxis wichtigen Fall anwenden, daß in einer Pseudo-Risikosituation tatsächlich nur eine LPI über die Zustandsverteilung vorliegt. Als $I^{(1)}$ betrachten wir also eine konkrete Zustandsverteilung $\bar{p} = (\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_m)$ und als $I^{(2)}$ eine aufgrund zusätzlicher Informationen (z.B. eines statistischen Verfahrens) festgestellte LPI. Dann erhalten wir für den Informationswert netto

$$(28.5) \qquad \bar{V}(I^{(1)} \rightarrow I^{(2)}) = V(\alpha^*) - V(\alpha_B) - K(I^{(1)} \rightarrow I^{(2)}).$$

und für den Informationswert brutto

$$(28.6) \qquad V(I^{(1)} \rightarrow I^{(2)}) = V(\alpha^*) - V(\alpha_B).$$

Darin ist α_B die der Pseudo-Verteilung $\bar{\rho}$ entsprechende Bernoulli-optimale Strategie und α^* die aufgrund des Max E_{min}-Prinzips und der gegebenen LPI bestimmte optimale Strategie.

Ein einfaches Zahlenbeispiel:

(28.7)

	$p_1=\frac{1}{6}$ β_1	$p_2=\frac{1}{3}$ β_2	$p_3=\frac{1}{2}$ β_3
α_1	5	0	1
α_2	2	1	1

In dieser Entscheidungssituation ist gemäß $I^{(1)}$ die Zustandsverteilung $\rho = (\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ angenommen. Die Nutzenerwartungen sind $E(\alpha_1) = \frac{4}{3}$ und $E(\alpha_2) = \frac{7}{6}$, die Lösung aufgrund des Bernoulli-Prinzips ist damit $[\alpha_1;\ V(\alpha_1) = \frac{4}{3}]$. Ein zusätzliches Verfahren führe zu $I^{(2)}$. Es zeigt sich, daß $I^{(1)}$ falsch war. Gemäß $I^{(2)}$ ist nur die LPI$(p_1 \leq p_2 \leq p_3)$ über die Zustandsverteilung bekannt. Der Entscheidungswert $V(\alpha_1) = \frac{4}{3}$ ist also nicht erreichbar.

Jetzt muß das Max E_{min}-Prinzip angewendet werden. Für die LPI wird die Extremalpunkte-Matrix bestimmt.

$$M(LPI) = M(p_1 \leq p_2 \leq p_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Die Spielmatrix ist $A(\alpha_i, \rho^{(\gamma)}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$

Das Zweipersonen-Nullsummenspiel

$$(28.8) \qquad \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

ist strikt determiniert. Seine Lösung ist $[\alpha_2; V(\alpha_2) = 1]$. Als optimale Strategie hat sich α_2 (nicht α_1!) erwiesen, und der Entscheidungswert ist $V(\alpha_2) = 1$. Der Entscheidungsträger hat also mindestens den Nutzenerwartungswert 1 gesichert.

Wir wollen nun den Informationswert $V(I^{(1)} \to I^{(2)})$ bestimmen. Gemäß (28.3) muß der entsprechende Zuwachs des Entscheidungswertes ermittelt werden. Wesentlich ist hier, daß $V(\alpha_1)$ nicht aufgrund der Situation (28.7) - sie ist ja fiktiv - sondern aufgrund (28.8) bestimmt wird

$$V(I^{(1)} \to I^{(2)}) = V(\alpha_2) - V(\alpha_1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Weitere Beispiele folgen im 6. Kapitel. Der Begriff des dynamischen Informationswertes wird im 7. Kapitel erörtert. In einer weiteren Publikation[1] wird auf analoge Weise der Begriff des semantischen Wertes einer statistischen Inferenz eingeführt.
Schließlich sei noch der Begriff des <u>A-posteriori-Informationswertes</u> unter LPI-Bedingungen erwähnt. In § 21 wurden einige Sätze über die Existenz einer LPI-Struktur für eine A-posteriori-Verteilung bewiesen. Aufgrund des Max E_{min}-Prinzips kann jetzt der Begriff des A-posteriori-Informationswertes unter LPI-Bedingungen eingeführt werden.

---

1) Menges G. und E. Kofler: Statistische Methoden bei partieller Information. Springer Verlag, Heidelberg 1977.

In der Entscheidungssituation

$$(28.9)\quad ES = [\{\alpha_i\}; \{A_j\}; LPI(V^{(1)}); [u_{ij}]]; i = 1,\ldots,n; \; j = 1,\ldots,m.$$

ist $LPI(V^{(1)})$ die LPI über die A-priori-Verteilung $V^{(1)} = (P(A_1),\ldots, P(A_m))$. Nun wird ein Verfahren B realisiert. Es wird vorausgesetzt, daß für die Likelihood-Verteilung $V^{(2)} = (P(B|A_1), \ldots, P(B|A_m))$ die $LPI(V^{(2)})$ vorliegt. Dann ist aufgrund der Bayes'schen Formel und des Satzes 21.1 für die A-priori-Verteilung

$$(28.10)\quad V^{(3)} = (P(A_1|B), \ldots, P(A_m|B)) \text{ die } LPI(V^{(3)})$$

gegeben.

<u>Def. 28.1</u>

<u>Unter dem A-posteriori-Informationswert in (28.9) verstehen wir den Informationswert des Überganges von der A-priori-Verteilung $V^{(1)}$ zur A-posteriori-Verteilung $V^{(3)}$.</u>

Seien α^{*1}, α^{*3} die aufgrund des Max E_{min}-Prinzips bestimmten optimalen Strategien der ES (28.9) bei $LPI(V^{(1)})$ bzw. $LPI(V^{(3)})$. Dann läßt sich der in Def. 28.1 formulierte A-posteriori-Informationswert $V_{A\text{-}post}$ ausdrücken:

$$(28.11)\quad V_{A\text{-}post} = V(LPI^{(1)} \rightarrow LPI^{(3)}) = V(\alpha^{*3}) - V(\alpha^{*1}).$$

Es ist offensichtlich, daß der so definierte A-posteriori-Informationswert äquivalent ist mit dem semantischen Wert des Verfahrens B für die Entscheidungssituation (28.9). Diese Tatsache ist wesentlich für die Bewertung der statistischen Inferenz.

Der Satz 21.3 betrifft das Bayes-Kettenverfahren. Unsere Betrachtungen führen auf ganz analoge Weise zu dem Begriff des Wertes eines Bayes-Kettenverfahrens unter LPI-Bedingungen (siehe § 30).

§ 29. Sensitivitätsanalytische Untersuchungen. Optimale Steuerung

Aus dem umfangreichen Bereich der sensitivitätsanalytischen Betrachtungen einer Entscheidungssituation [z.B. Dinkelbach 1969] wollen wir hier nur die beiden folgenden Probleme erörtern:

Gegeben eine LPI-Entscheidungssituation

(29.1) $ES = [\{\alpha_i\};\{\beta_j\};LPI;[u_{ij}]];\ i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,m.$

a) Es ist die Sensitivität (Empfindlichkeit) des Wertes der Entscheidungssituation ES gegenüber der Veränderung einzelner Komponenten des Modells zu bestimmen.

b) Im Modell (29.1) ist eine optimale Informationsänderung (optimale Steuerung) zu bestimmen.

Ad a): Hier werden Fragen der Sensitivität gegenüber Informationsänderungen im Bereich der Strategienmenge $\{\alpha_i\}$, der Zustandsmenge $\{\beta_j\}$, der gegebenen LPI und der Elemente der Nutzenmatrix $[u_{ij}]$ behandelt.

Sei $\{\Delta I\}$ die Menge aller möglichen Informationsänderungen ΔI, die gewisse Restriktionsbedingungen (RB) erfüllen. Die Frage der Sensitivität σ gegenüber einer Informationsänderung ΔI in LPI-Entscheidungen kann nur aufgrund des Max E_{min}-Prinzips gelöst werden.

Def. 29.1

Die Sensitivität $\sigma(\Delta I)$ gegenüber einer gegebenen Informationsänderung ΔI ist der durch ΔI verursachte Zuwachs $\Delta V(ES;\Delta I)$ des Entscheidungswertes $V(ES)$.

Also gilt für die Sensitivität gegenüber den Informationsänderungen $\Delta I^{(1)}$, $\Delta I^{(2)}$ die Beziehung:

$$(29.2) \quad \sigma_{ES}(\Delta I^{(1)}) \geq \sigma_{ES}(\Delta I^{(2)}) \Leftrightarrow \Delta V(ES;\Delta I^{(1)}) \geq \Delta V(ES;\Delta I^{(2)}).$$

Beim Vergleich der Sensitivität gegenüber den Informationsänderungen $\Delta I^{(1)}$, $\Delta I^{(2)}$ ist also folgendes Verfahren anzuwenden:

1) Aufgrund des Max E_{min}-Prinzips wird der Entscheidungswert $V(\alpha^*)$ bestimmt.

2) Ähnlich findet man für die durch $\Delta I^{(1)}$ bzw. $\Delta I^{(2)}$ veränderte ES die Lösungen $[\alpha^{*1}; V(\alpha^{*1})]$ bzw. $[\alpha^{*2}; V(\alpha^{*2})]$.

3) Die Sensitivität gegenüber den Informationsänderungen $\Delta I^{(1)}$ bzw. $\Delta I^{(2)}$ ist dann

$$\sigma_{ES}(\Delta I^{(1)}) = V(\alpha^{*1}) - V(\alpha^*), \text{ bzw. } \sigma_{ES}(\Delta I^{(2)}) = V(\alpha^{*2}) - V(\alpha^*).$$

Es gilt beispielsweise

$$V(\alpha^{*2}) > V(\alpha^{*1}) \Rightarrow \sigma_{ES}(\Delta I^{(2)}) > \sigma_{ES}(\Delta I^{(1)}).$$

Ad b) Die Frage der optimalen Informationsänderung wird hier auf folgende Weise behandelt. Es wird die den gegebenen Restriktionsbedingungen (RB) entsprechende Menge $\{\Delta I\}$ aller möglichen Informationsänderungen im Modell betrachtet. Die Restriktionen (RB) sind mit den technischen Bedingungen und beschränkten Ressourcen verbunden. Def. 29.1 und (29.2) induzieren über der Menge $\{\Delta I\}$ eine Präferenzordnung bezüglich der Sensitivität. Unter der Voraussetzung einer endlichen Menge $\{\Delta I\}$ ist die Existenz einer Informationsänderung $\Delta I^{(*)}$, die zur maximalen Sensitivität bei den Restriktionsbedingungen (RB) führt, gewährleistet. Die Informationsänderung $\Delta I^{(*)}$ bezeichnen wir als optimal oder auch als optimale Steuerung im Modell (29.1).

Def. 29.2

Eine Informationsänderung $\Delta I^{(*)}$ wird bei gegebenen Restriktionsbedingungen (RB) als optimal betrachtet (optimale Steuerung), wenn gilt:

$$(29.3) \qquad \sigma_{ES}(\Delta J^{(*)}) = \max_{\{\Delta I\}} \sigma_{ES}(\Delta I).$$

Die Ermittlung der optimalen Informationsänderung $\Delta I^{(*)}$ bestimmt gleichzeitig die Lösung folgender in der Praxis oft wesentlichen Frage: Es ist im Modell (29.1) die Komponente zu bestimmen, der gegenüber die Änderung des Entscheidungswertes im Bereich der (RB) am empfindlichsten ist. Das könnte z. B. ein Element u_{rs} der Matrix $[u_{ij}]$ sein oder eine Strategie α_k der Menge $\{\alpha_i\}$ usw.

Im Falle einer unendlichen Menge ΔI ist die Existenz des Maximums in (29.3) nicht unbedingt gewährleistet.

Dann existieren im allgemeinen nur ϵ-optimale Informationsänderungen (Steuerungen). Es gilt dabei, gemäß der Supremum-Definition:

$$(29.4)\quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \hat{\Delta I}(\epsilon) : \sigma_{ES}(\hat{\Delta I}) > \sup_{\{\Delta I\}} \sigma_{ES}(\Delta I) - \epsilon .$$

Zwar läßt sich $\Delta I \sup_{\{\Delta I\}} \sigma_{ES}(\Delta I)$ nicht realisieren, aber für jedes $\epsilon > 0$ existiert eine ϵ-optimale Steuerung $\hat{\Delta I}(\epsilon)$, für welche die entsprechende Sensitivität $\sigma_{ES}(\hat{\Delta I})$ die Größe $\sup_{\{\Delta I\}} \sigma_{ES}(\Delta I) - \epsilon$ übertrifft.
Die algorithmische Bestimmung der optimalen Informationsänderungen in Entscheidungen unter LPI-Bedingungen kann schwierig sein. Einfache Zahlenbeispiele folgen im 6. Kapitel. Der Begriff der Sensitivität wurde hier nur im statischen Sinn behandelt. In mehrstufigen Entscheidungen muß man den Begriff dynamisieren. Das geschieht im 7. Kapitel.

§ 30. Das Max E_{min}-Prinzip bei LPI-Ketten

In § 22 wurden LPI-Ketten eingeführt. Dementsprechend wollen wir nun voraussetzen, daß in der LPI-Entscheidungssituation

$$(30.1)\quad [\{\alpha_i\}; \{\beta_j\}; \{LPI^{(k)}\}, [u_{ij}]]; \; i = 1,\dots,n; \; j = 1,\dots,m; \; k = 1,2,3,\dots$$

eine LPI-Kette $\{LPI^{(k)}\}$ über die Zustandsverteilung $\rho = (p_1,\dots,p_m)$ mit entsprechender Polyederschachtelung $P_1 \supset P_2 \supset \dots;\ \lim_{k\to\infty} P^{(k)} = \rho^*(p_1^*,\dots,p_m^*)$ vorliegt. Der betrachtete Fall kann in der Praxis vorkommen, wenn z. B. in einer LPI-Entscheidung eine Informationsfolge die Unbestimmtheit bezüglich der Zustandsverteilung allmählich vermindert, bis eine eindeutige Verteilung ρ^* ermittelt ist (Risikosituation).

Wir wollen einige Sätze über die Anwendung des Max E_{min}-Prinzips bei LPI-Ketten beweisen.

Seien die aufgrund des Max E_{min}-Prinzips bestimmten Lösungen

$[\alpha^{*k}; V_k(\alpha^{*k})]$; $k = 1,2,...$

dann gilt

Satz 30.1 :

a) Die Folge der optimalen Strategien (α^{*k}) strebt gegen die für die Verteilung ρ^* Bernoulli-optimale Strategie $\alpha_B(\rho^*)$:

$$(30.2) \qquad \lim_{k\to\infty} \alpha^{*k} = \alpha_B(\rho^*).$$

b) Die Folge der entsprechenden Entscheidungswerte $(V(\alpha^{*k}))$ ist nicht fallend und strebt gegen den für die Verteilung ρ^* bestimmten Bernoulli-Entscheidungswert $V_B(\rho^*)$:

$$(30.3) \qquad V_1(\alpha^{*1}) \leq V_2(\alpha^{*2}) \leq ...$$

$$\lim_{k\to\infty} V_k(\alpha^{*k}) = V_B(\rho^*).$$

Beweis:

Ad a): Gemäß Satz 27.2 muß man im allgemeinen den Bereich $\{\alpha\}$ der gemischten Strategien betrachten. Unter Strategienkonvergenz versteht man hier die Konvergenz der entsprechenden Komponenten. Also bei $\alpha^{*k} = (\alpha^*_{1k}, ..., \alpha^*_{nk})$ ist (30.2) äquivalent mit

$$(30.4) \qquad \lim_{k\to\infty} \alpha^*_{\gamma k} = \bar{p}^*_\gamma; \alpha_B(\rho^*) = (\bar{p}^*_1, ..., \bar{p}^*_n); \gamma = 1, ..., n.$$

Aus der Polyederschachtelung in (30.1) folgt, daß die Polyederfolge gegen einen Punkt strebt. Aus der Tatsache, daß die optimale Strategie α^{*k} als Funktion $\alpha^{*k}(P^{(k)})$ des

LPI-Polyeders $P^{(k)}$ betrachtet, eine stetige Funktion ist und daß das Bernoulli-Verfahren als Grenzfall des Max E_{min}-Verfahrens bei einer Polyederschachtelung betrachtet werden kann , folgt a).

Ad b) 1. Es ist offensichtlich, daß für jede Strategie α_i und Polyederschachtelung $P^{(1)} \supset P^{(2)} \supset \ldots$ die aufeinanderfolgenden minimalen Nutzenerwartungen im Bereich der entsprechenden Polyeder eine nicht fallende Folge bilden:

$$(30.5) \quad E_{min}(\alpha_i;P^{(1)}) \leq E_{min}(\alpha_i;P^{(2)}) \leq \ldots; \; i = 1,\ldots,n.$$

Es ist nicht schwer festzustellen, daß (30.5) auch im Bereich der gemischten Strategien $\{\alpha\}$ gilt. Es genügt daher, jedes Glied von (30.5) über $\{\alpha\}$ zu maximieren, und man erhält $V_1(\alpha^{*1}) \leq V_2(\alpha^{*2}) \leq \ldots$, w.z.b.w.

2. Die Folge $(V_k(\alpha^{*k}))$ ist monoton und beschränkt. Sie besitzt also einen Grenzwert. Aus der Stetigkeit des Entscheidungswertes $V_k(\alpha^{*k})$, den wir als Funktion der optimalen Strategie α^{*k} betrachten und aus der Tatsache, daß das Max E_{min}-Verfahren im Grenzfall zum Bernoulli-Verfahren führt, folgt

$$\alpha^{*k} \rightarrow \alpha_B(\rho^*) \Rightarrow V_k(\alpha^{*k}) \rightarrow V_B(\rho^*), \text{ w.z.b.w.}$$

<u>Satz 30.2</u>:

<u>**Für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ existiert ein hinreichend kleines $\delta > 0$, so daß für alle Polyeder $P^{(k)}$ mit einem Diameter D kleiner als δ die Abweichung des entsprechenden Max E_{min}-Wertes $V_k(P^{(k)})$ von Bernoulli-Wert $V_B(\rho^*)$ kleiner als ε ist.**</u>

$$(30.6)\ \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta(\epsilon) > 0:\ D(P^{(k)}) < \delta \Rightarrow |V_B(\rho^*) - V_k(P^{(k)})| < \epsilon.$$

Hierbei ist der Diameter D eines konvexen Polyeders $P^{(k)}$ der maximale Abstand d zweier Punkte K_1, K_2 des Polyeders:

$$D(P^{(k)}) = \max_{K_1, K_2 \in P^{(k)}} d(K_1, K_2).$$

Beweis:

Aus (30.3) folgt, daß für beliebiges $\epsilon > 0$ ein Index $N(\epsilon)$ existiert, der die Beziehung

$k > N(\epsilon) \Rightarrow |V_k(\alpha^{*k}) - V_B(\rho^*)| < \epsilon$ erfüllt.

Sei $\delta(\epsilon)$ der Diameter des dem α^{*N} zugeordneten Polyeders $P^{(N)}$. Es ist offensichtlich, daß das auf diese Weise bestimmte $\delta(\epsilon)$ die Beziehung (30.6) erfüllt, w.z.b.w.
Aus dem Satz 30.2 geht hervor, daß bei unbekannter Zustandsverteilung ρ^* ein Approximationsverfahren theoretisch möglich ist, das die Verteilung ρ^* durch eine entsprechende LPI-Polyederfolge ersetzt. Die Max E_{min}-Lösungen für diese Folge bestimmen eine ϵ-Approximation für den unbekannten Bernoulli-Entscheidungswert $V_B(\rho^*)$.

Schließlich noch zu einem besonderen Fall der Sätze 30.1 und 30.2, der für praktische Anwendungen wesentlich ist. Es wird vorausgesetzt, daß in der Entscheidung (30.1) als LPI-Kette eine Quaderschachtelung $Q^{(1)} \supset Q^{(2)} \supset \ldots$ vorliegt. Jeder Quaderschachtelung entspricht eine Intervallschachtelung für alle Zustandswahrscheinlichkeiten p_j:

$$(30.7)\ \forall j:\ \mu_j^{(k)} \leq p_j \leq \nu_j^{(k)};\ [\mu_j^{(k)}, \nu_j^{(k)}] =$$

$$= I_j^{(k)};\ I_j^{(1)} \supset I_j^{(2)} \supset \ldots;\ \lim_{k \to \infty} I_j^{(k)} = \hat{p}_j.$$

Wenn nun die aufgrund des Max E_{min}-Prinzips bestimmte Lösung für die Entscheidung (30.1) bei den Intervallangaben $I_j^{(k)}$; $j = 1,\ldots,m$ zu $[\alpha^{*k}; V_k(\alpha^{*k})]$; $k = 1,2,\ldots$ führt, gelten die Sätze 30.1 und 30.2. Auch für eine Intervallschachtelung streben demnach die Max E_{min}-optimalen Strategien gegen die Bernoulli-optimale Strategie, ist die Folge der entsprechenden Max E_{min}-Entscheidungswerte nicht fallend und strebt gegen den Bernoulli-Entscheidungswert. Ebenfalls gilt die entsprechende Aussage über die Möglichkeit einer ε-Approximation. Die Sätze für den Fall einer Intervallschachtelung **finden eine Anwendung** im nächsten **Band im Zusammenhang mit der Theorie der Konfidenzintervalle** (siehe Fußnote auf S. 152).
Die bewiesenen Sätze haben auch eine prinzipielle Bedeutung im theoretischen Sinn. Sie zeigen die Zusammenhänge zwischen der Bernoulli-Lösung in Risikosituationen und der Max E_{min}-Lösung in Situationen mit unbestimmter Zustandsverteilung. Wir wiederholen noch einmal: Unter der Voraussetzung einer Polyederschachtelung kann die Bernoulli-optimale Strategie als Grenzwert der Folge von **Max E_{min}-optimalen Strategien - und der Bernoulli-Entscheidungswert** als Grenzwert der Folge von Max E_{min}-Entscheidungswerten betrachtet werden.

Die Sätze 30.1 und 30.2 wurden formuliert und bewiesen unter der Annahme, daß die den Kettengliedern $(LPI)^{(k)}$ entsprechenden modifizierten Entscheidungssituationen $ES^{(k)}$ wahre Situationen darstellen und zu den Lösungen $[\alpha^{*k}; V_k(\alpha^{*k})]$ führen ($k = 1,2,\ldots$).

In praktischen Anwendungen ist es aber durchaus möglich, daß die LPI-Kette z. B. als Folge eines statistischen Verfahrens vorliegt und dabei die Glieder der LPI-Kette eine allmählich genauere Feststellung der LPI über die Zustandsverteilung bestimmen. In dem Fall ist erst das **letzte LPI-Glied als wahr und alle vorhergehenden als falsch zu betrachten.**

Sei $LPI^{(s+1)}, \dots, LPI^{(s+t)}$

eine endliche Teilfolge aus der Folge $\{LPI^{(k)}\}_{k} = 1,2,\dots$ bei entsprechender Polyederschachtelung. Dann gilt für den Fall, daß allen Gliedern wahre Situationen entsprechen, analog zu (30.3)

$$(30.8) \quad V_{s+1}(\alpha^{*(s+1)}) \leq V_{s+2}(\alpha^{*(s+2)}) \leq \dots \leq V_{s+t}(\alpha^{*(s+t)}).$$

In (30.3) sind $\alpha^{*(s+1)}, \dots, \alpha^{*(s+t)}$ die optimalen Strategien. Der Fall wahrer Situationen liegt z. B. dann vor, wenn gewisse Maßnahmen zur allmählichen Beschränkung der möglichen Zustandsverteilungen führen.

Wenn aber erst das letzte Glied der wahren Situation entspricht und alle vorhergehenden als fiktiv angesehen werden müssen, sind auch die Wertefunktionen $V_{s+1}, \dots, V_{s+t-1}$ in (30.8) fiktiv und wir erhalten

$$(30.9) \quad V_{s+t}(\alpha^{*(s+1)}) \leq V_{s+t}(\alpha^{*(s+2)}) \leq \dots \leq V_{s+t}(\alpha^{*(s+t)}).$$

Entsprechendes gilt für die unendliche Folge $\{LPI^{(k)}\}$. Das Ergebnis in (30.9) läßt sich auch in der Informationswert-Terminologie formulieren: Sei $I^{(s+1)} \to I^{(s+t)}$ der Übergang vom Informationszustand $I^{(s+1)}$ zum Informationszustand $I^{(s+t)}$. Erst der letzte ist der wahre Informationszustand. Dann erhalten wir aus (30.9) den Informationswert

$$(30.10) \quad V_{ES}(I^{(s+1)} \to I^{(s+t)}) = V_{s+t}(\alpha^{*(s+t)}) - V_{s+t}(\alpha^{*(s+1)}).$$

Der Informationswert für den Übergang $I^{(s+1)} \to I^{(s+t)}$ ist also bei einer Polyederschachtelung nicht negativ. Das Einbeziehen der Kosten K des Übergangs führt zum Netto-Informationswert für die gegebene endliche LPI-Kette:

$$(30.11) \quad \bar{V}_{ES}(I^{(s+1)} \to I^{(s+t)}) = V_{s+t}(\alpha^{*(s+t)}) - V_{s+t}(\alpha^{*(s+1)}) - K(I^{(s+1)} \to I^{(s+t)}).$$

Man kann auch die Sensitivität des Entscheidungswertes gegenüber den möglichen LPI-Ketten analysieren. Wir beschließen unsere Ausführungen mit folgender Bemerkung:
Im Satz 23.1 wurde festgestellt, daß unter der Voraussetzung einer LPI-Kette mit entsprechender Polyederschachtelung die LPI-Entropie monoton fallend gegen Null strebt. Im Satz 30.1 hat sich erwiesen, daß unter denselben Voraussetzungen die Folge der entsprechenden Entscheidungswerte nicht fallend ist. Auch für jede endliche Teilfolge einer LPI-Kette mit Polyederschachtelung ist die LPI-Entropie monoton fallend und gleichzeitig ist der semantische Informationswert nicht negativ und nicht fallend. Es scheint, daß auch der umgekehrte Satz richtig ist: Wenn für eine gegebene ES jeder monoton fallenden LPI-Entropie-Folge eine nicht fallende Folge der semantischen Informationswerte entspricht, muß eine Teilfolge einer LPI-Kette mit Polyederschachtelung vorliegen. Allerdings entsprechen im allgemeinen gleiche Verminderungen der LPI-Entropie nicht gleichen Zuwächsen des Informationswertes.

§ 31. Der LPI-Fall einer zusammengesetzten Entscheidungssituation. Der komponente und globale Informationswert

Es liege folgendes Vielziele-Maximierungsproblem vor:
ν Ziele mit den Zielfunktionen $Z^{(1)},\ldots,Z^{(\nu)}$ werden betrachtet. Jede Zielfunktion $Z^{(i)} (i = 1,\ldots,\nu)$ ist mit einer Entscheidungssituation $ES^{(i)}$ bei Ungewißheit (Spiel

gegen die Natur) verbunden. Die Strategienmenge ist $X^{(i)}$, die Zustandsmenge $Y^{(i)}$, die Entscheidungsmatrix $[Z^{(i)}]$. Es ist eine $LPI^{(i)}$ über die Verteilung der Zustände $Y^{(i)}$ gegeben. Also

$$(31.1) \quad ES^{(i)} = [X^{(i)};\ Y^{(i)}; LPI^{(i)}; [Z^{(i)}]\ ];\ i = 1,\dots,\nu.$$

Hier wird nur ein diskretes Modell betrachtet; die Mengen $X^{(i)}$, $Y^{(i)}$ sind endlich. Die Entscheidungsmatrix $[Z^{(i)}]$ bestimmt die Abbildung des kartesischen Produktes der Strategienmenge $X^{(i)}$ und Zustandsmenge $Y^{(i)}$ in die Wertemenge der Zielfunktion $Z^{(i)}$:

$$(31.2) \quad [Z^{(i)}]:\ X^{(i)} \times Y^{(i)} \to Z^{(i)};\ i = 1,\dots,\nu\ .$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß die mit den Zustandsmengen $Y^{(i)}$ verbundenen Zufallsvariablen unabhängig sind. Jede $(ES)^{(i)}$ wird als komponente Entscheidungssituation betrachtet, die zur Maximierung der Zielfunktion $Z^{(i)}$ führt. Bezüglich der Mengen $X^{(i)}$ und $Y^{(i)}$ wird wie üblich vorausgesetzt, daß sie vollständig sind und daß die einzelnen Strategien in $X^{(i)}$ bzw. $Y^{(i)}$ sich paarweise ausschließen. Für jede $ES^{(i)}$ führt das aufgrund der $(LPI)^{(i)}$ angewendete Max E_{min}-Prinzip zur Lösung der komponenten Optimierungsaufgabe.

Betrachten wir aber das ν-Ziele-Problem. Es ist eine optimale Strategie für das Gesamtmodell, das durch Zusammensetzung der komponenten Entscheidungssituationen $ES^{(i)}$ entsteht, zu bestimmen. Das Gesamtmodell, in dem alle Ziele gleichzeitig berücksichtigt werden, soll globales Modell $(\hat{ES})$ heißen. Es ist zu beachten, daß die Einheiten der Zielfunktionen im allgemeinen verschieden sein können. Wir wollen das Modell $\hat{ES}$ konstruieren.

Bei der Zusammensetzung komponenter Entscheidungssituationen muß man im allgemeinen als Strategien - bzw. Zustandsmenge des globalen Modells die kartesischen Produkte aus komponenten Strategien- und Zustandsmengen in Betracht ziehen. Die Elemente der resultierenden Entscheidungsmatrix sind in dem Fall ν -dimensionale Vektoren, deren Komponenten Elemente der entsprechenden komponenten Entscheidungsmatrixen $[Z^{(i)}]$ sind. Also:

(31.3) $$\hat{ES} = [X;\ Y;\ \overline{\overline{LPI}};\ [Z]\ ] \text{ mit}$$

$$X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_\nu;\quad Y = Y^{(1)} \times Y^{(2)} \times \ldots \times Y^{(\nu)};$$

$$[Z] = \Gamma(Z^{(1)}, \ldots, Z^{(\nu)})].$$

und mit resultierender $\overline{\overline{LPI}}$ über die Verteilung der Zustandsmenge Y. Daß bei der Zusammensetzung aus den $LPI^{(i)}$ wieder eine $\overline{LPI}$ resultiert, folgt aus den Sätzen 20.1 und 20.2.

In (31.3) ist wie üblich vorausgesetzt, daß die Strategien in X bzw. Y sich nicht überschneiden. Die Vollständigkeit der Mengen X,Y ergibt sich aus der Vollständigkeit der komponenten Mengen in (31.2).

Der Übergang von den komponenten Entscheidungssituationen $ES^{(i)}$ zur zusammengesetzten $\hat{ES}$ ist nur dann möglich, wenn die Strategienmengen X und Y realisierbar sind, wenn also für X keine Ressourcen-Restriktionen vorliegen und alle Naturstrategien in Y real sind. Sonst muß man von den Strategienmengen X und Y zu X' bzw. Y' übergehen. X' ist die Reduktion von X gemäß den Ressourcen-Restriktionen und Y' die Reduktion von Y auf die aktuell möglichen Naturstrategien.

Hier ein einfaches Beispiel. Die komponenten Entscheidungssituationen seien:

$$(31.4)\quad ES^{(1)} = [X^{(1)} = \{x_1^1, x_2^1\}; Y^{(1)} = \{y_1^1, y_2^1\};\ LPI^{(1)}: p_1 \geq p_2;\ [Z^{(1)}] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}]$$

$$ES^{(2)} = [X^{(2)} = \{x_1^2, x_2^2\}; Y^{(2)} = \{y_1^2, y_2^2\};\ LPI^{(2)}: q_1 \geq q_2;\ [Z^{(2)}] = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}].$$

Unter der Voraussetzung, daß beim Übergang zur zusammengesetzten $\hat{ES}$ keine Beschränkungen für X bzw. Y vorliegen, erhalten wir folgendes Gesamtmodell:

$\hat{ES} = [X; Y; \overline{LPI}; [Z]]$ mit

$$X = \{(x_1^1, x_1^2), (x_1^1, x_2^2), (x_2^1, x_1^2), (x_2^1, x_2^2)\};\ Y = \{(y_1^1, y_1^2), (y_1^1, y_2^2), (y_2^1, y_1^2), (y_2^1, y_2^2)\};$$

$$r_1 = (y_1^1, y_1^2),\ r_2 = (y_1^1, y_2^2),\ r_3 = (y_2^1, y_1^2),\ r_4 = (y_2^1, y_2^2).$$

$$(31.5)\quad \overline{LPI}\ (r_1, r_2, r_3, r_4):\ r_1 - r_2 - r_3 + r_4 \geq 0;$$

$$r_2 - r_4 \geq 0;\ r_3 - r_4 \geq 0$$

$$\text{und } [Z] = \begin{bmatrix} (a_1, a_2) & (a_1, b_2) & (b_1, a_2) & (b_1, b_2) \\ (a_1, c_2) & (a_1, d_2) & (b_1, c_2) & (b_1, d_2) \\ (c_1, a_2) & (c_1, b_2) & (d_1, a_2) & (d_1, b_2) \\ (c_1, c_2) & (c_1, d_2) & (d_1, c_2) & (d_1, d_2) \end{bmatrix}$$

Die $\overline{LPI}$ (r_1, r_2, r_3, r_4) wurde wie im Beispiel auf S.118 bestimmt. Die Elemente der Entscheidungsmatrix [Z] sind zweidimensionale Vektoren.

Wenn z. B. in X die Strategie (x_1^1, x_2^2) nicht realisierbar ist (Ressourcen-Beschränkung) und der Zustand $r_4 = (y_2^1, y_2^2)$ nicht möglich ist, folgt ein Übergang zu den neuen Strategienmengen:

$$X' = \{(x_1^1, x_1^2), (x_2^1, x_1^2), (x_2^1, x_2^2)\} ;$$

$$Y' = \{(y_1^1, y_1^2), (y_1^1, y_2^2), (y_2^1, y_1^2)\} \quad \text{und}$$

zur entsprechend verminderten 3×3-**Entscheidungsmatrix.** Dabei ist zu beachten, daß für die Zustandsverteilung eine **neue** $\hat{LPI}(r_1, r_2, r_3)$ vorliegt.

$$\hat{LPI}(r_1, r_2, r_3) : \quad r_1 - r_2 - r_3 \geq 0 \; .$$

Wir wollen nun das Problem der Lösung des Gesamtmodells (31.3) aufgrund des Max E_{min}-Prinzips erörtern. Es müssen zwei Fälle berücksichtigt werden:

a) Die zusammengesetzten Strategienmengen X und Y sind realisierbar, also der Übergang zu den reduzierten Mengen X' bzw. Y' entfällt. In diesem Fall, der in praktischen Anwendungen nicht oft vorliegt, ist die Optimierung des Vielziele-Modells einfach:

   Für jede komponente Entscheidungssituation

$$(31.1) \quad ES^{(i)} = [X^{(i)}; Y^{(i)}; LPI^{(i)}; [Z^{(i)}]]; i = 1, \ldots, \nu.$$

   bestimmen wir aufgrund der $LPI^{(1)}$ die Max E_{min}-optimale Strategie x^{*i} und den Entscheidungswert $V_i(x^{*i})$. Die optimale Strategie kann auch dem Bereich der gemischten Strategien angehören. Dann betrachten wir die aus den komponenten Entscheidungssituationen (31.1) zusammengesetzte resultierende Entscheidungssituation (31.3). Gemäß der Struktur von (31.3) gehört dem Strategienbereich X sicher die Strategie $x^{*i} = (x^{*1}, x^{*2}, \ldots, x^{*\nu})$ an.

Es ist offensichtlich, daß x^* die Max E_{min}-Strategie für das Gesamtmodell unter den $\overline{LPI}$-Bedingungen ist, daß sie also das Vielziele-Modell in dem gegebenen LPI-Fall maximiert. Der entsprechende Entscheidungswert ist

$$(31.6) \quad V(x^*) = (V_1(x^{*1}), \ldots, V_\nu(x^{*\nu})).$$

In diesem ersten Fall ist also die optimale Lösung des globalen Modells eine einfache Zusammensetzung der komponenten optimalen Lösungen. Es ist wieder zu beachten, daß im allgemeinen die komponenten Entscheidungswerte $V_i(x^{*i})$ in (31.6) in verschiedenen Einheiten ausgedrückt sein können.

Noch einmal zum Beispiel (31.4).
Die komponenten Entscheidungssituationen in der üblichen Normalform seien:

$$(31.7) \quad ES^{(1)}: \begin{array}{c|cc} & p_1 \geq & p_2 \\ & y_1^1 & y_2^1 \\ \hline x_1^1 & 7 & 1 \\ x_2^1 & 2 & 5 \end{array} \; ; \quad ES^{(2)}: \begin{array}{c|cc} & q_1 \geq & q_2 \\ & y_1^2 & y_2^2 \\ \hline x_1^2 & 3 & 4 \\ x_2^2 & 6 & 2 \end{array}$$

Die Lösung von (31.7) erfordert den Übergang zu neuen Zustandsmengen. Den LPI: $p_1 \geq p_2$ oder $q_1 \geq q_2$ entspricht die Extremalpunkte-Matrix

$$M(LPI) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

Das Max E_{min}-Prinzip führt zu den neuen Entscheidungsmatrizen:

$$[Z^{(1)\prime}] = [Z^{(1)}] \cdot M(LPI) = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 3\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[Z^{(2)\prime}] = [Z^{(2)}] \cdot M(LPI) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3\frac{1}{2} \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Die Max E_{min}-Lösung der komponenten Entscheidungen ist:

(31.8) $L(ES^{(1)}) = [x^{*1} = x_1^1;\ V_1(x^{*1}) = 4];$

$L(ES^{(2)}) = [x^{*2} = x_2^2;\ V_2(x^{*2}) = 4].$

Nunmehr vollziehen wir den Übergang zur zusammengesetzten (globalen) Entscheidungssituation $\hat{ES}$ unter der Voraussetzung, daß die in den entsprechenden kartesischen Produkten X bzw. Y enthaltenen zusammengesetzten Strategien realisierbar sind: (31.9) ist die Normalform des $\hat{ES}$.

(31.9) $\hat{ES}$:

	$\overline{LPI}(r_1,r_2,r_3,r_4)$ r_1	r_2	r_3	r_4
(x_1^1,x_1^2)	(7,3)	(7,4)	(1,3)	(1,4)
(x_1^1,x_2^2)	(7,6)	(7,2)	(1,6)	(1,2)
(x_2^1,x_1^2)	(2,3)	(2,4)	(5,3)	(5,4)
(x_2^1,x_2^2)	(2,6)	(2,2)	(5,6)	(5,2)

mit $\overline{LPI}(r_1,r_2,r_3,r_4)$:

$$\begin{cases} r_1-r_2-r_3+r_4 \geq 0 \\ r_2-r_4 \geq 0 \\ r_3-r_4 \geq 0 \\ r_1 \geq \frac{1}{4} \\ r_4 \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Daraus ist die Extremalpunkte-Matrix zu bestimmen. Wir erhalten

$$M(\overline{LPI}) = \begin{array}{cccc} \rho^{(1)} & \rho^{(2)} & \rho^{(3)} & \rho^{(4)} \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} .$$

Die Einführung der neuen Zustandsmenge und die Bestimmung der den Eckpunkte-Verteilungen $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \rho^{(3)}, \rho^{(4)}$ entsprechenden Erwartungswerte für die Auszahlungsvektoren in (31.9) führt zur Entscheidungssituation $\hat{ES}'$:

(31.10) $\hat{ES}'$:

	$\rho^{(1)}$	$\rho^{(2)}$	$\rho^{(3)}$	$\rho^{(4)}$
(x_1^1, x_1^2)	(7,3)	(4,3)	$(7\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$	$(4, 3\frac{1}{2})$
(x_1^1, x_2^2)	(7,6)	(4,6)	(7,4)	(4,4)
(x_2^1, x_1^2)	(2,3)	$(3\frac{1}{2}, 3)$	$(2, 3\frac{1}{2})$	$(3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$
(x_2^1, x_2^2)	(2,6)	$(3\frac{1}{2}, 6)$	(2,4)	$(3\frac{1}{2}, 4)$

Die Anwendung des Maximin-Prinzips in (31.10) führt zur Lösung des gesamten Zweiziele-Modells. Die Entscheidungsmatrix in(31.10) hat einen Sattelpunkt (4,4). Das Spiel ist also im Bereich der reinen Strategien strikt determiniert. Die optimale Strategie ist hier (x_1^1, x_2^2) und der Entscheidungswert (4,4), also mindestens je 4 Einheiten des Ziels $Z^{(1)}$ und des Ziels $Z^{(2)}$. In Übereinstimmung mit unserer Behauptung in (31.6) erhalten wir hier eine Zusammensetzung der komponenten optimalen Lösungen.

b) Wir betrachten jetzt den Fall, daß nicht alle Strategien in den zusammengesetzten Strategienmengen X und Y realisierbar sind. Der Fall liegt in der Praxis gewöhnlich vor, ist um vieles komplizierter als der vorige und ist äquivalent mit dem Vielziele-Problem unter LPI-Bedingungen. Gegeben ist also das Vielziele-Problem (31.1). Es folgt der Übergang zur zusammengesetzten Entscheidungssituation $\widehat{ES}$ (31.3). Nicht alle Strategien im Bereich von X bzw. Y sind realisierbar. Die entsprechende Reduktion von nicht realisierbaren Strategien führt zu den Mengen X' bzw. Y'. Auch die resultierende $\overline{LPI}$ über die Verteilung der Zustandsmenge Y' muß entsprechend auf Y' reduziert werden. Wir erhalten eine neue resultierende $\overline{LPI'}$. Die resultierende Entscheidungsmatrix $[Z]$ muß entsprechend zu X' und Y' reduziert werden, wir erhalten $[\bar{Z}]$. Die Elemente von $[\bar{Z}]$ sind wieder ν-dimensionale Vektoren. Auf diese Weise gelangen wir zu einer reduzierten zusammengesetzten Entscheidungssituation $\widehat{ES}'$. Hier ihre Normalform in vereinfachter Darstellung:

$$(31.11) \qquad \begin{array}{c|c} & \overline{LPI}' \\ & Y' \\ \hline X' & [\bar{Z}] = [a_{kl}] \end{array} \; ; \; a_{kl} = (a_{kl}^{1}, \ldots, a_{kl}^{\nu}).$$

Ihre Lösung ist um vieles schwieriger als im vorigen Fall, in dem sich die zusammengesetzte Strategie $x^* = (x^{*1}, \ldots, x^{*\nu})$ als optimal für das Gesamtmodell der Vielziele-Optimierung erwies. Hier ist es durchaus möglich, daß die Strategie x^* dem Strategiebereich X' nicht angehört.

Wieder müssen zwei Fälle in Betracht gezogen werden:

1) Die Komponenten der ν-dimensionalen Vektoren (der Elemente der Entscheidungsmatrix $[Z]$) sind in einer gemeinsamen Einheit λ (z.B. in Geld) ausdrückbar. Dann folgt der Übergang von Vektoren zu Skalaren, die man als entsprechende Summen der Komponenten erhält:

$$(31.12)\quad a_{kl} = (a^1_{kl}, \ldots, a^\nu_{kl}) = (\bar{a}^1_{kl}\lambda, \ldots, \bar{a}^\nu_{kl}\lambda) \rightarrow$$

$$\rightarrow \bar{a}^1_{kl} + \ldots + \bar{a}^\nu_{kl} = b_{kl}.^{1)}$$

Die optimale Gesamtstrategie für das Vielziele-Modell findet man dann als Max E_{min}-Strategie in der Entscheidungssituation

$$(31.13)\quad \hat{ES}': [X'; Y'; \overline{LPI}'; [b_{kl}]].^{1)}$$

2) Es existiert kein gemeinsames Maß λ für alle Komponenten der ν-dimensionalen Vektoren in der Entscheidungsmatrix $[Z]$. Dann muß über den Vektoren eine Präferenzordnung induziert werden. Als hinreichende Bedingung für die Existenz einer bis auf eine positive lineare Transformation eindeutig determinierten Nutzenfunktion $\bar{\mu}(a_{kl}) = \bar{\mu}_{kl}$ für die Vektoren (Ergebnisse der ES) könnte man, wie in § 25 das Erfülltsein der Axiome 1-6 annehmen. Nach der Einführung der Nutzenindizes $\{\bar{\mu}_{kl}\}$ erhält man das Gesamtmodell:

$$(31.14)\quad \hat{ES}': [X'; Y'; \overline{LPI}'; [\bar{\mu}_{kl}]]$$

Das Max E_{min}-Prinzip führt zur optimalen Strategie und zum Entscheidungswert (in $\bar{\mu}_{kl}$-Einheiten) des betrachteten Vielziele-Modells unter LPI-Bedingungen.

In besonderen Fällen führt manchmal ein einfacheres Verfahren zum Ziel: Zur Lösungsbestimmung genügt die Feststellung der Präferenzordnung nur für einige Ergebnisse der Entscheidungsmatrix. Hier ein Beispiel.

1) Der Vektor $(\bar{a}^1_{kl}, \ldots, \bar{a}^\nu_{kl})$ bestimmt die sog. Zielgewichtung.

Die komponenten Entscheidungssituationen $ES^{(1)}$ und $ES^{(2)}$ unter LPI-Bedingungen seien die aus (31.7). In der zusammengesetzten Entscheidungssituation ES sind aber nicht alle Strategien realisierbar. Es fallen die Strategien (x_1^1, x_2^2) und (y_2^1, y_2^2) weg. Damit liegen folgende reduzierte Strategienmengen X' und Y' vor:

$$X' = \{(x_1^1, x_1^2), (x_2^1, x_1^2), (x_2^1, x_2^2)\} \;;\; Y' = \{(y_1^1, y_1^2), (y_1^1, y_2^2), (y_2^1, y_1^2)\}$$

Die Zustandsverteilung ist (r_1, r_2, r_3).
Die $\overline{LPI}$'aus (31.9) reduziert sich auf

(31.15) $\overline{LPI}'$: $r_1 - r_2 - r_3 \geq 0$.

Es liegt also folgende zusammengesetzte Entscheidungssituation vor:

(31.16)

	r_1 (y_1^1, y_1^2)	r_2 (y_1^1, y_2^2)	r_3 (y_2^1, y_1^2)
(x_1^1, x_1^2)	(7,3)	(7,4)	(1,3)
(x_2^1, x_1^2)	(2,3)	(2,4)	(5,3)
(x_2^1, x_2^2)	(2,6)	(2,2)	(5,6)

$$\text{mit} \begin{cases} r_1 - r_2 - r_3 \geq 0 \\ r_1 \geq \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Der $\overline{LPI'}$ (31.15) entspricht die Eckpunkte-Matrix

$$M(\overline{LPI'}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \rho^{(1)} & \rho^{(2)} & \rho^{(3)} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array} .$$

Aufgrund des Max E_{min}-Prinzips werden die Extremal-Verteilungen als neue Zustandsmenge eingeführt.

Wir erhalten:

(31.16)

	$\rho^{(1)}$	$\rho^{(2)}$	$\rho^{(3)}$
(x_1^1, x_1^2)	(7;3)	$(7;3\frac{1}{2})$	(4;3)
(x_2^1, x_1^2)	(2;3)	$(2;3\frac{1}{2})$	$(3\frac{1}{2};3)$
(x_2^1, x_2^2)	(2;6)	(2;4)	$(3\frac{1}{2};6)$

In (31.16) muß jetzt das Maximin-Prinzip angewendet werden. Unter der Voraussetzung, daß der Entscheidungsträger das Ergebnis (4;3) dem Ergebnis $(3\frac{1}{2};6)$ vorzieht:

$$(31.17) \qquad (4;3) \succ (3\tfrac{1}{2};6),$$

läßt sich (31.16) lösen, ohne eine Nutzenfunktion für die Ergebnisse einzuführen. Die Bedingung (31.17), die z.B. als Folgerung der Einheitsbeziehung beider Komponenten

$= \frac{8\lambda}{1\lambda}$ betrachtet werden kann, ist hinreichend für die Lösung von (31.16). Das folgt aus der Tatsache, daß das umrandete Element gemäß (31.17) ein Sattelpunkt ist: es ist gleichzeitig minimal in der ersten Zeile und maximal in der dritten Spalte. Aufgrund bekannter Eigenschaften der Zweipersonen-Nullsummenspiele [Owen 1971] ist die zusammengesetzte Strategie (x_1^1, x_1^2) optimal und der Spielwert von (31.16) ist der Vektor (4;3).

Auf diese Weise erhalten wir aufgrund des Max E_{min}-Prinzips die Lösung des behandelten Zweiziele-Optimierungsproblems: Die Max E_{min}-optimale zusammengesetzte Strategie (x_1^1, x_1^2) gewährleistet mindestens den Erwartungswert (4;3) (4 Einheiten der Zielfunktion $Z^{(1)}$ und 3 Einheiten der Zielfunktion $Z^{(2)}$). Im Vergleich mit der Lösung von (31.10) bei nicht reduzierten Strategienmengen X,Y bedeutet dies eine Verminderung der $Z^{(2)}$-Einheiten um 1.
Im Zusammenhang mit dem analysierten Vielziele-Optimierungsmodell wollen wir jetzt den Begriff des komponenten und globalen Informationswertes unter LPI-Bedingungen einführen.

Die komponenten Entscheidungssituationen seien:

(31.1) $ES^{(i)}: [X^{(i)}; Y^{(i)}; LPI^{(i)}]; [Z^{(i)}]; i = 1,\dots,\nu.$

Die resultierende zusammengesetzte Entscheidungssituation ist dann:

$\hat{ES}: [X; Y; \overline{LPI}; [Z]]$

mit $X = X_1 \times\dots\times X_\nu$; $Y = Y_1 \times\dots\times Y_\nu$; $[Z] = [(Z^{(1)},\dots,Z^{(\nu)})]$

und mit einer nach der Zusammensetzung entsprechenden resultierenden $\overline{LPI}$.

Nach der Reduktion der Strategienmengen X,Y erhalten wir das reduzierte zusammengesetzte Spiel:

(31.18) $\hat{ES}'$: $[X';Y';\overline{LPI}';[\overline{Z}]]$.

Sei jetzt $\Delta\, I^{(k)}$ eine Informationsänderung in der k-ten komponenten Entscheidungssituation

(31.19) $ES^{(k)}:[X^{(k)};Y^{(k)};LPI^{(k)};[Z^{(k)}]\ ];k\in\{1,\ldots,\nu\}$.

Aufgrund des Max E_{min}-Prinzips kann der Informationswert von $\Delta\, I^{(k)}$ bezüglich der $ES^{(k)}$ bestimmt werden:

(31.20) $V_{ES^{(k)}}\ (\Delta I^{(k)}) = V_2(x^{*2}) - V_1(x^{*1})$.

Darin ist die rechte Seite der durch $\Delta\, I^{(k)}$ verursachte Zuwachs des Max E_{min}-Entscheidungswertes bezüglich der komponenten $ES^{(k)}(x^{*2},x^{*1}$ sind die entsprechenden optimalen Strategien).

Den Informationswert $V_{ES^{(k)}}(\Delta\, I^{(k)})$ definieren wir hier als komponenten Informationswert. Er hat nur eine beschränkte, lokale Bedeutung, denn er betrifft nur die k-te komponente Entscheidungssituation.

Wie aus der Struktur des Gesamtmodells (31.18) folgt, beeinflußt die Informationsänderung $\Delta\, I^{(k)}$ auch das Gesamtmodell, also die resultierende zusammengesetzte Entscheidungssituation. Man kann also den Begriff des globalen Informationswertes $V_{\hat{ES}'}\ (\Delta I^{(k)})$ einführen:

(31.21) $V_{\hat{ES}'}\ (\Delta I^{(k)}) = \hat{V}_2(\hat{x}^{*2}) - \hat{V}_1(x^{*1})$.

Darin sind die zusammengesetzten optimalen Strategien $\hat{x}^{*2}$ (mit Berücksichtigung von $\Delta I^{(k)}$) und $\hat{x}^{*1}$ (ohne Berücksichtigung). $\hat{V}_2, \hat{V}_1$ sind die entsprechenden Wertfunktionen für das Gesamtmodell, und die rechte Seite der Zuwachs der Entscheidungswerte.

Wir gelangen zu folgender Definition:

Def. 31.1:

Im Modell der Vielziele-Optimierung verstehen wir unter dem k-ten komponenten Informationswert einer Informationsänderung $\Delta I^{(k)}$ den durch $\Delta I^{(k)}$ verursachten Zuwachs des Max E_{min}-Entscheidungswertes der $ES^{(k)}$ und unter dem globalen Informationswert den entsprechenden Zuwachs des Max E_{min}-Entscheidungswertes des Gesamtmodells.

Betrachten wir beispielsweise eine Informationsänderung $\Delta I^{(1)}$ in der $ES^{(1)}$ (31.7). Statt der Entscheidungsmatrix $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ wird die Matrix $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ bezüglich des Zuwachses des Max E_{min}-Entscheidungswertes für $ES^{(1)}$ bewertet. Auf diese Weise wird der komponente Informationswert ermittelt. Die Änderung beeinflußt aber auch die Entscheidungsmatrix des Gesamtmodells (31.9) und der entsprechende Zuwachs des globalen Max E_{min}-Entscheidungswertes bestimmt den globalen Informationswert.

Auch sensitivitätsanalytische Untersuchungen können im Bereich des Vielziele-Optimierungsmodells unter LPI-Bedingungen durchgeführt werden. Die Einführung der Begriffe der komponenten und globalen Sensitivität der entsprechenden Entscheidungswerte gegenüber beliebigen Informationsänderungen bietet keine Schwierigkeiten.

Das behandelte Vielziele-Optimierungsproblem unter LPI-Bedingungen könnte in seiner unmittelbaren Form praktische Anwendungen finden. Eine kleine Umformung des Problems führt zum bekannten, in der Praxis wichtigen Problem der Zweiebenen-Planung. Es genügt, die komponenten Entscheidungssituationen $ES^{(i)}$; $i = 1,\ldots,\nu$ als Objekte der lokalen Ebene und das Gesamtmodell $\hat{ES}'$ als Objekt der zentralen Ebene zu betrachten (Abb. 31.1).

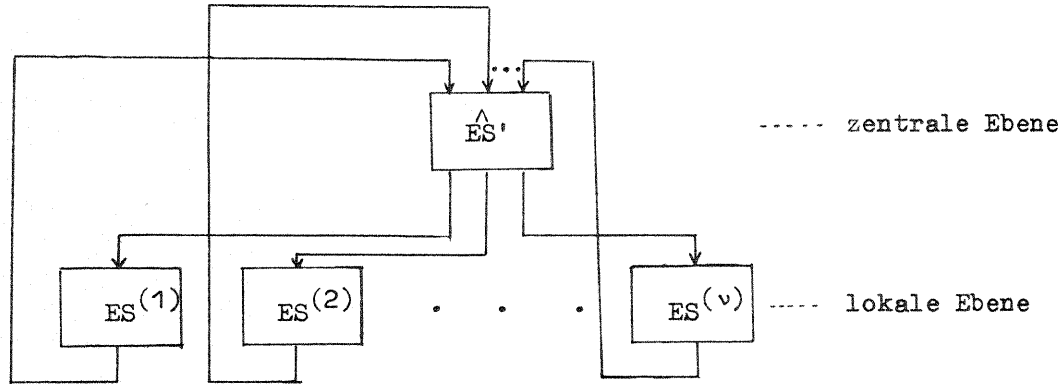


Abb. (31.1)

Die Inputs und Outputs können hier als Informationsflüsse von den komponenten Objekten zum globalen Objekt und umgekehrt interpretiert werden. Alle Informationsänderungen können gemäß den Begriffen des komponenten und globalen Informationswertes bewertet werden.

Auch das für die ökonomische Planung prinzipielle Problem der lokalen und zentralen Verwaltung kann anhand dieses Modells erörtert werden.

Auf Einzelheiten kann jedoch hier nicht eingegangen werden.

6. Kapitel :

Einstufige Entscheidungen

§ 32. Das Grundmodell der einstufigen Entscheidung unter LPI-Bedingungen

1. Einführung

In diesem Kapitel sollen besondere Fälle einstufiger Entscheidungen unter LPI-Bedingungen behandelt werden. Als Lösungsprinzip wird das im 5. Kapitel eingeführte Max E_{min}-Prinzip angewendet. Daneben wird auch die Anwendungsmöglichkeit anderer Lösungsprinzipien (Hurwicz-, Hodges-Lehmann-Prinzip) erörtert.

Das Grundmodell wird in § 36 erweitert, indem LPI-Bedingungen auch für die variable Entscheidungsmatrix eingeführt werden. In § 37 werden LPI-Entscheidungen aus spieltheoretischer Sicht erörtert und in § 38 Grade der stochastischen Unbestimmtheit bezüglich der Realisation des Entscheidungswertes analysiert.

Als Grundmodell der einstufigen Entscheidung unter LPI-Bedingungen wird (26.2) angenommen:

(32.1) $[\{\alpha_i\}; \{\beta_j\}; LPI(\rho); [u_{ij}]]; \; i = 1,\ldots, n; \; j = 1,\ldots,m.$

Die Bezeichnungen sind aus § 26 bekannt.

Wir wollen nun besondere Fälle für LPI(ρ), also für die lineare partielle Information über die Verteilung $\rho = (p_1,\ldots,p_m)$ der Zustände $\{\beta_j\}$ betrachten.

2. Ordnung der Zustände nach der Häufigkeit ihres Auftretens

Gegeben sei die Entscheidungssituation (32.1) mit folgender LPI

(32.2) $\quad LPI(\rho)$: $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_m$.

Es ist also eine schwache Ordnung für die Wahrscheinlichkeiten p_j bekannt. Dieser Fall liegt in praktischen Problemen oft vor. Aufgrund des Max $\mathbf{E}_{min}$-Prinzips ist die Lösung von (32.1) unter der Bedingung (32.2) zu finden.

Ein besonderer Fall dieser Art für $m = 3$ wurde schon im § 19.2 betrachtet; die entsprechende Extremalpunkte-Matrix war dort:

$$M(LPI) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Wir wollen folgenden Satz beweisen:

Satz 32.1:

Die Lösung von (32.1) bei bekannter schwacher Ordnung (32.2) für die Wahrscheinlichkeiten p_j führt zur Anwendung des Maximin-Prinzips im Spiel mit der Entscheidungsmatrix

$$A(\alpha_i, \rho^{(\gamma)}) = [u_{ij}]\cdot[t_{jk}]; i = 1,\ldots,n; j = 1,\ldots,m; k = 1,\ldots,m$$

bei $t_{jk} = 0$ für $j<k$ und $t_{jk} = \frac{1}{m - k + 1}$ für $j \geq k$.

Beweis:

Aufgrund von Satz 27.1 genügt es zu beweisen, daß für die der LPI (32.2) entsprechende Extremalpunkte-Matrix gilt:

$M(LPI) = [t_{jk}]$ mit $t_{jk} = 0$ für $j<k$ und $t_{jk} = \frac{1}{m-k+1}$ für $j \geq k$.

Dabei wird Satz 18.1 angewendet. Entsprechend der LPI muß man bei der Bestimmung der Extremalpunkte nur solche Lösungen des Ungleichungssystems

$$(32.3) \quad \begin{cases} p_1 \leq p_2, p_2 \leq p_3, \ldots, p_{m-1} \leq p_m \\ p_1 \geq 0, \ldots, p_m \geq 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{m} p_j = 1 \end{cases}$$

berücksichtigen, die m Gleichungen aus (32.3) erfüllen (eine von ihnen muß offensichtlich $\Sigma p_j = 1$ sein). Es ist nicht schwer festzustellen, daß nur die m folgenden Gleichungen in Betracht kommen:

$$(32.4) \quad \begin{array}{ll} 1) & p_1 = p_2 = \ldots = p_m; \Sigma p_j = 1. \\ 2) & p_1 = 0;\ p_2 = \ldots = p_m; \Sigma p_j = 1. \\ 3) & p_1 = p_2 = 0;\ p_3 = \ldots = p_m; \Sigma p_j = 1. \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m) & p_1 = \ldots = p_{m-1} = 0; \Sigma p_j = 1. \end{array}$$

Die entsprechenden Extremalpunkte $\rho^{(\gamma)}$ $(\gamma = 1,\ldots,m)$ sind also:

$\rho^{(1)} = (\frac{1}{m},\ldots,\frac{1}{m})$, $\rho^{(2)} = (0,\frac{1}{m-1},\ldots,\frac{1}{m-1})$,

$\rho^{(3)} = (0,0,\frac{1}{m-2},\ldots,\frac{1}{m-2}),\ldots,\rho^{(m)} = (0,\ldots,0,1)$,

und die Extremalpunkte-Matrix

$$(32.5)\quad M(LPI) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m-1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m-1} & \frac{1}{m-2} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m-1} & \frac{1}{m-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Das aber ist äquivalent mit

$M(LPI) = [t_{jk}]$,

bei $t_{jk} = 0$ für $j<k$ und $t_{jk} = \frac{1}{m - k + 1}$ für $j \geq k$,

w.z.b.w.

Beispiel:

(32.6)

	p_1 β_1	p_2 β_2	p_3 β_3	p_4 β_4
α_1	5	4	8	6
α_2	7	3	9	5
α_3	4	6	8	7

$LPI(\rho): p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4$.

(32.6) ist eine einstufige Entscheidungssituation unter LPI-Bedingungen. Die LPI ist hier in der Form einer schwachen Ordnung für die Wahrscheinlichkeiten p_j gegeben. Gemäß Satz 32.1 führt die Lösung von (32.6) zur Lösung eines Zweipersonen-Nullsummenspiels mit folgender Entscheidungsmatrix:

$A(\alpha_i, \rho^{(\gamma)}) = [u_{ij}] \cdot [t_{jk}]$, mit der Extremal-Matrix

$$[t_{jk}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten: $[u_{ij}]\cdot[t_{jk}]$ =

$$(32.7)\quad = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 8 & 6 \\ 7 & 3 & 9 & 5 \\ 4 & 6 & 8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\frac{3}{4} & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 5\frac{2}{3} & 7 & 5 \\ 6\frac{1}{4} & 7 & 7\frac{1}{2} & 7 \end{bmatrix} .$$

Die Entscheidungsmatrix hat einen Sattelpunkt $6\frac{1}{4}$. Das Spiel ist also im Bereich der reinen Strategien strikt determiniert und das Maximin-Prinzip führt zur folgenden Lösung von (32.6): Die optimale Strategie ist α_3 und der Wert des Spiels ist $6\frac{1}{4}$. Die optimale Strategie α_3 gewährleistet mindestens den Erwartungswert $V(\alpha_3) = 6\frac{1}{4}$.

Es ist zu beachten, daß die Lösung von (32.6) bei vollständiger Ignoranz über die Wahrscheinlichkeiten p_j aufgrund des Maximin-Prinzips im Bereich der gemischten Strategien (optimale Strategie $(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$) zum Erwartungswert $\overline{V} = 5$ führt.

Damit können wir den Informationswert des Übergangs aus vollständiger Ignoranz ($I^{(1)}$) über die Wahrscheinlichkeiten p_j zur LPI(ρ):$p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4$; also zu einer schwachen Ordnung für diese Wahrscheinlichkeiten bestimmen. Gemäß unseren Ausführungen in § 28 ist dieser Informationswert:

$$V(I^{(1)} \rightarrow \mathrm{LPI}(\rho)) = V(\alpha_3) - \overline{V} = 6\tfrac{1}{4} - 5 = 1\tfrac{1}{4} .$$

Man könnte auch den Informationswert netto, unter Berücksichtigung der Kosten des behandelten Übergangs $I^{(1)} \rightarrow \mathrm{LPI}(\rho)$ bestimmen. Beispielsweise könnte die gegebene LPI aufgrund einer entsprechenden Befragung gewonnen sein.

Noch eine einfache sensitivitätsanalytische Betrachtung des Beispiels (32.6): Es gibt die Möglichkeit, eines der Elemente der letzten Spalte um 3 zu vergrößern. Welches Element besitzt den größten Einfluß auf den Entscheidungswert? Das oben angewandte Verfahren zeigt, daß dies das Element 7 ist. Seiner Änderung folgt ein Zuwachs des Entscheidungswertes von $6\frac{1}{4}$ auf 7. In den übrigen Fällen ist der Zuwachs kleiner.

Im allgemeinen ist die Anwendung von Satz 32.1 bei bekannter schwacher Ordnung der Wahrscheinlichkeiten p_j mit einer Spalten-Permutation verbunden, die zur LPI: $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_m$ führt.

So findet man z. B., wenn die Situation

$$(32.8)\qquad \begin{array}{c|ccc} \rho & p_1 & p_2 & p_3 \\ \hline & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \hline \alpha_1 & a & b & c \\ \alpha_2 & d & e & f \\ \alpha_3 & g & h & i \end{array} \qquad \text{mit LPI}(\rho): p_2 \leq p_3 \leq p_1$$

vorliegt, die mit ihr äquivalente Situation

$$(32.9)\qquad \begin{array}{c|ccc} \bar{\rho} & \bar{p}_1 & \bar{p}_2 & \bar{p}_3 \\ \hline & \beta_2 & \beta_3 & \beta_1 \\ \hline \alpha_1 & b & c & a \\ \alpha_2 & e & f & d \\ \alpha_3 & h & i & g \end{array} \qquad \text{mit LPI}(\bar{\rho}): \bar{p}_1 \leq \bar{p}_2 \leq \bar{p}_3 \;.$$

Satz 32.1 bestimmt die Entscheidungsmatrix:

$$A(\alpha_i, \rho^{(\gamma)}) = \begin{bmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} .$$

In praktischen Modellen liegt oft nur eine partielle Information über die Ordnung der Wahrscheinlichkeiten p_j vor. Beispielsweise für die Verteilung $\rho = (p_1,\dots,p_{i-1},p_i;\ p_{i+1},\dots,p_m)$ ist nur die partielle Ordnung $p_1 \leq \dots \leq p_{i-2}$ und $p_{i+2} \leq \dots \leq p_m$ bekannt, die "Lage" der Wahrscheinlichkeiten p_{i-1}, p_i, p_{i+1} hingegen ist unbekannt. Auch in diesen Fällen gibt es Sätze, die das allgemeine algorithmische Verfahren des Satzes 18.1 erleichtern. Auf Einzelheiten wollen wir jedoch hier nicht eingehen [Kofler 1974].

3. Intervallangaben für die Wahrscheinlichkeiten der Zustände

Sehr wichtig in den Anwendungen ist der Fall von Intervallangaben für die Wahrscheinlichkeiten der Zustände. Sei die Entscheidungssituation

(32.10) $[\{\alpha_i\};\{\beta_j\};\ \mathrm{LPI}(\rho);[u_{ij}]];\ i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots m$

mit der LPI(ρ): $\mu_j \leq p_j \leq \nu_j;\ j = 1,\ \dots,\ m.$

Wir nennen die Intervalle $I_j = [\mu_j,\ \nu_j]$ Intervallangaben für die Zustandswahrscheinlichkeiten. Es sei vorausgesetzt, daß die Intervallangaben widerspruchsfrei sind gemäß folgender Definition:

Def. 32.1:

Intervallangaben werden als widerspruchsfrei bezeichnet, wenn sie im m-dimensionalen Raum, unter Berücksichtigung der Bedingung $\Sigma p_j=1$, einen nicht leeren Quader bestimmen.

So sind z. B. die Intervallangaben $0,2 \leq p_1 \leq 0,3; 0,4 \leq p_2 \leq 0,5; 0,3 \leq p_3 \leq 0,4$ widerspruchsfrei, die Intervallangaben $0,3 \leq p_1 \leq 0,5; 0,4 \leq p_2 \leq 0,5; 0,5 \leq p_3 \leq 0,6$ dagegen nicht.
Die im § 19.3 angegebenen Intervallangaben sind widerspruchsfrei.

Wir wollen nun aufgrund des Max E_{min}-Prinzips die Lösung von (32.10) bestimmen.

Nach Satz 27.1 genügt es, die entsprechende Extremalpunkte-Matrix zu finden. Dazu verhilft wieder Satz 18.1.

Ähnlich wie im Fall der bekannten Ordnung für die Zustandswahrscheinlichkeiten existiert auch im Fall der Intervallangaben ein gegenüber der allgemeinen Methode aus Satz 18.1 einfacheres Verfahren.

Im **folgenden** nennen wir μ_j, ν_j die Schrankenwerte der j-ten Intervallangabe $[\mu_j, \nu_j]$; $j = 1,\ldots m$.
Es läßt sich folgender Satz beweisen:

Satz 32.2:

Ein Wahrscheinlichkeitspunkt $\rho = (p_1,\ldots,p_m)$ ist dann und **nur dann in (32.10) ein Extremalpunkt, wenn m-1 Kompo**nenten dieses Punktes entsprechende Schrankenwerte **anneh**men und die letzte Komponente die entsprechende Intervallangabe erfüllt.

Es wird also folgendes Verfahren zur Ermittlung der Extremalpunkte angewendet:

Es werden beliebige m-1 Komponenten ausgewählt ($\binom{m}{m-1} = m$ Möglichkeiten). Jede dieser Komponenten muß einen der beiden Schrankenwerte annehmen (2^{m-1} Möglichkeiten). Der Punkt ist dann und nur dann ein Extremalpunkt, wenn die aufgrund der Gleichung $\Sigma p_j = 1$ ermittelte m-te Komponente die entsprechende Intervallbedingung erfüllt. Im Vergleich mit der allgemeinen algorithmischen Methode des Satzes 18.1 ist der Arbeitsaufwand kleiner, es genügt, $m \cdot 2^{m-1}$ Versuche durchzuführen.

Beweis:

Gemäß Satz 18.1 ist eine Lösung des der LPI in (32.10) entsprechenden Ungleichungssystems

$$(32.11) \quad \mu_j \leq p_j \leq \nu_j;\ p_j \geq 0;\ \sum_{j=1}^{m} p_j = 1;;\ j = 1,\ldots,m$$

dann und nur dann ein Extremalpunkt, wenn m der 2m+1 Bedingungen des Systems als Gleichungen erfüllt sind. Da die Gleichung $\Sigma p_j = 1$ immer gilt, genügt es, m-1 Gleichungen in Betracht zu ziehen.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) Alle Komponenten sind von Null verschieden. Dann kommen die Gleichungen aus $p_j \geq 0$ nicht in Frage und es bleibt nur das im Satz angegebene Verfahren.
b) Es gibt $\bar{m}$ Nullkomponenten, also $\bar{m}$ Bedingungen aus $p_j = 0$. Dann genügt, noch $m - 1 - \bar{m}$ Gleichungen aus $\mu_j \leq p_j \leq \nu_j$ zu bestimmen. Der Sachverhalt ändert sich nicht, wenn wir die $\bar{m}$ Nullvektoren statt aus $p_j \geq 0$ auch aus den Bedingungen $\mu_j \leq p_j \leq \nu_j$ wählen. Es werden also die $\bar{m}$ Nullkomponenten aus den entsprechenden Intervallangaben ermittelt und die übrigen $m - 1 - \bar{m}$ Komponenten aus den übrigen Intervallangaben. Auf diese Weise gelangen wir aber wieder zum Satzverfahren. Satz (32.2) ist damit bewiesen und das Problem (32.10) gelöst. Es genügt, nach Satz 32.1 das Zweipersonen-Nullsummenspiel mit der Spielmatrix

$$(32.12) \quad A(\alpha_i, \rho^{(\gamma)}) = [u_{ij}] \cdot M(LPI)$$

zu lösen. Für M(LPI) wird in (32.12) die ermittelte Extremalpunkte-Matrix eingesetzt.

Zu beachten ist folgende Tatsache:

Der vollständigen Ignoranz über die Zustandswahrscheinlichkeiten entsprechen offensichtlich die Intervallangaben (vollständiges Simplex):

$$0 \leq p_j \leq 1; j = 1, \ldots, m.$$

Das gemäß Satz 32.2 realisierte Verfahren führt zu den Extremalpunkten $(1, \ldots, 0)$, $(0, 1 \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 1)$, also zu den Eckpunkten des $(m-1)$-dimensionalen Simplex. Bei entsprechender Reihenfolge der Spalten ergibt sich als Extremalpunkte-Matrix die Einheitsmatrix

$$I^{(m)} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

Die Entscheidungsmatrix ist

$$A(\alpha_i, \rho^{(\gamma)}) = [u_{ij}] \cdot I^{m} = [u_{ij}],$$

und das Max E_{min}-Prinzip geht in das Maximin-Prinzip über. Man könnte also den Fall der vollständigen Ignoranz als besonderen Fall einer LPI mit Intervallangaben $0 \leq p_j \leq 1$ betrachten.

Beispiele:

1) LPI: $0 \leq p_1 \leq 0{,}2$; $0{,}8 \leq p_2 \leq 0{,}9$.

$2 \cdot 2^{2-1} = 4$ Versuche ergeben: $M(LPI) = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}9 \end{bmatrix}$.

2) LPI: $\begin{cases} 0 \leq p_1 \leq 0{,}1 \\ 0{,}5 \leq p_2 \leq 0{,}6 \\ 0{,}3 \leq p_3 \leq 0{,}5 \end{cases}$.

$3 \cdot 2^{3-1} = 12$ Versuche ergeben: $M(LPI) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{bmatrix}$.

3) LPI: $0{,}2 \leq p_j \leq 0{,}4$; $j = 1,2,3,4$.

$4 \cdot 2^{4-1} = 32$ Versuche ergeben leicht:

$$M(LPI) = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{bmatrix} .$$

4) Jetzt eine Entscheidungssituation mit Intervallangaben für die Zustandswahrscheinlichkeiten:

(32.13)

$\frac{p}{\beta}$	$\frac{p_1}{\beta_1}$	$\frac{p_2}{\beta_2}$	$\frac{p_3}{\beta_3}$	$\frac{p_4}{\beta_4}$
α_1	0	2	1	1
α_2	2	0	2	1
α_3	1	2	0	2

LPI: $0{,}2 \leq p_j \leq 0{,}4$; $j = 1,2,3,4$.

Im Beispiel 3) wurde die M(LPI) bestimmt.

Aufgrund des Max E_{min}-Prinzips erhalten wir

$$A(\alpha_i, \rho^{(j)}) = [u_{ij}]\cdot M(LPI) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{bmatrix} =$$

$$(32.14) \qquad = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 1 & 1 & 1{,}2 \\ 1{,}4 & 1{,}4 & 1{,}2 & 1 \\ 1{,}2 & 1 & 1{,}4 & 1{,}4 \end{bmatrix}.$$

Diese Entscheidungsmatrix besitzt keinen Sattelpunkt, die optimale Strategie im Zweipersonen-Nullsummenspiel muß also im Bereich der gemischten Strategien gesucht werden. Die Strategie α_1, dominiert durch α_3, fällt weg. Dann wird festgestellt, daß die Strategien β_1 und β_3 durch β_2 bzw. β_4 dominiert werden. Es bleibt also, das reduzierte Spiel

$$\begin{bmatrix} 1{,}4 & 1 \\ 1 & 1{,}4 \end{bmatrix}$$

zu lösen. Wir erhalten für den Entscheidungsträger die optimale Strategie $\alpha^* = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Sie gewährleistet mindestens die Nutzenerwartung

$$V(\alpha^*) = \frac{1}{2} \cdot 1{,}4 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1{,}2.$$

Zur Lösung von (32.13) bei vollständiger Ignoranz über die Zustandswahrscheinlichkeiten muß das Maximin-Prinzip im Spiel

$$(32.15) \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

angewendet werden.

Auch hier gibt es keinen Sattelpunkt. Im Bereich der gemischten Strategien fällt die Strategie β_4, die durch die gemischte Strategie $(\frac{1}{2}\beta_1, \frac{1}{2}\beta_2)$ dominiert ist, weg. Es ist nicht schwer festzustellen, daß im reduzierten Spiel

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

die optimale Strategie des Entscheidungsträgers $\overline{\alpha}^* = (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7})$ und der Spielwert $V(\alpha^*) = \frac{8}{7} \approx 1,14$ sind.
Hier wird also mindestens die Nutzenerwartung 1,14 gewährleistet. Das bedeutet, daß der Informationswert des Übergangs von vollständiger Ignoranz $(I^{(1)})$ über die Zustandswahrscheinlichkeiten zur LPI mit den Intervallangaben in (32.13) $(I^{(2)})$ gleich

$$V(I^{(1)} \rightarrow I^{(2)}) \approx 1,2 - 1,14 = 0,06 \text{ ist.}$$

Der Informationsänderung $I^{(1)} \rightarrow I^{(2)}$ entspricht auch in (32.13) der Übergang von der Strategie $\overline{\alpha}^* = (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7})$ zur Strategie $\alpha^* = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Am Beispiel (32.13) läßt sich Satz 30.1 für den Fall einer Intervallschachtelung illustrieren. Sei $p^* = (p_1^*, \ldots, p_m^*)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitspunkt, der dem durch die LPI erzeugten konvexen Polyeder P(LPI) angehört:

(32.16) $\quad p \in P(LPI)$.

Da jedes p^* als Konvergenzpunkt einer entsprechenden Intervallschachtelung betrachtet werden kann, folgt aufgrund von Satz 30.1, daß die für p^* Bernoulli-optimale Strategie $\alpha_B(p^*)$ zum Bernoulli-optimalen Entscheidungswert $v_B(p^*)$ führt, der nicht kleiner als der ursprüngliche LPI-Entscheidungswert ist.
In unserem Beispiel (32.13) wählen wir beispielsweise

$\rho^* = (0,3;0,3;0,2;0,2) \in P$ (LPI).

Eine einfache Rechnung ergibt, daß der entsprechende Bernoulli-optimale Entscheidungswert $V_B(\rho^*) = 1,3$ ist, also $1,3>1,2$ gilt. Auf ähnliche Weise kann man auch verschiedene gemischte Fälle, wie z. B. den einer LPI, bei der eine partielle Ordnung und gleichzeitig auch partielle Intervallangaben vorliegen, behandeln. Man kann wieder Sätze, die gewisse algorithmische Erleichterungen ermöglichen, ableiten.

§ 33. LPI mit nicht abgeschlossenen konvexen Polyedern.

Das Max E_{inf}-Prinzip.

Bisher betrachteten wir, gemäß den Definitionen 18.2, 18.3 und 18.4 eine LPI als ein konvexes Polyeder, das eine echte Teilmenge des entsprechenden Verteilungssimplex ist. Wie üblich, verstanden wir dabei unter einem konvexen Polyeder ein abgeschlossenes Gebiet.

Wir wollen nun den Begriff der LPI erweitern, indem auch nicht abgeschlossene konvexe Polyeder zugelassen werden. Diese Erweiterung ist nicht nur theoretisch, sondern auch für praktische Anwendungen wichtig.

Beispiele:

1) LPI: $p_1<p_2<\ldots<p_m$ (strikte Ordnungsrelation)

2) LPI: $\mu_j<p_j<\nu_j; j = 1,\ldots,m$ (Offene Intervalle für die Zustandswahrscheinlichkeiten)

3) LPI: $p_1\leq p_2\leq\ldots\leq p_k;\ \mu_{k+1}<p_{k+1}<\nu_{k+1},\ldots,\mu_m<p_m<\nu_m;$

(gemischter Fall - teilweise schwache Ordnung, teilweise offene Intervalle).

Die allgemeine Definition einer LPI mit einem nicht abgeschlossenen konvexen Polyeder ($\breve{\text{LPI}}$) läßt sich durch Modifizierung der Definition 18.3 angeben:

Def. 33.1 :

Eine LPI mit einem nicht abgeschlossenen konvexen Polyeder ($\widetilde{\text{LPI}}$) liegt vor, wenn in den entsprechenden Ungleichungssystemen

$$
(33.1)\quad \begin{cases} D\rho \geq d; D: n \times m\,; \rho = (p_1, \ldots, p_m); \rho: m \times 1;\ d: n \times 1 \\ \forall j:\ p_j \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{m} p_j = 1 \end{cases}
$$

mindestens eine der n+m+1 Relationen eine strikte Ungleichung ist.

Die wesentliche Frage ist, wie man die Lösung einer Entscheidungssituation unter $\widetilde{\text{LPI}}$-Bedingungen, d.h. bei einem nicht abgeschlossenen Polyeder bestimmt.

Sei die Entscheidungssituation

$$
(33.2)\quad [\{\alpha_i\}; \{\beta_j\}; \widetilde{\text{LPI}}(\rho); [u_{ij}]]; i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m.
$$

gegeben.
Es ist offensichtlich, daß das Max E_{min}-Prinzip hier im allgemeinen nicht angewendet werden kann, da ja das entsprechende Minimum nicht existieren muß. Statt dessen ist das Max E_{inf}-Prinzip einzuführen.

Weniger präzise ausgedrückt könnte man sagen, daß in Entscheidungen unter $\widetilde{\text{LPI}}$-Bedingungen die Natur nicht so streng gegenüber dem Entscheidungsträger vorgehen kann; sie kann im allgemeinen nicht minimieren, sondern nur "infimieren".
Es gilt offensichtlich folgender Satz:

Satz 33.1:

Die Lösung der Entscheidungssituation unter $\overset{\smile}{LPI}$-Bedingungen (33.2) gemäß dem Max E_{inf}-Prinzip ist der Lösung des unendlichen Spiels gegen die Natur:

$$(33.3) \quad [\{\alpha_i\};\{\rho \mid \rho \in \overset{\smile}{LPI}\};A(\alpha_i,\rho)];i = 1,\ldots,n.$$

aufgrund des Maxiinf-Prinzips äquivalent.
Darin ist $\{\alpha_i\}$ die endliche Strategienmenge des Entscheidungsträgers, $\{\rho \mid \rho \in \overset{\smile}{LPI}\}$ die unendliche Strategienmenge der Natur (Menge aller in der $\overset{\smile}{LPI}$ enthaltenen Wahrscheinlichkeitspunkte) und $A(\alpha_i,\rho)$ die Entscheidungsmatrix, deren Elemente als entsprechende Erwartungswerte bestimmt werden:

$$A(\alpha_i,\rho) = \sum_{j=1}^{m} u_{ij}p_j; \quad \rho = (p_1,\ldots p_m) \in \overset{\smile}{LPI}.$$

Im allgemeinen muß die Lösung von (33.3) im Bereich der gemischten Strategien gesucht werden.
Da aber wegen der Stetigkeit des Erwartungswertes bezüglich des variablen Wahrscheinlichkeitspunktes die entsprechenden Infima in den Extremalpunkten erreicht werden, genügt es, im Lösungsverfahren von der nicht abgeschlossenen $\overset{\smile}{LPI}$ zur abgeschlossenen $\overset{\frown}{LPI}$ überzugehen und das Max E_{min}-Prinzip anzuwenden. Auf diese Weise kommen wir zu

Satz 33.2:

Die Lösung von (33.2) unter $\overset{\smile}{LPI}$-Bedingungen ist äquivalent mit der aufgrund des Max E_{min}-Prinzips bestimmten Lösung unter den entsprechenden $\overset{\frown}{LPI}$-Bedingungen.

Die Entscheidungswerte sind demnach für abgeschlossene und offene LPI gleich. Dennoch besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen diesen beiden Fällen. Als den für den Entscheidungsträger günstigeren Fall muß man im allgemeinen den Fall mit einer nicht abgeschlossenen LPI($\breve{LPI}$) betrachten. Das folgt aus der Tatsache, daß bei einer $\breve{LPI}$ die minimierenden Strategien der Natur nur ϵ-optimal sein können. Wenn z. B. für eine Strategie $\hat{\alpha}_i$ der Extremalpunkt ρ^* der "infimierende" ist und ρ^* der $\breve{LPI}$ nicht angehört, kann die Natur, gemäß der Bedeutung des Infimum, nur mit einem

$$\inf_{\rho \in \breve{LPI}} A(\hat{\alpha}_i, \rho) + \epsilon = A(\hat{\alpha}_i, \rho^*) + \epsilon \text{ drohen.}$$

Also existieren bei demselben Entscheidungswert bessere Realisationsmöglichkeiten. Da aber ϵ beliebig klein ist, kann der Entscheidungswert das entsprechende

$\inf\limits_{\rho \in \breve{LPI}} A(\hat{\alpha}_i, \rho) = A(\hat{\alpha}_i, \rho^*)$ nicht übertreffen. Gesichert ist also nur der entsprechende Maxinf-Wert.

Beispiele:

(33.4)

ρ	p_1	p_2
	β_1	β_2
α_1	2	5
α_2	3	3

$\breve{LPI}$: $p_1 < p_2$

ist eine Entscheidungssituation unter $\breve{LPI}$-Bedingungen ($p_1 < p_2$). Die Lösung finden wir, indem wir von der offenen $\breve{LPI}$: $p_1 < p_2$ zur abgeschlossenen $\widehat{LPI}$: $p_1 \leq p_2$ übergehen und dann das Max E_{min}-Prinzip anwenden.

Wir lösen also die ES:

(33.5)

	p_1	p_2
	β_1	β_2
α_1	2	5
α_2	3	3

mit $\widehat{LPI}$: $p_1 \leq p_2$.

Die Extremalmatrix ist $M(\widehat{LPI}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

die Entscheidungsmatrix

$$(33.6)\quad A(\alpha_i, \rho^{(Y)}) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3\frac{1}{2} \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hier ist $3\frac{1}{2}$ ein Sattelpunkt. Nach Satz 33.2 ist für die Entscheidungssituation (33.4) α_1 die optimale Strategie. Sie gewährleistet dem Entscheidungsträger mindestens die Nutzenerwartung $3\frac{1}{2}$.

Die Lösung für $\widetilde{LPI}: p_1 < p_2$ und $\widehat{LPI}: p_1 \leq p_2$ sind äquivalent.

Doch, wie oben bemerkt, muß als günstiger für den Entscheidungsträger die Situation mit der nicht abgeschlossenen $\widetilde{LPI}: p_1 < p_2$ betrachtet werden. Das folgt daraus, daß der Entscheidungswert

$$V(\alpha_1) = \inf_{\rho \in \widetilde{LPI}} (2p_1 + 5\,p_2) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

als Infimum nicht erreicht wird (die Verteilung $\rho = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist nicht erreichbar). Die Natur kann nur mit ϵ-optimalen Strategien drohen. So wird z. B. für $\rho = (0{,}49; 0{,}51)$ 4,53, für $\rho = (0{,}499; 0{,}501)$ 3,503 erreicht, also immer mehr als im Fall LPI: $p_1 \leq p_2$, mit $\rho = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und dem Gewinn 3,5.

Allerdings ist nur diese Nutzenerwartung gesichert, jedes $3{,}5 + \epsilon$ mit $\epsilon > 0$ kann seitens der Natur verhindert werden. Die ES (33.4) bei vollständiger Ignoranz über die Zustandswahrscheinlichkeiten gewährleistet mit der optimalen Strategie α_2 den Entscheidungswert $V(\alpha_2) = 3$. Der Informationswert des Übergangs von der vollständigen Ignoranz zu $\widetilde{LPI}: p_1 < p_2$ ist $3{,}5 - 3 = 0{,}5$. Es folgt gleichzeitig der Übergang von der ursprünglich optimalen Strategie α_2 zur neuen optimalen Strategie α_1.

Aus Satz 33.2 folgt, daß alle Betrachtungen über den Informationswert, über LPI-Ketten und über sensitivitätsanalytische Untersuchungen für LPI mit offenen konvexen Polyedern ganz analog durchgeführt werden können.

§ 34. Das Hurwicz- und Hodges-Lehmann-Prinzip unter LPI-Bedingungen[1]

1. Das Hurwicz-Kriterium

Bekanntlich verlangt das Hurwicz-Lösungsprinzip die Einführung eines Optimismusparameters λ auf die Weise, daß in der Entscheidungssituation

(34.1) $[\{\alpha_i\};\{\beta_j\};[u_{ij}]];\ i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,m.$

jeder Strategie α_i der Wert

(34.2) $V(\alpha_i) = \lambda \max\limits_j u_{ij} + (1-\lambda) \min\limits_j u_{ij};\ 0 \leq \lambda = \text{const} \leq 1$

zugeordnet wird. Als optimal wird eine Strategie α^* betrachtet, die den Wert $V(\alpha_i)$ maximiert:

$$V(\alpha^*) = \max_i V(\alpha_i).$$

Die Extremwerte des Optimismusparameters, $\lambda = 0$, bzw. $\lambda = 1$, führen zu den Maximin- bzw. Maximax-Lösungsprinzipien.
Das Hurwicz-Prinzip wird oft kritisiert, unter anderem wird ihm die Unbestimmtheit und die Veränderlichkeit des λ im Rahmen der Strategienmenge für eine gegebene ES vorgeworfen.

Wir wollen hier das Hurwicz-Kriterium auf die Entscheidung unter LPI-Bedingungen

---

1) Das Adaptionskriterium (§16.2) unter LPI-Bedingungen wird in einem demnächst in den Statistischen Heften erscheinenden Aufsatz behandelt.

(34.3) $[\{\alpha_i\};\{\beta_j\};LPI(\rho);[u_{ij}]];i = 1,\ldots,n;j = 1,\ldots,m$

anwenden. Wie üblich gehen wir zuerst zur neuen Zustandsmenge $\{\rho | \rho \in LPI(\rho)\}$ über und erhalten damit auch eine neue Entscheidungsmatrix, deren Elemente die entsprechenden Nutzenerwartungen sind. Wir erhalten das unendliche Spiel

(34.4) $[\{\alpha_i\};\{\rho\};A(\alpha_i,\rho)];i = 1,\ldots,n;\rho \in LPI(\rho)$

mit $A(\alpha_i,\rho) = \sum_{j=1}^{m} u_{ij}p_j;i = 1,\ldots,n;\rho = (p_1,\ldots,p_m) \in LPI(\rho)$.

Die Anwendung des Hurwicz-Prinzips in (34.4) führt gemäß (34.2) zum Schluß, daß es genügt, statt (34.4) ein endliches Unterspiel zu betrachten, indem die Zustandsmenge auf die entsprechende Extremalpunkte-Menge $\{\rho^{(\gamma)}\}$ beschränkt wird.

Wir gelangen also wie im allgemeinen LPI-Fall zur Entscheidungsmatrix

(34.5) $A(\alpha_i,\rho^{(\gamma)}) = [u_{ij}] \cdot M(LPI)$,

in der jetzt aber nicht das Maximin-, sondern das Hurwicz-Prinzip angewendet werden soll.

Wir können folgenden Satz formulieren:

<u>Satz 34.1:</u>

<u>Die Lösung der Entscheidungssituation unter LPI-Bedingungen (34.3) aufgrund des λ-Hurwicz-Prinzips führt zur Anwendung des λ-Hurwicz-Prinzips in der Entscheidungsmatrix</u>

$$[u_{ij}] \cdot M(LPI).$$

Es ist zu bemerken, daß die Hurwicz-Lösung im Bereich der reinen wie auch der gemischten Strategien liegen kann. Wir erhalten dann für vorgegebenes λ einen eindeutigen Hurwicz-Entscheidungswert oder mindestens eine Hurwicz-optimale Strategie.

Es ist offensichtlich, daß die Bestimmung des Hurwicz-Entscheidungswertes und der Hurwicz-optimalen Strategien in LPI-Entscheidungen aufgrund von Satz 34.1 Möglichkeiten für sensitivitätsanalytische Untersuchungen, für die Bestimmung des Informationswertes und für LPI-Ketten im Bereich des Hurwicz-Prinzips eröffnet.

Beispiele:

(34.6)

ρ	p_1	p_2
	β_1	β_2
α_1	1	3
α_2	0	6

LPI(ρ): $p_1 \leq p_2$.

Die Lösung von (34.6) führt bei vollständiger Ignoranz über die Zustandswahrscheinlichkeiten nach dem Maximin-Prinzip zur optimalen Strategie α_1 und zum Entscheidungswert 1. Der Übergang zur LPI(ρ) : $p_1 \leq p_2$ führt zur Entscheidungsmatrix

$$A(\alpha_i, \rho^{(\gamma)}) = [u_{ij}] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} .$$

Aufgrund des Max E_{min}-Prinzips erhalten wir jetzt als optimale Strategie α_2 und als Entscheidungswert 3 in dem Sinne, daß die Strategie α_2 mindestens die Nutzenerwartung 3 gewährleistet. Der Informationswert des Übergangs von vollständiger Ignoranz über ρ zur LPI(ρ):$p_1 \leq p_2$ beträgt also $3 - 1 = 2$.

Nun wollen wir (34.6) nach dem Hurwicz-Prinzip mit dem Optimismusparameter $\lambda = \frac{1}{2}$ lösen. Ohne die $LPI(\rho): p_1 \leq p_2$ in Betracht zu ziehen, erhalten wir (V_H bedeutet hier den Hurwicz-Wert):

$$V_H(\alpha_1) = \frac{1}{2}(1 + 3) = 2, \quad V_H(\alpha_2) = \frac{1}{2}(0 + 6) = 3;$$

Also ist bei vollständiger Ignoranz über die Zustandswahrscheinlichkeiten α_2 die Hurwicz-optimale Strategie und 3 der Hurwicz-Entscheidungswert.

Beim Übergang zur $LPI(\rho): p_1 \leq p_2$ muß gemäß Satz (34.1) das Hurwicz-Prinzip in der Entscheidungsmatrix

$[u_{ij}] \cdot M(LPI) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ angewendet werden.

Wir erhalten für $\lambda = \frac{1}{2}$:

$V_H(\alpha_1) = \frac{1}{2}(2 + 3) = 2\frac{1}{2}$, $V_H(\alpha_2) = \frac{1}{2}(3 + 6) = 4\frac{1}{2}$. Unter den gegebenen LPI-Bedingungen ist die Hurwicz-optimale Strategie α_2. Sie gewährleistet die Hurwicz-Nutzenerwartung von $4\frac{1}{2}$.

Man kann auch hier den Hurwicz-Informationswert bestimmen. Die Information $LPI(\rho): p_1 \leq p_2$ hat den Hurwicz-Wert $4\frac{1}{2} - 3 = 1\frac{1}{2}$.

2. Das Hodges-Lehmann-Kriterium

Nun zum Hodges-Lehmann-Prinzip. Man könnte dieses Prinzip als "Mischung" von Bernoulli- und Maximin-Prinzip betrachten. Bekanntlich wird ein sogenannter Vertrauensparameter b eingeführt ($0 \leq b \leq 1$) und jeder Strategie α_i der Hodges-Lehmann-Wert (V_{HL}) :

(34.7) $V_{HL}(\alpha_i) = b \sum_{j=1}^{m} u_{ij}p_j + (1 - b) \min_j u_{ij}$

in der Entscheidungssituation

(34.8) $[\{\alpha_i\};\{\beta_j\};p = (p_1,\ldots,p_m);[u_{ij}]];i = 1,\ldots,n;$

$j = 1,\ldots,m$

zugeordnet. Auf diese Weise wird offensichtlich eine Präferenzordnung auf dem Entscheidungsraum induziert.
Die optimale Strategie α^* findet man aus

(34.9) $V_{HL}(\alpha^*) = \max_i V_{HL}(\alpha_i)$.

Für b = 0, b = 1 erhält man das Maximin- bzw. das Bernoulli-Lösungsprinzip.
Wir wollen für die Entscheidungssituation unter LPI-Bedingungen

(34.10) $[\{\alpha_i\};\{\beta_j\};LPI(p);[u_{ij}]];i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,m.$

ein Lösungsprinzip formulieren, das als eine Erweiterung des Hodges-Lehmann-Prinzips für den LPI-Fall betrachtet werden kann. Folgende Formulierung erscheint plausibel:

Das Hodges-Lehmann-Prinzip für den LPI-Fall:

Bei gegebenem Vertrauensparameter $b(0\leq b\leq 1)$ wird in der LPI-Entscheidungssituation jeder Strategie α_i der Wert

(34.11) $V_{HL}^{LPI}(\alpha_i) = b \min_{p \in LPI} E(\alpha_i, p) + (1 - b) \min_j u_{ij}$

zugeordnet.

Darin ist $E(\alpha_i, \rho)$ die Nutzenerwartung für die Strategie α_i bei der Zustandsverteilung $\rho = (p_1, \ldots, p_m)$:

$$E(\alpha_i, \rho) = \sum_{j=1}^{m} u_{ij} p_j.$$

Nach der LPI-Theorie genügt es, in (34.11) im Bereich der Extremalverteilungen $\{\rho^{(r)}\}$ zu minimieren:

$$\min_{\rho \in LPI} E(\alpha_i, \rho) = \min_{\rho \in \{\rho^{(r)}\}} E(\alpha_i, \rho).$$

Es ist offensichtlich, daß (34.11) eine Präferenzordnung auf dem Entscheidungsraum induziert.
(34.11) führt für $b = 0$, $b = 1$ zum Maximin- bzw. zum Max E_{min}-Lösungsprinzip.

Beispiele:

(34.12)

ρ	p_1	p_2	p_3
	β_1	β_2	β_3
α_1	4	0	1
α_2	2	2	0
α_3	0	3	2

1) Sei $b = \frac{1}{2}$ und die Verteilung $\rho = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.
Aufgrund des HL-Prinzips erhalten wir:

$$V_{HL}(\alpha_1) = \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2} + 0) = \tfrac{3}{4}; V_{HL}(\alpha_2) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + 0) = \tfrac{1}{2};$$

$$V_{HL}(\alpha_3) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{4} + 1 + 0) = \tfrac{7}{8}.$$

Die optimale Strategie α_3 führt also zum HL-Entscheidungswert $V_{HL}(\alpha_3) = \frac{7}{8}$.

2) Sei nur eine $LPI(\rho): p_1 \leq p_2 \leq p_3$ bekannt. Aufgrund des Max E_{min}-Prinzips erhalten wir die Entscheidungsmatrix

$$A(\alpha_i, \rho^{(\gamma)}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

mit einem Sattelpunkt $\frac{5}{3}$. Die optimale Strategie α_3 gewährleistet mindestens die Nutzenerwartung $V(\alpha_3) = \frac{5}{3}$.

3) Nun wollen wir die letzte LPI-Entscheidungssituation bei $b = \frac{1}{2}$ aufgrund des erweiterten Hodges-Lehmann-Prinzips lösen. Wir erhalten gemäß (34.11):

$$V_{HL}^{LPI}(\alpha_1) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 0) = \frac{1}{4}; \quad V_{HL}^{LPI}(\alpha_2) = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0;$$

$$V_{HL}^{LPI}(\alpha_3) = \frac{1}{2}(\frac{5}{3} + 0) = \frac{5}{6}.$$

Wieder ist α_3 die HL-optimale Strategie unter LPI-Bedingungen. Der Entscheidungswert ist

$$V_{HL}^{LPI}(\alpha_3) = \frac{5}{6}.$$

§ 35. Simulationsverfahren

In diesem Paragraphen betrachten wir Simulationsverfahren, die zur Bestimmung von Hurwicz-Optimismus-Parametern λ, Hodges-Lehmann-Vertrauensparametern b und zu LPI-Daten über die Zustandswahrscheinlichkeiten führen. Diese Simulationen stützen sich auf eine entsprechende Befragung des Entscheidungsträgers bezüglich einer simulierten Situation. Die auf diese Weise gewonnenen Daten übermitteln einen Aufschluß über die unbekannten Parameter.

Die Bestimmungsmöglichkeiten des Hurwicz-Optimismus-parameters λ sind aus der Literatur bekannt [z.B. Luce, Raiffa 1957].

Hier soll eine modifizierte Auffassung gegeben werden.

(35.1) Sei $[\{\alpha_i\};\{\beta_j\};[u_{ij}]]; i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,m$;

ein Spiel gegen die Natur mit den üblichen Bezeichnungen. Wir wollen seine Lösung aufgrund des Hurwicz-Prinzips bestimmen. Und zwar geht es um die Bestimmung des Optimismus-Parameters λ. Es sei vorausgesetzt, daß λ für alle Strategien α_i konstant ist und daß λ unverändert bleibt für jedes modifizierte Unterspiel (beliebige Teilmengen $\{\alpha_k\}\subset\{\alpha_i\}; \{\beta_l\}\subset\{\beta_j\}$) mit beliebigen Nutzenwerten $\{\bar{u}_{kl}\}$.

Wir konstruieren folgendes Unterspiel von (35.1):

(35.2)

	β_1	β_2
α_1	u_{11}	u_{12}
α_2	x	x

Sei $u_{11}>u_{12}$. Der Entscheidungsträger wird jetzt befragt, bei welchem Wert von x er zu einem Präferenzausgleich für die Strategien α_1, α_2 komme. Da als Lösungsprinzip das Hurwicz-Prinzip angenommen wurde, ist die Gleichheit der Präferenzen mit der Gleichheit der entsprechenden Hurwicz-Werte äquivalent:

(35.3) $Pr(\alpha_1) = Pr(\alpha_2) \Leftrightarrow V_H(\alpha_1) = V_H(\alpha_2)$.

Also gilt bei $x = \xi$ als Antwort des Entscheidenden:

$$(35.4)\quad \lambda u_{11} + (1-\lambda)u_{12} = \lambda\xi + (1-\lambda)\xi \Rightarrow \lambda = \frac{\xi - u_{12}}{u_{11}-u_{12}} \quad .$$

Da offensichtlich $u_{12} < \xi < u_{11}$, erfüllt λ die Bedingung $0 < \lambda < 1$. Nach der Bestimmung von λ wird dann (35.1) auf üblichem Weg gelöst.

Auf ähnliche Weise läßt sich durch Befragung des Entscheidungsträgers der HL-Vertrauensparameter b bestimmen. Sei die Entscheidungssituation

$$(35.5)\quad [\{\alpha_i\};\{\beta_j\};\ \rho = (p_1,\ldots,p_m);[u_{ij}]];i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,m.$$

Es sei wieder vorausgesetzt, daß b im Bereich der Strategien α_i und für alle modifizierte Unterspiele unverändert bleibt.

Wir betrachten folgendes Unterspiel von (35.5):

(35.6)

ρ	p_1'	p_2'
	β_1	β_2
α_1	u_{11}	u_{12}
α_2	x	x

$p_1', p_2' > 0;\ p_1' + p_2' = 1.$

Dabei sei $u_{11} > u_{12} > 0$ vorausgesetzt.
Der Entscheidungsträger stellt fest, daß aufgrund des HL-Prinzips die Präferenzen für α_1 und α_2 bei $x = \eta$ für ihn gleich sind. Wir erhalten:

$$(35.7)\quad Pr(\alpha_1) = Pr(\alpha_2) \Leftrightarrow V_{HL}(\alpha_1) = V_{HL}(\alpha_2) \Leftrightarrow b(p_1'u_{11} + p_2'u_{12}) + $$

$$+ (1-b)u_{12} = b\eta + (1-b)\eta = \eta.$$

Daraus folgt $b = \dfrac{\eta - u_{12}}{p_1'u_{11}+p_2'u_{12}-u_{12}}$.

Wieder gilt $u_{12} < \eta < p_1' u_{11} + p_2' u_{12}$, und aus (35.7) folgt $0 < b < 1$.

Auf analoge Weise kann durch Befragung der λ-Parameter in dem für den LPI-Fall erweiterten Hurwicz-Prinzip ermittelt werden.

In der Entscheidungssituation

(35.8) $[\{\alpha_i\};\{\beta_j\};LPI(\rho);[u_{ij}]];i = 1,\ldots,n;j = 1,\ldots,m$

sei beispielsweise die LPI(ρ): $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_m$, also eine schwache Ordnung für die Zustandswahrscheinlichkeiten gegeben. Die Lösung von (35.8) soll aufgrund des erweiterten Hurwicz-Prinzips bestimmt werden. Zuerst muß der Optimismus-Parameter λ ermittelt werden. Es wird wieder vorausgesetzt, daß λ im Bereich von $\{\alpha_i\}$ und auch für alle modifizierten Unterspiele konstant ist.

Wir betrachten das Unterspiel

(35.9)

ρ	p_1' / β_1	p_2' / β_2
α_1	u_{11}	u_{12}
α_2	x	x

LPI(ρ): $0 < p_1' \leq p_2'$
$u_{11} > u_{12} > 0$.

Der Entscheidungsträger wird befragt, für welchen Wert von x er den beiden Strategien α_1, α_2 nach dem erweiterten Hurwicz-Prinzip gleiche Präferenzen zuordnet. Wenn das der Fall für $x = \sigma$ ist, führt folgende Überlegung zum Wert von λ :

Die Extremalpunktematrix für (35.9) ist $M(LPI) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

Die neue Entscheidungsmatrix lautet also:

$$A(\alpha_i, \rho^{(\gamma)}) = [u_{ij}] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u_{11} + u_{12}) & u_{12} \\ x & x \end{bmatrix} .$$

Dann gilt:

$V_H^{LPI}(\alpha_1) = \frac{\lambda}{2}(u_{11} + u_{12}) + (1 - \lambda)\, u_{12}$ (aufgrund von (35.9)),

und:

$V_H^{LPI}(\alpha_2) = \lambda\, x + (1 - \lambda)\, x = x.$

Aus $V_H^{LPI}(\alpha_1) = V_H^{LPI}(\alpha_2)$ für $x = \delta$ erhalten wir

(35.10) $\frac{\lambda}{2}(u_{11} + u_{12}) + (1 - \lambda)u_{12} = \delta \Rightarrow \lambda = \dfrac{\delta - u_{12}}{\frac{1}{2}(u_{11} - u_{12})}$.

Offensichtlich gilt:

$u_{12} < \delta < \frac{1}{2}(u_{11} + u_{12})$. Daher folgt aus (35.10), daß $0 < \lambda < 1$.

In analoger Weise könnte man den Vertrauensparameter b aufgrund des erweiterten HL-Prinzips für den LPI-Fall bestimmen. Wir wollen hingegen Simulationsverfahren (Befragungen) für die Ermittlung der unbekannten LPI-Bedingungen betrachten. Der Fall der Bestimmung einer schwachen Ordnung für die Zustandswahrscheinlichkeiten wurde in [Kofler 1974] behandelt. Dazu folgende Bemerkungen:

In der Entscheidungssituation

(35.11) $[\{\alpha_i\}; \{\beta_j\}; \rho = (p_1, \ldots, p_m); [u_{ij}]];\ i = 1, \ldots, n;$
$j = 1, \ldots, m;$

sei ursprünglich nichts über die Verteilung ρ bekannt.

Durch eine Befragung des Entscheidenden soll nun eine LPI für ρ bestimmt werden. Dabei werden möglichst einfache, entsprechend modifizierte Unterspiele aus (35.11) in Betracht gezogen und aus den Aussagen des Entscheidungsträgers über seine Präferenzen bezüglich der Strategienmenge Aufschlüsse über die unbekannte LPI gewonnen. Beispielsweise lassen sich modifizierte Unterspiele folgender Art untersuchen:

$$(35.12)\quad \begin{array}{c|c|c} \rho & p'_k & p'_l \\ \hline & \beta_k & \beta_l \\ \hline \alpha_1 & u_{1k} & u_{1l} \\ \alpha_2 & u_{2k} & u_{2l} \end{array} \qquad p'_k \geq 0, p'_l \geq 0; p'_k + p'_l = 1 .$$

mit der Strategienmenge $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, der Zustandsmenge $\{\beta_k, \beta_l\}$ bei $k, l \in \{1, \ldots, m\}$, $k \neq l$ und den entsprechenden Zustandswahrscheinlichkeiten p'_k, p'_l. Diese Wahrscheinlichkeiten können als durch (35.11) bedingt angesehen werden. Es kann also angenommen werden, daß gilt:

$$(35.13)\quad p'_k = \frac{p_k}{p_k + p_l}, \quad p'_l = \frac{p_l}{p_k + p_l} .$$

Jede Präferenzaussage bezüglich der Nutzenerwartungen für die Strategien α_1, α_2 ergibt einen LPI-Aufschluß über die Wahrscheinlichkeiten p'_k, p'_l und mittels (35.13) über die Wahrscheinlichkeiten p_k, p_l, z.B.:

$$(35.14)\quad \Pr(\alpha_1) \geq \Pr(\alpha_2) \Leftrightarrow p'_k u_{1k} + p'_l u_{1l} \geq p'_k u_{2k} + p'_l u_{2l} .$$

Da $p'_k + p'_l = 1$, erhalten wir die Beziehungen

$p'_k \leq \delta_1$, $p'_l \leq \delta_2$, und gemäß (35.13),

$$(35.15) \qquad \frac{p_k}{p_k + p_l} \leq \delta_1, \quad \frac{p_l}{p_k + p_l} \leq \delta_2.$$

Die Unterspiele (35.12) können für alle möglichen Paare (k, l) untersucht werden (höchstens $\frac{m(m-1)}{2}$ Möglichkeiten). Das auf diese Weise aus Ungleichungen vom Typ (35.15) gewonnene System bestimmt die gesuchte LPI über ρ im Modell (35.11).

Die behandelte Befragungsmethode ist auch für die Bestimmung von Intervallangaben oder von partiellen Ordnungen der Zustandswahrscheinlichkeiten anwendbar.

§ 36: Der LPI-Fall für Unbestimmtheiten in der Entscheidungsmatrix

Bisher betrachteten wir Entscheidungssituationen

$$(36.1) \quad [\{\alpha_i\};\{\beta_j\};\ \mathrm{LPI}(\rho);[u_{ij}]];i = 1,\ldots,n;j = 1,\ldots,m;$$

unter LPI-Bedingungen nur in dem Sinn, daß über die Zustandsverteilung ρ eine LPI vorliegt. Nun wollen wir den allgemeineren Fall behandeln, in dem LPI-Unbestimmtheiten auch für die Elemente der Entscheidungsmatrix zulässig sind. Das Modell wird also erweitert.

Die Mengen $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_j\}$ bleiben unverändert, gegeben ist eine Menge $\{\rho\}$ möglicher Zustandsverteilungen, eine endliche Menge $\{[u_{ij}^{(\delta)}]\}$ möglicher Entscheidungsmatrizen und eine Menge $\{\overline{\rho}\}$ möglicher Verteilungen über der Matrizenmenge $\{[u_{ij}^{(\delta)}]\}$.

Wir erhalten also folgendes Modell:

$$(36.2) \quad [\{\alpha_i\};\{\beta_j\};\{\rho\};\{[u_{ij}^{(\delta)}]\};\{\overline{\rho}\}];i = 1,\ldots,n;$$

$$j = 1,\ldots,m; \quad \delta = 1,\ldots,l.$$

Darin kann man viele Fälle berücksichtigen. Hier einige von ihnen:

1) Das einfache Risiko-Modell:

Die Menge $\{\rho\}$ besteht nur aus einer Verteilung $\rho = (p_1,\ldots,p_m)$, die Menge $\{[u_{ij}{}^{(\delta)}]\}$ aus einer Entscheidungsmatrix $[u_{ij}]$, und $\{\overline{\rho}\}$ fällt weg.

2) Das erweiterte Risiko-Modell:

Die Menge $\{\rho\}$ besteht aus der Verteilung $\rho = (p_1,\ldots,p_m)$, gegeben ist die Menge möglicher Entscheidungsmatrizen $\{[u_{ij}{}^{(\delta)}]\}$; $\delta = 1,\ldots,l$ und eine Verteilung $\overline{\rho} = (\overline{p}_1,\ldots,\overline{p}_l)$ über dieser Matrizenmenge.

3) LPI-Bedingungen für die Zustandsverteilung ρ

Die Menge $\{\rho\}$ bildet eine LPI(ρ) bei der Entscheidungsmatrix $[u_{ij}]$, $\{\overline{\rho}\}$ fällt also weg.

4) LPI-Bedingungen für die Entscheidungsmatrix-Verteilung $\overline{\rho}$ bei gegebener Zustandsverteilung ρ

Die Menge $\{\overline{\rho}\}$ aller möglichen Verteilungen über der Matrizenmenge $\{[u_{ij}{}^{(\delta)}]\}$;$\delta = 1,\ldots,l$ bildet eine LPI($\overline{\delta}$) und dabei wird vorausgesetzt, daß die Zustandsverteilung $\rho = (p_1,\ldots,p_m)$ bekannt ist.

5) LPI-Bedingungen sowohl für die Zustandsverteilung ρ als auch für die Entscheidungsmatrix-Verteilung $\overline{\rho}$

Es liegt also gleichzeitig eine LPI(ρ) und LPI($\overline{\rho}$) vor.

6) LPI-Bedingungen für die Entscheidungsmatrix-Verteilung $\overline{\rho}$ bei vollständiger Ignoranz über die Zustandsverteilung ρ

7) Das erweiterte Modell der vollständigen **Ungewißheit**

Über die Verteilungen ρ und $\overline{\rho}$ liegen gar keine Informationen vor.

Ad 1) Das Modell wird aufgrund des Bernoulli-Prinzips gelöst.

Ad 2) Wir beginnen mit der Betrachtung des erweiterten Risiko-Modells. Die Ergebnisse sollen uns dann die Behandlung des Hauptthemas dieses § erleichtern.

Sei das erweiterte Risiko-Modell gegeben:

$$(36.3) \quad [\{\alpha_i\}; \{\beta_j\}; \rho = (p_1,\ldots,p_m); \{[u_{ij}{}^{(\delta)}]\}; \bar{\rho} = (\bar{p}_1,\ldots\bar{p}_l)];$$

$$i = 1,\ldots,n; \qquad j = 1,\ldots,m; \; \delta = 1,\ldots,l.$$

Die Zufallsvariable Z_1 bestimmt die Zustände $\{\beta_j\}$ mit der Verteilung ρ, die Zufallsvariable Z_2 die Matrixzustände $\{[u_{ij}{}^{(\delta)}]\}$ mit der Verteilung $\bar{\rho}$. Es wird vorausgesetzt, daß die Zufallsvariablen Z_1, Z_2 unabhängig sind.

Es gilt folgender Satz:

Satz 36.1:

Das erweiterte Risiko-Modell (36.3) ist immer in der Form eines einfachen Risiko-Modells darstellbar.

Der Beweis ist einfach. Es genügt, eine neue Zustandsmenge, die möglichen Zustände $\{\theta^{(v)}\}$ des Zufallsvektors $Z = (Z_1, Z_2)$ einzuführen. Wegen der Unabhängigkeit von Z_1 und Z_2 besteht die neue Zustandsmenge $\{\theta^{(v)}\}$ aus $m \cdot l$ Zuständen $\theta^{(1)},\ldots,\theta^{(ml)}$. Auf diese Weise werden die Unbestimmtheiten der Entscheidungsmatrix in die neue Zustandsmenge überführt.

Die Realisation eines Zustands $\theta^{(v)}$ bedeutet die gleichzeitige Realisation eines bestimmten Zustandes β_j und einer bestimmten Entscheidungsmatrix $[u_{ij}{}^{(\delta)}]$. Das aber determiniert eine entsprechende Spalte der Matrix $[u_{ij}{}^{(\delta)}]$. Auf diese Weise erhalten wir bei unveränderter Strategienmenge $\{\alpha_i\}$ und neuer Zustandsmenge $\{\theta^{(v)}\}$ eine einfache Risikosituation, w.z.b.w.

Beispiel:

Das erweiterte Risiko-Modell sei:

$$(36.4)\left[\{\alpha_1,\alpha_2\};\{\beta_1,\beta_2\};\rho = (p_1,p_2);\left\{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right\};\right.$$

$$\left.\overline{\rho} = (\overline{p}_1,\overline{p}_2)\right].$$

Die neue Zustandsmenge ist $\{\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \theta^{(3)}, \theta^{(4)}\}$ mit der Verteilung $\hat{\rho} = (p_1\,\overline{p}_1,\ p_1\,\overline{p}_2,\ p_2\,\overline{p}_1,\ p_2\,\overline{p}_2)$.

Wir erhalten das einfache Risikomodell:

(36.4')

$\hat{\rho}$	$p_1\,\overline{p}_1$	$p_1\,\overline{p}_2$	$p_2\,\overline{p}_1$	$p_2\,\overline{p}_2$
	$\theta^{(1)}$	$\theta^{(2)}$	$\theta^{(3)}$	$\theta^{(4)}$
α_1	a_1	a_2	b_1	b_2
α_2	c_1	c_2	d_1	d_2

Nun zur Frage der Lösung eines erweiterten Risiko-Modells. Es ist offensichtlich, daß aufgrund des Satzes 36.1 ausreicht, das in eine einfache Risikosituation transformierte Modell nach dem Bernoulli-Prinzip zu lösen. Aus algorithmischen Gründen ist aber ein anderes Verfahren einfacher. Es gilt folgender Satz, der die Lösung eines erweiterten Risiko-Modells als Lösung einer einfacheren Risikosituation bestimmt:

Satz 36.2:

Die Lösung aufgrund von Satz 36.1 des erweiterten Risikomodells (36.3) ist mit der Lösung des einfachen Risiko-Modells, in dem als Entscheidungsmatrix die entsprechende Erwartungsmatrix eingeführt wird, äquivalent.

Es ist also zu zeigen, daß die gemäß Satz 36.1 erhaltene einfache Risikosituation eine Lösung besitzt, die der Lösung folgender Risikosituation äquivalent ist:

$$(36.5)\quad [\{\alpha_i\};\{\beta_j\};\ \rho = (p_1,\ldots,p_m);\ \overline{p}_1[u_{ij}^{(1)}] + \ldots + \overline{p}_l \cdot [u_{ij}^{(l)}]] \,.$$

<u>Beweis:</u>

Der Wert $V(\alpha_i)$ der Strategie α_i in (36.5) ist aufgrund des Bernoulli-Prinzips

$$(36.6)\quad V(\alpha_i) = p_1(\overline{p}_1 u_{i1}^{(1)} + \ldots + \overline{p}_l u_{i1}^{(l)}) + \ldots + p_m(\overline{p}_1 u_{im}^{(1)} + \ldots + \overline{p}_l u_{im}^{(l)}).$$

Aus 36.1 folgt

$$(36.7)\quad V(\alpha_i) = p_1\overline{p}_1 u_{i1}^{(1)} + p_1\overline{p}_2 u_{i1}^{(2)} + \ldots + p_1\overline{p}_l\, u_{i1}^{(l)} + \ldots + p_m\overline{p}_l u_{im}^{(l)}.$$

(36.6) und (36.7) aber sind äquivalent.

<u>Beispiel:</u>

Die Erwartungsmatrix sei:

$$A = \begin{bmatrix} \overline{p}_1 a_1 + \overline{p}_2 a_2 & \overline{p}_1 b_1 + \overline{p}_2 b_2 \\ \overline{p}_1 c_1 + \overline{p}_2 c_2 & \overline{p}_1 d_1 + \overline{p}_2 d_2 \end{bmatrix} .$$

Aus der einfachen Risikosituation

ρ	p_1	p_2
	β_1	β_2
α_1		
α_2	A	

erhalten wir z. B. für die Strategie α_1:

(36.8) $V(\alpha_1) = p_1(\bar{p}_1 a_1 + \bar{p}_2 a_2) + p_2(\bar{p}_1 b_1 + \bar{p}_2 b_2)$.

Aus (36.4') folgt

(36.9) $V(\alpha_1) = p_1\bar{p}_1 a_1 + p_1\bar{p}_2 a_2 + p_2\bar{p}_1 b_1 + p_2\bar{p}_2 b_2$.

(36.8) und (36.9) sind äquivalent.

Ad 3):

Die bisherigen Betrachtungen betreffen eben das Modell der LPI-Bedingungen für die Zustandsverteilung.

Ad 4):

Hier liegt der LPI-Fall für Unbestimmtheiten in der Entscheidungsmatrix vor. Es ist offensichtlich, daß man den Fall auch anders formulieren kann: Es liegt eine LPI($\bar{\rho}$) für die Entscheidungsmatrix-Verteilung $\bar{\rho}$ vor. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Zustandsverteilung $\rho = (p_1, \ldots, p_m)$ bekannt ist. Es wird wieder angenommen, daß die mit den Verteilungen ρ und $\bar{\rho}$ verbundenen Zufallsvariablen Z_1 bzw. Z_2 unabhängig sind.

Die Lösung dieses Falles ist schwieriger. Wieder bedarf es eines Übergangs zu einer neuen Zustandsmenge, der Menge möglicher Zustände des Zufallsvektors $Z = (Z_1, Z_2)$. Aufgrund der Unabhängigkeit von Z_1 und Z_2 gibt es $m \cdot l$ Zustände: $\{\theta^{(v)}\}$; $v = 1, \ldots, ml$.

Auch hier bedeutet die Realisation eines Zustands $\theta^{(v)}$ die gleichzeitige Realisation eines Zustands β_j und einer Matrix $[u_{ij}^{(\delta)}]$, und das führt zu einer entsprechenden Spalte der Matrix $[u_{ij}^{(\delta)}]$, allerdings mit dem Unterschied, daß im Gegensatz zum Fall der erweiterten Risikosituation jetzt nur eine LPI für die Verteilung von Z vorliegt. Das folgt aus der Tatsache, daß für die Verteilung $\overline{\rho}$ von Z_2 eine LPI($\overline{\rho}$) bekannt ist bei bekannter Verteilung ρ von Z_1.

Es gilt nämlich folgender Satz:

Satz 36.3:

Unter der Annahme, daß Z_1, Z_2 diskrete, unabhängige Zufallsvariablen sind, die Verteilung ρ von Z_1 bekannt ist und über die Verteilung $\overline{\rho}$ von Z_2 eine LPI($\overline{\rho}$) vorliegt, liegt auch für die Verteilung $\hat{\rho}$ des Zufallsvektors $Z = (Z_1, Z_2)$ eine LPI vor.

Der Beweis erfolgt analog zu dem des allgemeinen LPI-Satzes 2o.1 über Zufallsvektoren.

Die Anwendung von Satz 36.3 führt also zur Entscheidungssituation

$$(36.10)\quad [\{\alpha_i\};\{\theta^{(v)}\};\mathrm{LPI}(\hat{\rho});[\hat{u}_{i\tau}]];\ i = 1,\ldots,n;$$
$$v = 1,\ldots,ml;\ \tau = 1,\ldots,ml;$$

Dann ist LPI($\hat{\rho}$) die für den Zufallsvektor $Z = (Z_1, Z_2)$ resultierende LPI und $[\hat{u}_{i\tau}]$ die oben betrachtete neue Entscheidungsmatrix. Es ist zu beachten, daß das betrachtete Verfahren die Unbestimmtheiten der Entscheidungsmatrix in die Zustandsmenge $\{\theta^{(v)}\}$ überführt. Auf diese Weise gelangen wir zu (36.10), also zum Fall 3) mit einer gewöhnlichen LPI-Entscheidung: Das Max E_{min}-Prinzip bestimmt die Lösung von (36.10).

Damit ist bewiesen:

Satz 36.4:

Jede Entscheidungssituation mit LPI-Bedingungen für die möglichen Entscheidungsmatrizen und mit gegebener Zustandsverteilung ist in eine gewöhnliche LPI-Entscheidung (LPI-Bedingungen für die Zufallsverteilung) überführbar.

Die Bestimmung des Entscheidungswertes in (36.10) bildet, wie schon bekannt, den Ausgangspunkt für die Ermittlung der Informationswerte und für sensitivitätsanalytische Untersuchungen.

Beispiel:

$$\text{(36.11)}\qquad \begin{array}{c|c|c} \rho & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ & \beta_1 & \beta_2 \\ \hline \alpha_1 & a^{(\delta)} & b^{(\delta)} \\ \alpha_2 & c^{(\delta)} & d^{(\delta)} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \delta = 1,2. \\ LPI(\overline{\rho}):\ \overline{p}_1 \leq \overline{p}_2 \end{array}$$

(36.11) ist das Beispiel einer Entscheidungssituation unter LPI-Bedingungen für die Entscheidungsmatrix bei gegebener Zustandsverteilung ρ :

$$\rho = (p_1, p_2) = (\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4});\ \{[u_{ij}^{(\delta)}]\} = \left\{ \begin{bmatrix} a^{(1)} & b^{(1)} \\ c^{(1)} & d^{(1)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a^{(2)} & b^{(2)} \\ c^{(2)} & d^{(2)} \end{bmatrix} \right\}$$

Bezüglich der Verteilung $\overline{\rho} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2)$ der zwei möglichen Entscheidungsmatrizen ist eine LPI gegeben:

$LPI(\overline{\rho}) : \overline{p}_1 \leq \overline{p}_2$.

Da $m \cdot l = 2 \cdot 2 = 4$, besteht die neue Zustandsmenge aus $\{\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \theta^{(3)}, \theta^{(4)}\}$. Für die Verteilung

(r_1, r_2, r_3, r_4) über dieser Menge gilt:

$$r_1 = \frac{3}{4}\bar{p}_1,\ r_2 = \frac{3}{4}\bar{p}_2,\ r_3 = \frac{1}{4}\bar{p}_1,\ r_4 = \frac{1}{4}\bar{p}_2.$$

Aus Satz 36.3 und der LPI($\bar{p}$) ergibt sich die LPI(r_1, r_2, r_3, r_4):
$r_1 \leq r_2,\ r_3 \leq r_4,\ 3r_3 = r_1,\ 3r_4 = r_2.$

Wir erhalten also die mit (36.11) äquivalente neue Entscheidungssituation:

(36.12)

$\bar{p}$ / E	r_1 $\theta^{(1)}$	r_2 $\theta^{(2)}$	r_3 $\theta^{(3)}$	r_4 $\theta^{(4)}$
α_1	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$b^{(1)}$	$b^{(2)}$
α_2	$c^{(1)}$	$c^{(2)}$	$d^{(2)}$	$d^{(2)}$

mit der LPI($\bar{p}$): $r_1 \leq r_2,\ r_3 \leq r_4,\ 3r_3 = r_1,\ 3r_4 = r_2.$

Die Anwendung des Max E_{min}-Prinzips in (36.12) führt gleichzeitig zur Lösung von (36.11).

Es ist zu beachten, daß im betrachteten Fall ein Übergang zur Erwartungsmatrix und die Anwendung des Bernoulli-Prinzips im allgemeinen falsch wäre. Gemäß dem Max E_{min}-Prinzip handelt es sich ja in unserem Fall um die minimale Erwartungsmatrix. Im allgemeinen bedeutet das aber nicht, daß man für die einzelnen Elemente der Entscheidungsmatrix die minimalen Erwartungswerte bestimmen muß. Das trifft nur zu unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die den variablen Elementen der Entscheidungsmatrix entsprechenden Zufallsvariablen unabhängig sind. Es gilt nämlich unter der Voraussetzung, daß den variablen Elementen $\bar{u}_{ij}$ der Entscheidungsmatrix diskrete unabhängige Zufallsvariablen Z_{ij} mit bekannten LPI$(\bar{u}_{ij})$ über die Verteilungen entsprechen, folgender Satz:

Satz 36.5:

Das Entscheidungsmodell ist unter den getroffenen Voraussetzungen in ein Risikomodell überführbar, indem die variablen Elemente der Entscheidungsmatrix durch die entsprechenden LPI-minimalen Erwartungswerte ersetzt werden.

Der Beweis folgt aus der richtigen, auf Axiom 7 in § 26 beruhenden Interpretation des Max E_{min}-Prinzips. Es ist offensichtlich, daß Satz 36.5 auch solche Entscheidungsmatrizen betrifft, in denen nur einzelne Elemente variabel sind:

Beispiel:

Z	β_1	β_2	β_3
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(36.13)

p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
	β_1	β_2	β_3
α_1	2	u_{12}	1
α_2	-1	2	1
α_3	1	1	u_{33}

u_{12}	-1	0	$\frac{1}{2}$
p_{12}	q_1	q_2	q_3

; $LPI(p_{12}): q_1 \leq q_2 \leq q_3$

u_{33}	0	1
p_{33}	r_1	r_2

; $LPI(p_{33}): r_1 \geq r_2$

Das Beispiel ist eine Entscheidungssituation mit LPI-Bedingungen für die Elemente der Entscheidungsmatrix u_{12}, u_{33} bei gegebener Zustandsverteilung. Es sei vorausgesetzt, daß die drei Zufallsvariablen Z, u_{12}, u_{33} unabhängig sind. Aufgrund des Satzes 36.5 wollen wir (36.13) in ein Risikomodell überführen. Gemäß den LPI-Angaben werden die LPI-minimalen Nutzenerwartungen für u_{12} und u_{33} bestimmt.

Für u_{12}:

$$LPI(p_{12}): q_1 \leq q_2 \leq q_3, \quad M(LPI) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix};$$

$$LPI\text{-}Min(u_{12}) = Min(-\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{6}.$$

Für u_{33}:

$$LPI(p_{33}): r_2 \leq r_1; \quad M(LPI) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix};$$

$$LPI\text{-}Min(u_{33}) = Min(\tfrac{1}{2}, 0) = 0.$$

Die Risikosituation ist dann:

p	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
	β_1	β_2	β_3
α_1	2	$-\frac{1}{6}$	1
α_2	-1	2	1
α_3	1	1	0

Das Bernoulli-Prinzip führt zu:

$V(\alpha_1) = \frac{2}{3}$; $V(\alpha_2) = 1$, $V(\alpha_3) = \frac{3}{4}$.

Die optimale Strategie ist also α_2 und der Entscheidungswert $V(\alpha_2) = 1$.

In (36.13) wird mittels der Strategie a_2 mindestens die Nutzenerwartung 1 gewährleistet.

Man könnte (36.13) auch aufgrund des Satzes 36.4 lösen: Die LPI-Bedingungen für u_{12}, u_{33} bestimmen eine LPI-Verteilung über den 6 möglichen Entscheidungsmatrizen (Satz 20.1 über LPI-Verteilung eines Zufallsvektors). Gemäß Satz 36.4 läßt sich dann die Entscheidungssituation in eine gewöhnliche LPI-Entscheidung überführen und die Anwendung des Max E_{min}-Prinzips führt zur Lösung. Es ist offensichtlich, daß diese Lösungsmethode algorithmisch schwieriger ist.

Ad 5):

Hier wird der Fall erörtert, daß in (36.2) LPI-Bedingungen sowohl für die Zustandsverteilung p als auch für die Entscheidungsmatrix-Verteilung $\overline{p}$ vorliegen. Wieder wird die Unabhängigkeit der diskreten Zufallsvariablen Z_1 und Z_2 vorausgesetzt. Es folgt der Übergang zur neuen Zustandsmenge $\{\theta^{(v)}\}$ aller möglichen Zustände des Zufallsvektors $Z = (Z_1, Z_2)$. Die Anzahl möglicher Zustände ist $m \cdot l$. Aufgrund des Satzes 20.1 liegt auch für die Verteilung $\hat{p}$ über der Zustandsmenge $\{\theta^{(v)}\}$; $v = 1,\ldots,ml$ eine LPI($\hat{p}$) vor.

Jede Realisation eines Zustandes $\theta^{(v)}$ bedeutet die gleichzeitige Realisation eines bestimmten Zustandes β_j und einer Entscheidungsmatrix $[u_{ij}^{(\delta)}]$. Das bedeutet die Realisation einer bestimmten Spalte in $[u_{ij}^{(\delta)}]$. Da die Strategienmenge unverändert bleibt, kommen wir auf diese Weise zu einem gewöhnlichen LPI-Modell, in dem also die LPI-Bedingungen nur die Zustandsverteilung $\hat{p}$ betreffen. Die Unbestimmtheiten bezüglich der Entscheidungsmatrix werden wieder in die neue Zustandsmenge $\{\theta^{(v)}\}$ einbezogen. Das neue Modell entspricht dem aus Fall 2). Die zusammengegesetzte LPI($\hat{\rho}$) betrifft die Verteilung $\hat{\rho} = (r_1, \ldots, r_{ml})$ mit

$$r_1 = p_1\bar{p}_1, \; r_2 = p_1\bar{p}_2, \ldots, \; r_{ml} = p_m\bar{p}_l$$

$$(\rho = p_1, \ldots, p_m) \; ; \; \bar{\rho} = (\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_l).$$

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 36.6:

Jede Entscheidungssituation (36.2) unter LPI-Bedingungen für die Zustandsverteilung ρ und für die Entscheidungsmatrix-Verteilung $\bar{\rho}$ ist, unter der Annahme der Unabhängigkeit der entsprechenden Zustandsvariablen Z_1, Z_2 in ein gewöhnliches LPI-Modell überführbar.

Die Lösung folgt dann aufgrund des Max E_{min}-Prinzips. Der entsprechende Entscheidungswert bedeutet, wie üblich, die mindestens gewährleistete Nutzenerwartung.

Beispiel:

(36.15)

ρ	p_1	p_2	p_1	p_2
	β_1	β_2	β_1	β_2
α_1	1	-1	1	0
α_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$
$\bar{\rho}$	$\bar{p}_1$		$\bar{p}_2$	

LPI(ρ): $p_1 \geq p_2$

LPI($\bar{\rho}$): $\bar{p}_1 \geq \bar{p}_2$

(36.15) ist eine Entscheidungssituation unter LPI-Bedingungen für die Zustandsverteilung $\rho = (p_1, p_2)$ und für die Entscheidungsmatrix-Verteilung $\bar{\rho} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2)$. Die entsprechenden Zufallsvariablen Z_1, Z_2 seien unabhängig.
Die möglichen Entscheidungsmatrizen sind dann:

$$\left[u_{ij}^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \left[u_{ij}^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

Die LPI-Bedingungen für ρ und $\overline{\rho}$ sind in (36.15) angegeben. Dafür wird die Max E_{min}-Lösung gesucht.

Gemäß Satz 36.6 wollen wir (36.15) in eine gewöhnliche LPI-Entscheidung verwandeln.

Die neue Zustandsmenge ist $\{\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \theta^{(3)}, \theta^{(4)}\}$,
die Verteilung $\hat{\rho} = (r_1, r_2, r_3, r_4)$.
Wegen der Unabhängigkeit von Z_1, Z_2 gilt

$$r_1 = p_1\overline{p}_1, \; r_2 = p_1\overline{p}_2; \; r_3 = p_2\overline{p}_1, \; r_4 = \overline{p}_2 p_2$$

Das Verfahren in Satz 20.1 gibt uns die LPI-Bedingungen für die zusammengesetzte Zufallsvariable $Z = (Z_1, Z_2)$:

$$(36.16) \quad \begin{cases} r_1 - r_2 - r_3 + r_4 \geq 0 \\ r_2 - r_4 \geq 0 \\ r_3 - r_4 \geq 0 \\ r_1 \geq \frac{1}{4} \\ r_4 \leq \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r_1, r_2, r_3, r_4 \geq 0 \\ r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1 \end{array}$$

Das gewöhnliche LPI-Modell lautet dann:

(36.17)

$\hat{\rho}$	r_1 / $\theta^{(1)}$	r_2 / $\theta^{(2)}$	r_3 / $\theta^{(3)}$	r_4 / $\theta^{(4)}$
α_1	1	1	-1	0
α_2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$

Die Extremalpunkte-Matrix $M(LPI(\hat{\rho}))$ finden wir aus

(36.16) aufgrund des Verfahrens im Satz 18.1 . Wir erhalten:

$$M(LPI\,(\hat{\rho})) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

Der Übergang von (36.17) in ein Zweipersonen-Nullsummenspiel ergibt

$$(36.18) \quad A(\alpha_i, \hat{\rho}^{(\gamma)}) = [u_{ij}] \cdot M(LPI) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Das reduzierte Spiel (die dominierte Strategie des Spielers II wird gestrichen) ist:

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Die Lösung von (36.18) im Bereich der **reinen Strategien** ist $[\alpha_2;\ V(\alpha_2) = \frac{1}{4}]$. Da das Spiel (36.18) nicht strikt determiniert ist, kann man es im Bereich der gemischten Strategien lösen. Die Anwendung z. B. der graphischen Methode ergibt $[\alpha^* = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}),\ V(\alpha^*) = \frac{7}{16}]$.

Auch in dem zuletzt betrachteten Fall ist es möglich, daß die Unbestimmtheiten in der Entscheidungsmatrix auf andere Weise gegeben sind: Gewisse Elemente $\bar{u}_{ij}$ der Entscheidungsmatrix sind variabel. Ihnen entsprechen diskrete, unabhängige Zufallsvariablen Z_{ij} mit bekannten LPI-Bedingungen.

Unter der Voraussetzung, daß die Zufallsvariablen Z_1 und alle Z_{ij} unabhängig sind, gilt für den Bereich der reinen Strategien folgender Satz, der offensichtlich eine Erweiterung von Satz 36.5 bildet.

Satz 36.7:

Das Entscheidungsmodell ist unter den getroffenen Voraussetzungen in ein gewöhnliches LPI-Modell überführbar, indem die variablen Elemente der Entscheidungsmatrix durch die entsprechenden LPI-minimalen Erwartungswerte ersetzt werden.

Der Beweis ist analog wie für Satz 36.5, und die Beschränkung auf reine Strategien folgt aus den weiteren Überlegungen.

Ad 6) und 7):

In beiden Fällen erfolgt der Übergang zur neuen Zustandsmenge $\{\theta^{(v)}\}$ als Menge der möglichen Zustände des Zufallsvektors $Z = (Z_1, Z_2)$. Auf diese Weise kommen wir wieder zum Modell des Falles 2); allerdings mit dem Unterschied, daß in den Fällen 6) und 7) für die Zustandsverteilung keine Informationen vorliegen. Es bleibt also als Lösungsverfahren in diesen Fällen nur die Anwendung des Maximin-Prinzips.

Liegen beispielsweise in (36.15) keine Informationen über die Verteilungen ρ und $\bar{\rho}$ vor, so kommen wir zu (36.17) bei vollständiger Ignoranz über die Zustandsverteilung $\hat{\rho} = (r_1, r_2, r_3, r_4)$. Die Anwendung des Maximin-Prinzips führt zur Lösung (α_2 0). Der Informationswert des Übergangs von vollständiger Ignoranz über ρ und $\overline{\rho}$ zu den in (36.15) angegebenen LPI-Bedingungen für ρ und $\overline{\rho}$ ist $\frac{7}{16} - 0 = \frac{7}{16}$. Das bedeutet, daß der Übergang von der maximinimalen Strategie α_2 zur gemischten Max E_{min}-optimalen Strategie $(\frac{1}{4}\alpha_1, \frac{3}{4}\alpha_2)$ mindestens den Nutzenerwartungswert $\frac{7}{16}$ gewährleistet.

Die Ergebnisse dieses Kapitels finden eine wesentliche Anwendung in den mehrstufigen Entscheidungen (Kap. 7) und in der mathematischen Programmierung (Kap. 8).

§ 37. LPI-Entscheidungen aus spieltheoretischer Sicht.

Alle Entscheidungen unter Ungewißheit können spieltheoretisch interpretiert werden. Das betrifft offensichtlich auch LPI-Entscheidungen. Es soll hier gezeigt werden, daß alle bisher betrachteten LPI-Modelle als antagonistische Spiele interpretiert werden können, und zwar im folgenden Sinne:

Wie schon im 5. Kapitel erörtert, kann der Grundbegriff der Entscheidungstheorie, der Entscheidungswert, nur als ein für eine gegebene Entscheidungssituation gewährleisteter Nutzengewinn eingeführt werden. Das ist auch der Grund dafür, daß bei der axiomatischen Begründung des Max E_{min}-Prinzips das Axiom 7 berücksichtigt werden mußte. Daraus folgt, daß die Bestimmung des Entscheidungswertes auch die ungünstigen Umstände der Entscheidungssituation berücksichtigen muß. Das führt zu folgendem spieltheoretischen Modell:

In jeder Entscheidung unter Ungewißheit (Spiel gegen die Natur) ist der Spieler I der Entscheidungsträger. Er ist der maximierende Spieler im Bereich seiner Strategienmenge.

Die Gesamtheit aller Unbestimmtheiten der Entscheidungssituation bildet die Strategienmenge des Gegenspielers, des minimierenden Spielers. Als Gegenspieler kann auch eine Gruppe von Spielern, die kooperativ oder auch nicht koperativ handeln, betrachtet werden. Jede, das behandelte Entscheidungsmodell beeinflussende Zufallsvariable kann als Spieler dieser minimierenden Gruppe interpretiert werden. Es ist offensichtlich, daß auf diese Weise unabhängigen Zufallsvariablen nicht kooperierende Spieler und nicht unabhängigen Zufallsvariablen kooperierende Spieler zugeordnet werden.

In den folgenden Erörterungen wird oft folgende Tatsache in Betracht gezogen. Sei A der Entscheidungsträger, also der maximierende Spieler, und $(B_1,\dots,B_m)$ die minimierende Gruppe von Spielern, die den Gegenspieler bilden. Unabhängig davon, ob die Spieler $B_1,\dots,B_m$ kooperieren oder nicht, muß bei der Bestimmung des Entscheidungswertes die minimierende Gruppe $(B_1,\dots, B_m)$ als kooperierend betrachtet werden. Nur auf diese Weise können die für den Entscheidungsträger schlimmsten Umstände berücksichtigt werden, was eben zum Entscheidungswert führt.

Analoges gilt für den Fall, daß $B_1,\dots,B_m$ Zufallsvariablen sind. Unabhängig davon, ob es sich um abhängige oder unabhängige Variablen handelt, muß im entsprechenden Minimierungsprozess die zusammengesetzte Zufallsvariable $(B_1,\dots,B_m)$ berücksichtigt werden. Sie entspricht im spieltheoretischen Aspekt der minimierenden Koalition $(B_1,\dots, B_m)$. Das Modell und die Sätze 36.4 und 36.6 werden von diesem Standpunkt aus erörtert.

In den weiteren Überlegungen wird folgendes Verfahren verwendet: Bei bekannter Verteilung oder LPI für die komponenten Zufallsvariablen soll bezüglich der zusammengesetzten Zufallsvariablen (Z_1, Z_2) minimiert werden. Die Zufallsvariable Z_1 wird "intern" berücksichtigt, indem die Entscheidungsmatrix entsprechend reduziert wird. Es bleibt noch der "externe" Minimierungsprozess bezüglich Z_2.

In der Spieltheorie wird bewiesen [Parthasaraty, Raghavan 1971], daß eine, gemäß der bekannten Verteilung oder LPI der Variablen Z_1 durchgeführte Spalten-Reduktion in der Entscheidungsmatrix im allgemeinen die Lösung nur auf den Bereich der reinen Strategien beschränkt. Das ist der Grund für die Beschränkung der Lösung gemäß Satz 36.2 auf reine Strategien. Die aus den Zufallsvariablen Z_{ij} bestehende zusammengesetzte Zufallsvariable wird ja "intern" berücksichtigt.

Es folgt jetzt eine kurze Übersicht der bisherigen LPI-Entscheidungen aus spieltheoretischer Sicht.

Wir beginnen mit der Risikosituation. Spieltheoretisch könnte man Risikosituationen als Pseudospiele, in denen der Gegenspieler schon eine Strategie (die Zustandsverteilung ρ) gewählt hat, betrachten. Es bleibt also nur das Maximierungsverfahren im Bereich $\{\alpha_1\}$ seitens des Entscheidungsträgers bezüglich der Erwartungswerte (das Bernoulli-Prinzip). Auch das erweiterte Risikomodell (36.3) mit bekannter Entscheidungsmatrix - Verteilung $\bar{\rho}$ kann ähnlich interpretiert werden. Die Strategienmenge des Gegenspielers wird hier als Menge aller Zustände des Zufallsvektors $Z = (Z_1, Z_2)$ bestimmt und es wird der Fall betrachtet, in dem der Gegenspieler schon eine Strategie (ρ, $\bar{\rho}$) gewählt hat.

Nun zu den gewöhnlichen LPI-Entscheidungen. So nannten wir Entscheidungssituationen mit LPI-Bedingungen für die Zustandsverteilung ρ. Die Strategienmenge des maximierenden Spielers I ist $\{\alpha_i\}$, die des Gegenspielers die Menge $\{\rho\}$ aller im LPI-Bereich möglichen Verteilungen . Wegen der

Linearität der Zielfunktion ist aber ein Übergang zum reduzierten Spiel möglich, indem bei unveränderter Strategienmenge $\{\alpha_i\}$ die Strategienmenge des minimierenden Spielers auf die Menge $\{\rho^{(\gamma)}\}$ der Extremal-Verteilungen beschränkt wird. Auch eine Erweiterung des Spiels in den Bereich der gemischten Strategien ist möglich. Das Max E_{min}-Prinzip führt zur Lösung.

Schließlich zu den erweiterten LPI-Entscheidungen: Zuerst der im Satz 36.4 erörterte Fall der bekannten Zustandsverteilungen ρ und LPI($\overline{\rho}$) über die Entscheidungsmatrix-Verteilung $\overline{\rho}$. Es gibt also zwei Unbestimmtheitsgebiete, die Zufallsvariabe Z_1 mit der Verteilung ρ und die Zufallsvariable Z_2 mit gegebener LPI($\overline{\rho}$). Spieltheoretisch können wir also annehmen, daß es zwei minimierende, nicht kooperierende Gegenspieler gibt.

Gemäß den obigen Bemerkungen kann man das Minimierungsverfahren der beiden Gegenspieler auch anders gestalten. Im Satz 36.4 wurde aus diesen zwei Gegenspielern ein neuer Gegenspieler gebildet und als resultierende Strategienmenge das kartesische Produkt der einzelnen Strategienmengen in Betracht gezogen. Die neue Strategienmenge wurde gleichzeitig als Zustandsmenge $\{\theta^{(v)}\}$, über deren Verteilung $\hat{\rho}$ eine LPI($\hat{\rho}$) vorliegt, angenommen.

Es gibt aber auch andere Verfahren. Man kann z. B. als Zustandsmenge die Menge $\{[u_{ij}^{(\delta)}]\}$; $\delta = 1,\ldots,l$ aller möglichen Entscheidungsmatrizen einführen. Das wäre das Wirkungsgebiet des Gegenspielers II (Zufallsvariable Z_2). Die minimierenden Auswirkungen des Gegenspielers I (Zufallsvariable Z_1) müssen hier "intern" berücksichtigt werden in dem Sinn, daß jeder Strategie α_i bei gegebenem Zustand δ (Strategie des Gegenspielers II) der entsprechende Erwartungswert bei bekannter Verteilung ρ zugeordnet wird. Unter Berücksichtigung der gegebenen LPI($\overline{\rho}$) kommen wir auf diese Weise wieder zu einer gewöhnlichen LPI-Entscheidung, die im allgemeinen algorithmisch einfacher ist, aber nur den Bereich der reinen Strategien umfaßt. Es gilt also der

Satz 37.1

Die Entscheidungssituation

$$[\{\alpha_i\}; \{\beta_j\}; \rho = (p_1,\ldots,p_m); \{[u_{ij}^{(\delta)}]\}; LPI(\overline{\rho})]; i = 1,\ldots,n;$$
$$j = 1,\ldots,m; \quad \delta = 1,\ldots,l.$$

ist bei gegebener Zustandsverteilung ρ und LPI($\overline{\rho}$) über die Verteilung $\overline{\rho}$ der möglichen Entscheidungsmatrizen $\{[u_{ij}^{(\delta)}]\}$ im Bereich der reinen Strategien äquivalent mit der gewöhnlichen LPI-Entscheidung

$$(37.1) \quad [\{\alpha_i\}; \{\delta\}; LPI(\overline{\rho}); [<\rho, \overline{W}_1^{(\delta)}>]]; i = 1,\ldots n; \delta = 1,\ldots,l.$$

Darin ist $\{\delta\}$ die Strategienmenge des Gegenspielers II. Sie enthält die Wahl einer Entscheidungsmatrix $[u_{ij}^{(\delta)}]$, wobei eine LPI($\overline{\rho}$) bekannt ist ($\overline{\rho}$- Verteilung über $\{\delta\}$). $\overline{w}_i^{(\delta)}$ ist der Zeilenvektor $(u_{i1}^{(\delta)},\ldots, u_{im}^{(\delta)})$ und $<\rho, \overline{w}_i^{(\delta)}>$ das Skalarprodukt von $\overline{w}_i^{(\delta)}$ mit dem gegebenen Verteilungsvektor $\rho = (p_1,\ldots,p_m)$. Die Entscheidungsmatrix in (37.1) ist also $[<\rho, \overline{w}_i^{(\delta)}>]$. Zum Vergleich der beiden Lösungsmethoden aus Satz 36.4 und Satz 37.1 sei bemerkt, daß der algorithmisch schwierigere Satz 36.4 auch die Erweiterung des Spiels im Bereich der gemischten Strategien umfaßt, während Satz 37.1 auf reine Strategien beschränkt ist.

Beispiel:

Das Beispiel (36.11) wurde aufgrund des Satzes 36.4 gelöst. Nun wollen wir in (36.11) den Satz 37.1 anwenden. Wir haben:

$\{\alpha_i\} = \{\alpha_1, \alpha_2\}; \{\delta\} = \{1,2\}; \rho = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4});$

$$\{[u_{ij}{}^{(\delta)}]\} = \left\{ \begin{bmatrix} a^{(1)} & b^{(1)} \\ c^{(1)} & d^{(1)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a^{(2)} & b^{(2)} \\ c^{(2)} & d^{(2)} \end{bmatrix} \right\}; \text{ LPI}(\overline{\rho}): \overline{p}_1 \leq \overline{p}_2;$$

$$< \rho, \overline{w}_i^{(\delta)} > = \frac{3}{4} u_{i1}{}^{(\delta)} + \frac{1}{4} u_{i2}{}^{(\delta)};$$

Die Entscheidungssituation (36.11) ist also gemäß Satz 37.1 im Bereich der reinen Strategien äquivalent mit der Entscheidungssituation:

(37.2)

$\overline{\rho}$	$\overline{p}_1$, $\delta = 1$	$\overline{p}_1$, $\delta = 2$
α_1	$\frac{3}{4} u_{11}{}^{(1)} + \frac{1}{4} u_{12}{}^{(1)}$	$\frac{3}{4} u_{11}^{(2)} + \frac{1}{4} u_{12}{}^{(2)}$
α_2	$\frac{3}{4} u_{21}{}^{(1)} + \frac{1}{4} u_{22}{}^{(1)}$	$\frac{3}{4} u_{21}^{(2)} + \frac{1}{4} u_{22}{}^{(2)}$

$\text{LPI}(\overline{\rho}): \overline{p}_1 \leq \overline{p}_2.$

Es ist nicht schwer zu beweisen, daß (37.2) mit (36.12) im Bereich der reinen Strategien übereinstimmt.

Damit zu 5). Im Satz 36.6 wurde bewiesen, daß bei Entscheidungen unter LPI-Bedingungen gleichzeitig für die Zustandsverteilung ρ und für die Entscheidungsmatrix - Verteilung $\overline{\rho}$ der Übergang zu einer gewöhnlichen LPI-Entscheidung möglich ist. Dabei wurde die zusammengesetzte Zufallsvariable $Z = (Z_1, Z_2)$ als Gegenspieler betrachtet und die Menge aller möglichen Zustände von Z als neue Zustandsmenge. Nun wollen wir dem Gegenspieler II nur den Bereich der Zufallsvariablen Z_2 (mit Verteilung $\overline{\rho}$) überlassen und zur neuen Zustandsmenge übergehen, indem die Zustandsvariable Z_1 (Gegenspieler I) wieder intern berücksichtigt wird. Hier muß jeder Strategie α_i des Entscheidungsträgers gemäß dem Max E_{min}-Prinzip die im LPI-Bereich minimale

Nutzenerwartung zugeordnet werden.
Es muß also die der LPI(ρ) entsprechende Extremalpunkte-Matrix M(LPI) bestimmt werden. Sei $M(LPI(\rho)) = [\rho^{(1)},\ldots,\rho^{(k)}]$.
Wie oben, ist $\bar{w}_i^{(\delta)}$ der Vektor

$$(37.3)\quad \bar{w}_i^{(\delta)} = (u_{i1}^{(\delta)},\ldots,u_{im}^{(\delta)});i = 1,\ldots,n;\ \delta = 1,\ldots,l.$$

Dann wird im Rahmen der "internen Reduktion" jedem Strategienpaar (α_i,δ) der Nutzengewinn $\min\limits_{\gamma\in\{1,\ldots,k\}} <\rho^{(\gamma)},\bar{w}_i^{(\delta)}>$ zugeordnet.

Auch hier besteht im allgemeinen Äquivalenz der beiden Entscheidungssituationen nur im Bereich der reinen Strategien.
Es gilt also folgender Satz:

Satz 37.2:

Jede Entscheidungssituation (36.2) unter LPI-Bedingungen für die Zustandsverteilung ρ und für die Entscheidungsmatrix-Verteilung $\bar{\rho}$ ist bei Annahme der Unabhängigkeit der entsprechenden Zufallsvariablen Z_1, Z_2 im Bereich der reinen Strategien mit folgendem gewöhnlichen LPI-Modell äquivalent:

$$(37.4)\quad [\{\alpha_i\};\{\delta\};LPI(\bar{\rho});[\hat{u}_{i\delta}] = [\min_{\gamma}<\bar{\rho}^{(\gamma)},\bar{w}_i^{(\delta)}>]];\ \begin{matrix} i = 1,\ldots,n \\ \delta = 1,\ldots,l \\ \gamma = 1,\ldots,k \end{matrix}$$

Darin ist in der Entscheidungsmatrix $[u_{i\delta}] = [\min\limits_{\gamma}<\bar{\rho}^{(\gamma)},\bar{w}_i^{(\delta)}>]$
$<\bar{\rho}^{(\gamma)},\bar{w}_i^{(\delta)}>$ das Skalarprodukt der Vektoren $\bar{\rho}^{(\gamma)}$ und $w_i^{(\delta)}$. Das Skalarprodukt (Erwartungswert) wird über $\gamma = 1,\ldots,k$ minimiert.

Beispiel:

Das Beispiel (36.15) wurde gemäß Satz 36.6 gelöst. Nun können wir eine einfachere Lösung von (36.15)aufgrund des Satzes 37.2, allerdings nur im Bereich der reinen Strategien, angeben.

Wir haben in (37.4):

$\{\alpha_i\} = \{\alpha_1, \alpha_2\}; \{\delta\} = \{1,2\}; LPI(\rho): p_1 \geq p_2;$

$$LPI(\bar{\rho}): \bar{p}_1 \geq \bar{p}_2; M(LPI(\rho)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}; M(LPI(\bar{\rho})) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$[u_{ij}^{(1)}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}; [u_{ij}^{(2)}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix};$$

$\hat{u}_{11} = \min(0,1) = 0;\ \hat{u}_{12} = \min(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{2}$

$\hat{u}_{21} = \min(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2};\ \hat{u}_{22} = \min(\frac{1}{4}, 0) = 0.$

Es bleibt also, folgende gewöhnliche LPI-Entscheidung zu lösen:

(37.5)

$\bar{\rho}$	$\bar{p}_1$ $\delta = 1$	$\bar{p}_2$ $\delta = 2$
α_1	0	$\frac{1}{2}$
α_2	$\frac{1}{2}$	0

; $LPI(\bar{\rho}): \bar{p}_1 \geq \bar{p}_2$.

Nach dem Max E_{min}-Prinzip ist die Entscheidungsmatrix

$$A(\alpha_i, \hat{\rho}^{(\gamma)}) = [\hat{u}_{i\delta}] \cdot M(LPI(\bar{\rho})) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Zur Lösung führt also das Maximin-Prinzip im Spiel

(37.6)

	$\hat{\rho}(1)$	$\hat{\rho}(2)$
α_1	$\frac{1}{4}$	0
α_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Die Lösung ist: $[\alpha^* = \alpha_2; V(\alpha^*) = \frac{1}{4}]$. Sie stimmt mit der Lösung von (36.15) im Bereich der reinen Strategien überein. Der Übergang in den Bereich der gemischten Strategien mit $(\frac{1}{4}\alpha_1, \frac{3}{4}\alpha_2)$ ergibt den Entscheidungswert $\frac{7}{16}$, also einen Nutzengewinn von $\frac{7}{16} - \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$.

Schließlich noch einige Anmerkungen zum Fall 6), in dem eine LPI($\overline{\rho}$) über die Entscheidungsmatrix-Verteilung $\overline{\rho}$ bei vollständiger Ignoranz über die Zustandsverteilung ρ vorliegt. In diesem Fall wurde dem Gegenspieler das minimierende Verfahren im Bereich der zusammengesetzten Zufallsvariablen $Z = (Z_1, Z_2)$ zugeordnet. Auf diese Weise entstand ein Modell mit folgender Anwendung des Maximin-Prinzips.

Auch hier läßt sich ein anderes Verfahren im Bereich der reinen Strategien ermitteln. Man kann dem Gegenspieler nur den Bereich der Zufallsvariablen Z_1 (Zustandsverteilung) überlassen, indem das Minimierungsverfahren im Bereich der Zufallsvariablen Z_2 (Matrix-Verteilung) intern realisiert wird. Das Verfahren führt zu einer im allgemeinen einfacheren Entscheidungsmatrix. Der Nachteil ist wieder die Beschränkung auf den Bereich der reinen Strategien. Zum Abschluß sei folgendes bemerkt: Da jede LPI-Entscheidung als unendliches Spiel mit unendlicher Strategienmenge des Gegenspielers aufgefaßt werden kann, erhält man aufgrund der verschiedenen möglichen Lösungsverfahren interessante spieltheoretische Aufschlüsse, auf die wir hier jedoch nicht eingehen können.

§ 38. Grade der stochastischen Unbestimmtheit des Entscheidungswertes (SUE).

In den bisherigen Betrachtungen wurden Lösungen verschiedener LPI-Entscheidungssituationen bestimmt. Wie in der Entscheidungstheorie üblich versteht man unter Lösung die Ermittlung der optimalen Strategie (bzw. Strategien) sowie des Entscheidungswertes. Für eine umfangreiche Klasse von Entscheidungssituationen ist der Entscheidungswert eindeutig bestimmt. Er ist gleich dem Nutzengewinn, der unabhängig von dem Verlauf des Spiels für den Entscheidungsträger mindestens gewährleistet wird. Eine Gewährleistung kann in deterministischem wie auch in stochastischem Sinn vorliegen. Eine deterministische Gewährleistung besteht für alle deterministischen Entscheidungen, wie beispielsweise die Maximierung einer Funktion oder die lineare und nicht lineare Programmierung. Der Entscheidungswert ist, abgesehen von algorithmischen Schwierigkeiten, mittels der optimalen Strategie immer erreichbar.

In vielen nicht deterministischen Entscheidungen dagegen ist der Entscheidungswert nur stochastisch erreichbar. Dabei können verschiedene Grade der stochastischen Unbestimmtheit des Entscheidungswertes festgestellt werden. Besonders wesentlich sind diese Probleme für die LPI-Entscheidungen. Wir wollen sie in diesem Paragraphen kurz erörtern.

Sei eine einfache Risikosituation mit den üblichen Bezeichnungen gegeben

$$(38.1) \quad [\{\alpha_i\};\{\beta_j\};\rho = (p_1,\ldots,p_m);[u_{ij}]];\, i = 1,\ldots,n; \quad j = 1,\ldots,m;$$

Das Bernoulli-Prinzip führt zur Lösung $[\alpha_{i*}, V(\alpha_{i*})]$ mit der optimalen Strategie α_{i*} und dem Entscheidungswert

$$(38.2)\quad V(\alpha_{i*}) = \max_j \sum_{j=1}^{m} u_{ij}p_j = \sum_{j=1}^{m} u_{i*j}p_j .$$

Der Entscheidungswert $V(\alpha_{i*})$ ist hier nur stochastisch erreichbar im Sinne des Gesetzes der großen Zahlen. Genauer formuliert, geht es um Folgendes: Nach dem Gesetz der großen Zahlen gilt

$$(38.3)\ \forall\ (\epsilon,P)\ \ \exists N_o(\epsilon,P): n \geq N_o \Rightarrow W(|\tfrac{k}{n}-p|<\epsilon) > P.$$

Darin ist k die Häufigkeit des Eintretens eines Ereignisses mit der Wahrscheinlichkeit p bei n unabhängigen Versuchen, ϵ ist eine beliebig kleine positive Zahl, P eine beliebig große Wahrscheinlichkeit und N_o ein hinreichend großer Index. $W(|\frac{k}{n}-p|<\epsilon) > P$ nennen wir eine (ϵ,P)-Realisation. Sie bedeutet, daß die relative Häufigkeit bei n Beobachtungen und hinreichend großem n mit Wahrscheinlichkeit $>$ P dem Betrage nach sich von der Wahrscheinlichkeit p um weniger als ϵ unterscheidet. Das Gesetz der großen Zahlen in der Form (38.3) besagt, daß für jedes Paar (ϵ,P) immer eine (ϵ,P)-Realisation möglich ist. Der kleinste Index N_o, der (38.3) erfüllt, soll im weiteren der <u>charakteristische</u> Index genannt werden. Es gibt also einen funktionellen Zusammenhang zwischen den Größen (ϵ,P,p,N_o). In der Wahrscheinlichkeitstheorie gibt es verschiedene Verfahren, die diesen Zusammenhang ermitteln - hier einige von ihnen:

1) Nach dem Integralsatz von Moivre-Laplace erhält man approximativ

$$W(|k/n - p| < \epsilon) \approx \sqrt{2/\pi} \int_0^{\epsilon\sqrt{n/(p(1-p))}} \exp(-t^2/2)dt .$$

Aus der Ungleichung $\sqrt{2/\pi} \int_0^{\epsilon\sqrt{n/(p(1-p))}} \exp(-t^2/2)dt > P$

läßt sich der minimale Index N_o, der (38.3) erfüllt, bestimmen. Man erhält die Beziehung

(38.4) $\qquad N_o = N_o(\epsilon,P,p).$

2) Die Anwendung der bekannten Bernoulli-Formel, für hinreichend große n

(38.5) $\qquad W(|\frac{k}{n} - p| < \epsilon) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{\epsilon^2 n}$,

führt zur Gleichung $N_o \approx \frac{p(1-p)}{\epsilon^2(1-P)}$,

die als "grobe" Approximation von (38.4) betrachtet werden kann.

3) Zur genauen Beziehung (38.4) führt ein auf die Bernoullische Binomialverteilung begründetes Verfahren: Es werden alle natürlichen $k_i (i=1,...,s)$ betrachtet, die die Ungleichung

$|\frac{k}{n} - p| < \epsilon$ erfüllen. Die Ungleichung

$$(38.6)\quad \sum_{i=1}^{s} \binom{n}{k_i} p^{k_i}(1-p)^{n-k_i} > P$$

bestimmt ein minimales N_o, das (38.6) erfüllt. Man erhält wieder die Beziehung

$$(38.4)\quad N_o = N_o(\epsilon, p, P).$$

Damit können wir zur Risikosituation (38.1) **übergehen.** Es soll die stochastische Unbestimmtheit des Entscheidungswertes (SUE) in (38.1) betrachtet werden. Der Entscheidungswert $V(\alpha_{i*})$ ist nur **stochastisch** im folgenden Sinn erreichbar: Es wird die beliebige Wiederholbarkeit der Situation (38.1) vorausgesetzt. Sei ν **die Anzahl der** Wiederholungen und dabei die Anzahl der Realisationen von β_j gleich $\tau_j (j = 1,\dots,m; \sum_{j=1}^{m} \tau_j = \nu)$. Dann definieren wir als Durchschnitts-Entscheidungswert $V_D^{(\nu)}(\alpha_{i*})$ bei ν Wiederholungen und bei Anwendung der optimalen Strategie α_{i*}

$$(38.7)\quad V_D^{(\nu)}(\alpha_{i*}) = \frac{1}{\nu}(\tau_1 u_{i*1} + \dots + \tau_m u_{i*m}) = \frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{m} \tau_j u_{i*j}.$$

Wir können die Abweichung des Durchscnitt-Entscheidungswertes $V_D^{(\nu)}(\alpha_{i*})$ vom Bernoulli-Erwartungswert $V(\alpha_{i*})$ abschätzen. Es gilt:

$$(38.8)\quad |V_D^{(\nu)}(\alpha_{i*}) - V(\alpha_{i*})| \leq \sum_{j=1}^{m} |u_{i*j}| \cdot \left|\frac{\tau_j}{\nu} - p_j\right| .$$

Aufgrund des Gesetzes der großen **Zahlen existiert für alle** j ein charakteristischer Index $N_o^{(j)}$, der die entsprechende **(ϵ,P)** - Realisation gewährleistet:

$$(38.9)\ \forall(\epsilon,P)\exists\, N_o^{(j)}: \nu \geq N_o^{(j)} \Rightarrow W\left(\left|\frac{\tau_j}{\nu} - p_j\right| < \epsilon\right) > P;\ (j = 1,\ldots,m).$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der β_j erhalten wir aus (38.8) und (38.9):

$$(38.10)\ \forall(\epsilon,P)\exists\, \hat{N}_o = \max_j N_o^{(j)}: \nu \geq \hat{N}_o \Rightarrow W(|V_D^{(\nu)}(\alpha_{i*}) - V(\alpha_{i*})| < m\,\epsilon \max_j |u_{i*j}|) > P^m.$$

Da $m\epsilon \max_j |u_{i*j}|$ beliebig klein und P^m beliebig groß werden kann, folgt aus (38.10), daß bei hinreichend großem ν mit beliebig großer Wahrscheinlichkeit der Durchschnitts-Entscheidungswert sich vom Entscheidungswert dem Betrage nach beliebig wenig unterscheidet.

Den kleinsten Index N_o, der (38.10) erfüllt, nennen wir charakteristischen Index für die SUE in der Risikosituation (38.1). Aus (38.9) und (38.1o) folgt die Existenz der Funktion:

$$(38.11)\quad N_o = N_o(\epsilon,P,m,\rho,\max_j u_{i*j}).$$

(38.10) heißt eine $(m\,\epsilon \max_j |u_{i*j}|, P^m)$-Realisation.

Wenn wir eine (ϵ,P)-Realisation feststellen wollen, muß in (38.10) ein neues $(\hat{\epsilon}, \hat{P})$-Paar mit

$$(38.12)\quad \hat{\epsilon} = \frac{\quad}{m \max_j |u_{i*j}|} \quad \text{und} \quad \hat{P} = \sqrt[m]{P}$$

eingesetzt werden. Aus (38.12) folgt: je größer m, desto kleiner $\hat{\epsilon}$ und $\hat{P}$ und damit auch desto größer der charakteristische Index N_o für die SUE. In (38.11) ist also für die Größe von N_o die Variable m ausschlaggebend.

Als Maß für die stochastische Unbestimmtheit des Entscheidungswertes (SUE) in der Risikosituation (38.1) sollte man eigentlich bei vorgegebenen (ϵ,P) den charakteristischen Index N_o als Funktion $N_o(m,\rho,\max_j u_{i*j})$ betrachten. Da aber die Ermittlung von N_o algorithmisch sehr schwierig ist und für die Funktion $N_o(m,\rho,\max_j u_{i*j})$ die Variable m ausschlaggebend ist, wollen wir im weiteren alle SUE-Untersuchungen bezüglich m durchführen.

Wir führen jetzt folgende Definition ein:

Def. 38.1:

Als Grad der SUE in der Risikosituation (38.1) betrachten wir die Anzahl m der Zustände (Bezeichnung $G^{(m)}$). Den Grad der SUE einer Entscheidungssituation ES betrachten wir als $G^{(k)}$, wenn die SUE von ES die gleiche ist wie in einer Risikosituation mit k Zuständen .

Wir wollen den Grad $G^{(k)}$ der SUE für verschiedene ES bestimmen.

Es ist plausibel, den deterministischen Situationen, die ja immer als einspaltige ES betrachtet werden können, den Grad $G^{(1)}$ zuzuordnen. Dasselbe betrifft die Maximin-Lösung einer Entscheidung bei Ungewißheit im Bereich der reinen Strategien. Wenn in (38.1) die Zustandsverteilung nicht bekannt ist, wird aufgrund des Maximin-Prinzips für jede Zeile das minimale Element ermittelt und das Maximierungsverfahren auf die erhaltene Spalte angewendet.

Aus demselben Grunde muß man den Grad der SUE eines strikten Zweipersonen-Nullsummenspiels als $G^{(1)}$ bezeichnen.

Nun aber zu dem in (36.3) betrachteten erweiterten Risiko-Modell. Gemäß Satz 36.1 wird das Modell in ein einfaches Risikomodell übergeführt. Daraus schließen wir, daß das erweiterte Risikomodell 36.3 den Grad $G^{(ml)}$ der SUE besitzt. Der Entscheidungswert in diesem Modell ist also mit der SUE $G^{(ml)}$-ten Grades verbunden.

Nun wollen wir die Grade der SUE für LPI-Entscheidungen ermitteln. Zuerst das gewöhnliche LPI-Entscheidungsmodell (26.2). Aufgrund des Max E_{min}-Prinzips wird jeder Strategie α_i der im LPI-Bereich entsprechende minimale Nutzenerwartungswert zugeordnet. Wenn wir also eine Lösung im Bereich der reinen Strategien bestimmen wollen, müssen wir das Maximierungsverfahren bezüglich der Spalte von minimalen Nutzenerwartungen anwenden . Wie hoch ist dann der Grad der SUE?

Um die Frage zu beantworten, folgende Bemerkung: Das einfache Risikomodell (38.1) läßt sich als einspaltige ES vorstellen, indem jeder Strategie α_i der entsprechende Nutzenerwartungswert zugeordnet wird. Da der Grad der SUE für (38.1) $G^{(m)}$ ist, gilt der

Satz 38.1:

Der Grad der SUE in einer gewöhnlichen LPI-Entscheidung (26.2) ist im Bereich der reinen Strategien $G^{(m)}$.

Im Bereich der reinen Strategien ändert sich also der Grad der SUE nicht, wenn statt einer Zustandsverteilung ρ eine LPI(ρ) vorliegt. Beim Übergang zum erweiterten Spiel (Bereich der gemischten Strategien) vergrößert sich der Grad der SUE jedoch.

Zur Bestimmung des Grades der SUE in diesem Fall betrachten wir zuerst das Modell des Zweipersonen-Nullsummenspiels im Bereich der gemischten Strategien. Sei

(38.13) $[\{x_i\};\{y_j\};[u_{ij}]];i = 1,\ldots,n;j = 1,\ldots,m.$

das entsprechende Modell. Im Bereich der gemischten Strategien betrachtet, kann man den optimalen Strategien

$x^* = (p_1^*,\ldots,p_n^*), y^* = (q_1^*,\ldots,q_m^*)$ zwei unabhängige Zufallsvariablen Z_1 bzw. Z_2 zuordnen. Der Übergang zur neuen Zustandsmenge $\{\theta^{(\nu)}\}^2; \nu = 1,\ldots, nm$, die der zusammengesetzten Zufallsvariablen $Z = (Z_1,Z_2)$ entspricht, ergibt folgendes einzeiliges Risikomodell:

(38.14)

$\hat{\rho}$	$p_1^*q_1^*$	$p_1^*q_2^*$	$p_1^*q_3^*$	$\ldots\ldots p_n^*q_m^*$
	$\theta^{(1)}$	$\theta^{(2)}$	$\theta^{(3)}$	$\ldots\ldots\theta^{(nm)}$
(x^*,y^*)	u_{11}	u_{12}	u_{13}	$\ldots\ldots u_{nm}$

Darin umfaßt die Zeile alle Elemente der Entscheidungsmatrix $[u_{ij}]$. Die Zustandswahrscheinlichkeiten sind die entsprechenden Produkte aus p_i^* und q_j^*. Der Entscheidungswert ist

(38.15) $V(x^*,y^*) = \sum\limits_{i,j} p_i^* u_{ij} q_j^*$.

Die rechte Seite ist offensichtlich der Erwartungswert der Elemente der Zeile bei $n \cdot m$ Zuständen mit bekannter Verteilung. Damit ist bewiesen, daß der Grad der SUE im erweiterten Zweipersonen-Nullsummenspiel (38.13) gleich $G^{(nm)}$ ist.

Andererseits kann (38.13) als eine einspaltige Entscheidungssituation betrachtet werden, indem jedem x_i die entsprechende Nutzenerwartung

$\sum_{j=1}^{m} u_{ij}\, q_j^*$ zugeordnet und dann eine gemischte Strategie über $\{x_i\}$ angewendet wird. Folglich entspricht der Entscheidungsspalte

$$(38.16)\qquad \begin{array}{c|c} & \\ \hline x_1 & \sum_{j=1}^{m} u_{1j}\; q_j^* \\ \vdots & \vdots \\ x_n & \sum_{j=1}^{m} u_{nj}\; q_j^* \end{array}$$

bei Anwendung der optimalen gemischten Strategie $x^* = (p_1^*, \ldots, p_n^*)$ der Entscheidungswert (38.15) mit dem Grad $G^{(nm)}$ der SUE. Damit können wir zur Lösung der LPI-Entscheidung (26.2) im Bereich der gemischten Strategien übergehen. Indem wir jedem α_i den im LPI-Bereich minimalen Nutzenerwartungswert zuordnen, gelangen wir zu einer Entscheidungsspalte wie in (38.16). Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 38.2:

Der Grad der SUE in der LPI-Entscheidung (26.2) im Bereich der gemischten Strategien ist $G^{(nm)}$.

Die Erweiterung des Spiels (26.2) in den Bereich der gemischten Strategien ergibt zwar im allgemeinen eine Vergrößerung des Entscheidungswertes, andererseits aber vergrößert sich auch der Grad der SUE.

Nun wollen wir den Grad der SUE für Entscheidungssituationen (36.2) mit LPI-Bedingungen sowohl für die Zustandsverteilung ρ als auch für die Entscheidungsmatrix-Verteilung $\bar{\rho}$ ermitteln.

Es gilt folgender Satz:

Satz 38.3:

Der Grad der SUE in (36.2) bei gegebenen LPI-Bedingungen für die Zustandsverteilung ρ und die Entscheidungsmatrix-Verteilung $\bar{\rho}$ ist im Bereich der reinen Strategien $G^{(ml)}$ und im Bereich der gemischten Strategien $G^{(nml)}$.

Der Beweis folgt aus dem im Beweis des Satzes 36.6 angewandten Verfahren. Unter den getroffenen Voraussetzungen wird das Modell in das gewöhnliche LPI-Modell mit ml Spalten übergeführt. Die Anwendung des Satzes 38.1 beweist den ersten Teil unserer Behauptung. Aufgrund des Satzes 38.2 muß bei Ermittlung des Grades der SUE die Anzahl von Spalten mit der Anzahl von Zeilen multipliziert werden. Wir erhalten mln und das beweist den zweiten Teil unserer Behauptung. Der durch den Satz 36.6 bestimmte Entscheidungswert ist also im allgemeinen mit einem hohen Grad der SUE verbunden.

Bisher führte die Ermittlung des Grades $G^{(k)}$ der SUE bei LPI-Entscheidungen zu entsprechenden Produktsätzen. Die ermittelten Grade waren $G^{(nm)}$ bzw. $G^{(nml)}$. Nun wollen wir Fälle, die zu entsprechenden Additionssätzen führen, betrachten.

Im Satz 36.5 wurde ein besonderer Fall der LPI-Bedingungen für die Entscheidungsmatrix $[u_{ij}]$ erörtert. Es wurde die Annahme getroffen, daß in $[u_{ij}]$ eine Menge $\{\bar{u}_{rs}\}$ variabler Elemente $\bar{u}_{rs}$ vorliegt. Dabei entspricht jedem variablen $\bar{u}_{rs}$ mit der Verteilung $\rho(\bar{u}_{rs})$ eine LPI($\rho(\bar{u}_{rs})$). Die den variablen $\bar{v}_{rs}$ entsprechenden Zufallsvariablen Z_{rs} wurden als diskret und unabhängig betrachtet. Sei ν_{rs} die Anzahl der möglichen Werte eines variablen $\bar{u}_{rs}$, die sogenannte Varietät des Elementes $\bar{u}_{rs}$. Den nicht variablen Elementen u_{ij} kann die Varietät $v_{ij} = 1$ zugeordnet werden.

Den beschriebenen Fall wollen wir hier $\hat{U}$-Unbestimmtheit der Entscheidungsmatrix nennen.

Es gilt folgender Satz:

<u>Satz 38.4:</u>

<u>Bei gegebenen LPI(ρ) und LPI-Bedingungen für die $\hat{U}$-Unbestimmtheit der Entscheidungsmatrix ist der Grad der SUE im Bereich der reinen Strategien $G^{(k)}$, mit</u>

$$k = \sum_{j=1}^{m} \prod_{i} \nu_{ij} . \tag{38.17}$$

Dies besagt, daß, um k zu erhalten, man für jede Spalte das Produkt der Varietäten der Spaltenelemente bestimmen und dann die Produkte für alle Spalten addieren muß.

<u>Beweisskizze:</u>
Es erfolgt der Übergang zur neuen Zustandsmenge $\{e^{(\nu)}\}$, der Menge aller möglichen Zustände der zusammengesetzten Zufallsvariablen

$$Z = (Z_1, \{Z_{rs}\}) . \tag{38.18}$$

Z_1 entspricht der ursprünglichen Zustandsmenge, jede Zufallsvariable Z_{rs} dem entsprechenden variablen Element $\bar{u}_{rs}$. Die Anzahl der Komponenten ist also gleich der Anzahl von variablen Elementen in $[u_{ij}]$ plus 1. Jede Realisation eines Zustandes $\rho^{(\nu)}$ determiniert eine Spalte von $[u_{i\tau}]$. Identische Spalten werden unter Berücksichtigung der Summe der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten reduziert. Auf diese Weise gelangt man zu $\sum_j \prod_i \nu_{ij}$ Spalten mit einer LPI über die Verteilung der neuen, reduzierten Zustände. Es genügt, den Satz 38.1 anzuwenden.

Aus den Sätzen 38.3 und 38.4 folgt, daß unter den in Satz 38.4 getroffenen Annahmen im Bereich der gemischten Strategien der Grad der SUE $G^{(k)}$ mit

$$(38.19) \qquad \bar{k} = n \cdot \sum_{j=1}^{m} \prod_i \nu_{ij} \quad \text{ist.}$$

Zu einer reinen Additionsform gelangen wir unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß jede Spalte der Entscheidungsmatrix höchstens ein variables Element $\bar{u}_{r(s)s}$ enthält. Dann folgt aus (38.17) für den Bereich der reinen Strategien:

$$(38.20) \qquad k = \sum_{s=1}^{m} \nu_{r(s)s} \, .$$

Gemäß (38.20) ist also unter den getroffenen Voraussetzungen k die Summe der entsprechenden Varietäten der variablen Elementen (Spalten ohne variablen Elementen entspricht der Summand 1). Für den Bereich der gemischten Strategien erhalten wir in dem Fall aus (38.19)

$$\bar{k} = n \cdot \sum_{s=1}^{m} \nu_{r(s)s} \, .$$

Es ist bemerkenswert, daß, wenn die Entscheidungsmatrix keine Unbestimmtheiten enthält, wenn also bei gegebener Zustandsverteilung ρ eine Risikosituation vorliegt, man im Bereich der reinen Strategien k = m erhält übereinstimmend mit der Tatsache, daß der Grad der SUE der Risikosituation gleich $G^{(m)}$ ist.

Die Bestimmung der Grade der SUE hat eine wesentliche Bedeutung für die Lösung von Entscheidungssituationen. In allen Fällen, in denen der Entscheidungswert nur stochastisch erreichbar ist, bestimmt der Grad $G^{(k)}$ der SUE als Maß der stochastischen Unbestimmtheit die Effektivität der optimalen Strategie. Für eine gegebene ES ist die Angabe des Entscheidungswertes nicht hinreichend, es muß zusätzlich der Grad $g^{(k)}$ der SUE angegeben werden. Die Lösung einer Entscheidungssituation (ES) sollte also in der Form eines Bewertungsvektors

$$(38.21) \qquad \overline{W}_B(ES) = [\alpha^*; V(\alpha^*); G^{(k)}]$$

ausgedrückt werden.

Darin ist α^* die optimale Strategie, $V(\alpha^*)$ der Entscheidungswert und $G^{(k)}$ der Grad der stochastischen Unbestimmtheit des Entscheidungswertes (SUE). Für gegebene Entscheidungssituationen ist der Vergleich ihrer Lösungen mit dem Vergleich ihrer Bewertungsvektoren $\overline{W}_B(ES) = [\alpha^*, V(\alpha^*); G^{(k)}]$ verbunden. Die Frage der Präferenzskala für solche Vektoren ist nicht einfach. Nur für besondere Fälle ist die Antwort offensichtlich. Beispielsweise ist für gleiche Entscheidungswerte bei Bewertung der Lösungen von Entscheidungssituationen die Größe von k in $G^{(k)}$ entscheidend: Je größer k, desto niedriger ist die Präferenz für die entsprechende Lösung.

In anderen Fällen sind für die betrachtete Präferenzskala Faktoren wie die Risikoaversion, der Zusammenhang mit anderen Zielsetzungen u.a. von wesentlicher Bedeugung. Bisher wird der Grad der SUE in verschiedenen Gebieten der Entscheidungstheorie (Spieltheorie!) zu wenig beachtet.

Die in (38.21) eingeführten Bewertungsvektoren einer ES besitzen wesentliche Bedeutung auch für den semantischen Informationswert. Jeder Übergang von einem Informationszustand I_1 zu einem anderen I_2 bedeutet eigentlich einen Übergang vom Bewertungsvektor $\overline{W}_B(ES_{I_1})$ zum Bewertungsvektor $\overline{W}_B(ES_{I_2})$. Die Bestimmung des Informationswertes ist also mit einer Bewertung solcher Übergänge $[\overline{W}_B(ES_{I_1}) \rightarrow \overline{W}_B(ES_{I_2})$ verbunden.

Dasselbe betrifft den Begriff des komponenten und globalen Informationswertes. Auch in allen sensitivitätsanalytischen Problemen könnte man statt der Sensitivität des Entscheidungswertes die Sensitivität des Bewertungsvektors $\overline{W}_B(ES)$ einer Entscheidungsituation gegenüber verschiedenen Modellparametern untersuchen.

Es sei bemerkt, daß in der statistischen Entscheidungstheorie das Problem der Bewertung von statistischen Inferenzen oft mit der Analyse von 4-dimensionalen Vektoren verbunden ist, wobei als vierte Komponente zusätzlich eine Konfidenzzahl γ auftritt (vgl. Fußnote auf S.152).

Zum Schluß noch zum Zusammenhang zwischen der behandelten stochastischen Unbestimmtheit des Entscheidungswertes (SUE) und der Shannonschen entropischen Unbestimmtheit der Entscheidungssituation.

Es erscheint plausibel, unter der entropischen Unbestimmtheit (EU) einer Entscheidungssituation den Informationsgehalt (in bits!) zu verstehen, der die ES in eine deterministische ES verwandelt. Bei der annähernden Schätzung der

EU einer ES genügt es, von den konkreten Wahrscheinlichkeiten abzusehen und die obere Schranke der EU ($\overline{EU}$(ES)) also die einer Gleichverteilung, zu ermitteln. Es läßt sich beweisen, daß unter den getroffenen Voraussetzungen die obere Schranke der entropischen Unbestimmtheit einer Entscheidungssituation ($\overline{EU}$(ES)) folgende Gleichung erfüllt (Einfachheitshalber wird im weiteren $G^{(k)} = k$ angenommen):

(38.22) $\overline{EU}(ES) = \log_2 G^{(k)}$.

Darin ist die rechte Seite der Logarithmus dualis des Grades der SUE (der stochastischen Unbestimmtheit des Entscheidungswertes).

Man könnte in unseren Betrachungen als Maß der stochastischen Unbestimmtheit des Entscheidungswertes nicht k in $G^{(k)}$, sondern $\log_2 k$ einführen und auf diese Weise den logarithmischen Grad der SUE messen. Der logarithmische Grad der SUE z.B. für deterministische Entscheidungen wäre dann 0. Unter diesen Annahmen lautet die Formulierung von (38.22)

Satz 38.5:

Die obere Schranke der entropischen Unbestimmtheit einer Entscheidungssituation ist gleich dem logarithmischen Grad der stochastischen Unbestimmtheit des Entscheidungswertes.

Der Übergang zum logarithmischen Grad der SUE($\log_2 G^{(k)}$) besitzt zwei Vorteile:

1) Für zusammengesetzte Unbestimmtheiten wird auf diese Weise die Additivität gewonnen.

2) Es besteht die Möglichkeit, bits als Einheiten des logarithmischen Grades der stochastischen Unbestimmtheit des Entscheidungswertes zu verwenden. Auf eine genauere Untersuchung dieser Probleme muß jedoch hier verzichtet werden.

7. Kapitel: Mehrstufige Entscheidung

§ 39. Mehrstufige Risikosituationen

1. Einführung, Übersicht

In diesem Kapitel wird das Modell der mehrstufigen Entscheidung unter LPI-Bedingungen aufgrund des Max E_{min}-Prinzips analysiert. Es wird nur der diskrete Fall berücksichtigt. Die eingeführten Begriffe und bewiesenen Sätze sind nicht nur von theoretischer Bedeutung. In der Praxis werden z.B. mehrstufige Lagerhaltungsprobleme, Werbeentscheidungen, Instandhaltungsprobleme etc. als Risikosituationen betrachtet. Eine genauere Analyse zeigt aber, daß hier gewöhnlich keine Risikosituationen, sondern mehrstufige Entscheidungen bei nur teilweise bekannten Verteilungen der Zustände vorliegen. Solche Fälle kann man als LPI-Fälle betrachten und aufgrund des Max E_{min}-Prinzips analysieren.

In diesem und in den beiden folgenden Paragraphen werden einige Sätze über die Existenz optimaler Lösungen in mehrstufigen Einpersonen- und in mehrstufigen nicht kooperativen n-Personen-Spielen gegen die Natur unter LPI-Bedingungen bewiesen. Darüberhinaus werden algorithmische Lösungsverfahren entwickelt und an Zahlenbeispielen illustiert.

Im § 42 werden LPI-Unbestimmtheiten auch in den Auszahlungen des Entscheidungsbaumes eingeführt.

§ 43 ist den Problemen der Sensitivitätsanalyse und dem Begriff des dynamischen Informationswertes in den behandelten Modellen gewidmet.

Die in der Praxis wichtigen Adaptionsprozesse in mehrstufigen Entscheidungen und der Begriff des Wertes eines

Adaptionsprozesses werden im § 44 diskutiert.
Probleme der LPI-Entropie und des Grades der stochastischen Unbestimmtheit der Realisation des Entscheidungswertes in mehrstufigen LPI-Entscheidungen sind Inhalt des § 45.

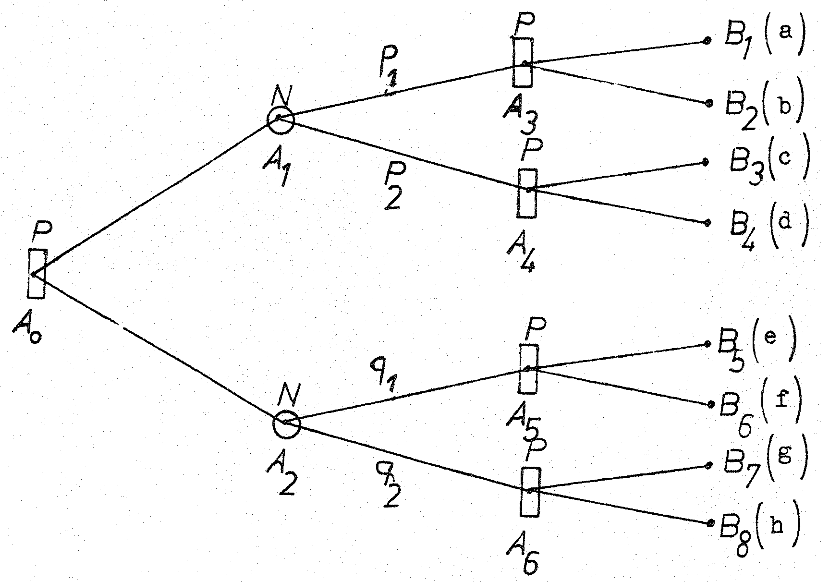
Im § 46 folgt eine Übersicht weiterer möglicher LPI-Betrachtungen in mehrstufigen Entscheidungen.

Die Anwendungen der mehrstufigen LPI-Modelle in der dynamischen Programmierung, in den Markoffschen stochastischen Entscheidungen und in stochastischen Spielen werden dann im 8. Kapitel betrachtet.

2. Das Grundmodell einer mehrstufigen Risikosituation

Wir beginnen mit der folgenden sehr einfachen mehrstufigen Risikosituation, die durch einen Entscheidungsbaum dargestellt werden kann. Sie entspricht einem extensiven Spiel gegen die Natur mit bekannter Verteilung der Zustände:

(39.1)



Darin ist A_o der Anfangspunkt des Baumes, $A_o, A_1, \ldots, A_6$ sind die Eckpunkte (Knoten) und $B_1, \ldots, B_8$ die Endpunkte des Baumes. Den Eckpunkten A_o, A_3, A_4, A_5, A_6 entsprechen Züge (mit Alternativen) des Entscheidenden (P), den Eckpunkten A_1, A_2 Zufallszüge der Natur (N). Dem Zufallszug in A_1 entspricht die Zufallsvariable Z_1 mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho_1 = (p_1, p_2)$, dem in A_2 die Zufallsvariable Z_2 mit der Verteilung $\rho_2 = (q_1, q_2)$. Den Endpunkten $B_1 \ldots, B_8$ sind die Auszahlungen a,...,h entsprechend zugeordnet. Die Rechtecke bzw. Kreise werden für die Unterscheidung der Entscheidungspunkte von den Zufallspunkten verwendet.

(39.1) entspricht einer dreistufigen Risikosituation mit folgendem Spielverlauf: Den ersten Zug in A_o vollzieht der Entscheidende (P), indem er einen der Äste $A_o\ A_1$, $A_o\ A_2$ wählt. Darauf folgt der Zufallszug der Natur (N in A_1 bzw. A_2), die einen der zwei möglichen Äste bei gegebener Verteilung (p_1, p_2), bzw. (q_1, q_2) wählt. Es folgt der dritte und letzte Zug: P wählt in einem der Punkte $A_3, \ldots, A_6$ einen Ast, der zu einem Endpunkt B_ν führt. Die entsprechenden Zahlen in der Klammer bedeuten Nutzenwerte für den Entscheidenden P.
Jeder Streckenzug vom Anfangspunkt A_o bis zu einem Endpunkt B_ν determiniert einen der möglichen Spielverläufe (Spiel, Partie) [Owen 1971].

Im weiteren wird oft statt des Baumes selbst seine Beschreibung angegeben. Z. B. gilt für (39.1) die Beschreibung:

$$P:2 \rightarrow N:2;(p_1,p_2);2,(q_1,q_2) \rightarrow P:2,(a;b);2(c;d);2,(e;f);2,(g;h).$$

Die Pfeile bezeichnen den Übergang zu den entsprechenden Zügen (hier drei Züge), die Zahlen die Anzahl der möglichen Alternativen, P steht für den Entscheidungsträger, N für die Natur. In den Klammern sind die Verteilungen für die Zufallszüge bzw. die Nutzenwerte in den

Endpunkten für den Entscheidungsträger angegeben.

Für das Grundmodell einer mehrstufigen Risikosituation machen wir folgende Voraussetzungen: 1) Die Züge von P und N erfolgen abwechselnd nacheinander; 2) Der entsprechende Entscheidungsbaum ist endlich (die Zahl der Züge wie auch der Alternativen bei jedem Zug ist endlich); 3) Jedem Zufallszug ist eine Zufallsvariable mit einer Verteilung der möglichen Alternativen zugeordnet. Die Zufallsvariablen sind unabhängig.

Die Beschreibung des Entscheidungsbaumes lautet allgemein:

$$\text{(39.2)} \quad P: k_1 \rightarrow N: l_1; \rho_1, \ldots, l_{k_1}; \rho_{k_1} \rightarrow P: m_1, \ldots, m_{l_1};$$
$$m_{l_1+1}, \ldots, m_{l_1+\ldots+l_{k_1}} \rightarrow \ldots$$

P hat beim ersten Zug k_1 Alternativen, beim zweiten Zug von N entspricht der ersten von diesen Alternativen l_1, der letzten l_{k_1} (l_i kann auch gleich Null sein). Die Verteilungen für die Zufallszüge sind hier $\rho_1, \ldots, \rho_{k_1}, \ldots$ und es wird vorausgesetzt, daß sie für unabhängige Zufallsvariablen $Z_1, \ldots Z_{k_1}, \ldots$ gelten. Wie bekannt [Menges 1974] wird in Risikosituationen mit Nutzenwerten das Bernoulli-Prinzip der Maximierung des Nutzenerwartungswertes angewendet. Allerdings ist in mehrstufigen Entscheidungen die Anwendung dieses Prinzips nicht immer einfach.

Für das Modell (39.2) gibt es zwei mögliche Verfahren.
a) Das Roll-back-Verfahren, indem man eine Rückwärtsrechnung im entsprechenden Entscheidungsbaum durchführt [Bühlmann et al 1967]. Die allmähliche Reduktion des Baumes aufgrund des Bernoulli-Prinzips führt zur Lösung.

b) Die Überführung in die Normalform [Owen 1971]. Sei $\{x_i\}$ die Menge der sogenannten globalen Strategien des Entscheidungsträgers P [Owen 1971]. Aus den unabhängigen Zufallsvariablen $Z_1, \ldots, Z_k$, die den Zufallszügen entsprechen, wird die zusammengesetzte diskrete Zufallsvariable $Z = (Z_1, \ldots, Z_k)$ gebildet. Die endliche Menge $\{\theta^{(j)}\}$ aller möglichen Zustände von Z wird als Strategienmenge der Natur angenommen. Die Verteilung ρ über $\{\theta^{(j)}\}$ läßt sich aus den entsprechenden Wahrscheinlichkeitsprodukten bestimmen. Jedem Strategienpaar $(x_i, \theta^{(j)})$ entspricht offensichtlich eindeutig ein Streckenzug im Entscheidungsbaum, also auch eindeutig ein Nutzenwert u_{ij}. Auf diese Weise gelangt man zum Spiel gegen die Natur

$$(39.3) \qquad [\{x_i\}; \{\theta^{(j)}\}; \rho; [u_{ij}]].$$

Das Bernoulli-Prinzip, angewendet in (39.3), führt zur Lösung der mehrstufigen Risikosituation (39.2), also zur optimalen Strategie und zum Entscheidungswert.

Ein einfaches Zahlenbeispiel: In (39.1) sei

$$a = 2,\ b = 0,\ c = 1,\ d = 3,\ e = 2,\ f = 1,\ g = 0,\ h = 3 .$$

Die Verteilungen ρ_1, ρ_2 für die Naturzustände seien

$$\rho_1 = (p_1, p_2) = (\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4}),\quad \rho_2 = (q_1, q_2) = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}).$$

P verfügt über 8 Strategien:

$$\{x_i\} = \{ooo, oou, ouo, ouu, uoo, uou, uuo, uuu\}.$$

o - bedeutet hier die "obere", u - die "untere" Alternative.

Die Strategie uou z.B. bedeutet, daß P beim ersten Zug die untere Alternative wählt, und beim dritten Zug der oberen Zustandsalternative seine obere und der unteren Zustandsalternative seine untere Alternative zuordnet. Die Zufallsstrategienmenge ist $\{\theta^{(j)}\} = \{oo, ou, uo, uu\}$. Das Roll-back-Verfahren führt zur optimalen Strategie uou.

Der Entscheidungsträger P wählt also beim ersten Zug die Alternative A_0A_2. Beim dritten Zug wählt er abhängig davon, ob der Zufallszug $A_2\ A_5$ oder $A_2\ A_6$ vorliegt, A_5B_5 bzw. A_6B_8. Auf diese Weise erreicht er den Nutzenerwartungswert $v = 2\frac{1}{3}$ als Wert der Entscheidungssituation für P . Ein längerer Weg führt zur Normalform von (39.1). Die Strategienmengen $\{x_i\}$, $\{\theta^{(j)}\}$ haben wir schon angegeben. Die Verteilung ρ der Zustandsmenge $\{\theta^{(j)}\}$ läßt sich leicht aus den Wahrscheinlichkeitsprodukten bestimmen: $\rho = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12})$.

(39.4)

ρ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$E(x_i)$
	oo	ou	uo	uu	
ooo	2	2	1	1	$1\frac{3}{4}$
oou	2	2	3	3	$2\frac{1}{4}$
ouo	0	0	1	1	$\frac{1}{4}$
ouu	0	0	3	3	$\frac{3}{4}$
uoo	2	0	2	0	$1\frac{1}{3}$
uou	2	3	2	3	$2\frac{1}{3}$
uuo	1	0	1	0	$\frac{2}{3}$
uuu	1	3	1	3	$1\frac{2}{3}$

Die letzte Spalte enthält die entsprechenden Nutzenerwartungswerte. Es zeigt sich wieder, daß uou die optimale Strategie für P ist. Sie gewährleistet den stochastisch erreichbaren Nutzengewinn $V = 2\frac{1}{3}$.

Die optimale Strategie in (39.4) gehört zwar zum Bereich der reinen Strategien des Baumes (39.1), determiniert aber nicht eindeutig einen Streckenzug vom Anfangspunkt A_o bis zu einem Endpunkt B_v. Die Strategie uou führt zu einem sogenannten bedingten Streckenzug, was eben charakteristisch für das Spiel (39.2) ist. Aus (39.3) folgt, daß jede mehrstufige Risikosituation mit den Voraussetzungen (39.2) im Bereich der reinen, bedingten Strategien mindestens eine optimale Strategie und einen eindeutigen, stochastisch erreichbaren Wert besitzt. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß, wenn in (39.2) nur eine unvollständige Information bezüglich des Baumes vorliegt (Informationsmengen mit mehr als einen Eckpunkt), die optimale Strategie im allgemeinen dem Bereich der gemischten Strategien angehört.

§ 40. Mehrstufige Entscheidungen unter LPI-Bedingungen für die Zustandsverteilungen

Wenn im Grundmodell (39.2) der mehrstufigen Risikosituation die Verteilungen ρ_α der Zustände für die entsprechenden Zufallszüge nur teilweise bekannt sind, ergibt das Bernoulli-Prinzip keine Lösungsmöglichkeiten. Erst die Einführung des Max E_{min}-Prinzips löst die Frage der Dominanz im Strategienbereich und führt zur optimalen Lösung. Das wird im folgenden Satz bewiesen:

Satz 40.1:

Wenn im Grundmodell der mehrstufigen Risikosituation (39.2) für die Verteilungen ρ_α der Zufallszüge nur LPI(ρ_α), $\alpha = 1, \ldots, k$ vorliegen, existiert aufgrund des Max E_{min}-Prinzips mindestens eine optimale reine Strategie x^* und ein eindeutiger Entscheidungswert $V(x^*)$.

Beweis:

Vc (39.2) gehen wir zur Normalform über. Es wird wie in (39.3) die Strategienmenge $\{x_i\}$ des Entscheidungsträgers bestimmt und die zusammengesetzte Zufallsvariable $Z = (Z_1, \ldots, Z_k)$ gebildet. Alle Komponenten von Z sind unabhängige Zufallsvariablen, die den entsprechenden Zufallszügen zugeordnet sind. Die endliche Menge $\{\theta^{(j)}\}$ aller möglichen Zustände von Z bildet die Strategienmenge der Natur. Da aber über die Verteilung ρ_α der Zufallszüge nur LPI(ρ_α) vorliegen, liegt über die Verteilung ρ der Strategienmenge $\{\theta^{(j)}\}$ nur eine LPI(ρ) vor. Das folgt aus Satz 20.1 über LPI-Bedingungen für einen Zufallsvektor. Die erhaltene Normalform ist also eine Entscheidungssituation unter LPI-Bedingungen

(40.1) $\quad [\{x_i\}; \{\theta^{(j)}\}; \text{LPI}(\rho); [u_{ij}]]$.

Darin ist u_{ij} der dem Strategienpaar $(x_i, \theta^{(j)})$ entsprechende Nutzenwert. Die Max E_{min}-Lösung bestimmt mindestens eine optimale Strategie x^* und eindeutig den Entscheidungswert $V(x^*)$, w.z.b.w.

Jede mehrstufige Entscheidungssituation (39.2) besitzt also auch unter LPI-Bedingungen einen eindeutigen Entscheidungswert $V(x^*)$. Er ist Ausgangspunkt für sensitivitätsanalytische Untersuchungen und für die Bestimmung des Informationswertes.
Der Übergang zur Normalform wird in vielen Existenzbeweisen angewendet. Die algorithmische Bedeutung dieses Übergangs ist allerdings gering; wegen der Komplexität der mit der Strategienmenge $\{\theta^{(j)}\}$ verbundenen LPI-Entscheidungsmatrix wäre der Arbeitsaufwand bei der effektiven Lösung zu groß. Deshalb muß auch hier, ähnlich wie in Risikosituationen, das Roll-back-Verfahren angewendet werden. Gemäß dem Max E_{min}-Prinzip ist wie folgt vorzugehen:

1) Für jeden Zufallspunkt wird die ihr aufgrund der entsprechenden LPI zugeordnete Extremalpunkte-Menge bestimmt.

2) Im Roll-back-Verfahren wird für jeden Zufallspunkt die im Bereich der Extremalpunkte minimale Nutzenerwartung ermittelt.

3) Auf diese Weise führt das Roll-back-Verfahren zum optimalen ersten Zug des Entscheidungsträgers. Jetzt folgt das optimale Vorwärts-Verfahren, das schließlich die optimale Strategie x* und den Entscheidungswert V(x*) liefert. Dazu sei folgendes bemerkt:

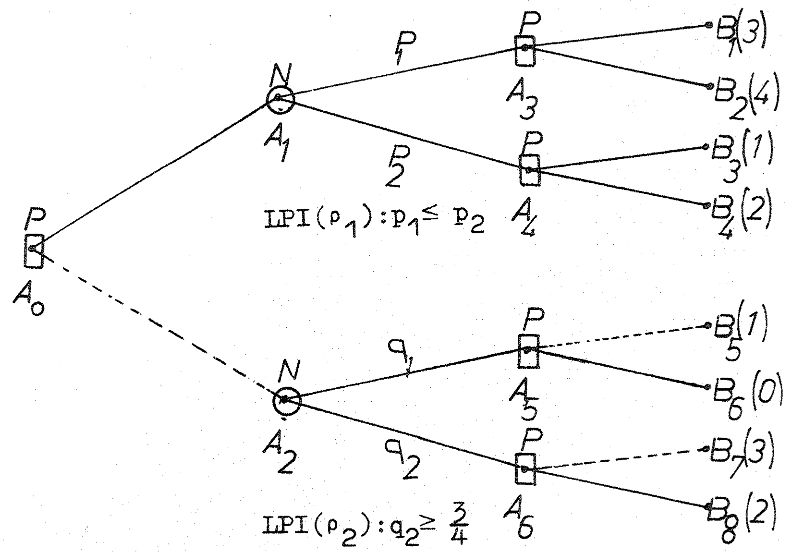
1) Die optimale reine Strategie hat einen bedingten Verlauf. Im allgemeinen entspricht ihr kein determinierter Streckenzug, da ja nach allen möglichen Zufallszügen eine optimale Anpassung seitens des Entscheidungsträgers folgt.

2) V(x*) ist der nach dem Max E_{min}-Prinzip größtmögliche minimale Nutzenerwartungswert. Die behandelte mehrstufige Entscheidungssituation gewährleistet also dem Entscheidenden bei Anwendung der optimalen Strategie x* wenigstens den Nutzenerwartungswert V(x*).

3) Es ist offensichtlich,daß mindestens V(x*) stochastisch erreichbar ist. Beim einmaligen Spiel kann allerdings der Entscheidungsträger auch weniger als V(x*) erreichen.

Beispiel:

(40.2)



Dieser Baum stellt eine dreistufige Entscheidungssituation dar. Formal gilt:

$$P:2 \to N:2,\ LPI(\rho_1):p_1 \leq p_2;\ 2, LPI(\rho_2):q_2 \geq \frac{3}{4} \to P:2,(3,4);2,(1,2);$$
$$2,(1,0);\ 2,(3;2).$$

Die Zufallspunkte mit den Verteilungen sind: $A_1(\rho_1)$, $A_2(\rho_2)$. Die LPI-Bedingungen lauten:

$LPI(\rho_1)$: $p_1 \leq p_2$; $LPI(\rho_2)$: $q_2 \geq \frac{3}{4}$.

Die Extremalpunkte-Matrizen sind demnach:

$$M(LPI(\rho_1)) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix};\ M(LPI(\rho_2)) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} .$$

1. Das Roll-back-Verfahren:

Reduktion 1): $A_3(4)$, $A_4(2)$, $A_5(1)$, $A_6(3)$.

Reduktion 2): Aufgrund der Extremalpunkte-Matrizen werden die minimalen Erwartungswerte bestimmt: $A_1(2)$, $A_2(2\frac{1}{2})$.

Reduktion 3): $A_o(2\frac{1}{2})$. Der erste optimale Zug des Entscheidenden ist A_oA_2. Das optimale Vorwärts-Verfahren bestimmt die optimale Strategie x* des Entscheidungsträgers:

Zug 1): A_oA_2. a) Auf Zufallszug 2): A_2A_5 folgt Zug 3): A_5B_5. b) Auf Zufallszug 2): A_2A_6 folgt Zug 3): A_6B_7.

Die optimale Strategie x* ist also eine reine bedingte Strategie. Sie gewährleistet dem Entscheidungsträger P mindestens die Nutzenerwartung $V(x^*) = 2\frac{1}{2}$ als Entscheidungswert.

2. Die Normalform:

Hier besteht die Strategienmenge $\{x_i\}$ des Entscheidungsträgers P aus 8 und die der Natur $\{\theta^{(j)}\}$ aus 4 Strategien.
Durch Zusammensetzung der komponenten $LPI(\rho_1)$: $p_1 \leq p_2$ und $LPI(\rho_2)$: $q_2 \geq \frac{3}{4}$ erhält man für die Verteilung $\rho = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ über $\{\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \theta^{(3)}, \theta^{(4)}\}$:

(40.3) $LPI(\rho)$: $r_3 \geq r_1; r_4 \geq r_2; r_2 - 3r_1 \geq 0; r_4 - 3r_3 - r_2 + 3r_1 \geq 0.$

Daraus wird die Extremalpunkte-Matrix und die Entscheidungsmatrix

$A(x_i, \theta^{(j)}) = [u_{ij}] \cdot M(LPI(\rho))$ bestimmt,

die nach dem Maximin-Prinzip gelöst wird. Die Lösung ist mit einem viel größeren Zeitaufwand verbunden.

Über die Normalform der mehrstufigen Entscheidungssituation unter LPI-Bedingungen gilt folgender Satz:

Satz 40.2:

Die Normalform (40.1) einer mehrstufigen Entscheidungssituation (39.2) unter LPI-Bedingungen führt aufgrund des Max E_{min}-Prinzips zu einem streng determinierten Zweipersonen-Nullsummenspiel.

Das Spiel besitzt also wenigstens einen Sattelpunkt, der den Wert der Entscheidungssituation bestimmt und wenigstens eine optimale reine Strategie.
Zum Beweis des Satzes genügt folgende Bemerkung: Das aufgrund des Max E_{min}-Prinzips im Entscheidungsbaum (39.2)

unter LPI-Bedingungen angewandte Roll-back-Verfahren ist mit der Anwendung des Maximin-Prinzips in dem der Normalform (40.1) entsprechenden Spiel äquivalent. Da man im Roll-back-Verfahren zu einer reinen optimalen Strategie gelangt, muß dies auch im zweiten Verfahren der Fall sein, was eben zu beweisen war.

Da das Roll-back-Verfahren in einem Entscheidungsbaum bei unvollständiger Information bezüglich des Verlaufes des Baums (Informationsmengen mit mehr als **einem** Eckpunkt) im allgemeinen nicht zur Lösung führt, folgt der

Satz 40.3:

Eine mehrstufige Entscheidungssituation (39.2) unter LPI-Bedingungen mit mehr als nur einen Eckpunkt enthaltenden Informationsmengen führt im allgemeinen aufgrund des Max E_{min}-Prinzips zu einem nicht strikt determinierten Spiel. Die Lösung gehört dem Bereich der gemischten Strategien an.

§ 41. Mehrstufige nicht-kooperative n-Personen-Spiele unter LPI-Bedingungen

In diesem Paragraphen wollen wir die Anwendung des Max E_{min}-Prinzips in mehrstufigen nicht-kooperativen n-Personen-Spielen unter LPI-Bedingungen untersuchen. Das Modell (39.2) muß erweitert werden: Im entsprechenden Entscheidungsbaum werden **alle** Ecken (außer den Eckpunkten) unter den n Spielern verteilt. Den Zufallsspieler schließen wir vorläufig aus. Es wird vorausgesetzt, daß der Entscheidungsbaum endlich ist und jede Informationsmenge nur eine Ecke enthält (vollständige Information).

Die Bezeichnung der Strategienmengen ist: $\Sigma_i = \{\sigma_i\}, i = 1, \ldots,$

Jedem Endpunkt wird ein Auszahlungsvektor

$$\pi(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = (\pi_1(\sigma_1,\ldots,\sigma_n),\ldots,\pi_n(\sigma_1,\ldots,\sigma_n))$$

zugeordnet.

Es gilt folgender bekannte Satz [Owen 1971] :

Jedes endliche n-Personen-Spiel mit vollständiger Information besitzt einen Gleichgewichtspunkt.
Unter einem Gleichgewichtspunkt versteht man ein n-Tupel

$(\sigma_1{}^*,\ldots,\sigma_n{}^*)$, das für jedes $i = 1,\ldots,n$ und jedes $\hat{\sigma}_i \in \Sigma_i$ die Bedingung

$$(41.1)\quad \pi_i(\sigma_1{}^*,\ldots,\sigma^*_{i-1},\hat{\sigma}_i,\sigma^*_{i+1},\ldots,\sigma_n{}^*) \leq \pi_i(\sigma_1{}^*,\ldots,\sigma_n{}^*)$$

erfüllt. Daraus folgt, daß der i-te Spieler nicht daran interessiert ist, von seiner optimalen Strategie $\sigma_i{}^*$ abzuweichen, wenn alle anderen ihre optimalen Strategien beibehalten. Die Auszahlung $\pi_i(\sigma_1{}^*,\ldots,\sigma_i{}^*,\ldots,\sigma_n{}^*)$ ist also für ihn optimal.

Die Normalform dieses Spiels lautet folgendermaßen:

$$(41.2)\quad [\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n;\ \pi_1(\sigma_1,\ldots,\sigma_n);\ldots;\pi_n(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)].$$

Die Lösung ist das optimale n-Tupel $(\sigma_1{}^*,\ldots,\sigma_n{}^*)$ und für den i-ten Spieler der Wert $V_i = \pi_i(\sigma_1{}^*,\ldots,\sigma_n{}^*)$; $i = 1,\ldots,n$.

Wir wollen das n-Personen-Spiel (41.2) erweitern, indem wir als n + 1 -ten Spieler den Zufallsspieler (mit bekannten Verteilungen aller Zufallsalternativen bei jedem Zufallszug) einführen. Es ist offensichtlich, daß auch in dem Fall der Satz über die Existenz eines Gleichgewichtspunktes gilt, jedoch sind die Werte V_i jetzt Nutzenerwartungswerte und also nur im stochastischen Sinn erreichbar. Das folgt aus der Tatsache, daß im allgemeinen jedes n-Tupel $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ einen bedingten Streckenzug bestimmt, also mehr als einen Endpunkt mit gegebener Verteilung determiniert.

Anstelle von $\pi_1, \ldots, \pi_n$ stehen jetzt entsprechende Nutzenerwartungswerte $[E\, \pi_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \ldots, E\, \pi_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)]$. Die Normalform ist also

$$(41.3) \quad [\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n;\ (\rho_1, \ldots, \rho_r);\ E\, \pi_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \ldots, E\, \pi_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)].$$

$(\rho_1,\ldots,\rho_r)$ sind die bekannten Verteilungen für jeden Zufallszug.

Das Roll-back-Verfahren erweist die strikte Determiniertheit des Spiels (41.3), also die Existenz einer bedingten optimalen Strategie $(\sigma_1^*,\ldots,\sigma_n^*)$.

Das Max E_{min}-Prinzip erlaubt uns, weitere Unbestimmtheiten in das Modell einzuführen. Wir setzen voraus, daß für die Verteilungen $\rho_1,\ldots,\rho_r$ der Zufallsalternativen bei den einzelnen Zufallszügen nur LPI$(\rho_1),\ldots,$ LPI(ρ_r) vorliegen und beweisen folgenden Satz:

<u>Satz 41.1:</u>

<u>Gemäß dem Max E_{min}-Prinzip besitzt jedes endliche mehrstufige nicht-kooperative n-Personen-Spiel gegen die Natur unter LPI-Bedingungen für die Verteilungen der Zustände einen Gleichgewichtspunkt.</u>

<u>Beweisskizze:</u> Ein n-Personen-Spiel gegen die Natur bedeutet, daß außer den n Spielern auch der (n+1)-te Zufallsspieler dem Spiel angehört.

1) Jedem Zufallszug wird die Menge der entsprechenden Extremalpunkte zugeordnet.

2) Im Roll-back-Verfahren wird für jeden Zufallszug der im Bereich der Extremalpunkte minimale Nutzenerwartungswert bestimmt.

3) Das dem Schritt 2) entsprechende Vorwärts-Verfahren ermittelt die optimalen reinen Strategien $\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*$; der Punkt $(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ bildet den Gleichgewichtspunkt des Spiels.

Die Normalform des analysierten Spiels ist:

$$(41.4) \quad [\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n; LPI(\rho_1), \ldots, LPI(\rho_r), E_{min}\, \pi_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n); \ldots, E_{min}\, \pi_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)]$$

Darin ist E_{min} der Operator für den minimalen Nutzenerwartungswert.
Es ist offensichtlich, daß folgender Satz mit Satz 41.1 äquivalent ist.

<u>Satz 41.2:</u>

<u>Das Spiel (41.4) ist strikt determiniert.</u>

Zwei Anmerkungen zu den beiden Sätzen:
1) Die optimalen Strategien $\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*$ sind ähnlich wie in (41.3) bedingt, es entsprechen ihnen also bedingte Streckenzüge.

2) Im Satz 41.1 handelt es sich um einen Gleichgewichtspunkt eines besonderen Typus (LPI-Gleichgewichtspunkt). Die Gleichgewichtsbedingung (41.1) nimmt folgende Form an:

$$(41.5) \quad E_{min}\pi_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \hat{\sigma}_i, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) \leq$$

$$\leq E_{min}\pi_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*).$$

Daraus folgt, daß die optimale Strategie σ^*_i dem i-ten Spieler den optimalen Nutzenerwartungswert gewährleistet, wenn alle anderen ihre optimalen Strategien beibehalten. Er hat also kein Interesse, von dieser Strategie abzuweichen.

Schließlich noch ein Satz, der die Verwendbarkeit des Max E_{min}-Prinzips in mehrstufigen Entscheidungen zeigt, in denen der i-te Spieler nur seine Auszahlungen, nicht aber die der übrigen Spieler kennt und nur eine teilweise Information (LPI) über die Verteilungen der Alternativen in den Eckpunkten der übrigen Spieler besitzt.

Für den einfachen Fall des mehrstufigen Zweipersonenspiels gilt folgender Satz:

Voraussetzungen:

1) Spieler I kennt seine Auszahlungen, nicht aber die des zweiten Spielers.

2) Spieler I besitzt eine teilweise Information (LPI) über die Verteilungen der Alternativen der Züge des Spielers II.

Satz 41.3:

Unter diesen Voraussetzungen existiert für Spieler I gemäß dem Max E_{min}-Prinzip eine reine optimale Strategie und ein eindeutiger Wert des Spiels.

Beweis:

Wie im Satz 41.1 ist das Roll-back-Verfahren anwendbar.

Anwendungsmöglichkeiten sind z.B. mehrstufige Duopol-Situationen oder Kriegssituationen (Spionage übermittelt die LPI bezüglich der Verteilungen der Alternativen der Züge des Gegenspielers).

Auch im Fall einer nicht-kooperativen n-Personen-mehrstufigen Entscheidung (mit oder ohne Zufallsspieler) läßt sich ein analoger Satz über die optimale Strategie und den Wert des Spiels für den i-ten Spieler beweisen.

§ 42. LPI-Unbestimmtheiten in den Auszahlungen in einer mehrstufigen Entscheidungssituation.

Bisher betrachteten wir mehrstufige Entscheidungssituationen nur unter LPI-Bedingungen bezüglich der Zustandsverteilungen der Zufallszüge. Nun wollen wir weitere Unbestimmtheiten in das Modell einführen, indem auch für die Auszahlungen in den Eckpunkten des Baumes LPI-Bedingungen eingeführt werden.

Sei $\{B_{\alpha_1}, \ldots, B_{\alpha_\lambda}\}$ die Menge der Endpunkte des Baumes in (39.2), denen keine eindeutige Auszahlungen zugeordnet sind. Zu jedem Endpunkt B_{α_ν} gehört die endliche Wertmenge $\{a_{\alpha_\nu}\}$ mit der Verteilung ρ_{α_ν}, $(\nu = 1, \ldots, \lambda)$.

Nun sei vorausgesetzt, daß alle Verteilungen für die Zufallsalternativen $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ in (39.2) und auch alle den Endpunkten des Baumes entsprechenden Verteilungen ρ_{α_ν}, $(\nu = 1, \ldots, \lambda)$ bekannt sind und daß sie darüber hinaus unabhängigen Zufallsvariablen entsprechen. Das ergibt das Modell der erweiterten mehrstufigen Risikosituation. Folgender Satz ist leicht zu beweisen:

Satz 42.1:

Jede erweiterte mehrstufige Risikosituation ist in eine einstufige Risikosituation überführbar.

Beweis:

Die entsprechenden unabhängigen Zufallsvariablen sind $Z_1, \ldots, Z_k; Z_{\alpha_1}, \ldots, Z_{\alpha_\lambda}$. Wir bilden die zusammengesetzte diskrete Zufallsvariable $Z = (Z_1, \ldots, Z_k; Z_{\alpha_1}, \ldots, Z_{\alpha_\lambda})$.

Es folgt der Übergang zur Normalform. Die Menge der globalen Strategien des Entscheidungsträgers ist $\{x_i\}$ und als Zustandsmenge (Strategienmenge der Natur) wird die diskrete Menge $\{\bar{\theta}^{(j)}\}$ aller möglichen Zustände des Zufallsvektors Z angenommen. Jedem Strategienpaar $(x_i, \bar{\theta}^{(j)})$ entspricht offensichtlich eindeutig ein Streckenzug im Entscheidungsbaum mit einer eindeutigen Auszahlung im Bereich der Auszahlungsmenge $\mathfrak{U}$. Sie besteht aus allen den Endpunkten des Baumes zugeordneten Auszahlungen. Unter den getroffenen Annahmen entspricht jedem $\bar{\theta}^{(j)}$ eine aus den Verteilungen $\rho_1, \ldots, \rho_k; \rho_{\alpha_1}, \ldots, \rho_{\alpha_\lambda}$ resultierende Wahrscheinlichkeit $p^{(j)}$. Dann lautet die Normalform:

$$(42.1) \quad [\{x_i\}; \{\bar{\theta}^{(j)}\}; \rho[p^{(j)}]; [\bar{u}_{ij}]] .$$

$\rho[p^{(j)}]$ ist die aus den Wahrscheinlichkeiten $p^{(j)}$ gebildete Verteilung der neuen Zustände $\{\bar{\theta}^{(j)}\}$ und $[\bar{u}_{ij}]$ die aus den entsprechenden Elementen von $\mathfrak{U}$ bestehende Nutzenmatrix. Da (42.1) eine übliche Risikosituation ist, gilt Satz 42.1. Das Bernoulli-Prinzip führt zur Lösung der betrachteten erweiterten mehrstufigen Risikosituation.

Es ist offensichtlich, daß man einfacher zur Lösung gelangt, indem man die Roll-back-Methode mit der stufenweisen Ermittlung der entsprechenden Nutzenerwartungswerte anwendet. Die Überführung in die Normalform ist aber wesentlich, da sie die Beweise der folgenden Sätze erleichtert.

Im Entscheidungsbaum (39.2) mit den Unbestimmtheiten bezüglich der Auszahlungen liegt nur eine partielle Information über die Verteilungen $\rho_1, \ldots, \rho_k; \rho_{\alpha_1}, \ldots, \rho_{\alpha_\lambda}$ vor. Es sind nur die LPI(ρ_1), ..., LPI(ρ_{α_λ}) bekannt. Die entsprechenden diskreten Zufallsvariablen $Z_1, \ldots, Z_{\alpha_\lambda}$ sind unabhängig. Dann gilt folgender Satz:

Satz 42.2:

Jede mehrstufige Entscheidungssituation unter LPI-Bedingungen sowohl für die Verteilungen der Zufallsalternativen als auch der Auszahlungsalternativen ist in eine übliche einstufige LPI-Entscheidungssituation überführbar.

Beweis: Es folgt analog zu Satz 42.1 ein Übergang zur Normalform, indem die endliche Menge $\{\bar{\theta}^{(j)}\}$ aller möglichen Zustände des diskreten Zufallsvektors $\bar{Z} = (Z_1, \ldots Z_{\alpha_\lambda})$ als neue Zustandsmenge betrachtet wird. Die Verteilung $\rho[p^{(j)}]$ in (42.1) ist aber nur teilweise bekannt: Aufgrund des Satzes 20.1 über die LPI-Bedingungen für einen Zufallsvektor liegt damit bezüglich der $\rho[p^{(j)}]$ eine LPI($\rho[p^{(j)}]$) vor. Wir erhalten die Normalform

(42.2) $[\{x_i\};\{\bar{\theta}^{(j)}\};\text{LPI}(\rho[p^{(j)}]);\ [\bar{u}_{ij}]\ ].$

Da dies eine übliche LPI-Entscheidung ist, ist Satz 42.2 bewiesen.

Die Anwendung des Max E_{min}-Prinzips in (42.2) kann mit erheblichen algorithmischen Schwierigkeiten verbunden sein. Das Roll-back-Verfahren führt viel schneller zur Lösung. In diesem Verfahren muß man offensichtlich sowohl für die Zufallszüge als auch beim Übergang zu den Auszahlungen in den Endpunkten des Baumes die entsprechenden mini-

malen Nutzenerwartungswerte berücksichtigen.
Es sei noch bemerkt, daß der Fall mit LPI-Bedingungen für die Verteilungen der Zufallsalternativen bei bekannten Verteilungen der Auszahlungsalternativen einfacher ist als der der Voraussetzungen des Satzes 42.2. Auf analoge Weise gelangt man wieder zu einer üblichen einstufigen LPI-Entscheidung und das Max E_{min}-Prinzip führt zur Lösung.

Beispiel:

Im Entscheidungsbaum (40.2) führen wir zusätzlich Unbestimmtheiten bezüglich der Auszahlungen in gewissen Endpunkten des Baumes ein: Die Auszahlungen in B_4 seien:

P	r_1	r_2
B_4	2	3

; $r_1 \leq r_2$.

(2 oder 3 mit der Verteilung $\rho_{\alpha_1} = (r_1, r_2)$ bei $r_1 \leq r_2$)
und für B_5:

P	t_1	t_2
B_5	0	1

; $LPI(\rho_{\alpha_2})$: $t_1 \geq t_2$.

Es liegt also hier der LPI-Fall sowohl für die Verteilungen der Zufallsalternativen als auch für gewisse Auszahlungsalternativen vor.

Die Extremalpunkte-Matrizen für $\rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}$ sind dann:

$$M(LPI(\rho_{\alpha_1})) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad M(LPI(\rho_{\alpha_2})) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Anwendung des Roll-back-Verfahrens ist aufgrund des Max E_{min}-Prinzips mit der Bestimmung der minimalen Nutzenerwartungswerte sowohl für die Zufallsalternativen als auch für die Auszahlungsalternativen verbunden.

Reduktion 1): $A_3(4)$, $A_4(2\frac{1}{2})$, $A_5(\frac{1}{2})$, $A_6(3)$.

Reduktion 2): $A_1(2\frac{1}{2})$, $A_2\ (2\frac{3}{8})$.

Reduktion 3): $A_o(\ 2\frac{1}{2})$.

Der erste optimale Zug des Entscheidungsträgers ist A_oA_1 (nicht A_oA_2 wie zuvor!). Auf den Zufallszug A_1A_3 folgt A_3B_2 und auf A_1A_4 folgt A_4B_4. Die bedingte optimale Strategie hat sich also geändert. Sie gewährleistet aber denselben Entscheidungswert $2\frac{1}{2}$.

Der Übergang zur Normalform ist hier komplizierter. Die Strategienmenge $\{x_i\}$ des Entscheidungsträgers besteht weiterhin aus 8 Strategien, die Strategienmenge der Natur enthält aber nicht 4, sondern 16 Strategien.

Die Ermittlung der LPI-Bedingungen und der entsprechenden Extremalpunkte-Matrix für die Verteilung über diesen 16 Strategien ist zwar einfach, aber mit größerem Arbeitsaufwand verbunden.

Schließlich wollen wir noch die Frage der LPI-Unbestimmtheiten bezüglich der Auszahlungen in mehrstufigen nicht kooperativen n-Personen-Spielen gegen die Natur kurz erörtern. Dasselbe Verfahren mit Einführung der entsprechenden zusammengesetzten Zufallsvariablen unter Berücksichtigung aller Zufallsalternativen und Zufallsauszahlungen der n Spieler führt zum

Satz 42.3:

Gemäß dem Max E_{min}-Prinzip existiert in jedem endlichen mehrstufigen nicht kooperativen n-Personen-Spiel gegen die Natur unter LPI-Bedingungen für die Zufallsalternativen und für die Auszahlungsalternativen aller Spieler mindestens ein Gleichgewichtspunkt.

Es bleibt zu bemerken, daß es sich dabei um einen LPI-Gleichgewichtspunkt handelt. Er wurde in (41.5) definiert.

§ 43. Sensitivitätsanalytische Untersuchungen. Der dynamische Informationswert.

Der in mehrstufigen Entscheidungen aufgrund des Max E_{min}-Prinzips bestimmte Entscheidungswert bildet wieder den Ausgangspunkt für sensitivitätsanalytische Untersuchungen. Es handelt sich hier um die Sensitivität des Entscheidungswertes einer mehrstufigen Entscheidungssituation unter LPI-Bedingungen gegenüber der Veränderung einer vorgegebenen Komponente des Modells. Die Sensitivität $\sigma(\Delta I)$ gegenüber einer vorgegebenen Informationsänderung ΔI in einer mehrstufigen Entscheidungssituation kann als der durch ΔI verursachte Zuwachs ΔV des Entscheidungswertes V des Entscheidungsbaumes EB definiert werden. Also:

$$(43.1) \qquad \sigma_{EB}(\Delta I) = \Delta V(EB;\ \Delta I).$$

(43.1) induziert eine Präferenzordnung über dem Bereich der möglichen Informationsänderungen $\{\Delta I\}$ in einer mehrstufigen Entscheidungssituation EB.

Es gilt:

$$(43.2)\quad \sigma_{EB}(\Delta I^{(1)}) \geq \sigma_{EB}(\Delta I^{(2)}) \Leftrightarrow \Delta V(EB;\Delta I^{(1)}) \geq \Delta V(EB;\Delta I^{(2)}).$$

Ähnlich wie im § 28 wird der Zuwachs $\Delta V(EB;\Delta I)$ des Entscheidungswertes V einer mehrstufigen Entscheidungssituation EB unter LPI-Bedingungen als (semantischer) Informationswert von ΔI betrachtet. Über die Größe der Sensitivität entscheidet also gemäß (43.2) der entsprechende Informationswert.

Auch die Frage der optimalen Informationsänderung in einer mehrstufigen Entscheidung unter LPI-Bedingungen kann ähnlich wie in Def. 29.2 behandelt werden. Auf diese Weise wird der Begriff des dynamischen Informationswertes und der dynamischen optimalen Steuerung eingeführt.

Der dynamische Informationswert V_d des Übergangs im Entscheidungsbaum (39.2) vom Informationszustand $I^{(1)}$ zum Informationszustand $I^{(2)}$ $(I^{(1)} \rightarrow I^{(2)})$ ist:

$$(43.3)\quad V_d(EB;\, I^{(1)} \rightarrow I^{(2)}) = V(EB;I^{(2)}) - V(EB;I^{(1)}).$$

Die rechte Seite bezeichnet den Zuwachs des aufgrund des Max E_{min}-Prinzips bestimmten Entscheidungswertes der mehrstufigen Entscheidung EB, verursacht durch den Informationsübergang $I^{(1)} \rightarrow I^{(2)}$. Der dynamische Informationswert kann offensichtlich positiv, negativ oder auch Null sein. Im letzten Fall wird die entsprechende Informationsänderung als bezüglich der mehrstufigen Entscheidung <u>nicht effektiv</u> betrachtet.

Zu den mehrstufigen nicht-kooperativen n-Personen-Spielen gegen die Natur unter LPI-Bedingungen ist folgendes zu ergänzen. Aufgrund der Sätze 41.1 und 42.3 existiert in solchen Spielen immer ein Gleichgewichts-n-Tupel

$(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$, das die Bedingung (41.5) erfüllt. Jedes σ_i^* $(i = 1, \ldots, n)$ wird hier als Entscheidungswert des i-ten Spielers betrachtet. Folglich muß der dynamische Informationswert für den i-ten Spieler als entsprechender Zuwachs seines Entscheidungswertes σ_i^* betrachtet werden. Der dynamische Informationswert in mehrstufigen n-Personen-Spielen $U_d^{(n)}$ ist also ein n-Tupel, dessen Komponenten die dynamischen Informationswerte der einzelnen Spieler sind:

$$(43.4) \quad V_d^{(n)}(EB;\, I^{(1)} \rightarrow I^{(2)}) = (\Delta\sigma_1^*, \ldots, \Delta\sigma_n^*).$$

Die rechte Seite ist ein n-dimensionaler Vektor, dessen Komponenten den Zuwächsen der entsprechenden Gleichgewichtswerte der einzelnen Spieler beim Übergang $I^{(1)} \rightarrow I^{(2)}$ entsprechen.

Schließlich wollen wir den im § 29 eingeführten Begriff der optimalen Informationsänderung in einer Entscheidungssituation auf den Fall einer mehrstufigen Entscheidung erweitern.
Sei EB der Entscheidungsbaum einer mehrstufigen Entscheidungssituation (39.2), auch unter LPI-Bedingungen. Im Bereich gegebener Restriktionsbedingungen (RB) können verschiedene Informationsänderungen im Modell realisiert werden. Die entsprechende diskrete Menge der Informationsänderungen sei $\{\Delta I\}$. Die Frage der optimalen Informationsänderung im behandelten Modell ist unmittelbar mit der Frage der Sensitivität des aufgrund des Max E_{min}-Prinzips ermittelten Entscheidungswertes von EB gegenüber allen im Bereich von RB möglichen Informationsänderungen $\{\Delta I\}$ verbunden.
Die optimale Informationsänderung, auch optimale Steuerung genannt, muß offensichtlich der maximalen Sensitivität entsprechen. Oder anders formuliert: Der optimalen Informationsänderung entspricht der maximale dynamische Informationswert. Für die optimale Informationsänderung ΔI^*

(optimale Steuerung) gilt demnach:

$$(43.5) \qquad \sigma_{EB}(\Delta I^*) = \max_{\{\Delta I\}} \sigma_{EB}(\Delta I).$$

Dabei handelt es sich um die maximale Sensitivität im dynamischen Sinn.

Im Falle einer unendlichen Menge $\{\Delta I\}$ muß man im allgemeinen anstelle des Maximum-Operators den Supremum-Operator anwenden.
Das Problem der optimalen Steuerung in endlichen nicht kooperativen mehrstufigen n-Personen-Spielen gegen die Natur unter LPI-Bedingungen ist noch komplizierter. Ähnlich wie in (43.4) müssen die dynamischen Entscheidungswerte der einzelnen Spieler als Komponenten des aufgrund des Max E_{min} -Prinzips bestimmten Gleichgewichts-n-Tupels ermittelt werden. Die Bedingung für den LPI-Gleichgewichtspunkt (43.5) muß erfüllt sein. Das Wesentliche in dem hier betrachteten Modell ist die Tatsache, daß man die Sensitivität, den dynamischen Informationswert und die optimale Informationsänderung nur bezüglich eines bestimmten Spielers bestimmen kann. In eine genauere Betrachtung dieser Probleme wollen wir hier nicht eingehen, hingegen noch ein einfaches Zahlenbeispiel für die Bestimmung des dynamischen Informationswertes in einem mehrstufigen LPI-Entscheidungsmodell betrachten:
Gegeben sei wieder der Entscheidungsbaum EB (40.2) unter der Annahme, daß dem Informationszustand $I^{(1)}$ die vollständige Ignoranz über die Alternativenverteilung der Zufallszüge in A_1 und A_2 entspricht und dem Informationszustand $I^{(2)}$ die in (40.2) angegebenen LPI-Bedingungen für die Zufallszüge. Wir wollen den dynamischen Informationswert V_d des Übergangs von $I^{(1)}$ zu $I^{(2)}$ bestimmen. Um den entsprechenden Zuwachs des Entscheidungswertes bei diesem Übergang festzustellen, genügt es, den Entscheidungswert

von EB bei vollständiger Ignoranz über die Alternativverteilung der Zufallszüge zu berechnen. Die Roll-back-Methode führt unter Anwendung des Maximin-Prinzips zu $V(EB;\ I^{(1)}) = 2$ und zur optimalen Strategie:

(43.6) $1.A_0A_1$, $3.A_3B_2$ oder A_4B_4.

Aus Beispiel (40.2) folgt: $V(EB;\ I^{(2)}) = 2^1/_2$.

Für den dynamischen Informationswert erhalten wir also:

$$V_d(EB;\ I^{(1)} \to I^{(2)}) = V(EB;\ I^{(2)}) - V(EB;\ I^{(1)}) =$$

$$= 2^1/_2 - 2 = {}^1/_2 \ .$$

Dem Übergang $I^{(1)} \to I^{(2)}$ entspricht auch eine Änderung der optimalen Strategie des Entscheidungsträgers. Statt der Strategie (43.6) muß er die Strategie:
$1.A_0A_2$, $3.A_5B_5$ oder A_6B_7 anwenden.

§ 44. Adaptionsprozesse

Die wesentliche Bedeutung des Max E_{min} -Prinzips besteht nicht nur in seiner Anwendungsmöglichkeit im Bereich der mehrstufigen Entscheidungen bei nur teilweise bekannten Verteilungen der Zustände, sondern auch in der Tatsache, daß aufgrund dieses Prinzips Adaptionsprozesse und ihr Wert für die Entscheidungssituation analysiert werden können.
Wir beschränken uns hier auf das Modell (39.2) unter LPI-Bedingungen, also auf sogenannte extensive Spiele gegen die Natur mit nur teilweise bekannten Verteilungen der Zustände.
Unter einem Adaptionsprozeß verstehen wir hier folgendes

Verfahren. Sei der entsprechende Entscheidungsbaum B_1 durch die Menge seiner Eckpunkte (ohne Endpunkte) $\bar{B}_1(A_0, A_1, \ldots, A_\nu)$ charakterisiert. Das Max E_{min} -Prinzip führt zur optimalen Strategie x* des Entscheidungsträgers. Gemäß x* folgt das Spiel dem optimalen bedingten Streckenzug. Es wird aber in einem Eckpunkt $A_k (1 \leq k \leq \nu)$ unterbrochen. Aufgrund der gewonnenen Information erweist sich, daß der weitere Weg von A_k gemäß x* nicht optimal ist. Der dem A_k entsprechende Unterbaum $\bar{B}_1(A_k)$ muß jetzt verändert werden. In A_k erfolgt ein Übergang zum neuen Baum mit entsprechenden Eckpunkten $\bar{B}_2(A'_0, A'_1, \ldots, A'_\nu)$. Die Lösung x*' führt zum Eckpunkt $A'_{k'} (1 \leq k' \leq \nu')$, in dem das Spiel wieder unterbrochen wird. Aufgrund der neuen Informationen erfolgt erneut eine Adaption, indem statt des Unterbaumes $\bar{B}_2(A'_{k'})$ ein neuer Baum $\bar{B}_3$ berücksichtigt wird, usw.

Die Frage, auf welche Weise in dem beschriebenen Adaptionsprozeß Informationsgewinne stattfinden, wollen wir hier nur kurz streifen. Es kann möglich sein, daß die Erreichung eines Eckpunktes im Entscheidungsbaum von sich aus zu einer neuen Auffassung des weiteren Verlaufs des Baumes führt.

In anderen Fällen führt ein Stichprobenverfahren mit eventuellen Stichprobenkosten zu Änderungen im Baum und zu entsprechenden Adaptionen. Im allgemeinen muß eine Sequential-Analyse mit entsprechenden Fortsetzungs- und Terminal-Entscheidungen durchgeführt werden [Morgan 1968]. Dabei ist der Begriff des dynamischen Informationswertes für den Begriff des Wertes eines Adaptionsprozesses ausschlaggebend.

Aufgrund des Max E_{min} -Prinzips kommt man zu diesem Begriff auf folgende Weise: Dem ursprünglichen Baum B_1 entpricht der Wert der Entscheidungssituation $V(B_1)$. Im Adaptionsprozeß kommt es zu einer Informationsänderung $I^{(1)} \to I^{(2)}$. Ihr entspricht der Übergang zum neuen Baum $B_1 \to B_2$ und zum neuen Wert $V(B_1) \to V(B_2)$. Dabei kann auch die Kostenfunktion dieses Übergangs $K(I^{(1)} \to I^{(2)})$ berücksichtigt werden.

Wir definieren den Wert des Adaptionsprozesses beim Übergang $I^{(1)} \to I^{(2)}$ ähnlich wie den dynamischen Informationswert als den entsprechenden Zuwachs des Wertes der Entscheidungssituation:

$$(44.1) \quad VAP\,(I^{(1)} \to I^{(2)}) = V(B_2) - V(B_1).$$

Bei Einbeziehen der Kosten erhalten wir den Wert netto:

$$(44.2) \quad \overline{VAP}(I^{(1)} \to I^{(2)}) = V(B_2) - V(B_1) - K(I^{(1)} \to I^{(2)}).$$

Hier ist bemerkenswert, daß ohne die Anwendung des Max E_{min}-Prinzips sich die Begriffe des Informationswertes und des Wertes des Adaptionsprozesses nur auf Risikosituationen beschränken.

Die aufgrund des Max E_{min} -Prinzips durchgeführten Adaptionsprozesse können ohne Schwierigkeiten auf mehrstufige nicht kooperative n-Personen-Entscheidungen unter LPI-Bedingungen erweitert werden.

Im Gebiet der Adaptionsprozesse in mehrstufigen Entscheidungen gibt es viele Probleme. Eines von ihnen, das in der Praxis eine wesentliche Bedeutung hat, ist das Problem der Optimierung der Adaptionsprozesse im Bereich der zulässigen Adaptionszeitpunkte. Ohne Berücksichtigung der Kosten ist die Lösung des Problems offensichtlich: Der Wert des Adaptionsprozesses erreicht im allgemeinen sein Maximum bei maximaler Anzahl möglicher Adaptionspunkte. Das Problem kompliziert sich, wenn Informationskostenfunktionen vorliegen und die mehrstufige Entscheidungssituation mit nur teilweise bekannten Verteilungen der

Zustände verbunden ist. Im Rahmen dieser Arbeit kann das Problem jedoch nicht behandelt werden.

Eine wesentliche Anwendung finden die angesprochenen Adaptionsprozesse in der Planungstheorie. Jeder Plan kann als mehrstufige Entscheidung unter Ungewißheit betrachtet werden. Die Erörterung verschiedener Fragen wie der Elastizität des Planes, seiner Stufenkorrektur, optimaler Adaptionsprozesse (z.B. Bestimmung der optimalen Adaptionspunkte) etc. kann bei teilweise bekannten Verteilungen der Zustände nur aufgrund des Max E_{min} -Prinzips durchgeführt werden.

§ 45. Die LPI-Entropie und der Grad der stochastischen Unbestimmtheit des Entscheidungswertes in mehrstufigen LPI-Entscheidungen

Im § 23 wurde der Begriff der LPI-Unbestimmtheit bezüglich der Verteilung der Zustände eingeführt. Der LPI über die Verteilung der Zustände $Z_1, \ldots, Z_\nu$ wurde die LPI-Entropie

$$(45.1) \qquad H^{(\nu)}(LPI) = \mathrm{Vol}\ P^{(\nu)}$$

zugeordnet. Die LPI-Entropie ist das Volumen (im ν - dimensionalen Raum) des der LPI entsprechenden konvexen Polyeders. Die relative LPI-Entropie ist, gemäß (23.3)

$$(45.2) \qquad H^{(\nu)}_{rel}(LPI) = \frac{\mathrm{Vol}\ P^{(\nu)}}{\mathrm{Vol}\ S^{(\nu)}} \quad ,$$

wobei der Nenner der maximalen Entropie entspricht und dem Volumen des ν - dimensionalen Verteilungssimplexes gleich ist.

Unter Berücksichtigung der Formel (23.6) erhalten wir

$$(45.3) \quad H^{(\nu)}_{rel}\,(LPI) = \frac{(\nu-1)!}{\sqrt{\nu}}\ \mathrm{Vol}\ P^{(\nu)}\ ,\ \nu > 1\ .$$

Auf analoge Weise wollen wir die LPI-Entropie in mehrstufigen LPI-Entscheidungen bestimmen. Wir beschränken uns dabei, wie in (39.2), auf einen Entscheidungsträger und einen Zufallsspieler. Da es sich um die LPI-Unbestimmtheit bezüglich der Verteilung der Zustände handelt, müssen die betrachteten mehrstufigen Entscheidungen in der Normalform analysiert werden. Ähnlich wie in (40.1) sei vorausgesetzt, daß über die Verteilungen der Zufallsvarianten nur LPI ($LPI(\rho_1), \ldots, LPI(\rho_k)$) vorliegen und diesen Verteilungen unabhängige Zufallsvariablen $Z_1, \ldots, Z_k$ zugeordnet sind. Der Übergang zur neuen Zustandsmenge $\{\theta^{(j)}\}$ führt zur Normalform

$$(40.1) \quad [\{x_i\}\ ;\ \{\theta^{(j)}\};\ LPI(\rho);\ [u_{ij}]].$$

Darin ist $LPI(\rho)$ die lineare partielle Information über die Verteilungen der Zustandsmenge $\{\theta^{(j)}\}$. Sie resultiert aus den gegebenen $LPI(\rho_1), \ldots, LPI(\rho_k)$. Sei N die Anzahl der neuen Zustände. Dann ist die LPI-Entropie $H^{(N)}_{(LPI(\rho))} = \mathrm{Vol}\ P^{(N)}$. Die relative LPI-Entropie ist

$$H^{(N)}_{rel}\ (LPI(\rho)) = \frac{\mathrm{Vol}\ P^{(N)}}{\mathrm{Vol}\ S^{(N)}} \quad \text{oder} \quad H^{(N)}_{rel}\ (LPI(\rho)) = \frac{(N-1)!}{\sqrt{N}}\ \mathrm{Vol}\ P^{(N)}.$$

Dasselbe Verfahren kann angewendet werden, wenn sowohl für die Zufallsalternativen als auch für gewisse Auszahlungsalternativen LPI vorliegen (vgl. § 42). Wieder entspricht die neue Zustandsmenge $\{\bar{\theta}^{(i)}\}$ den möglichen Zuständen des Zufallsvektors $\bar{Z} = (Z_1, \ldots, Z_{\alpha_\lambda})$ und es ergibt sich die Normalform: $[\ \{x_i\}\ ;\ \{\bar{\theta}^{(i)}\}\ ;\ LPI(\rho[p^{(j)}]);\ [\bar{u}_{ij}]]$.

Sei $\bar{N}$ die Anzahl der Zustände $\{\bar{\mathfrak{s}}^{(j)}\}$. Dann erhalten wir die LPI-Entropie und die relative Entropie aus den Formeln (45.1), (45.2) und (45.3), indem wir $\nu = \bar{N}$ setzen.

Man könnte hier zwei Extremal-Fälle berücksichtigen. Für mehrstufige Spiele gegen die Natur ist die relative LPI-Entropie: a) bei vollständiger Ignoranz über die Verteilungen der Zufallsalternativen gleich Eins; b) bei bekannten Verteilungen der Zufallsalternativen gleich Null. Für alle anderen Fälle ist die relative LPI-Entropie eine Zahl aus dem offenen Intervall (0,1).
In § 38. führten wir den Begriff des Grades $G^{(k)}$ der stochastischen Unbestimmtheit des Entscheidungswertes (SUE) ein. Wir bewiesen einige Sätze über $G^{(k)}$ in verschiedenen Entscheidungssituationen. Nun wollen wir ergänzend zwei Sätze über den Grad $G^{(k)}$ der stochastischen Unbestimmtheit des Entscheidungswertes (SUE) in mehrstufigen Spielen gegen die Natur beweisen.

<u>Voraussetzungen (45.4)</u>:

Im mehrstufigen Spiel gegen die Natur (39.2) gibt es δ Zufallszüge mit Zufallsalternativen-Zahlen $\mu_1, \dots, \mu_\delta$.
Sie entsprechen unabhängigen Zufallsvariablen $Z_1, \dots, Z_\delta$. Über die Verteilungen der Zufallsalternativen liegen lineare partielle Informationen $LPI(\rho_1), \dots, LPI(\rho_\delta)$ vor. Dann gilt folgender

<u>Satz 45.1</u>:

<u>Unter den Voraussetzungen (45.4) gilt für den Grad $G^{(k)}$ der stochastischen Unbestimmtheit des Entscheidungswertes in der betrachteten mehrstufigen Entscheidungssituation $k = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_\delta$.</u>

Beweis:

Aufgrund von (40.1) besitzt die betrachtete mehrstufige Entscheidungssituation einen eindeutigen Entscheidungswert $V(x^*)$. Durch Einführung einer neuen Zustandsmenge $\{\theta^{(j)}\}$, der Menge aller möglichen Zustände des diskreten Zufallsvektors $Z = (Z_1, \ldots, Z_\delta)$, wird die mehrstufige Entscheidung in die Normalform

$$(45.5) \qquad [\{x_i\};\ \{\theta^{(j)}\};\ LPI(\rho);\ [u_{ij}]]$$

übergeführt. Darin bedeutet $LPI(\rho)$ die resultierende LPI bezüglich der Verteilung der Zustände $\{\theta^{(j)}\}$. Die Anzahl dieser Zustände ist offensichtlich $\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_\delta = k$.

Da (45.5) eine gewöhnliche einstufige LPI-Entscheidung ist, kann Satz 38.1 angewendet werden. Daraus folgt unmittelbar der Satz 45.1.

Aufgrund der Definition 38.1 des Grades der stochastischen Unbestimmtheit des Entscheidungswertes könnte man Satz 45.1 auf folgende Weise interpretieren: Der Grad der stochastischen Unbestimmtheit der Realisation des Entscheidungswertes in mehrstufigen Entscheidungen (39.2) unter den Voraussetzungen (45.4) ist dem Grad der SUE in einer Risikosituation bei $k = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_\delta$ Zuständen äquivalent. Daraus ergibt sich der große Einfluß der Mehrstufigkeit in Entscheidungen auf die Erhöhung des Grades der SUE. In einstufigen Entscheidungen hat die Erhöhung einen additiven, in mehrstufigen einen multiplikativen Charakter. Es ist selbstverständlich, daß der Grad der SUE in mehrstufigen Entscheidungen bei zusätzlichen Unbestimmtheiten bezüglich der Auszahlungen eine weitere Erhöhung erfährt. Wir machen folgende Voraussetzungen

(45.6): Im mehrstufigen Spiel gegen die Natur (39.2) gibt es

Zufallszüge mit den entsprechenden Zahlen von Zufallsalternativen $\mu_1, \ldots, \mu_\delta$ und mit λ Endpunkten des Entscheidungsbaumes mit entsprechenden Zahlen von Auszahlungsalternativen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\lambda$. Alle entsprechenden Zufallsvariablen $\dot{Z}_1, \ldots, Z_\delta; Z_{\delta+1}, \ldots, Z_{\delta+\lambda}$ sind unabhängig. Für die Verteilungen $\rho_1, \ldots, \rho_\delta, \rho_{\delta+1}, \ldots, \rho_{\delta+\lambda}$ liegen LPI $\mathrm{LPI}(\rho_1), \ldots, \mathrm{LPI}(\rho_\delta), \mathrm{LPI}(\rho_{\delta+1}), \ldots, \mathrm{LPI}(\rho_{\delta+\lambda})$ vor.

Dann gilt folgender Satz:

Satz 45.2:

Unter den Voraussetzungen 45.6 gilt für den Grad $G^{(k)}$ der SUE in der betrachteten mehrstufigen Entscheidungssituation $k = \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_\delta \cdot \nu_1 \cdot \ldots \cdot \nu_\lambda$.

Der Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus der Anwendung des Satzes 38.1 in der entsprechenden Normalform der betrachteten mehrstufigen Entscheidungssituation

(45.7) $\quad [\{x_i\} ; \{\bar{\theta}^{(j)}\}; \mathrm{LPI}(\hat{\rho}); [\bar{u}_{ij}]]$.

Darin ist $\mathrm{LPI}(\hat{\rho})$ wieder die aus den komponenten $\mathrm{LPI}(\rho_1), \ldots, \mathrm{LPI}(\rho_{\delta+\lambda})$ resultierende LPI bezüglich der Verteilung der Zustände $\{\bar{\theta}^{(j)}\}$. Die Anzahl der Zustände ist offensichtlich $k = \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_\delta \cdot \nu_1 \cdot \ldots \cdot \nu_\lambda$.

Es ist bemerkenswert, daß aus
$\mu_1 = \ldots = \mu_\delta = \nu_1 = \ldots = \nu_\lambda = 1$
$k = 1$ folgt, in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß dann eine deterministische mehrstufige Entscheidung vorliegt mit dem Grad $G^{(1)}$ der SUE.

Beispiel:

Im Entscheidungsbaum (40.2) mit den zusätzlichen LPI-Unbestimmtheiten für die Auszahlungen ist gemäß den Berechnungen (S.268) der Entscheidungswert $V(x^*) = 2^1/_2$.
Wie hoch ist der Grad $G^{(k)}$ der SUE?
Die Antwort ist einfach. Man kann hier annehmen, daß
$\mu_1 = \mu_2 = 2$; $\nu_1 = \nu_2 = 2$. Nach Satz 45.3 gilt
$k = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \nu_1 \cdot \nu_2 = 16$.
Die optimale Strategie x^* gewährleistet also den Nutzenerwartungswert $V(x^*) = 2^1/_2$ mit dem Grad $G^{(16)}$ der SUE.

Das Problem der Grade der SUE für mehrstufige nicht kooperative n-Personen-Spiele gegen die Natur ist komplizierter und kann hier nicht betrachtet werden.

Die Bestimmung der Grade der SUE hat für mehrstufige Entscheidungen, ähnlich wie für einstufige, eine wesentliche Bedeutung. Probleme der Sensitivitätsanalyse, des dynamischen Informationswertes und des Wertes eines Adaptionsprozesses müssten eigentlich bei präziserer Auffassung die entsprechenden Grade der SUE einbeziehen.

§ 46. Weitere LPI-Betrachtungen in mehrstufigen Entscheidungen

Zum Abschluß des 7. Kapitels wollen wir Anwendungsmöglichkeiten anderer LPI-Betrachtungen in mehrstufigen Entscheidungsmodellen andeuten.

1) In den im § 44 eingeführten Adaptionsprozessen können die Informationsänderungen im Entscheidungsbaum aufgrund entsprechender Stichprobenverfahren und mit ihnen verbundener statistischer Inferenzen (z.B. Konfidenzintervalle)

realisiert werden. Im allgemeinen müssen Adaptionsprozesse mit einer entsprechenden Sequential-Analyse verbunden werden (siehe Fußnote auf S.152).

2) Die Anwendungsmöglichkeiten der behandelten mehrstufigen LPI-Modelle in der Praxis werden erheblich groß, wenn als Auszahlungen in den Endpunkten des Entscheidungsbaumes Situationen eingeführt werden. Die Annahme entsprechender Nutzenaxiomen-Systeme ermöglicht den Übergang von Situationen zu Nutzenauszahlungen.

3) Ähnlich wie im § 34 kann man auch in mehrstufigen LPI-Entscheidungen die modifizierten Hurwicz- und Hodges-Lehmann-Lösungsprinzipien einführen.

4) Die im § 35 betrachteten Simulationsverfahren können auch in mehrstufigen LPI-Entscheidungen angewendet werden.

5) Der im § 43 eingeführte Begriff des dynamischen Informationswertes kann, ähnlich wie im § 21 , als A-priori- bzw. A-posteriori-Information aufgrund des Bayesschen Verfahrens analysiert werden.

6) Im § 24 wurden in den betrachteten LPI-Modellen stetige Verteilungen mit diskreten variablen Parametern eingeführt. Man kann sie auch in mehrstufigen Entscheidungen einführen.

7) In allen betrachteten mehrstufigen LPI-Modellen können auch LPI mit abgeschlossenen konvexen Polyedern berücksichtigt werden.

8) Durch Einführung entsprechender bedingter Wahrscheinlichkeiten kann die Annahme der Unabhängigkeit der in den LPI-Erörterungen eingeführten Zufallsvariablen gelockert werden.

8. Kapitel: Stochastische Programmierung unter LPI-Bedingungen

§ 47. Übersicht, Einführung

Die Fachliteratur, die den Problemen der stochastischen Programmierung gewidmet ist, ist besonders im Bereich der linearen Programmierung sehr umfangreich. Leider nicht für den Fall stochastischer Modelle, in denen die Verteilung gewisser Zufallsvariablen nur teilweise bekannt ist. Nur wenige Arbeiten sind diesen in der Praxis so wichtigen Problemen gewidmet.

In diesem Kapitel werden einige dieser Probleme behandelt. Dabei beschränken wir uns auf solche, in denen die Ungewißheit über die entsprechenden Zufallsvariablen zu LPI-Bedingungen führen. Die Anwendung des Maximierungsprinzips des minimalen Nutzenerwartungswertes (Max E_{min}) ist dann algorithmisch besonders einfach und führt zu Ergebnissen, die nicht nur theoretisch, sondern auch für die Praxis interessant sind. Einfachheitshalber beschränken wir uns auf diskrete Verteilungen. Der lineare Fall der teilweise bekannten Verteilung führt auf relativ einfache Weise zum Begriff des Wertes des entsprechenden stochastischen Programms, der als Ausgangspunkt für Sensitivitätsanalysen und für Informationswert-Betrachtungen dient.

Nach relativ umfangreicher Diskussion des Modells der stochastischen linearen Programmierung (§ 47 - § 51) folgt eine kurze Betrachtung der stochastischen nichtlinearen (§ 52) und der dynamischen Programmierung (§ 53) unter LPI-Bedingungen. Auch die Anwendungsmöglichkeit des Max E_{min} -Prinzips in stochastischen Spielen wird erörtert (§ 55).

Im § 57 werden LPI in Markoffschen Ketten erörtert.

Sensitivitätsanalytische Untersuchungen und die Bestimmung von Informationswerten in stochastischen Programmen unter LPI-Bedingungen sind Inhalt des § 56. Im § 57 wird der Grad der stochastischen Unbestimmtheit des Entscheidungswertes (SUE) für die behandelten Programme unter LPI-Bedingungen bestimmt, Eine kurze Übersicht über weitere mögliche LPI-Probleme in der stochastischen Programmierung erfolgt im § 58.

Ein stochastisches lineares Programm (SLP) liegt vor, wenn im linearen Programm

$$(47.1) \qquad Ax \leq b, \; x \geq 0, \quad z_1 = c'x = \max;$$

$$(A : n \cdot m; \; b : n \cdot 1; \; c : m \cdot 1; \; x : m \cdot 1)$$

mindestens eine der in A, b, c enthaltenen Komponenten eine Zufallsvariable ist. Die Verteilung der Zufallsvariablen kann bekannt, teilweise bekannt oder unbekannt sein. Die Fachliteratur, die dem Fall der bekannten Verteilung gewidmet ist, ist sehr umfangreich, z.B. [Madansky 1962, Garsika, Rutenberg 1973]. Eine kurze Besprechung mit fast vollständiger Angabe der bisher erschienenen Literatur findet man in [Tintner, Sengupta 1972]. Der Umfang der Arbeiten in dem Fall der nur teilweise bekannten Verteilung ist um vieles bescheidener, z.B. [Shapley 1953]. In diesem Kapitel wollen wir SLP unter LPI-Bedingungen analysieren. Es muß also als Lösungsprinzip das Max E_{min}-Prinzip angewendet werden.

§ 48. Vektor c als Zufallsvariable. Die Entscheidung erfolgt nach der Zufallsrealisation.

In diesem Paragraphen sei vorausgesetzt, daß c ein Zufallsvektor ist mit der Menge $\{c\} = \{c^{(1)},\dots, c^{(\nu)}\}$ und der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho = (p_1,\dots, p_\nu)$, also:

$$(48.1)\quad P(c = c^{(\alpha)}) = p_\alpha \ ; \ \alpha = 1,\dots, \nu .$$

(48.1) besagt, daß c den Zustand $c^{(\alpha)}$ mit Wahrscheinlichkeit p_α annimmt.

Daraus ergibt sich folgendes Programm:

$$(48.2)\quad Ax \leq b,\ x \geq 0,\ z_1^{(\alpha)} = c^{(\alpha)\prime}x = \max \ , \quad \text{bei}$$
$$P(c^{(\alpha)}) = p_\alpha \ ; \ \alpha = 1,\dots, \nu ; \quad \rho = (p_1,\dots, p_\nu).$$

Wir unterscheiden zwei mögliche Fälle:

a) Die Realisation des Zufallsvektors erfolgt vor dem Festlegen der Entscheidungsvariablen $(Z \succ E)$.

b) Das Festlegen der Entscheidungsvariablen erfolgt vor Realisation des Zufallsvektors $(E \succ Z)$.

Bei vollständiger Information über die Verteilung ρ ist der Fall $Z \succ E$ einfach. Der Übergang zum Dual von (48.2) führt zu

$$(48.3)\quad A'y \geq c^{(\alpha)},\ y \geq 0,\ z_2^{(\alpha)} = b'y = \min; \ \alpha = 1,\dots, \nu .$$

Wegen (48.1) verändert sich der Bereich der zulässigen Programme bei unveränderter Zielfunktion stochastisch. Mit Wahrscheinlichkeit p_α bestimmt $A'y \geq c^{(\alpha)}$

den zulässigen Bereich $(\alpha = 1,\dots, \nu)$.

Wir setzen voraus, daß für $\alpha = 1,\dots,\nu$ beide Programme zulässig sind. Dann existieren nach dem Dualitätssatz optimale Lösungen und es gilt für die entsprechenden Werte der Programme

$$(48.4)\quad V_1^{(\alpha)} = \max z_1^{(\alpha)} = V_2^{(\alpha)} = \min z_2^{(\alpha)};\ \alpha = 1,\dots,\nu .$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung des Erwartungswertes

Satz 48.1:

Die Werte der zueinander dualen Programme (48.2) und (48.3) sind bei bekannter Verteilung $\rho = (p_1,\dots, p_\nu)$ unter der Voraussetzung $Z > E$ gleich:

$$V = \sum_{\alpha=1}^{\nu} p_\alpha \max z_1^{(\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} p_\alpha \min z_2^{(\alpha)} .$$

Nun zum LPI-Fall: In (48.2) ist nur eine LPI (ρ) bekannt. In diesem Fall ist Satz 48.1 im allgemeinen falsch.

Aufgrund der Voraussetzung $Z > E$ gibt es keine Schwierigkeiten bei der Dualisierung in einzelnen Fällen (48.3). Unter den üblichen Voraussetzungen gilt wieder der Dualitätssatz. Sei $\{K_r\}$ die der LPI (ρ) entsprechende Extremalpunkte-Menge mit den Verteilungen
$\rho^{(r)} = (p_1^{(r)},\dots, p_\nu^{(r)})\,;\ r = 1,\dots,s$.

Dann gilt aufgrund des Max E_{min} -Prinzips

Satz 48.2:

Der Wert des primären Programms (48.2) unter LPI-Bedingungen ist

$$V_1 = \min_r \sum_{\alpha=1}^{\nu} p_\alpha^{(r)} V_1^{(\alpha)} ,$$

der des dualen

$$V_2 = \max_r \sum_{\alpha=1}^{\nu} p_\alpha^{(r)} V_2^{(\alpha)} .$$

Der Beweis folgt aus der Tatsache, daß nach dem Max E_{min}-Prinzip im primären Programm nur der minimale Erwartungswert der entsprechenden Maxima - und im dualen Programm der maximale Erwartungswert der entsprechenden Minima gesichert ist. Wegen der Linearität genügt es, im Bereich der extremalen Verteilungen zu maximieren bzw. zu minimieren.

Interessant ist die spieltheoretische Interpretation des Falles $Z > E$. Das Spiel muß in extensiver Form betrachtet werden (ein Zweizüger) und läßt sich mittels eines zweistufigen Entscheidungsbaumes darstellen. Gemäß den Voraussetzungen gibt es zwei Spieler (der erste Zug gehört dem Zufallsspieler), der Baum ist endlich, aber die Information bezüglich der Verteilung der Zufallsalternativen ist wegen der LPI (ρ) nicht vollständig. Das Max E_{min} -Prinzip führt wieder zur Lösung des Satzes 48.2.

Im stochastischen Programm (48.2) unter LPI-Bedingungen wurde eine LPI für die Verteilung ρ über den möglichen Vektoren $c^{(\alpha)}$; $\alpha = 1, \ldots, \nu$, vorausgesetzt. In der Praxis liegen oft gewisse Unbestimmtheiten bezüglich der einzelnen Komponenten des Vektors $c = (c_1, \ldots, c_m)$ vor.

Voraussetzungen (48.5):

Im SLP (47.1) sind die Komponenten $c_{\beta_1}, \ldots, c_{\beta_\tau}$ des Vektors $c = (c_1, \ldots, c_m)$ Zufallsvariablen mit entsprechenden endlichen Wertmengen $\{c_{\beta_1}\}, \ldots, \{c_{\beta_\tau}\}$ und den Verteilungen $\rho_{\beta_1}, \ldots, \rho_{\beta_\tau}$. Über diesen Verteilungen liegen nur

$LPI(\rho_{\beta_1}),\ldots, LPI(\rho_{\beta_T})$ vor. Die Zufallsvariablen

$c_{\beta_1},\ldots, c_{\beta_T}$ werden als unabhängig betrachtet.

Dann gilt

Satz 48.3:

Unter den Voraussetzungen (48.5) ist das SLP-Modell (47.1) in das Modell (48.2) unter LPI-Bedingungen überführbar und unter der Annahme $Z \succ E$ gilt entsprechend der Satz 48.2.

Beweis:

Wir bilden den Zufallsvektor $Z = (c_{\beta_1},\ldots, c_{\beta_T})$. Über die Verteilung $\hat{\rho}$ der diskreten Menge $\{\theta^{(j)}\}$ aller möglichen Zustände von Z liegt aufgrund des Satzes 20.1 eine $LPI(\hat{\rho})$ vor. Jedem Zustand $\theta^{(j)}$ entspricht eindeutig ein entsprechender Vektor $\hat{c} = (\hat{c}_1,\ldots, \hat{c}_m)$. Die $LPI(\hat{\rho})$ betrifft eben die Menge $\{\hat{c}\}$. Wir erhalten also den Fall (48.2) unter LPI-Bedingungen, w.z.b.w.
Es sei noch bemerkt, daß auch in unseren weiteren Betrachtungen der LPI-Fall für Komponenten eines Zufallsvektors als äquivalent mit dem LPI-Fall für den Zufallsvektor angesehen wird.

§ 49. Im SLP (48.2) mit LPI-Bedingungen für c folgt die Zufallsrealisation nach dem Entscheid $(E \succ Z)$.

Gewöhnlich ist die Fachliteratur nur auf diesen Fall beschränkt, obwohl auch der Fall $Z \succ E$ eine wesentliche Bedeutung in der Praxis haben kann, besonders bei Vorliegen einer LPI. Im weiteren sei immer vorausgesetzt, daß $E \succ Z$. Wir beginnen wieder mit der bekannten Verteilung ρ im primären Programm (48.2). Dieser Fall ist einfach. Der Wert des Programms läßt sich dadurch bestimmen, daß als Zielfunktion der Erwartungswert der ν Zielfunktionen betrachtet wird:

$$(49.1) \qquad E(z_1^{(\alpha)}) = \sum_{\alpha=1}^{\nu} p_\alpha \, c^{(\alpha)\prime} \, x.$$

Es wird also unter den üblichen Voraussetzungen im Bereich der Extremalpunkte-Menge $\{\bar{x}\}$ maximiert:

$$(49.2) \qquad V' = \max_{\{\bar{x}\}} \sum_{\alpha=1}^{\nu} p_\alpha \, c^{(\alpha)\prime} \, x.$$

Es ist plausibel, daß im Vergleich mit dem Wert des Programms im Satz 48.1 folgende Ungleichung gilt:

$$(49.3) \qquad V = \sum_{\alpha=1}^{\nu} p_\alpha \max z_1^{(\alpha)} \geq V' = \max_{\{\bar{x}\}} \sum_{\alpha=1}^{\nu} p_\alpha \, c^{(\alpha)\prime} \, x.$$

Sie folgt aus der Tatsache, daß im Falle des Satzes 48.1 sich der Entscheidungsträger, der seine Strategienwahl erst nach dem Zug der Natur trifft, im allgemeinen in einer günstigeren Lage befindet als in (49.3).

Nun aber zum LPI-Fall:

Sei die der LPI zugeordnete Extremalpunkte-Matrix $[T^{(\nu)}]$ und die Extremalpunkte-Menge des unveränderlichen Bereichs der zulässigen Programme $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_\mu\}$. Die Zielfunktionswerte-Matrix $[z_{ij}]$; $i = 1,\ldots,\mu$; $j = 1,\ldots,\nu$ bilden wir auf die Weise, daß wir in $z_1^{(\alpha)} = c^{(\alpha)'}x$ alle Extremalpunkte $\bar{x} \in \{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_\mu\}$ und alle Werte von $c \in \{c^{(1)},\ldots,c^{(\nu)}\}$ berücksichtigen. Es läßt sich folgender Satz beweisen:

Satz 49.1:

Die Lösung des SLP (48.2) unter LPI-Bedingungen für die Zufallsvariable c ist aufgrund des Max E_{min} -Prinzips mit der Lösung für Spieler I des Zweipersonen-Nullsummenspiels mit der Spielmatrix

$$(49.4) \qquad [M]_{\mu x s} = [z_{ij}]_{\mu x \nu} \cdot [T^{(\nu)}]_{\nu x s}$$

im Bereich der gemischten Strategien äquivalent.

Der Beweis stützt sich auf Satz 27.1, auf den Fall (49.1) und auf folgende Überlegung: Bekanntlich kann man jedes nicht extremale zulässige Programm x als konvexe Linearkombination der Extremalpunkte betrachten. Also:

$$(49.5) \qquad \forall x \quad \exists \{\lambda_i\}, \; \lambda_i \geq 0, \; \Sigma \lambda_i = 1 : x = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \bar{x}_i.$$

Daraus erhalten wir

$$(49.6) \qquad \forall \alpha \quad c^{(\alpha)'}x = c^{(\alpha)'} \cdot \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i c^{(\alpha)'} \bar{x}_i.$$

Das aber bedeutet, daß $(\lambda_1,\ldots,\lambda_\mu)$ eine gemischte Strategie im Spiel (49.4) ist. Es genügt also, dieses Spiel im Bereich der gemischten Strategien unter Berücksichtigung nur der Extremalpunkte vom Standpunkt des Spielers I aus zu lösen. Satz 49.1 führt zu interessanten Folgerungen:

1) Da im allgemeinen die optimale Strategie in (49.4) eine gemischte Strategie ist und als Umkehrung von (49.6) auf diese Weise ein zulässiges Programm entsteht (es muß nicht extremal sein!), schließen wir, daß, im Gegensatz zu einem SLP mit bekannter Verteilung der $c^{(\alpha)}$, im Fall einer LPI das optimale Programm sich nicht in einem Extremalpunkt befinden muß!

2) Im Gegensatz zum allgemeinen Modell der Entscheidung unter LPI-Bedingungen ist hier der Wert des Programms in (49.3) deterministisch erreichbar. Erst wenn die LPI aufgrund statistischer Inferenzen mit Konfidenzzahlen verbunden ist, kann der Wert des Programms nur stochastisch erreichbar sein (vgl. Fußnote auf S.152).

Beispiel:

Folgendes SLP unter LPI-Bedingungen für die Koeffizienten der Zielfunktion sei zu lösen:

$$(49.7)\quad \begin{cases} x_1 + 2\,x_2 \leq 2 \\ 2\,x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases} \qquad E \succ Z$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

$$\left.\begin{cases} z^{(1)} = 2\,x_1 + 3\,x_2 \\ z^{(2)} = 3\,x_1 + x_2 \end{cases}\right\} = \max! \qquad P(z^{(1)}) \leq P(z^{(2)}).$$

Die letzte Ungleichung beschreibt die LPI-Bedingung für die Zielfunktion: Die Zielfunktion ist eher $z^{(2)}$ als $z^{(1)}$.

In der Symbolik von (48.2) haben wir in (49.7) folgende Daten

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \; ; \; b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \; c^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \; ; \; c^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$z_1^{(\alpha)} = c^{(\alpha)'}x = \max!; \; \alpha = 1, 2.$$

$$P(c^{(1)}) = p_1; \; P(c^{(2)}) = p_2; \; \rho = (p_1, p_2).$$

$$LPI(\rho) : p_1 \le p_2.$$

Wir wenden Satz 49.1 an.
Die Extremalpunkte-Menge des Bereiches der zulässigen Programme ist hier leicht zu bestimmen:

$$\left\{ \bar{x}_1 = (0,0); \; \bar{x}_2 = (1,0); \; \bar{x}_3 = (0,1); \; \bar{x}_4 = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}) \right\}.$$

Die Extremalpunkte-Matrix für $LPI(\rho) : p_1 \le p_2$ ist:

$T^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Unter Berücksichtigung der Strategienmenge $\{ \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4 \}$ und der Zustandsmenge $\{c^{(1)}, c^{(2)}\}$ erhalten wir die Matrix der Zielfunktionswerte $[z_{ij}]$:

$$[z_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 3\frac{1}{3} & 2\frac{2}{3} \end{bmatrix};$$

Aus (49.4) bestimmen wir die Spielmatrix:

$$(49.8)\quad [M]_{\mu \times s} = [z_{ij}]_{\mu \times \nu} \cdot [T^{(\nu)}]_{\nu \times s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 3\frac{1}{3} & 2\frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2\frac{1}{2} \\ 1 & 2 \\ 2\frac{2}{3} & 3 \end{bmatrix} .$$

Zu diesem Spiel ist gemäß (49.3) die Strategienmenge des Spielers I die Menge $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$ der extremalen Programme und die Strategienmenge des Spieler II die Menge der Extremalverteilungen von LPI(ρ) : $p_1 \leq p_2$.

Jetzt muß das Maximin-Prinzip angewendet werden. Im Bereich der reinen Strategien ist $\bar{x}_4 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ die optimale Strategie. Sie gewährleistet den Wert $V(\bar{x}_4) = 2\frac{2}{3}$.

Da aber (49.8) kein strikt determiniertes Spiel ist, erfolgt eine Erweiterung des Spiels in den Bereich der gemischten Strategien. Da die Strategien $\bar{x}_1, \bar{x}_3$ dominiert sind, bleibt das Zweipersonen-Nullsummenspiel

$\begin{bmatrix} 3 & 2\frac{1}{2} \\ 2\frac{2}{3} & 3 \end{bmatrix}$ zu lösen.

Die optimale Strategie des Spielers I ist hier $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ und der Wert des Spiels $V(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}) = 2\frac{4}{5}$, also ein Zuwachs im Vergleich mit der reinen Strategie $\bar{x}_4$ um

$$V(\tfrac{2}{5}\,,\ \tfrac{3}{5}) - V(\tfrac{2}{3}\,,\ \tfrac{2}{3}) = 2\tfrac{4}{5} - 2\tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{15}\ .$$

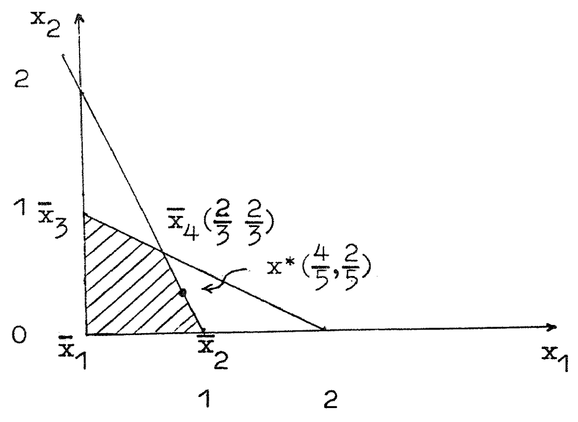
Interessant ist die Tatsache, daß der der gemischten Strategie $(\frac{2}{5}\ ,\ \frac{3}{5})$ entsprechende Wert des SLP (49.7) deterministisch (nicht stochastisch!) erreichbar ist.
Das folgt daraus, daß der optimalen gemischten Strategie $(\frac{2}{5}\,\bar{x}_2,\ \frac{3}{5}\,\bar{x}_4)$, gemäß der Umkehrung von (49.6) das zulässige Programm

$$x^* = \tfrac{2}{5}\ (1{,}0) + \tfrac{3}{5}\ (\tfrac{2}{3}\ ,\ \tfrac{2}{3}) = (\tfrac{4}{5}\ ,\ \tfrac{2}{5})$$

entspricht. Die optimale Lösung von (49.7) ist $x_1 = \frac{4}{5}$, $x_2 = \frac{2}{5}$. Dieses Programm gewährleistet den Programmwert $z^{(1,2)}\ (\frac{4}{5}\ ,\ \frac{2}{5}) = 2\frac{4}{5}$.

Das SLP unter LPI-Bedingungen (49.7) ist gleichzeitig ein Beispiel dafür, daß die optimale Lösung kein Extremalpunkt des Bereiches der zulässigen Programme sein muß.
Der Punkt $x^*(\frac{4}{5}\ ,\ \frac{2}{5})$ ist zwar ein Randpunkt (Verbindungslinie der Ecken $\bar{x}_2$, $\bar{x}_4$), aber kein Extremalpunkt. Die Abbildung (49.9) veranschaulicht das:

(49.9)



Die Punktemenge des Vierecks $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$ ist die Menge der zulässigen Programme und x^* das optimale Programm. Es liegt nicht in einem Extremalpunkt der Menge! Satz (49.1) führt zu interessanten spieltheoretischen Schlüssen [Owen 1971]:

1) Da jedes SLP unter LPI-Bedingungen für die Verteilung der $c^{(\alpha)}$ in der Zielfunktion offensichtlich als unendliches Spiel $G[X, Y, M(x, y)]$ betrachtet werden kann mit konvexen Polyedern X, Y als Strategienmengen (X - Menge der zulässigen Programme, Y - Menge der möglichen Verteilungen über $\{c^{(\alpha)}\}$) und entsprechender Zielfunktion $M(x, y)$, kann man Satz (49.1) als Existenz-Satz optimaler reiner Strategien in solchen Spielen betrachten. Der spätere Satz (49.2) ergibt die Möglichkeit einer algorithmischen Bestimmung der Lösung durch die Simplex-Methode. Genauer formuliert, handelt es sich hier um folgendes: Im unendlichen Spiel $G[X, Y, M(x, y)]$ ist $X = \{x\}$ die Menge aller zulässigen Programme und $Y = \{y\}$ die Menge aller im LPI-Bereich möglichen Verteilungen y. Dann bleibt die Bestimmung der Auszahlungsfunktion $M(x, y)$. Gemäß dem Max E_{min} -Prinzip muß für jedes x zuerst der Auszahlungsvektor $[c^{(\alpha)'}x] = (c^{(1)'}x, \ldots, c^{(\nu)'}x)$ gebildet werden. Diese Vektoren als Zeilen betrachtet, bilden die unendliche Matrix $M_{\infty \times \nu}$.

Dann wird die unendliche Matrix $M_{\nu \times \infty}$ aller im LPI-Bereich möglichen Verteilungen y gebildet. Die Auszahlungsmatrix $M_{\infty \times \infty}(x, y)$ ist dann:

$$M_{\infty \times \infty}(x, y) = M_{\infty \times \nu} \cdot M_{\nu \times \infty} \quad .$$

Das Element in der x-ten Zeile und y-ten Spalte dieser unendlichen Matrix ist offensichtlich das Skalarprodukt

$$M(x,\ y) = ([c^{(\alpha)'}x],\ y)\ .$$

In diesem unendlichen Spiel muß im allgemeinen das Supremum-Infinimum-Prinzip angewendet werden. Satz (49.1) beweist, daß dieses Spiel in das endliche Spiel (49.4) überführbar ist und daß die optimale Strategie dem Bereich der reinen Strategien des unendlichen Spiels angehört, daß also die Lösung von

$$\sup_{X}\ \inf_{Y}\ ([c^{(\alpha)'}\ x],\ y)$$

mit der Lösung von (49.4) äquivalent ist.

2) Bekanntlich [Luce, Raiffa 1957] führen die beiden mit dem Vektor (A, b, c) verbundenen dualen Programme zur Lösung eines symmetrischen Zweipersonen-Nullsummenspiels mit folgender schiefsymmetrischen Spielmatrix M(A, b, c):

(49.10)

$$M(A,b,c) = \begin{array}{c|c|c|c}
 & w & x_1,\ldots,x_m & y_1,\ldots,y_n \\
\hline
w & 0 & -c' & b' \\
\hline
\begin{matrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{matrix} & c & [0] & -A \\
\hline
\begin{matrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{matrix} & -b & A' & [0] \\
\hline
\end{array}$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes 49.1 wird die Spielmatrix (49.10) stochastisch mit den stochastischen Elementen c, c', für die wir nun eine LPI kennen. Satz (49.1) zeigt uns eine Lösungsmethode für solche Spiele.

Wir beweisen folgenden Satz:

Satz 49.2:

Jedes SLP (47.1) unter LPI-Bedingungen für $c \in \{c^{(\alpha)}\}$ läßt sich in ein deterministisches lineares Programm überführen.

Beweis: 1) Gemäß (49.4) kann man das SLP in das Zweipersonen-Nullsummenspiel

$$[M]_{\mu \times s} = [z_{ij}]_{\mu \times \nu} \cdot [T^{(\nu)}]_{\nu \times s}$$

umwandeln.

2) Wenn die Spielmatrix $[M]_{\mu \times s} = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1s} \\ \vdots & & \\ m_{\mu 1} & \cdots & m_{\mu s} \end{bmatrix}$

nicht positive Elemente enthält, führt eine entsprechende lineare Transformation zur Spielmatrix

49.11 $$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} \bar{m}_{11} & \cdots & \bar{m}_{1s} \\ \vdots & & \\ \bar{m}_{\mu 1} & \cdots & \bar{m}_{\mu s} \end{bmatrix}$$

mit positiven Elementen.

3) Jetzt erfolgt der bekannte Übergang vom Spiel (49.11) zum deterministischen linearen Programm:

$$(49.12)\quad \begin{cases} w_1\bar{m}_{11} + \dots + w_s\bar{m}_{1s} & \leq 1 \\ \vdots & \vdots \\ w_1\bar{m}_{\mu 1} + \dots + w_s\bar{m}_{\mu s} & \leq 1 \end{cases}$$

$$w_1, \dots, w_s \geq 0$$

$$w_1 + \dots + w_s = \max!$$

Dieses LP kann mittels der Simplex-Methode gelöst werden. Beim Rückgang zum ursprünglichen SLP muß bei Bestimmung des Wertes des SLP die in 2) realisierte Transformation berücksichtigt werden.

§ 50. Zufallsvariablen in den Restriktionen. Der LPI-Fall

In der Literatur [z.B. Tintner 1972, Madansky 1962] wird gewöhnlich folgendes Modell analysiert:

$$(50.1)\quad \text{Prob}\,(b_i \geq a_i'x) \geq \mu_i\ ;\ 0 \leq \mu_i \leq 1;\ i = 1, \dots, m$$

$$x \geq 0;\ z = c'x = \max!$$

In diesem Modell (chance-constrained programming-CCP) sind die Realisationswahrscheinlichkeiten der einzelnen Restriktionen beschränkt. Das CCP-Modell wird in dem Aufsatz nicht behandelt, da ein unmittelbares Einsetzen des Max E_{min}-Prinzips wahrscheinlich nicht möglich ist. Wir wollen hier folgendes Modell betrachten:

$$(50.2)\quad Ax \leq b;\ b \in \{b^{(\alpha)}\} = \{b^{(1)}, \dots, b^{(\nu)}\};$$

$$\rho = (p_1, \dots, p_\nu);\ x \geq 0;\ z = c'x = \max\ .$$

Darin ist b ein diskreter Zufallsvektor mit den Zuständen $b^{(1)}, \ldots, b^{(\nu)}$. Die Verteilung ρ der Zustände kann bekannt oder nur teilweise bekannt sein (LPI (ρ)).
Die Schwierigkeiten dieses Modells sind größer als die des Modells mit c als Zufallsvektor, hauptsächlich deshalb, weil in (50.2) der Bereich der zulässigen Programme variabel ist. Unter spieltheoretischem Aspekt gibt es mit variablen Strategienmengen immer Schwierigkeiten.
Das eben ist der Grund, warum in (50.2) die Dualisierung des Modells, die ja den stochastischen Vektor in die Zielfunktion überträgt, nicht in Betracht kommt.
Man kann leicht an Gegenbeispielen zeigen, daß der Dualitätssatz hier im allgemeinen falsch ist. (Im Paragraphen 49 wurde bewiesen, daß für die Gültigkeit des Dualitätssatzes die vollständige Information über ρ und der Fall $Z \succ E$ hinreichend ist).

Es sei nun vorausgesetzt, daß im Modell (50.2) eine LPI über $\{b^{(\alpha)}\}$ vorliegt.

Zur Stabilisierung der Strategienmenge kann man ein dem in [Tintner, Sengupta 1972] ähnliches Verfahren anwenden, indem man eine Straffunktion (penalty function) für die Überschreitung der Gebiete der zulässigen Programme einführt. Eine derartige Überschreitung bedeutet, daß für gegebene α und i gilt:

$$(50.3) \qquad a_i'x > b_i^{(\alpha)}; \; \alpha = 1, \ldots, \nu; \; i = 1, \ldots, m .$$

Darin ist $a_i'x$ die linke Seite der i-ten Restriktion und $b_i^{(\alpha)}$ die i-te Komponente von $b^{(\alpha)}$. Sei $h_i^{(\alpha)}$ die "Strafe" für die Einheitsüberschreitung in (50.3).
Die gesamte Strafe ist dann $(a_i'x - b_i^{(\alpha)})\, h_i^{(\alpha)}$.

Das Modell (50.2) betrachten wir jetzt spieltheoretisch: Die den $b^{(\alpha)}$ entsprechenden Strategienmengen (Bereiche der zulässigen Programme) bezeichnen wir mit $X^{(\alpha)}$. Für die Menge $X = \sum_{\alpha=1}^{\nu} X^{(\alpha)}$ bestimmen wir ihre konvexe Hülle $\bar{X}$.

Das konvexe Polyeder $\bar{X} = \{x\}$ ist die Strategienmenge des Spielers I. Die Strategienmenge des Spielers II ist die Menge $\{b^{(\alpha)}\}$ möglicher Zustände des Zufallsvektors b. Dann ist die Auszahlungsfunktion $M(x, b^{(\alpha)})$:

$$M(x, b^{(\alpha)}) = c'x - \sum_i (a_i'x - b_i^{(\alpha)})\, h_i^{(\alpha)} \; . \tag{50.4}$$

In der Summe (die Summe der "Strafen") werden offensichtlich nur die i berücksichtigt, für die $a_i'x - b_i^{(\alpha)} > 0$.

Wir betrachten zwei Fälle:

1) Die Verteilung ρ in (50.2) sei bekannt. Diese Annahme führt zu einer Risikosituation in der Form eines unendlichen Spiels gegen die Natur:

$$[\bar{X};\ \{b^{(\alpha)}\}\ ;\ \rho;\ M(x, b^{(\alpha)})]. \tag{50.5}$$

Zu ihrer Lösung führt das Bernoulli-Prinzip. Sei der Erwartungswert der Auszahlung M bei der Verteilung ρ $E\,[M(x, b^{(\alpha)});\ \rho]$. Die Maximierung von E erfolgt im unendlichen Bereich $\bar{X}$ und wegen der möglichen Unstetigkeit von M muß das Maximum durch das Supremum ersetzt werden. Die optimale Strategie x^* und den Entscheidungswert erhält man also aus

$$\sup_{\bar{X}} E[M(x, b^{(\alpha)});\ \rho] = E[M(x^*, b^{(\alpha)});\ \rho].$$

2) In (50.2) ist nur eine LPI(ρ) gegeben, womit das Spiel

(50.6) $G[\bar{X}; \{b^{(\alpha)}\}; LPI(\rho); M(x, b^{(\alpha)})]$ vorliegt .

Sei $\{K_r\}$ die der LPI zugeordnete Exptremalpunkte-Menge. $\{K_r\} \to \{\rho^{(r)}\}$ sei die Abbildung der Menge $\{K_r\}$ in die Menge der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsvektoren $\{\rho^{(r)}\}$. Jedem $x \in \bar{X}$ kann ein ν-dimensionaler Auszahlungsvektor

(50.7) $\bar{x} = (M(x, b^{(1)}), \dots, M(x, b^{(\nu)}))$

zugeordnet werden.

Wir definieren folgendes unendliches Zweipersonen-Nullsummenspiel:

(50.8) $\Gamma(\bar{X}; \{\rho^{(r)}\}; \bar{M} = (\bar{x}, \rho^{(r)}))$.

Die Auszahlungsfunktion $\bar{M}$ ist hier das Skalarprodukt der Vektoren $\bar{x}$ und $\rho^{(r)}$, also der entsprechende Erwartungswert. Es gilt folgender

Satz 50.1 :

Die Lösung des SLP (50.6) mit LPI-Bedingungen über $\{b^{(\alpha)}\}$ ist mit der Lösung des Spiels (50.8) für Spieler I äquivalent.

Beweisskizze:

Die Anwendung des Maximin-Prinzips im Spiel (50.8) bedeutet, daß jeder Strategie $x \in \bar{X}$ der entsprechende minimale Erwartungswert im Spiel (50.6) zugeordnet wird. Es ist also ersichtlich, daß unter den angegebenen Voraussetzungen die

Lösung des SLP (50.6) aufgrund des Max E_{min}-Prinzips zur Lösung des Spiels Γ in (50.8) führt.

Im Spiel Γ ist die Strategienmenge $\bar{X}$ des Spielers I eine konvexe Menge, die des Spielers II eine endliche Menge. Die Auszahlungsfunktion kann, gemäß den Voraussetzungen, im allgemeinen nicht linear sein. Die effektive Bestimmung der allgemeinen Lösung ist hier unmöglich. Dagegen läßt sich unter gewissen Voraussetzungen eine approximative Lösung finden. Es genügt, eine Diskretisierung der Menge $\bar{X}$, also einen Übergang zu einer entsprechend "dichten" endlichen Menge, die als Approximation der Menge $\bar{X}$ gelten kann, durchzuführen. Die Diskretisierung ist realisierbar, wenn die Zielfunktion für jedes $\rho^{(r)}$ eine stetige Funktion von x ist.

Folgendes Verfahren wird angewendet. Es läßt sich immer eine endliche Menge $\{x\}$ von x so bestimmen, daß (mit der Abstandsfunktion $D(x, \hat{x})$) gilt

$$(50.9) \quad \forall\ x \in \bar{X} \quad \exists\ \hat{x} \in \{x\} : D(x, \hat{x}) < \delta(\epsilon).$$

Danach kann man also jeden Punkt in $\bar{X}$ im Bereich von $\{x\}$ beliebig annähern (D-Entfernung der Punkte). Aus (50.9) und der Stetigkeit der Zielfunktion $\bar{M}$ folgt für das unbekannte optimale x^*:

$$\exists\ \hat{x} \in \{x\} : \mid \bar{M}(\hat{x}, \rho^{(r)}) - \bar{M}(x^*, \rho^{(r)}) \mid < \epsilon ,$$

also eine ϵ -Approximation der Lösung. Der Prozeß der allmählichen Verdichtung der Menge $\{x\}$ führt also zu entsprechenden ϵ -Lösungen.

Eine andere Approximationsmethode stützt sich auf die Linearisierung der Zielfunktion. Auf Einzelheiten darüber kann hier aber nicht eingegangen werden.

§ 51. Der allgemeine Fall mit diskretem Zufallsvektor (A,b,c)

Im SLP

$A\,x \leq b,\; x \geq 0,\; z = c'x = \max$

sei $w = (A,b,c)$ ein diskreter Zufallsvektor:

(51.1) $w \in \{w^{(\alpha)}\} = \{A^{(\alpha)}, b^{(\alpha)}, c^{(\alpha)}\};\ \alpha = 1,\dots,\nu.$

Die Verteilung über $\{w^{(\alpha)}\}$ ist $\bar{p} = (\bar{p}_1,\dots,\bar{p}_\nu)$.

Jeder Änderung des Vektors w entsprechen gleichzeitige Änderungen in A, b und c. Das bedeutet, daß mit der Änderung des Bereichs der zulässigen Programme (verursacht durch A und b) im allgemeinen sich gleichzeitig die Zielfunktion ändert (verursacht durch c).

Das Problem (51.1) behandelt man wie im § 50. Jedem $w^{(\alpha)}$ entspricht eine Strategienmenge $X^{(\alpha)}$. Man bildet die Summe

$X = \sum_{\alpha=1}^{\nu} X^{(\alpha)}$ und bestimmt evtl. auch die konvexe Hülle $\bar{X}$.

Die Straffunktion wird auf analoge Weise eingeführt, allerdings muß die Überschreitungsbedingung (50.4) geändert werden:

(51.2) $a_i^{(\alpha)'} x > b_i^{(\alpha)}\ ;\ \alpha = 1,\dots,\nu;\ i=1,\dots,m.$

Hierin ist die Abhängigkeit der a_i von α berücksichtigt. Die Strategienmengen sind jetzt, analog zu § 50, $\bar{X}$ sowie $\{w^{(\alpha)}\}$. Die modifizierte Auszahlungsfunktion ist

(51.3) $M(x,w^{(\alpha)}) = c^{(\alpha)'} x - \sum_i (a_i^{(\alpha)'} x - b_i^{(\alpha)}) h_i^{(\alpha)}$.

Wieder kann man zwei Fälle berücksichtigen:

1) Die Verteilung $\bar{p}$ in (51.1) ist bekannt. Diese Annahme führt zu einer Risikosituation, die als unendliches Spiel gegen die Natur betrachtet werden kann:

(51.4) $[\bar{X};\ \{w^{(\alpha)}\}\ ;\ \bar{p}\ ;\ M(x,w^{(\alpha)})]$.

Das Bernoulli - Prinzip führt wieder zur Lösung; ähnlich wie in § 50 muß im allgemeinen der Supremum - Operator angewendet werden:

$$\sup_{X} E[M(x,w^{(\alpha)}); \bar{p}] .$$

Das algorithmische Verfahren ist hier recht schwierig. Eine approximative Lösung kann mittels des Diskretisierungsverfahrens erreicht werden.

2) Es ist nur eine LPI($\bar{p}$) bekannt. Das Entscheidungsmodell ist:

$$(51.5) \qquad \bar{G}[\bar{X}; \{w^{(\alpha)}\}; LPI(\bar{p}); M(x, w^{(\alpha)})].$$

Sei die der LPI($\bar{p}$) entsprechende Extremalpunkte-Menge $\{K_j\}$. Ihr entspricht die Wahrscheinlichkeitsvektoren-Menge $\{\bar{p}^{(j)}\}$. Jedem x wird wieder der ν-dimensionale Auszahlungsvektor $\bar{x} = (M(x, w^{(1)}), \ldots, M(x, w^{(\nu)}))$ zugeordnet.

Dann erfolgt, gemäß dem Max E_{min}-Prinzip, der Übergang von (51.5) zum Zweipersonen-Nullsummenspiel $\bar{\Gamma}$:

$$(51.6) \qquad \bar{\Gamma}[\bar{X}; \{\bar{p}^{(j)}\}; \bar{M} = (\bar{x}, p^{(j)})].$$

Darin ist die Auszahlungsfunktion $\bar{M}$ das Skalarprodukt der entsprechenden Vektoren $\bar{x}$ und $\bar{p}^{(j)}$.

Auf ähnliche Weise wie in § 50 erfolgt der Beweis für

<u>Satz 51.1</u>:

<u>Die Lösung des SLP (51.1) unter LPI-Bedingungen für den Zufallsvektor $w = (A, b, c)$ ist mit der Lösung des Spiels (51.6) für Spieler I äquivalent</u>.

Für den Algorithmus in (51.6) kann unter entsprechenden Voraussetzungen auch hier die Diskretisierungsmethode angewendet werden.

§ 52. Stochastische nichtlineare Programmierung unter LPI-Bedingungen

Die Modelle der stochastischen nichtlinearen Programmierung sind kompliziert. Wir wollen uns auf eine kurze Betrachtung der Anwendungsmöglichkeiten des Max E_{min}-Prinzips in solchen Modellen beschränken.

Das allgemeine Modell der nichtlinearen Programmierung lautet: Man maximiere die Funktion

(52.1) $f(x_1, \ldots, x_n)$ unter den Restriktionen

$$g_j(x_1, \ldots, x_n) \leq 0,\ j = 1, \ldots, m;\ x_i \geq 0,$$

$$i = 1, \ldots, n.$$

Im stochastischen Fall wird im allgemeinen zusätzlich vorausgesetzt, daß der Vektor w der Koeffizienten in f und g_j ein Zufallsvektor ist. Ein Spezialfall ist die stochastische quadratische Programmierung mit linearen Restriktionen

(52.2) $Ax \leq b,\ x \geq 0,\ Q(x) = c'x + x'Bx = \max;$

$$(A : m \times n;\ x : n \times 1;\ b : m \times 1;\ c : n \times 1;\ B : n \times n).$$

1) Im einfachen LPI-Fall sind A und b gegeben. Vektor $w^{(\alpha)} = (c^{(\alpha)}, B^{(\alpha)})$ ist ein diskreter Zufallsvektor unter LPI-Bedingungen. Die möglichen Zielfunktionen lauten $Q^{(\alpha)}(x) = c^{(\alpha)\prime}x + x'B^{(\alpha)}x,\ \alpha = 1, \ldots, \nu$.

Die Verteilung ρ über $Q^{(\alpha)}(x)$ sei nur partiell bekannt: Es liege eine LPI(ρ) vor. Ihr sei die Menge $\{\rho^{(j)}\}$ aller Extremalverteilungen $(j = 1, \ldots, k)$ zugeordnet. Sei

$X = \{x\}$ die Menge der in (52.2) zulässigen Programme. Jedem $x \in X$ entspricht der Zeilenvektor $[Q^{(\alpha)}(x)] = [Q^{(1)}(x), \ldots, Q^{(\nu)}(x)]$ aller möglichen Werte der Zielfunktion. Dann gilt folgender

Satz 52.1:

Zur optimalen Lösung x^* von (52.2) führt, gemäß dem Max E_{min}-Prinzip, das Maximin-Verfahren im unendlichen Spiel

$$(52.3) \quad [X; \{\rho^{(j)}\} ; ([Q^{(\alpha)}(x)], \rho^{(j)})] :$$

$$\max_{X} \min_{\{j\}} ([Q^{(\alpha)}(x)], \rho^{(j)})$$

$$= \min_{\{j\}} ([Q^{(\alpha)}(x^*)], \rho^{(j)}) .$$

Beweisskizze:

Jedem Strategienpaar $(x, \rho^{(j)})$ entspricht aufgrund des Max E_{min}-Prinzips als Auszahlung das Skalarprodukt von $[Q^{(\alpha)}(x)]$ und $\rho^{(j)}$. Im allgemeinen Fall eines unendlichen Spiels muß der Sup Inf-Operator angewendet werden. Im betrachteten Fall jedoch ist die Auszahlungsfunktion $([Q^{(\alpha)}(x)], \rho^{(j)})$ eine für jedes j im Bereich X bezüglich x stetige Funktion und der Bereich X konvex und kompakt. Die Extremalwerte werden also im Definitionsbereich realisiert. Daraus ergibt sich die Möglichkeit des Übergangs zum Max Min-Operator.
Im Gegensatz zu (49.3) muß hier über X maximiert werden, da eine Beschränkung auf die Extremalpunkte wegen der Nichtlinearität von $[Q^{(\alpha)}(x)]$ falsch wäre.

Die bekannten Algorithmen der quadratischen Programmierung [Henn, Künzi 1968] führen nicht zum Ziel. Eine approximative Lösung folgt aus der Diskretisierungsmethode.

Interessant sind die spieltheoretischen Folgerungen aus Satz 52.1, indem man das behandelte Modell aufgrund des Kuhn-Tucker-Theorems [Henn, Künzi 1968] als Zweipersonen-Nullsummenspiel mit entsprechenden stochastischen Elementen interpretiert; auf Einzelheiten wollen wir hier jedoch nicht eingehen.

2) Nun betrachten wir das allgemeine LPI-Problem:
$w^{(\alpha)} = (A^{(\alpha)}, b^{(\alpha)}, c^{(\alpha)}, B^{(\alpha)})$; $\alpha = 1,\dots,\nu$ sei in (52.2) ein Zufallsvektor unter LPI-Bedingungen. Hier sind die Schwierigkeiten größer, da eine gleichzeitige Änderung des Bereiches der zulässigen Programme und der Zielfunktion vorliegt. Es werden wieder zwei Fälle berücksichtigt:

a) Der einfache Fall $Z \succ E$ (Die Entscheidung folgt nach der Zufallsrealisation). Der Wert V des stochastischen Programms (52.2) mit einer LPI über $\{w^{(\alpha)}\}$ kann aufgrund des Max E_{min}-Prinzips folgendermaßen bestimmt werden:
Für jedes $w^{(\alpha)}$; $\alpha = 1,\dots,\nu$ wird der Wert $V^{(\alpha)}$, z.B. nach dem Beale-Verfahren, bestimmt [Henn, Künzi 1968]. Sei die der LPI entsprechende Extremalpunktemenge $\{K_j\}$ mit der Verteilungsmenge $(p_1^{(j)},\dots, p_\nu^{(j)})$; $j = 1,\dots, s$ äquivalent. Dann gilt offensichtlich

$$(52.4) \qquad V = \min_j \sum_{\alpha=1}^{\nu} p_\alpha^{(j)} V^{(\alpha)}.$$

b) Der Fall $E \succ Z$ ist um vieles komplizierter. Da es in (52.2) im allgemeinen zu gleichzeitigen Änderungen der Strategienmenge und der Zielfunktion kommt, muß man ein Verfahren wie im § 50 anwenden. Nach der Einführung einer entsprechenden Straffunktion wird das Modell (52.2) zu einem unendlichen Spiel, dessen Lösung im allgemeinen Fall recht schwierig ist. Eine approximative Lösung läßt sich wie in (50.9) bei Voraussetzung der Stetigkeit der Zielfunktion mittels einer entsprechenden Diskretisierung bestimmen.

§ 53. Stochastische dynamische Programmierung

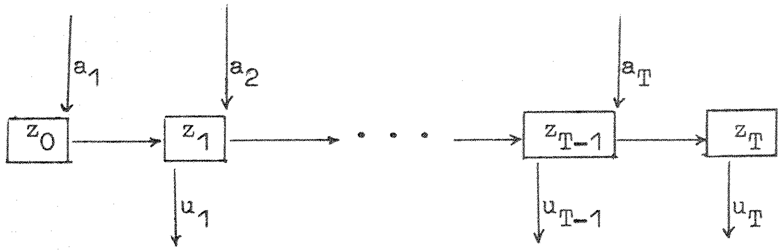
Im sogenannten allgemeinen deterministischen Modell betrachtet man T Zeitperioden, (T + 1) Zustände z_ν($\nu = 0,1,\dots,T$; z_0, z_T heißen Anfangs- bzw. Endzustand), endliche Aktionsmengen R_t, Stufenauszahlungen $u_t (t = 1,\dots, T)$.
Es bestehen folgende Beziehungen und Funktionen:

(53.1) $a_t \in R_t;\ R_t(z_{t-1});\ u_t(z_{t-1}, a_t);\ z_t = g(z_{t-1}, a_t);$

$t = 1,\dots, T.$

Bei gegebenem z_0 und Funktionen in (53.1) hat der Entscheidungsprozeß folgenden Verlauf:
Der Entscheidende wählt die Aktion $a_1 \in R_1(z_0)$.
Es folgt die Stufenauszahlung $u_1(z_0, a_1)$. Die Funktion g_1 führt zum Zustand $z_1 = g_1(z_0, a_1)$. Der Entscheidende wählt $a_2 \in R_2(z_1)$ usw. Schließlich erfolgt die Endauszahlung $u_T(z_{T-1}, a_T)$. Die graphische Darstellung dieses Prozesses ist:

(53.2)



Die Aufgabe der deterministischen dynamischen Programmierung lautet:
Bei gegebenem z_0 und den Funktionen R_t, u_t, z_t $(t = 1, \ldots, T)$ maximiere man $U(a_1, \ldots, a_T) = \sum_{t=1}^{T} u_t(z_{t-1}, a_t)$.

Die Lösung $(a_1^*, \ldots, a_T^*)$ heißt optimale dynamische Steuerung. Sie bildet eine optimale Entscheidungsfolge. Der Übergang vom deterministischen zum diskreten stochastischen Modell erfolgt, indem man die Auszahlungen u_t und/oder die Übergänge von z_{t-1} zu z_t als stochastisch mit gegebenen diskreten Verteilungen betrachtet. Auf diese Weise gelangt man zu Risikosituationen. Wir behandeln hier den Fall, in dem für alle t für beide Zufallsvariablen LPI vorliegen. Die Aufgabe ist, aufgrund des Max E_{min}-Prinzips die optimale Steuerung und den Wert des stochastischen dynamischen Programms zu bestimmen. Es läßt sich folgender Satz beweisen:

Satz 53.1:

Die Lösung des stochastischen dynamischen Programms (53.2) unter LPI-Bedingungen für die Zufallsvariablen u_t und z_t $(t = 1, \ldots, T)$ führt zur Lösung eines Zweipersonen-Nullsummenspiels.

Beweisskizze:

1) Das Modell (53.2) wird als ein endliches extensives Spiel gegen die Natur betrachtet. Es entspricht ihm ein endlicher Entscheidungsbaum mit vollständiger Information (die Informationsmengen enthalten nur einzelne Ecken).

2) Es erfolgt der Übergang zur Normalform: Die Menge $\hat{X} = \{\hat{x}\}$ der globalen Strategien des Entscheidungsträgers wird wie üblich bestimmt. Zur Bestimmung der Menge $\hat{Y} = \{\hat{y}\}$ der globalen Strategien der Natur führt ein etwas längerer Weg. Alle Zufallsvariablen u_t, $z_t (t = 1, \ldots, T)$ werden als Komponenten des diskreten zusammengesetzten Zufallsvektors $\hat{Z} = (u_1, \ldots, u_T, z_1, \ldots, z_T)$ betrachtet. Die Menge aller möglichen Zustände von $\hat{Z}$ ist mit der Strategienmenge der Natur $\hat{Y}$ äquivalent. Jedem Strategienpaar $(\hat{x}, \hat{y})$ entspricht eindeutig ein Ast des Baumes. Die zugeordnete Auszahlung $M(\hat{x}, \hat{y})$ wird dadurch bestimmt, daß die entsprechenden minimalen Auszahlungen dem Ast entlang addiert werden, gemäß der Minimalforderung des Max E_{min}-Prinzips.

3) Bei Annahme der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $u_1, \ldots, u_T, z_1, \ldots, z_T$ folgt aufgrund des Satzes 20.1 die Existenz einer aus den Komponenten $LPI(u_1), \ldots, LPI(z_T)$ resultierenden $LPI(\hat{Z})$. Auf diese Weise erhält man die Normalform

$$(53.3) \qquad [\hat{X} = \{\hat{x}\}; \; \hat{Y} = \{\hat{y}\}; \; LPI(\hat{Z}); \; M(\hat{x}, \hat{y})].$$

4) Da (53.3) als eine übliche Entscheidungssituation unter LPI-Bedingungen betrachtet werden kann, erfolgt aufgrund des Max E_{min}-Prinzips der Übergang zum entsprechenden Zweipersonen-Nullsummenspiel, w.z.b.w.

Satz 53.1 beweist die Existenz einer optimalen Lösung und liefert gleichzeitig ein Verfahren, das zu ihrer effektiven Bestimmung führt. Ähnlich wie in anderen mehrstufigen Entscheidungen ist allerdings die Roll-back-Methode einfacher anzuwenden. Gemäß dem Max E_{min}-Prinzip muß die Reduktion des Entscheidungsbaumes mit einer Minimisierung der entsprechenden Nutzenerwartungswerte verbunden sein.

§ 54. Markoffsche Ketten unter LPI-Bedingungen

Bekanntlich [Menges 1972] betrachtet man stochastische Prozesse als einfache Markoffsche Ketten, wenn der Ausgang eines beliebigen i-ten Versuchs allein den Ereignisraum des nächsten (i+1)-ten Versuchs und sein Wahrscheinlichkeitsmaß bestimmt. Im weiteren werden nur endliche Markoffsche Ketten betrachtet. Es sei vorausgesetzt, daß alle Versuche denselben endlichen Ereignisraum $E = \{A_1, \ldots, A_n\}$ haben.

Wir führen Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} ein:
$p_{ij} = P(A_j \mid A_i)$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit des Übergangs von A_i zu A_j.

Von wesentlicher Bedeutung in einer Markoffschen Kette ist die Bestimmung des Anfangszustandes A_{i_0} und seiner Wahrscheinlichkeit $P(A_{i_0}) = p_{i_0}$.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden gewöhnlich in Matrizenform angegeben.

(54.1)
$$\begin{array}{c|c} \text{nach} \atop \text{von} & A_1 \quad \cdots \quad A_n \\ \hline \begin{matrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \end{array} = P^{(n)}$$

Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten $P^{(n)}$ besitzt offensichtlich folgende beiden Eigenschaften:

1) $0 \leq p_{ij} \leq 1$; $i = 1,\ldots, n$; $j = 1,\ldots, n$;

2) $\forall i: \sum_j p_{ij} = 1$.

Die Eigenschaften 1) und 2) bedingen eine sogenannte stochastische Matrix. Im weiteren wird $P^{(n)}$ stochastische Übergangsmatrix genannt. Bei bekannter Wahrscheinlichkeit des Anfangszustandes A_{i_0} und gegebener Matrix $P^{(n)}$ kann für jede Kette

(54.2) $$K_\nu : A_{i_0} \longrightarrow A_{i_1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_{i_\nu}$$

$$(A_{i_0}, \ldots, A_{i_\nu} \in \{A_1, \ldots, A_n\})$$

die Realisationswahrscheinlichkeit der Kette $P(K_\nu)$ ermittelt werden. Aus der Annahme der Unabhängigkeit der entsprechenden Ereignisse folgt

(54.3) $$P(K_\nu) = P(A_{i_0}) \cdot P(A_{i_1} \mid A_{i_0}) \cdots P(A_{i_\nu} \mid A_{i_{\nu-1}})$$

$$= p_{i_0} \cdot p_{i_0 i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_{\nu-1} i_\nu} .$$

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:
$r^{(0)}$ sei die Verteilung der möglichen Anfangszustände A_{i_0} , $r^{(i)}$ die der i-ten Zeile der stochastischen Übergangsmatrix entsprechende Verteilung $(i = 1,\ldots, n)$. Die Markoffsche Kette K_ν ist also gegeben, wenn folgende Angaben vorliegen:

(54.4) $E = \{A_1, \ldots, A_n\};\ r^{(0)};\ r^{(1)}, \ldots, r^{(n)};\ \nu$.

Diese Angaben sind für die stochastische Bestimmung der Kette K_ν hinreichend aufgrund des folgenden Verfahrens:

1) Die Verteilung $r^{(0)}$ über E ermittelt (stochastisch) den Anfangszustand A_{i_0} .

2) Aufgrund der Verteilungen $r^{(1)}, \ldots, r^{(n)}$ folgt die allmähliche Kettenkonstruktion.

3) Es werden $(\nu + 1)$ Kettenglieder (einschließlich des Anfangsglieds) berücksichtigt.

Wir wollen den LPI-Fall betrachten. In praktischen mehrstufigen Entscheidungen liegt oft keine vollständige Information über die Verteilungen $r^{(0)}, r^{(1)}, \ldots, r^{(n)}$ vor. Wir führen folgende Definitionen ein:

<u>Def. 54.1</u>:

<u>Eine stochastische Übergangsmatrix $P^{(n)}$ unter LPI-Bedingungen liegt vor, wenn mindestens eine der Verteilungen $r^{(1)}, \ldots, r^{(n)}$ mit einer LPI verbunden ist.</u>

<u>Def. 54.2</u>:

<u>Eine endliche Markoffsche Kette unter LPI-Bedingungen liegt vor, wenn mindestens eine der Verteilungen $r^{(0)}, r^{(1)}, \ldots, r^{(n)}$ mit einer LPI verbunden ist.</u>

Es gibt also LPI-Markoffsche Ketten mit bekannter Verteilung $r^{(0)}$ für den Anfangszustand und auch solche, für die $r^{(0)}$ mit einer LPI verbunden ist.

Beispiele:

1) $E = \{A_1, A_2\}$; $P^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$; $r^{(0)} = (p_1, p_2)$;

$$LPI(r^{(0)}): p_1 \leq p_2 \; .$$

$$\nu = 5; \; K_5 : A_{i_0} \to A_{i_1} \to A_{i_2} \to A_{i_3} \to A_{i_4} \to A_{i_5} \; .$$

2) $E = \{A_1, A_2, A_3\}$; $r^{(0)} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$;

$$P^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \; ; \quad LPI(r^{(3)}) : q_1 \leq q_2 \leq q_3$$

$$\nu = 4; \quad K_4 : A_{i_0} \to A_{i_1} \to A_{i_2} \to A_{i_3} \to A_{i_4} \; .$$

Die Beziehung (54.3) beweist, daß mit bekannten Verteilungen $r^{(0)}, r^{(1)}, \ldots, r^{(n)}$ die Verteilung aller möglichen Realisationen der Markoffschen Kette K_ν bestimmt ist. Diese Verteilung wollen wir im weiteren Realisationsverteilung einer endlichen Markoffschen Kette nennen.

Satz 54.1:

Die Realisationsverteilung einer endlichen Markoffschen Kette K_ν unter LPI-Bedingungen ist mit einer LPI verbunden.

Beweis:

Es genügt, Satz 20.2 über LPI-Bedingungen für einen Zufallsvektor im allgemeinen Fall (ohne Unabhängigkeitsannahme) anzuwenden. Hier handelt es sich um einen Zufallsvektor mit $(\nu + 1)$ Komponenten, die den Gliedern der Kette K_ν entsprechen. Die Verteilungen $r^{(1)}, \ldots, r^{(n)}$ sind gemäß der Definition einer einfachen Markoffschen Kette die einzigen bedingten Wahrscheinlichkeiten der Kette. Die entsprechenden LPI für $r^{(0)}, r^{(1)}, \ldots, r^{(n)}$ determinieren also gemäß Satz 20.2 die Existenz einer LPI für die Realisationsmöglichkeiten des Zufallsvektors, also für die Verlaufsmöglichkeiten der Kette K_ν.

Der Beweis läßt sich auch unmittelbar wie folgt durchführen. Die Anzahl möglicher Realisationen $\left\{ A_{i_0} \to A_{i_1} \to \ldots \to A_{i_\nu} \right\}$ der Kette K_ν gleicht offenbar der Anzahl der Variationen mit Wiederholung von n Elementen zur $(\nu+1)$-ten Klasse: ${}^{w}V_n^{\ \nu+1} = n^{\nu+1}$. Die Wahrscheinlichkeit jeder Realisation wird aufgrund der Verteilungen

$$(54.5) \quad r^{(\lambda)} = (p_1^{(\lambda)}, \ldots, p_n^{(\lambda)}); \ \lambda = 0,1,\ldots, n$$

als Produkt von $(\nu+1)$entsprechenden Komponenten aus (54.5) bestimmt. Auf diese Weise erhalten wir die Realisationsverteilung der Kette K_ν : $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{n^{\nu+1}})$.

Aus den bekannten $LPI(r^{(\lambda)})$ $\lambda = 0,1,\ldots, n$ erhält man mittels entsprechender Produkte aus Ungleichungen der $LPI(r^{(\alpha)})$ alle Aufschlüsse über die Komponenten ω_α. Diese Aufschlüsse determinieren die $LPI(\omega)$, also die LPI der Realisationsverteilung der Kette K_ν.

Das Beweisverfahren ändert sich nicht, wenn nur gewisse Verteilungen von $\{r^{(\alpha)}\}$ mit LPI verbunden sind.

Beispiel:

$E = \{A_1, A_2\}$; $\nu = 2$; $r^{(0)} = (\alpha_1, \alpha_2)$; $r^{(1)} = (\beta_1, \beta_2)$;

$r^{(2)} = (\gamma_1, \gamma_2)$; $LPI(r^{(0)})$: $\alpha_1 \geq \alpha_2$; $LPI(r^{(1)})$: $\beta_1 \geq \beta_2$;

$LPI(r^{(2)})$: $\gamma_1 \geq \gamma_2$; $n^{\nu+1} = 8$.

$\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_8)$; $\omega_1 = \alpha_1\beta_1^2$, $\omega_2 = \alpha_1\beta_1\beta_2$,

$\omega_3 = \alpha_1\beta_2\gamma_1$, $\omega_4 = \alpha_1\beta_2\gamma_2$, $\omega_5 = \alpha_2\gamma_1\beta_1$, $\omega_6 = \alpha_2\gamma_1\beta_2$,

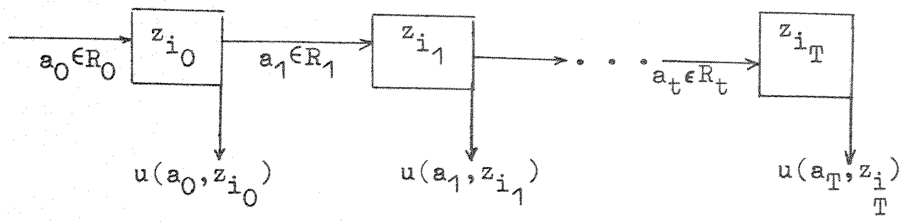
$\omega_7 = \alpha_2\gamma_2\gamma_1$, $\omega_8 = \alpha_2\gamma_2^2$.

Aus den $LPI(r^{(\alpha)})$ erhalten wir aufgrund der Produkte der entsprechenden Ungleichungen:

$LPI(\omega)$: $\omega_1 \geq \omega_2$; $\omega_3 \geq \omega_4$; $\omega_5 \geq \omega_6$; $\omega_7 \geq \omega_8$.

Als Anwendung des Satzes 54.1 wollen wir folgenden besonderen Fall der stochastischen dynamischen Programmierung des § 53 behandeln. Es werden $(T + 1)$ Zeitperioden berücksichtigt. Am Anfang jeder Zeitperiode $t(t = 0,1,\ldots, T)$ wählt der Entscheidungsträger eine Aktion a_t aus der entsprechenden diskreten Aktionsmenge R_t, darauf folgt am Ende der Zeitperiode ein Zustand (Situation) z_{i_t} und eine Auszahlung $u_t = u(a_t, z_{i_t})$ als Funktion der gewählten Aktion und des folgenden Zustandes. Es sei vorausgesetzt, daß die Zustandsfolge eine einfache Markoffsche Kette bildet und von den Aktionen des Entscheidungsträgers unabhängig ist.

Die graphische Darstellung dieser mehrstufigen Entscheidung ist:



Jeder Vektor $\bar{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_T)$ mit $a_t \in R_t$ $(t = 0, \ldots, T)$ wird als Strategie des Entscheidungsträgers betrachtet. Ihr entspricht, bei gegebener Realisation der Markoffschen Kette K_T die Auszahlung $U(\bar{a}, K_T)$ als Summe der Teilauszahlungen:

$$(54.6) \quad U(\bar{a}, K_T) = \sum_{t=0}^{T} u(a_t, z_{i_t}).$$

Wir wollen zwei Fälle berücksichtigen:

a) Gegeben seien die diskreten Aktionsmengen R_t und die Markoffsche Kette $K_T : z_{i_0} \to z_{i_1} \to \ldots \to z_{i_T}$. Es liegt also die Zustandsmenge $\{z_1, \ldots, z_n\}$, die Verteilung $r^{(0)}$ für den Anfangszustand z_{i_0}, die stochastische Übergangsmatrix $P^{(n)} = [p_{ij}]$ und die Anzahl von Kettengliedern $(T + 1)$ vor.

Dieser Fall entspricht offenbar einem endlichen extensiven Spiel gegen die Natur bei vollständiger Information über die Verteilung der Zustände. Die Lösung erhält man also nach dem Übergang zur Normalform als Lösung einer Risikosituation. Es muß das Bernoulli-Prinzip angewendet werden. In praktischen Beispielen jedoch liegen oft keine vollständigen Informationen über die Markoffsche Kette $K_T : z_{i_0} \to \ldots \to z_{i_T}$ vor.

Wir betrachten z.B. den LPI-Fall:

b) In (54.6) liegt die Markoffsche Kette K_T nur unter LPI-Bedingungen vor. Gemäß Definition 54.2 ist also mindestens eine der Verteilungen $r^{(0)}, r^{(1)}, \ldots, r^{(n)}$ mit einer LPI verbunden.
Es gilt folgender Satz:

Satz 54.2:

Das Problem der stochastischen dynamischen Programmierung unter LPI-Bedingungen für die entsprechende Markoffsche Kette hat, gemäß dem Max E_{min}-Prinzip, mindestens eine optimale Lösung.

Beweis:

1) Das betrachtete Modell wird als extensives Spiel gegen die Natur mit endlichem Entscheidungsbaum betrachtet.

2) Es erfolgt ein Übergang zur Normalform. Die Menge $\{\bar{X}\}$ der globalen Strategien des Entscheidungsträgers wird wie üblich bestimmt. Die Strategienmenge der Natur ist mit der Menge $\{K_T\}$ aller möglichen Realisationen der Markoffschen Kette äquivalent.

3) Jedem Strategienpaar $(\bar{X}, K_T)$ ist ein Ast des Baumes zugeordnet. Die entsprechende Auszahlung $U(\bar{X}, K_T)$ wird also gemäß (54.6) dadurch bestimmt, daß man dem Ast entlang die Auszahlungen $u(a_t, z_{i_t})$ summiert.

4) Aufgrund des Satzes 54.1 liegt für die Realisationsverteilung ω aller möglichen Ketten $\{K_T\}$ eine LPI(ω) vor.

5) Aus 1) - 4) folgt, daß die Normalform

$[\{\bar{X}\}; \{K_T\}; \text{LPI}(\omega); U(\bar{X}, K_T)]$

als übliche Entscheidung unter LPI-Bedingungen betrachtet werden kann. Nach dem Max E_{min}-Prinzip existiert also mindestens eine optimale Strategie X^*, w.z.b.w.

Die effektive Bestimmung der Lösung erfolgt auch hier nicht aufgrund der Normalform (algorithmisch schwierig), sondern mittels der Roll-back-Methode. Allerdings ist auch dieses Lösungsverfahren für größere T mit beträchtlichem Arbeitsaufwand verbunden.

§ 55. Stochastische Spiele

Wir betrachten folgendes Modell des stochastischen Spiels [Shapley 1953]: $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_r\}$ sei die Menge der komponenten Zweipersonen-Nullsummenspiele. In Γ_k ist die Strategienmenge für I $(\alpha_1^k, \dots, \alpha_{m_k}^k)$, für II $(\beta_1^k, \dots, \beta_{n_k}^k)$. Die Auszahlungen sind

$$(55.1) \quad M^k(\alpha_i^k, \beta_j^k) = a_{ij}^k + (p_{ij}^{k_0} S, p_{ij}^{k_1} \Gamma_1, \dots, p_{ij}^{k_r} \Gamma_r)$$

$$\text{bei} \quad p_{ij}^{k_0} > 0; \; p_{ij}^{k_l} \geq 0, \; (l = 1, \dots, r);$$

$$\sum_{l=0}^{r} p_{ij}^{k_l} = 1.$$

Dem Strategienpaar (α_i^k, β_j^k) im Spiel Γ_k werden also die Auszahlung a_{ij}^k und zusätzlich ein Stop S im weiteren Spiel mit Wahrscheinlichkeit $p_{ij}^{k_0} > 0$ und die komponenten Spiele Γ_l mit Wahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{k_l}$ $(l = 1, \dots, r)$ zugeordnet. Mit $(\Gamma; \Gamma_k)$ bezeichnen wir das stochastische Spiel (55.1) das mit Γ_k beginnt. Der Vektor $(n; w_1^0, \dots, w_r^0)$ bedeutet, daß n-mal gespielt wurde und daß für das (n+1)-te

Spiel Γ_l Spieler I w_l^0 erhält $(l = 1,\dots, r)$. Im n-ten Spiel haben wir also die Auszahlung für Γ_k:

$$(55.2)\quad \bar{M}(\alpha_i^k, \beta_j^k) = a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{r} p_{ij}^{k_l} w_l^0 .$$

Dieses Verfahren kann rückwärts analysiert werden.
Wir definieren noch

$$(55.3)\quad w_\alpha^\gamma = \mathrm{Val}\ \Gamma_a\ (w_1^{\gamma-1},\dots, w_r^{\gamma-1})$$

$$(\alpha = 1,\dots, r\ ;\ \gamma = 1,\dots, n).$$

w_α^γ ist der aufgrund des Maximin-Prinzips bestimmte Wert (Value) des Spiels Γ_α beim Rückgang auf γ. Man kann auch eine Transformation T einführen mit

$$(55.4)\quad T(w_1,\dots, w_r) = [\mathrm{Val}\ \Gamma_1(w_1,\dots,w_r),\dots,$$

$$\mathrm{Val}\ \Gamma_r(w_1,\dots, w_r)].\ \text{Also:}$$

$$T(w_1^0,\dots, w_r^0) = (w_1^1,\dots, w_r^1);\ T^2(w_1^0,\dots, w_r^0 =$$

$$= T(w_1^1,\dots, w_r^1) = (w_1^2,\dots, w_r^2),\ \dots$$

$$T^n(w_1^0,\dots, w_r^0) = (w_1^n,\dots, w_r^n).$$

Shapley bewies [1953], daß

1) unabhängig von $(w_1^0,\dots, w_r^0)$ immer existiert:

$$(55.5)\quad \lim_{n\to\infty} T^n(w_1^0,\dots, w_r^0) = (w_1^*,\dots, w_r^*).$$

2) Das r-Tupel $(w_1^*, \ldots, w_r^*)$ das einzige ist, das

$$(55.6) \quad T(w_1^*, \ldots, w_r^*) = (w_1^*, \ldots, w_r^*)$$

erfüllt.
Man kann also $(w_1^*, \ldots, w_r^*)$ als einzige Lösung des Systems

$$(55.7) \quad w_k = \mathrm{Val}\ \Gamma_k(w_1, \ldots, w_r);\ k = 1, \ldots, r$$

betrachten.

3) Im stochastischen Spiel $(\Gamma; \Gamma_k)$ hat Spieler I eine maximinimale Strategie, die aus den maximinimalen Strategien in $\Gamma_k(w_1^*, \ldots, w_r^*)$; $k = 1, \ldots, r$ besteht.
Der Wert des Spiels $(\Gamma; \Gamma_k)$ ist für I gleich w_k^*.
Für Spieler II führt die minimaximale Strategie zu $-w_k^*$.

Jetzt wollen wir das Modell (55.1) ändern, indem wir die bekannten Verteilungen der Zufallsvariablen durch gegebene LPI ersetzen. Es ist offensichtlich, daß dieser Fall in der Praxis eine wesentliche Bedeutung haben kann. Über die Verteilungen $(p_{ij}^{k_0}, p_{ij}^{k_1}, \ldots, p_{ij}^{k_r})$ liegen also nur LPI vor, wobei immer $p_{ij}^{k_o} > 0$ gilt (positive Stop -Wahrscheinlichkeit, also mit $p = 1$ eine endliche Folge von Spielen). Aufgrund des Max E_{min}-Prinzips wollen wir jetzt die optimalen Strategien und den Wert des stochastischen Spiels $(\Gamma; \Gamma_k)$ bestimmen.
Unter den neuen Voraussetzungen gilt folgender modifizierter

Satz 55.1:

(55.8) 1) $\forall(w_1^0, \dots, w_r^0): \lim\limits_{n\to\infty} T^n_{\text{Max } E_{\min}} (w_1^0, \dots, w_r^0) =$

$= (w_1^*, \dots, w_r^*).$

2) Das r-Tupel ist das einzige, das die Gleichung

(55.9) $\quad T_{\text{Max } E_{\min}}(w_1^*, \dots, w_r^*) = (w_1^*, \dots, w_r^*)$

erfüllt, $(w_1^*, \dots, w_r^*)$ ist die einzige Lösung des Systems

(55.10) $\quad w_k = \text{Val}_{\text{Max } E_{\min}} \Gamma_k(w_1, \dots, w_r); \; k = 1, \dots, r.$

3) Im stochastischen Spiel $(\Gamma; \Gamma_k)$ unter LPI-Bedingungen hat Spieler I eine Max $E_{\min}$-Strategie, die aus den Max $E_{\min}$-Strategien in

(55.11) $\quad \Gamma_k(w_1^*, \dots, w_r^*); \; k = 1, \dots, r$

besteht.
Der Max $E_{\min}$-Wert des Spiels $(\Gamma; \Gamma_k)$ ist für Spieler I gleich w_k^*. Für Spieler II führt die Min $E_{\max}$-Strategie zu $-w_k^*$.

In (55.8) und (55.9) bezeichnet der Operator $T_{\text{Max } E_{\min}}$ die in (55.4) definierte Transformation T, bei der die entsprechenden Werte (Val) aufgrund des Max $E_{\min}$-Prinzips bestimmt werden. In (55.10) ist $\text{Val}_{\text{Max } E_{\min}}$ der Operator für die Wertbestimmung des Spiels aufgrund des Max $E_{\min}$-

Prinzips. Die Max E_{min}- und Min E_{max}-Strategien in (55.11) sind die aufgrund des Lösungskriteriums angewendeten optimalen Strategien des Spielers I bzw. II.

Der Beweis des Satzes verläuft analog zum Fall bekannter Verteilungen [Shapley 1953], wobei aber das Maximin-Prinzip durch das Max E_{min}-Prinzip ersetzt wird. Das algorithmische Verfahren stützt sich auf (55.10). Im allgemeinen kann nur eine approximative Lösung durch eine iterative Methode bestimmt werden.

§ 56. Sensitivitätsanalytische Untersuchungen in der stochastischen Programmierung unter LPI-Bedingungen

Wie bisher ist der Ausgangspunkt für die sensitivitätsanalytischen Untersuchungen in der stochastischen Programmierung unter LPI-Bedingungen der Entscheidungswert bzw. hier der Wert des betreffenden Programms. So führen die Sätze 50.1 und 51.1 zum Wert des stochastischen linearen Programms (SLP) unter LPI-Bedingungen für den Koeffizienten-Vektor c der Zielfunktion bzw. für den Vektor (A, b, c); Satz 52.1 ermittelt den Wert des stochastischen quadratischen Programms und Satz 53.1 den Wert des stochastischen dynamischen Programms. Die Sätze 54.2 und 55.1 gelten in Programmen Markoffscher Ketten bzw. stochastischer Spiele, in beiden Fällen unter LPI-Bedingungen.

Im Zusammenhang mit dem Wert des Programms ist folgende Tatsache zu beachten. Das Max E_{min}-Prinzip führt in allen behandelten Fällen zur Lösung. Die auf diese Weise bestimmten optimalen Strategien x^* müssen nicht eindeutig sein, wohingegen der Entscheidungswert $V(x^*)$, also der Wert des Programms, immer eindeutig ist in dem Sinn, daß $V(x^*)$ die größtmögliche Nutzenerwartung ist, die der Entscheidungsträger <u>mindestens</u> erreicht. Der Wert des Programms ist also im stochastischen Sinn gewährleistet und deshalb mit einem Grad der stochastischen Unbestimmtheit verbunden.

Die Sensitivität eines Programms wird immer im Sinn der Sensitivität des Wertes des Programms gegenüber möglichen Datenänderungen des Programms betrachtet. Daher sind sensitivitätsanalytische Untersuchungen immer mit der Bewertung von Informationsänderungen, also mit dem Informationswert verbunden. In den dynamischen Modellen führt die Bewertung der Informationsänderungen zum dynamischen Informationswert.
Hier ein Beispiel der Bestimmung des Informationswertes im Modell eines stochastischen linearen Programms (SLP) unter LPI-Bedingungen. Wir betrachten noch einmal das Beispiel (49.7). Die optimale Strategie ist hier
$x^* = (\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ und der Wert des Programms $z^{(1,2)}(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}) = 2\frac{4}{5}$.

Bei vollständiger Ignoranz über die Wahrscheinlichkeiten $P(z^{(1)})$ und $P(z^{(2)})$ ist die reduzierte Nutzenmatrix
$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3\frac{1}{3} & 2\frac{2}{3} \end{bmatrix}$. Das Maximin-Prinzip führt hier wieder im Bereich der gemischten Strategien zum Wert $2\frac{4}{5}$. In dem Fall können wir also behaupten, daß der Wert des Übergangs von vollständiger Ignoranz über die Verteilung der zwei möglichen Zielfunktionen zur LPI(ρ) $p_1 \leq p_2$ Null ist.

Das im §54 betrachtete Modell (54.6) ermöglicht die Bewertung von Informationsänderungen bezüglich der Markoffschen Kette unter LPI-Bedingungen. Wieder wird nur der entsprechende Zuwachs des Wertes des Programms in Betracht gezogen.

Im § 29 wurde das Problem der optimalen Informationsänderung (optimale Steuerung) in einer Entscheidungssituation erörtert. Der dynamische Fall wurde im § 43 betrachtet. Die Lösung dieses Problems ist gleichzeitig Antwort auf die Frage, welche Komponenten des Modells die größte Sensitivität besitzen. Im Bereich der mathematischen Programmierung, wie auch in praktischen Beispielen der stochastischen linearen, nicht linearen und dynamischen Programme ist diese Frage von wesentlicher Bedeutung. Allerdings können die behandelten Methoden nur dann angewendet werden, wenn die Menge aller möglichen Informationsänderungen vorliegt.

Im § 44 wurden Adaptionsprozesse in mehrstufigen Entscheidungen betrachtet. Es wurde auch der Begriff des Wertes eines Adaptionsprozesses eingeführt. Adaptionsprozesse finden eine wesentliche Anwendung in der stochastischen dynamischen Programmierung, in stochastischen Spielen, in dynamischen Entscheidungen mit Markoffschen Ketten, jeweils unter LPI-Bedingungen. Es handelt sich immer um die Berücksichtigung der gewonnenen zusätzlichen Informationen und um den entsprechenden Übergang vom bisher betrachteten optimalen Ast des Baumes zum neuen, der den neuen Informationen besser angepaßt ist. So können z.B. in dynamischen Entscheidungen mit Markoffschen Ketten unter LPI-Bedingungen die Adaptionsprozesse mit der Veränderung der LPI-Daten über die stochastische Übergangsmatrix verbunden sein. Der Wert des Adaptionsprozesses kann dann als entsprechender Zuwachs des Entscheidungswertes bestimmt werden.

Wieder ist zu beachten, daß sensitivitätsanalytische Untersuchungen im Bereich der in diesem Kapitel behandelten Programmierungsmodelle unter LPI-Bedingungen nur aufgrund des Max E_{min}-Prinzips möglich sind.

§ 57. Der Grad der stochastischen Unbestimmtheit des Entscheidungswertes in der LPI-Programmierung

Die in diesem Kapitel erörterten Methoden führen zur Bestimmung des Wertes behandelter Programme unter LPI-Bedingungen. Dieser Wert ist für den Entscheidungsträger immer stochastisch gewährleistet, allerdings nicht immer mit dem gleichen Grad der stochastischen Unbestimmtheit (SUE). Auch ist die LPI-Entropie in diesen Modellen verschieden.

Wir geben eine kurze Übersicht der in diesem Kapitel abgeleiteten Programmwerte vom Standpunkt der ihnen entsprechenden Grade der SUE aus. Es ist plausibel, daß bei der Bewertung von Programmen nicht nur der Programmwert, sondern auch der Grad der SUE in Betracht gezogen werden muß. Dabei ist gemäß (38.4) für den Grad der SUE einer Entscheidungssituation die Anzahl der Zustände der mit ihr äquivalenten Risikosituation ausschlaggebend. Aufgrund des Satzes 38.1 ändert sich dieser Grad nicht, wenn bei derselben Anzahl von Spalten für ihre Verteilung nur eine LPI vorliegt.

Wir beginnen mit dem stochastischen linearen Programm (48.2) bei LPI-Bedingungen für den Vektor $c^{(\alpha)}$; $\alpha = 1, \ldots, \nu$. Gemäß Satz 49.1 ist das Modell äquivalent mit dem Zweipersonen-Nullsummenspiel (49.4). Dabei ist s die Anzahl der Extremalverteilungen, die der gegebenen LPI über $c^{(\alpha)}$ entspricht. Aufgrund der Ergebnisse im § 38 ist der Grad der SUE dieses Modells im Bereich der reinen Strategien $G^{(s)}$ und im Bereich der gemischten Strategien $G^{(\mu,s)}$.

Ähnlich wird aufgrund des Satzes 50.1 der Grad der SUE bestimmt für den Fall, daß im SLP (48.2) LPI-Bedingungen für den Vektor $b^{(\alpha)}$; $\alpha = 1,\ldots,\nu$ vorliegen und nur der Bereich der reinen Strategien berücksichtigt wird. Hier ist der Grad wieder $G^{(s)}$.

Wegen der unendlichen Strategienmenge $\bar{X}$ in (50.8) ist die Bestimmung des Grades der SUE im Bereich der gemischten Strategien schwieriger. Wir beschränken uns auf die Approximation des Spiels mittels des in (50.9) angegebenen Diskretisierungsverfahrens. Mit l als Anzahl der berücksichtigten Strategien ist der Grad der SUE $G^{(sl)}$.

Im allgemeinen Fall der SLP mit LPI-Bedingungen für den Vektor $w^{(\alpha)} = (A^{(\alpha)}, b^{(\alpha)}, c^{(\alpha)})$; $\alpha = 1,\ldots,\nu$ wird der Grad der SUE auf analoge Weise bestimmt.

Wir erhalten für den Bereich der reinen Strategien wieder $G^{(s)}$ mit der Anzahl s von Extremalverteilungen für die entsprechende LPI. Hier kann s wegen der Zusammensetzung der Komponenten $A^{(\alpha)}$, $b^{(\alpha)}$, $c^{(\alpha)}$ in $w^{(\alpha)}$ im Vergleich mit den LPI-Fällen für $b^{(\alpha)}$ und $c^{(\alpha)}$ allerdings erheblich größer sein.

Dasselbe Verfahren kann man im Fall der quadratischen Programmierung mit linearen Restriktionen (52.2) anwenden. Satz 52.1 bestimmt den Grad der SUE im Bereich der reinen Strategien. Beim Übergang zu gemischten Strategien wird wieder das Diskretisierungsverfahren angewendet und der Satz 38.2 berücksichtigt.

Schließlich zur stochastischen dynamischen Programmierung unter LPI-Bedingungen. Zum Wert des Programms führt das

Spiel (53.3). Da die Zustandsmenge mit der Menge aller Zustände des Vektors $\hat{Z} = (z_1, \ldots, z_T, u_1, \ldots, u_T)$ äquivalent ist, muß die Anzahl $\hat{\nu}$ möglicher Zustände der einzelnen Komponenten berücksichtigt werden.

Sei $\hat{\nu}(z_i) = \xi_i$, $\bar{\nu}(u_i) = \eta_i$; $i = 1, \ldots, T$. Wegen der Unabhängigkeit der komponenten Zufallsvariablen folgt

$$\hat{\nu}(\hat{Z}) = \prod_{i=1}^{T} \xi_i \, \eta_i$$

und daraus, daß der Grad der SUE im betrachteten Modell

$$G^{\left(\prod_{i=1}^{T} \xi_i \eta_i\right)} \quad \text{ist.}$$

Dieses Ergebnis ist typisch für mehrstufige Entscheidungen. Der Grad der stochastischen Unbestimmtheit des Entscheidungswertes wächst beträchtlich mit der Anzahl der Stufen der Entscheidung. Für $\xi_i = \eta_1 = 2$; $i = 1, \ldots, T$ und $T = 5$ z.B. erreicht der Grad der SUE schon $G^{(20)}$.

Zum Abschluß betrachten wir noch den Grad der SUE im Modell der stochastischen dynamischen Programmierung mit einer Markoffschen Kette unter LPI-Bedingungen. Der Grad der SUE folgt aus der Anzahl aller möglichen Realisationen der Markoffschen Kette $K_\nu : A_{i_0} \rightarrow A_{i_1} \rightarrow \ldots \rightarrow A_{i_\nu}$.

Sie ist gleich $n^{\nu+1}$. Der Grad der SUE ist also $G^{(n^{\nu+1})}$.

Für $n = 5$, $\nu = 4$ z.B. ist der Grad der SUE $G^{(3125)}$, also eine stochastische Unbestimmtheit, die mit der Unbestimmtheit einer Risikosituation bei 3125 Zuständen äquivalent ist.

Es sei noch bemerkt, daß in den letzten zwei Fällen nur der Bereich der reinen Strategien berücksichtigt wurde.

§ 58. Weitere mögliche LPI-Betrachtungen in der stochastischen Programmierung

Ähnlich wie das sechste wollen wir auch dieses Kapitel mit weiteren möglichen LPI-Einsätzen in der stochastischen Programmierung abschließen.

1) Die Bestimmung der LPI-Bedingungen in stochastischen Programmen kann mit Stichprobenverfahren und mit statistischer Inferenz verbunden sein. Die abgeleiteten Sätze können dann als Sätze über entsprechende statistische Entscheidungsfunktionen betrachtet werden. Als Programmwert muß man dann ggf. einen vierdimensionalen Vektor in Betracht ziehen (optimale Strategie, Entscheidungswert, Grad der SUE, Konfidenzzahl). In dynamischen Programmen gelangt man auf diese Weise zu entsprechenden Sequential-Analysen (siehe Fußnote auf S.152).

2) In allen Betrachtungen können, ähnlich wie im § 28, LPI-Bedingungen mit offenen konvexen Polyedern eingeführt werden. Dabei kann auf diese Weise in manchen behandelten Programmen die optimale Lösung auf ϵ-optimale Strategien beschränkt sein.

3) In den sensitivitätsanalytischen Betrachtungen der erörterten Programme kann die Bewertung von A-priori- und A-posteriori-Informationen berücksichtigt werden.

4) In der stochastischen Programmierung unter LPI-Bedingungen können auch besondere Fälle stetiger Verteilungen behandelt werden.

5) Die Einführung entsprechender bedingter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht eine allgemeinere Betrachtung der LPI-Programmierung, indem man die Voraussetzung der Unabhängigkeit von entsprechenden Zufallsvariablen fallen läßt.

6) Die in diesem Kapitel betrachteten stochastischen Programme unter LPI-Bedingungen können auch, wie im § 34 gezeigt wurde, aufgrund modifizierter Hurwicz- und Hodges-Lehmann-Lösungsprinzipien oder auch aufgrund des Adaptionskriteriums (§16) behandelt werden.

Schlußwort

Zum Schlusse möchten wir noch ganz kurz die Probleme anreißen, die wir nicht behandelt haben, und angeben, welche davon wir zukünftig zu behandeln beabsichtigen.

Als einen gewissen Mangel unseres Buches empfinden wir, daß wir nicht auf die empirische Herkunft der Nutzenfunktionen Rücksicht genommen haben. Unsere Theorie paßt direkt nur auf individuelle und nicht auf kollektive Entscheidungen, d.h. die ganze inzwischen ausgedehnte Social Choice Theory wurde vernachlässigt, ebenso wie die Probleme, die mit dem sog. Arrow-Paradoxon zusammenhängen. Die Lösung dieser Fragen überlassen wir anderen, z.B. Heinz J. Skala, der das Material bereit hat, um eine grundlegende Wende in dieser Sparte herbeizuführen.

Wir sind auch nicht im einzelnen auf die wissenschaftstheoretischen Implikationen eingegangen, obgleich diese von uns im Prinzip aufgezeigt wurden [Menges-Kofler 1975] und obgleich der Inhalt des ganzen Buches wissenschaftstheoretisch interpretierbar ist, wenn man die Aktionen als kognitive auffaßt und die Nutzenfunktionen als sog. "epistemische Nutzenfunktionen". Der wissenschaftstheoretische Standort der LPI-Theorie selbst kann im Rahmen der objektiven Theorie des induktiven Verhaltens gesehen werden, welche ihrerseits unverträglich ist mit dem Wahrscheinlichkeitssubjektivismus und den Bestrebungen im Rahmen des sog. "integrierten Axiomensystems" (Savage).

Die Analogie der LPI-Theorie zur Theorie der weichen Modellbildung (H. Wold) haben wir zwar in §14 aufgezeigt, doch haben wir die beiden Theorien noch nicht vereinigt. Dies zu tun, schwebt uns indessen durchaus vor. Wenn es gelingt, wird besonders die Ökonometrie davon profitieren.

Sodann sind wir absichtlich nicht näher auf die statistischen Quellen der LPI-Information und sonstige statistische Implikationen eingegangen, obgleich wir diesen Fragen in §19 anläßlich der Erörterung der Bedeutung der LPI bei der Hypothesenprüfung und Prognose nahekamen. In einer in Vorbereitung befindlichen gemeinsamen Publikation mit dem Titel "Statistische Methoden bei partieller Information" werden jedoch die Probleme der statistischen Inferenz, die zu LPI-Informationen führen, im einzelnen untersucht. Insbesondere handelt es sich dabei um Probleme der Hypothesenprüfung, der Parameterschätzung und der Prognose, die als LPI-Probleme betrachtet werden. Dabei wird es notwendig, eine neue Komponente des Entscheidungswertes, eine Konfidenzzahl, einzuführen. Bei gewissen statistischen Inferenzen (z.B. bei der Hypothesenprüfung) muß der LPI-Begriff erweitert werden. Es wird der Begriff der LPI höherer Ordnung eingeführt (z.B. eine Verteilung über gewissen komplementären LPI). In weiteren Betrachtungen werden LPI-Einsätze in den für die heutige Praxis so wichtigen Monte Carlo-Methoden eingeführt. Auch Anwendungsmöglichkeiten von LPI-Methoden in einfachen ökonometrischen Modellen sollen dort erörtert werden.

Literaturverzeichnis

Adam, A.; Helten, E.; Scholl, F.: Kybernetische Modelle und Methoden. Opladen 1970.

Allais, M.: Le comportement de l'homme rationnel devant le risque. Critique des postulats et axiomes de l'école Américaine. Econometrica, 24 (1953), No.4, S.503-546.

Arrow, K.J.: A difficulty in the concept of social welfare. The Journal of Political Economy, 58 (1950), S.328-346.

Arrow, K.J.: Utilities, attitudes, choices. A review note. Econometrica, 26 (1958), S.1-23.

Arrow, K.J.: Individual Values and Social Choice. New York 1951, 2. Aufl. 1963.

Bayes, T.: An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. (Communicated by Mr. Price, in a Letter to John Canton, A.M., F.R.S.) Philosophical Transactions, 53 (1763), S. 376-398 u. 401-403 und 54 (1764), S. 298-310. (Deutsch: Versuch zur Lösung eines Problems der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Hrsg.: H.E. Timerding, Leipzig 1908). Wiederabgedruckt in: Biometrika, 45 (1958), S.296-315.

Bernoulli, D.: Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis. Commentarii Acad. Petrop., Bd.5, 1730/1731, S. 175-192.

Bernoulli, J.: Ars conjectandi, opus post humum. Accedit tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallice scripta de ludo pilae reticularis. Basel 1713.

Bernoulli, J.: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). Übers. von R. Haussner, Leipzig 1899.

Bernoulli, N.: Dissertatio inauguralis mathematico-juridica de usu artis conjectandi in jure, quam ... ad diem 14 junii a.d. 1709 ... publice defendet M. Nicolaus Bernoulli. Basel

X Blum, J.R.; Rosenblatt, J.: On partial a priori information in statistical inference. Ann. Math. Statist., 38 (1967), S.1671-1678.

Blyth, C.R.: On Simpson's paradox and the surething principle. Journal of the American Statistical Association, 67 (1972), S. 364 f.

Blyth, C.R.: Some probability paradoxes in choice from among random alternatives. Journal of the American Stat. Association, 67 (1972), S.365-373.

Bott, D.: Allgemeine und historische Betrachtungen zum Entscheidungsbegriff. Statistische Hefte, 3. Jg., 1962, Heft 1, S.1-38.

X Box, G.E.P.; Tiao, G.C.: Bayesian Inference in Statistical Analysis. Reading Mass. 1973.

Bühler, W.: Characterization of the extreme points of a class of special polyhedra. Zeitschrift für Operations Research, 19 (1975), S.131-137.

Bühlmann, W.; Loeffel, H.; Nievergelt, E.: Einführung in die Theorie und Praxis der Entscheidung bei Unsicherheit. Berlin - Heidelberg - New York 1969.

Cassidy, R.G.; Field, C.A.; Kirby, M.I.L.: Random Payoff Games with Partial Information: One Person Games against Nature. Revue Française d'Informatique et de Recherche Operationelle 5, No.3, 1971.

Chernoff, H.: Remarks on a Rational Selection of a Decision Function. Cowles Commission Discussion Paper, Statistics, 326 A (1949), S.1-17.

Chernoff, H.: Rational selection of decision functions. Econometrica, 22 (1954), S.422-443.

Dinkelbach, W.: Sensitivitätsanalysen und parametrische Programmierung. Berlin - Heidelberg - New York 1969.

Edwards, W.: The theory of decision making. Psychological Bulletin, 5 (1954), S.380-417.

Finetti, B. de: La Prévision: Ses Lois Logiques, Ses Sources Subjectives. Anales de L'Institut Henri Poincaré, 7 (1937), S. 1-68.

Finetti, B. de: Bayesianism: Its unifying role for both the foundations and applications of Statistics. International Statistical Review, 42 (1974), No.2, S.117-130.

Fishburn, P.C.: Decision and Value Theory. New York 1964.

Fishburn, P.C.: Independence in utility theory with whole product sets. Operations Research 13 (1965), S. 28-45.

Gäfgen, G.: Theorie der wirtschaftlichen Entscheidung. Untersuchungen zur Logik und ökonomischen Bedeutung des rationalen Handelns. 2. Aufl. Tübingen 1968.

Garstka, S.J.; Rutenberg, D.P.: Computation in discrete stochastic programs with recourse. Operations Research, 21 (1973), S.112-122.

Hagen, O.: A new axiomatization of utility under risk. Theorie a Metoda, VI/2 (1972), S.54-80.

Hauser, R.M.; Goldberger, A.S.: The treatment of unobservable variables in path analysis. In: Costner, H.L. (ed.): Sociological Methodology. Jossey-Bass, San Francisco 1971, S.81-117.

Hausner, M.: Multidimensional utilities. In: Decision processes. (Hrsg. R.M. Thrall, C.H. Coombs und R.L. Davis) New York 1954.

Henn, R.; Künzi, H.: Einführung in die Unternehmensforschung II. Berlin - Heidelberg - New York 1968.

Henry-Labordère, A.L.; Zerhouni, C.M.: Décision Bayesienne avec Information Incomplète. Metra 11 (1972).

Herstein, I.N.; Milnor, J.: An axiomatic approach to measurable utility. Econometrica, 21 (1953), S. 291-297.

Hodges, Jr., J.L.; Lehmann, E.L.: The Use of Previous Experience in Reaching Statistical Decisions. The Annals of Mathematical Statistics, 23 (1952), S.396-407.

Hurwicz, L.: Optimality Criteria for Decision Making Under Ignorance. Cowles Commission Discussion Paper, Statistics, 370 (1951).

Intriligator, M.D.: Mathematical Optimization and Economic Theory. London 1971.

Jackson, D.A.; O'Donovan, T.M.; Zimmer, W.J.; Deehy, J.J.: G_2-minimax estimates in the exponential family. Biometrica, 57 (1970), S.430-443.

Kofler, E.: Über den Informationswert. Dissertationes Universitatis Varsoviensis, Warschau 1968 (in polnischer Sprache).

Kofler, E.: Das Modell des Spiels in der wirtschaftlichen Planung. In: Mathematik und Wirtschaft, Bd.7, 1970, Berlin 1970.

Kofler, E.: Entscheidungen bei teilweise bekannter Verteilung der Zustände. Zeitschrift für Operations Research, 18.(1974), S.141-157.

Laplace, P.S. de: Théorie analytique des Probabilités. Paris 1812.

Luce, R.D.; Raiffa, H.: Games and Decisions. New York 1957.

Madansky, A.: Methods of solution of linear programs under uncertainty. Operations Revue, 10 (1962).

Majumdar, T.: The Measurement of Utility. London 1958.

Marschak, J.: Rational behaviour, uncertain prospects, and measurable utility. Econometrica, 18 (1950), S.111-141.

Marschak, J.: Prior and posterior probabilities and semantic information. In: Information, Inference and Decision (ed. by G. Menges), Dordrecht - Boston 1974, S.167-180.

Marschak, J.; Radner, R.: Economic Theory of Teams. New Haven 1972.

Meschkowski, H.: Mathematisches Begriffswörterbuch. Mannheim 1966.

Menges, G.: Kriterien optimaler Entscheidungen unter Ungewißheit. Statistische Hefte, 4 (1963), S. 151-171.

Menges, G.: On the Bayesification of the minimax principle. Unternehmensforschung, 10 (1966), S. 81-91.

Menges, G.: Über ein Akkomodationsprinzip in der statistischen Entscheidungstheorie. Abhandl. der Deutschen Akad. der Wissensch., Berlin Jg. 1967a, Nr. 4, S.101-110.

Menges, G.: On Subjective Probability and Related Problems. Theory and Decision, an International Journal for Philosophy and Methodology of the Social Sciences, 1 (1970), S.40-60.

Menges, G.: Grundriß der Statistik. Teil 1: Theorie. 2. Aufl. Köln - Opladen 1972.

Menges, G.: Semantische Information und statistische Inferenz. Biometrische Zeitschrift, 14/6 (1972), S.409-418.

Menges, G.: Grundmodelle wirtschaftlicher Entscheidungen. 2. Aufl., Köln - Opladen 1974.

Menges, G.: Elements of an objective theory of inductive behaviour. In: Information, Inference and Decision. (ed. by G. Menges) Dordrecht - Boston 1974, S.3-49.

Menges, G.: Weiche Modelle in Ökonometrie und Statistik. Stat. Hefte, 16 (1975), S.144-156.

Menges, G.; Behara, M.: Einige grundsätzliche Betrachtungen über prozessuale Entscheidungen unter Ungewißheit. Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, 14 (1962), S.483-494.

Menges, G.; Diehl, H.: Entwicklung eines allgemeinen dynamischen Entscheidungsmodells. Stat. Hefte, 8 (1967), S.173-182.

Menges, G.; Jacke, B.: The scientist's utility function and the principle of maximum Likelihood. Stat. Hefte, 15 (1974), S.181-205.

Menges, G.; Skala, H.: Grundriß der Statistik. Teil 2: Daten. Ihre Gewinnung und Verarbeitung. Opladen 1973.

Menges, G.; Skala, H.: On the problem of vagueness in the social sciences. In: Information, Inference and Decision. (ed. by G. Menges) Dordrecht - Boston 1974, S.51-61.

Minkowski, H.: Geometrie der Zahlen. Leipzig 1895.

Morgan, B.W.: An Introduction to Bayesian Statstical Decision Processes. Englewood Cliffs 1968.

Neumann, J. v.; Morgenstern, O.: Theory of Games and Economic Behaviour. Princeton 1944, 2. Aufl. 1947.

Neymann, J.; Pearson, E.S.: On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A, 231 (1933), S.289-337.

Owen, G.: Spieltheorie. Berlin - Heidelberg - New York 1971.

Parthasaraty, T.; Raghavan, T.E.S.: Some Topics in Two-Person Games. New York 1971.

Puri, M.L.; Sen, P.K.: Nonparametric Methods in Multivariate Analysis. New York 1971.

Ramsey, F.P.: The foundations of Mathematics and other Logical essays. London 1931.

Randles, R.H.; Hollander, M.: Γ - minimax selection procedures in treatments versus control problems. Ann. Math. Statist., 42 (1971), S.330-341.

Savage, L.J.: The Foundations of Statistics. New York - London 1954.

Savage, L.J.: The theory of statistical decision. Journal of the American Stat. Association, 46 (1951), S.55-67.

Schneeweiß, H.: Eine Entscheidungsregel für den Fall bekannter Wahrscheinlichkeiten. Unternehmensforschung, 8 (1964), S.86-95.

Schneeweiß, H.: Entscheidungskriterien bei Risiko. Berlin - Heidelberg - New York 1967.

Schneeweiß, H.: Probability and utility - Dual concepts in decision theory. In: Information, Inference and Decision. (ed. by G. Menges) Dordrecht - Boston 1974, S.113-144.

Shapley, L.S.: A value for n-person games. In: Contributions to the theory of games. Bd.2, Hrsg.: H.W. Kuhn und A.W. Tucker. Princeton (N.J.) 1953, S.307-317.

Solomon, D.L.: A minimax estimation of a multivariate location parameter. J. Am. Stat. Assoc., 67 (1972 a), S.641-646.

Solomon, D.L.: A minimax estimation of a scale parameter. J. Am. Stat. Assoc., 67 (1972 b), S.647-649.

Tintner, G.; Sengupta, J.K.: Stochastic Economics. New York 1972.

Tschuprow, A.: Ziele und Wege der stochastischen Grundlegung der statistischen Theorie. Nordisk Statistik Tidsskrift, 2 (1924), H.3/4.

Wald, A.: Contributions to the theory of statistical estimation and testing hypotheses. Annals of Mathematical Statistics, 10 (1939), S.299-326.

Wald, A.: Sequential Analysis. New York 1947.

Wald, A.: Statistical Decision Functions. New York 1950.

Watson, S.R.: On Bayesian inference with incompletely specified prior distributions. Biometrika, 61 (1974), S.193-196.

Wold, H.: Nonlinear Iterative Partial Least Squares (NIPALS) Modelling: Some Current Developments. No. 7 University Institute of Statistics, Gothenburg 1973.

Wold, H.: Path models with one or two latent variate aggregates. The NIPALS (Nonlinear iterative partial least squares) approach. Research Report 1974: 6, Statistika Institutionen. Göteborgs Universitet 1974.

Zadeh, L.A.: Fuzzy sets. Information and Control, 8 (1965), S.338-353.

Zellner, A.: An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics. New York 1971.

Register

Vol. 59: J. A. Hanson, Growth in Open Economies. V, 128 pages. 1971.

Vol. 60: H. Hauptmann, Schätz- und Kontrolltheorie in stetigen dynamischen Wirtschaftsmodellen. V, 104 Seiten. 1971.

Vol. 61: K. H. F. Meyer, Wartesysteme mit variabler Bearbeitungsrate. VII, 314 Seiten. 1971.

Vol. 62: W. Krelle u. G. Gabisch unter Mitarbeit von J. Burgermeister, Wachstumstheorie. VII, 223 Seiten. 1972.

Vol. 63: J. Kohlas, Monte Carlo Simulation im Operations Research. VI, 162 Seiten. 1972.

Vol. 64: P. Gessner u. K. Spremann, Optimierung in Funktionenräumen. IV, 120 Seiten. 1972.

Vol. 65: W. Everling, Exercises in Computer Systems Analysis. VIII, 184 pages. 1972.

Vol. 66: F. Bauer, P. Garabedian and D. Korn, Supercritical Wing Sections. V, 211 pages. 1972.

Vol. 67: I. V. Girsanov, Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems. V, 136 pages. 1972.

Vol. 68: J. Loeckx, Computability and Decidability. An Introduction for Students of Computer Science. VI, 76 pages. 1972.

Vol. 69: S. Ashour, Sequencing Theory. V, 133 pages. 1972.

Vol. 70: J. P. Brown, The Economic Effects of Floods. Investigations of a Stochastic Model of Rational Investment. Behavior in the Face of Floods. V, 87 pages. 1972.

Vol. 71: R. Henn und O. Opitz, Konsum- und Produktionstheorie II. V, 134 Seiten. 1972.

Vol. 72: T. P. Bagchi and J. G. C. Templeton, Numerical Methods in Markov Chains and Bulk Queues. XI, 89 pages. 1972.

Vol. 73: H. Kiendl, Suboptimale Regler mit abschnittweise linearer Struktur. VI, 146 Seiten. 1972.

Vol. 74: F. Pokropp, Aggregation von Produktionsfunktionen. VI, 107 Seiten. 1972.

Vol. 75: GI-Gesellschaft für Informatik e.V. Bericht Nr. 3. 1. Fachtagung über Programmiersprachen · München, 9.–11. März 1971. Herausgegeben im Auftrag der Gesellschaft für Informatik von H. Langmaack und M. Paul. VII, 280 Seiten. 1972.

Vol. 76: G. Fandel, Optimale Entscheidung bei mehrfacher Zielsetzung. II, 121 Seiten. 1972.

Vol. 77: A. Auslender, Problèmes de Minimax via l'Analyse Convexe et les Inégalités Variationelles: Théorie et Algorithmes. VII, 132 pages. 1972.

Vol. 78: GI-Gesellschaft für Informatik e.V. 2. Jahrestagung, Karlsruhe, 2.–4. Oktober 1972. Herausgegeben im Auftrag der Gesellschaft für Informatik von P. Deussen. XI, 576 Seiten. 1973.

Vol. 79: A. Berman, Cones, Matrices and Mathematical Programming. V, 96 pages. 1973.

Vol. 80: International Seminar on Trends in Mathematical Modelling, Venice, 13–18 December 1971. Edited by N. Hawkes. VI, 288 pages. 1973.

Vol. 81: Advanced Course on Software Engineering. Edited by F. L. Bauer. XII, 545 pages. 1973.

Vol. 82: R. Saeks, Resolution Space, Operators and Systems. X, 267 pages. 1973.

Vol. 83: NTG/GI-Gesellschaft für Informatik, Nachrichtentechnische Gesellschaft. Fachtagung „Cognitive Verfahren und Systeme", Hamburg, 11.–13. April 1973. Herausgegeben im Auftrag der NTG/GI von Th. Einsele, W. Giloi und H.-H. Nagel. VIII, 373 Seiten. 1973.

Vol. 84: A. V. Balakrishnan, Stochastic Differential Systems I. Filtering and Control. A Function Space Approach. V, 252 pages. 1973.

Vol. 85: T. Page, Economics of Involuntary Transfers: A Unified Approach to Pollution and Congestion Externalities. XI, 159 pages. 1973.

Vol. 86: Symposium on the Theory of Scheduling and its Applications. Edited by S. E. Elmaghraby. VIII, 437 pages. 1973.

Vol. 87: G. F. Newell, Approximate Stochastic Behavior of n-Server Service Systems with Large n. VII, 118 pages. 1973.

Vol. 88: H. Steckhan, Güterströme in Netzen. VII, 134 Seiten. 1973.

Vol. 89: J. P. Wallace and A. Sherret, Estimation of Product. Attributes and Their Importances. V, 94 pages. 1973.

Vol. 90: J.-F. Richard, Posterior and Predictive Densities for Simultaneous Equation Models. VI, 226 pages. 1973.

Vol. 91: Th. Marschak and R. Selten, General Equilibrium with Price-Making Firms. XI, 246 pages. 1974.

Vol. 92: E. Dierker, Topological Methods in Walrasian Economics. IV, 130 pages. 1974.

Vol. 93: 4th IFAC/IFIP International Conference on Digital Computer Applications to Process Control, Part I. Zürich/Switzerland, March 19–22, 1974. Edited by M. Mansour and W. Schaufelberger. XVIII, 544 pages. 1974.

Vol. 94: 4th IFAC/IFIP International Conference on Digital Computer Applications to Process Control, Part II. Zürich/Switzerland, March 19–22, 1974. Edited by M. Mansour and W. Schaufelberger. XVIII, 546 pages. 1974.

Vol. 95: M. Zeleny, Linear Multiobjective Programming. X, 220 pages. 1974.

Vol. 96: O. Moeschlin, Zur Theorie von Neumannscher Wachstumsmodelle. XI, 115 Seiten. 1974.

Vol. 97: G. Schmidt, Über die Stabilität des einfachen Bedienungskanals. VII, 147 Seiten. 1974.

Vol. 98: Mathematical Methods in Queueing Theory. Proceedings 1973. Edited by A. B. Clarke. VII, 374 pages. 1974.

Vol. 99: Production Theory. Edited by W. Eichhorn, R. Henn, O. Opitz, and R. W. Shephard. VIII, 386 pages. 1974.

Vol. 100: B. S. Duran and P. L. Odell, Cluster Analysis. A Survey. VI, 137 pages. 1974.

Vol. 101: W. M. Wonham, Linear Multivariable Control. A Geometric Approach. X, 344 pages. 1974.

Vol. 102: Analyse Convexe et Ses Applications. Comptes Rendus, Janvier 1974. Edited by J.-P. Aubin. IV, 244 pages. 1974.

Vol. 103: D. E. Boyce, A. Farhi, R. Weischedel, Optimal Subset Selection. Multiple Regression, Interdependence and Optimal Network Algorithms. XIII, 187 pages. 1974.

Vol. 104: S. Fujino, A Neo-Keynesian Theory of Inflation and Economic Growth. V, 96 pages. 1974.

Vol. 105: Optimal Control Theory and its Applications. Part I. Proceedings 1973. Edited by B. J. Kirby. VI, 425 pages. 1974.

Vol. 106: Optimal Control Theory and its Applications. Part II. Proceedings 1973. Edited by B. J. Kirby. VI, 403 pages. 1974.

Vol. 107: Control Theory, Numerical Methods and Computer Systems Modeling. International Symposium, Rocquencourt, June 17–21, 1974. Edited by A. Bensoussan and J. L. Lions. VIII, 757 pages. 1975.

Vol. 108: F. Bauer et al., Supercritical Wing Sections II. A Handbook. V, 296 pages. 1975.

Vol. 109: R. von Randow, Introduction to the Theory of Matroids. IX, 102 pages. 1975.

Vol. 110: C. Striebel, Optimal Control of Discrete Time Stochastic Systems. III. 208 pages. 1975.

Vol. 111: Variable Structure Systems with Application to Economics and Biology. Proceedings 1974. Edited by A. Ruberti and R. R. Mohler. VI, 321 pages. 1975.

Vol. 112: J. Wilhlem, Objectives and Multi-Objective Decision Making Under Uncertainty. IV, 111 pages. 1975.

Vol. 113: G. A. Aschinger, Stabilitätsaussagen über Klassen von Matrizen mit verschwindenden Zeilensummen. V, 102 Seiten. 1975.

Vol. 114: G. Uebe, Produktionstheorie. XVII, 301 Seiten. 1976.

Vol. 115: Anderson et al., Foundations of System Theory: Finitary and Infinitary Conditions. VII, 93 pages. 1976

Vol. 116: K. Miyazawa, Input-Output Analysis and the Structure of Income Distribution. IX, 135 pages. 1976.

Vol. 117: Optimization and Operations Research. Proceedings 1975. Edited by W. Oettli and K. Ritter. IV, 316 pages. 1976.

Vol. 118: Traffic Equilibrium Methods, Proceedings 1974. Edited by M. A. Florian. XXIII, 432 pages. 1976.

Vol. 119: Inflation in Small Countries. Proceedings 1974. Edited by H. Frisch. VI, 356 pages. 1976.

Vol. 120: G. Hasenkamp, Specification and Estimation of Multiple-Output Production Functions. VII, 151 pages. 1976.

Vol. 121: J. W. Cohen, On Regenerative Processes in Queueing Theory. IX, 93 pages. 1976.

Vol. 122: M. S. Bazaraa, and C. M. Shetty,Foundations of Optimization VI. 193 pages. 1976

Vol. 123: Multiple Criteria Decision Making. Kyoto 1975. Edited by M. Zeleny. XXVII, 345 pages. 1976.

Vol. 124: M. J. Todd. The Computation of Fixed Points and Applications. VII, 129 pages. 1976.

Vol. 125: Karl C. Mosler. Optimale Transportnetze. Zur Bestimmung ihres kostengünstigsten Standorts bei gegebener Nachfrage. VI, 142 Seiten. 1976.

Vol. 126: Energy, Regional Science and Public Policy. Energy and Environment I. Proceedings 1975. Edited by M. Chatterji and P. Van Rompuy. VIII, 316 pages. 1976.

Vol. 127: Environment, Regional Science and Interregional Modeling. Energy and Environment II. Proceedings 1975. Edited by M. Chatterji and P. Van Rompuy. IX, 211 pages. 1976.

Vol. 128: Integer Programming and Related Areas. A Classified Bibliography. Edited by C. Kastning. XII, 495 pages. 1976.

Vol. 129: H.-J. Lüthi, Komplementaritäts- und Fixpunktalgorithmen in der mathematischen Programmierung. Spieltheorie und Ökonomie. VII, 145 Seiten. 1976.

Vol. 130: Multiple Criteria Decision Making, Jouy-en-Josas, France. Proceedings 1975. Edited by H. Thiriez and S. Zionts. VI, 409 pages. 1976.

Vol. 131: Mathematical Systems Theory. Proceedings 1975. Edited by G. Marchesini and S. K. Mitter. X, 408 pages. 1976.

Vol. 132: U. H. Funke, Mathematical Models in Marketing. A Collection of Abstracts. XX, 514 pages. 1976.

Vol. 133: Warsaw Fall Seminars in Mathematical Economics 1975. Edited by M. W. Loś, J. Loś, and A. Wieczorek. V. 159 pages. 1976.

Vol. 135: H. Haga, A Disequilibrium – Equiligrium Model with Money and Bonds. A Keynesian – Walrasian Synthesis. VI, 119 pages. 1976.

Vol. 136: E. Kofler und G. Menges, Entscheidungen bei unvollständiger Information. XII, 357 Seiten. 1976.